УДК 330.43

О.М. Назаренко, П.Ю. Поляков

Математичне моделювання макроекономічних систем зі змінною структурою

Запропоновано підхід до специфікації та ідентифікації макроекономічної моделі зі змінною структурою. Апробація побудованих алгоритмів проведена на реальних статистичних даних макроекономічної динаміки. Отримана модель зі змінною структурою продемонструвала більш високі імітаційні, прогнозні та робастні властивості порівняно з аналогічною моделлю зі сталою структурою.

Ключові слова: циклічні процеси, змінна структура, релейні керування, параметрична ідентифікація, кусково-лінійна регресія, сплайн-функція.

Вступ і постановка проблеми

Математичне моделювання в галузі економіки має широке прикладне значення і є одним з основних інструментів, що використовуються при аналізі економічних зв'язків, прогнозуванні, керуванні економічними об’єктами. Одним з основних його завдань є аналіз статистичних даних і наступна ідентифікація системи (визначення структури та параметрів системи за спостереженнями) з метою імітації, прогнозування або оптимізації майбутніх станів системи.

Економічні процеси, як і будь-які інші (механічні, фізичні, біологічні) описуються системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(\tau)=f(x(\tau),\ u(\tau)\mid\theta_1),\ x(\tau_0)=x_0,\ \ \tau\in(\tau_0,\ \tau_f].\tag{1}$$

Тут вектор-стовпець $\mathbf{x}(\tau)=(x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots,x_m(\tau))'$ характеризує фазовий стан, а вектор – стовпець керувань $\mathbf{u}(\tau)=(u_1(\tau),u_2(\tau),\ldots,u_m(\tau))'$– вхід динамічної системи; $\boldsymbol{\theta}_1$ – вектор сталих коефіцієнтів, заздалегідь невідомих.

Ключовою проблемою моделювання динамічної системи є ідентифікація та її практична ефективність. Економічні системи є слабоформалізованими [1] і тому потребують повної або часткової специфікації взаємозв’язків між входами, станами і виходами, а невідомі параметри моделі повинні оцінюватись методами економетрики.

Значне поширення отримав аналіз економічних процесів на основі моделей економічної динаміки з декількома ресурсами – так званих моделей економічного зростання (моделі Леонтьєва [1], Солоу [3, 4], Рамсея [5] тощо). Моделі подібного типу [6] використовуються для дослідження таких систем, як економіка країни в цілому, окрема галузь або регіон, оскільки наявність великої кількості складових елементів дозволяє моделювати стійкий розвиток таких систем і розглядати їх як сукупність однорідних об’єктів з точки зору прогнозування [7].

Моделі економічного зростання описуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Економічні моделі, які їм відповідають, містять сталі невідомі параметри на деякій множині даних і тому часто називаються економічними моделями зі сталою структурою.

Назаренко Олександр Максимович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету; *Поляков Павло Юрійович,* студент Сумського державного університету.

Як показують практичні дослідження, макроекономічним процесам властива циклічність. Фази підйому тут змінюються фазами спаду, після чого спостерігається зростання і т.д. Проходячи через точки піку й дна система може зазнавати якісних змін. Налаштування на новий режим роботи, як правило, супроводжується зміною параметрів функціонування. Економетричні моделі, в яких оцінюються змінні значення коефіцієнтів, називають моделями зі змінною структурою.

Зміна взаємозв'язків між складовими реального економічного процесу може бути обумовлена законом переходу кількості в якість, коли, наприклад, зі зростанням масштабів явищ модифікуються взаємозв'язки між ними. У такій ситуації модель зі сталою структурою, побудована на основі всього періоду $[\tau_0, \tau_k]$ $(\tau_k < \tau_f)$, може виявитися недостатньо точною і мало прийнятною для встановлення закономірностей досліджуваного процесу. Вона, у кращому разі, відобразить деякі усереднені за весь проміжок часу $[\tau_0, \tau_k]$ характеристики даного процесу, які, швидше за все, не будуть відповідати його закономірностям на останній стадії. Внаслідок цього використання моделей зі сталою структурою при розв'язанні прогнозних задач призводить до суттєвих похибок, яких можна було б уникнути, виходячи з моделі зі змінною структурою.

Отже, актуальною є побудова сильно агрегованої моделі макроекономічної динаміки зі змінними параметрами. В таких моделях як фазові координати застосовуються лише основні показники економічного розвитку: кінцевий продукт, основні виробничі фонди, інвестиції тощо. Економіко – математичний аналіз на основі розрахунків за сильно агрегованою моделлю зі змінними параметрами дає якісну та кількісну характеристики залежностей між основними економічними показниками і є першим етапом складання оптимального перспективного плану [8].

Зміна коефіцієнтів може мати стрибкоподібний вигляд. У цьому випадку робиться лише припущення, що на проміжках часу (τ_0, τ_1), $(\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_{k\text{-}1}, \tau_k)$ похідні $\dot{x}_1(\tau), \dot{x}_2(\tau), \dots, \dot{x}_m(\tau)$ пов'язані з незалежними факторами $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_m(\tau)$ лінійними залежностями, які відрізняються між собою значеннями коефіцієнтів. При цьому заміна цих значень відбувається стрибком у точках перетину названих інтервалів. Подібні моделі називаються моделями з переключеннями. Вони використовуються з метою апроксимації складних, невідомих заздалегідь залежностей послідовністю функцій вибраного класу. Таку послідовність лінійних моделей, які апроксимують складну залежність, називають кусково–лінійною моделлю.

При моделюванні макроекономічної системи виявити всі можливі зв'язки між її елементами практично неможливо. Тут закон руху (1) не може адекватно описувати динамічний процес, оскільки завжди будуть наявні невраховані фактори. Циклічність реального процесу вносить у поведінку системи комплексний нелінійний характер, що викликає необхідність залучення складних диференціальних залежностей в (1). У подібних ситуаціях доцільно використати допоміжну інформацію стосовно величин, які не наявні у рівняннях руху (1), але є невід'ємною частиною даної динамічної системи.

Допоміжною інформацією макроекономічної динаміки може бути потенціал *Y* даної системи – емпірична неперервна функція, взаємозв'язана з рівнянням руху (1). У загальному випадку вона подається у вигляді

$$Y(\tau)=G(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)\,|\,\theta_2), \ \tau\in[\tau_0, \tau_f]. \tag{2}$$

Рівняння (2) можна інтерпретувати як рівняння поверхні, вздовж якої рухається дана динамічна система. Як потенціал *Y* макроекономічної системи вибирають, як правило, валовий внутрішній продукт (ВВП) [9] або величини, зв'язані з ним, наприклад, прибуток [10]. ВВП і прибуток є основними показниками макроекономічних процесів, і з економічної теорії [11] відомі фактори, які можуть суттєво на них впливати (основні фонди, кінцеве споживання, матеріальні витрати, кількість працюючих, валовий експорт і т. п.). З економічної точки зору важливе таке: статистична інформація у вигляді рядів динаміки для ВВП, прибутку і основних факторів, які характеризують дану макроекономічну систему, доступна і може бути використана при математичному моделюванні.

Позначимо $\{\mathbf{x}_\tau\}$, $\{Y_\tau\}$ множину даних спостережень за динамікою траєкторій $\{\mathbf{x}(\tau)\}$, $\{Y(\tau)\}$ в N цілочислових точках проміжку часу $[\tau_0, \tau_k]$, який будемо називати періодом ідентифікації. Проміжок часу $(\tau_k, \tau_f]$ тут є періодом прогнозування. При цьому припускаємо, що $\tau_f - \tau_k << N$. Тоді якщо побудована модель є стаціонарною, то вектор параметрів, на які модель буде налаштована на останній стадії періоду ідентифікації, можна переносити через інерційність динамічної системи на період прогнозування. Згідно з прийнятим у теорії ідентифікації підходом стаціонарність моделі будемо характеризувати таким мультикритерієм: висока якість апроксимації і прогнозування та робастність [7, 12, 13].

Розглянемо, наприклад, трициклову зміну ВВП макроекономічної системи на проміжку часу $[\tau_0, \tau_k]$ (останній третій цикл може бути незавершений). Припускаємо, що граничними точками є точки τ_2, τ_4 (рис. 1), в яких спостерігаються локальні мінімуми статистичних даних.

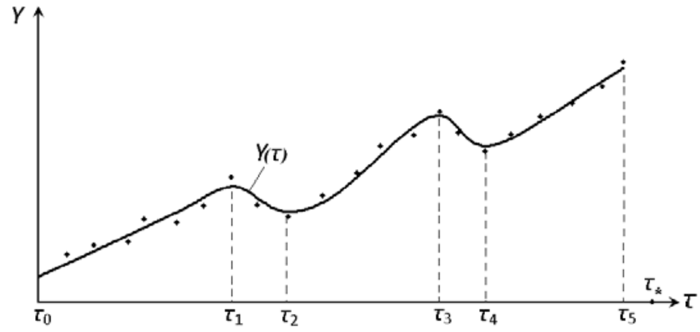


Рис. 1. Діаграма розсіювання ВВП і відповідна сплайн-функція $Y(\tau)$

У точках τ_1, τ_3 циклів (τ_0, τ_2) і (τ_2, τ_4) мають місце локальні максимуми статистичних даних. Тому в даному випадку критичними точками (вузлами) є точки τ_1, τ_2 , τ_3, τ_4 . В них відбувається характерна зміна траєкторії $Y(\tau)$: зростання ВВП переходить у його спад (вузли τ_1, τ_3), який знову змінюється на підйом (вузли τ_2, τ_4). На кожному з інтервалів (τ_0, τ_1), (τ_1, τ_2), … , (τ_4, τ_5) невідому функцію $Y(\tau)$ можна апроксимувати лінійною функцією відносно незалежних факторів $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots , x_m(\tau)$. У граничних точках циклів повинна бути виконана умова неперервності $Y(\tau)$ шляхом зшивання відповідних економетричних моделей. Таку послідовність лінійних економетричних моделей, на відміну від кусково-лінійної моделі, називають сплайн-функцією. На рис. 1 зображена сплайн-функція, яка апроксимує статистичні дані ВВП, розбиті на три цикли.

Похідна $\dot{Y}(\tau)$ може не задовольняти умову неперервності на періоді ідентифікації, і тому їй буде відповідати кусково–лінійна функція регресії (рис. 2).

Як показують реальні статистичні дані макроекономічної динаміки [14], характер зміни ВВП (діаграма розсіювання на рис. 1) визначається відповідною зміною основних факторів, які впливають на ВВП. Виявляється, що завжди існують такі фактори, статистичні дані яких на періоді ідентифікації $[\tau_0, \tau_k]$ можна також розбити на аналогічні цикли. Причому вузли $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k\text{-}1}$, які відповідають локальним максимумам і локальним мінімумам, збігаються для ВВП і основних факторів (основні фонди, кінцеве споживання, валовий експорт тощо). Це дозволяє не включати вектор керувань $\mathbf{u}(\tau)$ у число пояснювальних змінних моделі (1), (2) і розглядати цю модель як модель з релейними керуваннями [11], які набирають значення ± 1. Крім того, виникає доцільність стрибок у параметрах $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ зв'язати безпосередньо з вузлами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k\text{-}1}$ і розглядати час τ як таку змінну, яка пояснює стрибкоподібну зміну параметрів моделі (1), (2) в окремих точках проміжку $[\tau_0, \tau_k]$.

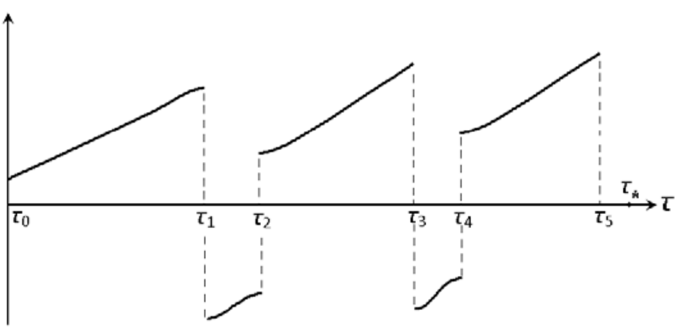


Рис. 2. Кусково-лінійна модель похідної $\dot{Y}(\tau)$

Отже, проблема побудови моделі зі змінною структурою зводиться до апроксимації невідомих правих частин рівнянь (1), (2) лінійними функціями регресії, у яких стрибкоподібна зміна значень параметрів відбувається у наперед задані моменти часу періоду ідентифікації.

Лінійна модель з переключеннями в заданих точках

При числовій реалізації динамічних моделей, метою яких є прогнозування, граничні умови диференціальних рівнянь (1) зручно задовольняти в момент часу τ_*, що слідує за періодом ідентифікації (рис. 1). Тому припустимо, що $\tau_* = \tau_k + 1$ і, зробивши заміну $t = \tau - \tau_*$, ідентифікацію моделі будемо проводити на проміжку часу $[-N, -1]$, а прогнозування – на проміжку $[\,0, t_f\,]$, $t_f = \tau_f - \tau_*$.

Продемонструємо процедуру апроксимації моделі (1), (2) лінійними відносно фазових координат моделями з переключеннями у наперед заданих точках на прикладі трициклової макроекономічної системи на періоді ідентифікації. Будемо вважати, що початкова $[\tau_0, \tau_1)$ і остання $(\tau_4, \tau_5]$ стадії розвитку потенціалу $Y(\tau)$ (рис. 1) відповідають фазі підйому. Тоді цикли формуються так: $[\tau_0, \tau_2)$, (τ_2, τ_4), $(\tau_4, \tau_*]$ або у від'ємному часі – $[t_{-6}, t_{-4})$, (t_{-4}, t_{-2}), $(t_{-2}, t_0]$; тут $t_{-6} = -N$, $t_0 = 0$.

Відображення властивостей реальних динамічних систем можливе при кількості фазових координат $m \geq 3$ [15]. Практичні дослідження [7, 9, 10] показують, що адекватні результати можуть бути отримані у випадку тривимірного фазового простору. Тому припустимо, що $m = 3$ і як фазові координати виберемо такі фактори x_1, x_2, x_3, які відтворюють якісну зміну потенціалу Y (2) динамічної системи на періоді ідентифікації $[-N, -1]$, тобто їм відповідають ті самі цикли, що і потенціалу Y (рис. 1). Це означає, що поведінка похідних $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)$ на [–*N*, –1] буде такою ж, як і поведінка похідної $\dot{Y}(\tau)$ (рис. 2).

Кусково–лінійна модель рівняння руху (1) у випадку трициклової динамічної системи набирає вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}_0 + A\mathbf{x}(\tau), \ t \in [-N, 0), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*. \end{cases} \tag{3}$$

Тут, оскільки метою дослідження є отримання високих прогнозних властивостей моделі, граничні умови знаходяться в момент часу t = 0, що слідує за періодом ідентифікації.

У моделі (3) вектори $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{x}_*$ і матриця A вважаються невідомими. Крім того, припускаємо, що в моменти часу t_{-2}, t_{-3}, t_{-4}, t_{-5} відбуваються релейні переключення і параметри $\mathbf{a}_0$, A змінюють свої значення. Розв'язок $\mathbf{x}(t)$ задачі Коші (3) повинен бути неперервним на [–*N*, 0], тобто $\mathbf{x}(t)$ – сплайн-функція, яка будується шляхом зшивання в граничних точках циклів.

Якщо векторна сплайн-функція $\mathbf{x}(t)$ побудована, то скалярну сплайн-функцію для потенціалу $Y(t)$ можна подати у вигляді

$$Y(t) = c_0 + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)\,. \tag{4}$$

Отже, модель (1), (2) динамічної системи апроксимується лінійними моделями вигляду (3), (4) на проміжках монотонності статистичних даних (фази підйому або спаду). Переключення (стрибкова зміна параметрів) може відбуватися у вузлах t-2, t-3, t-4, t-5, причому налаштування моделі на нові значення параметрів повинне відбуватися за умови виконання неперервності фазових координат x1(t), x2(t), x3(t) і потенціалу Y(t) на проміжку [–N, 0].

Побудова моделі зі змінною структурою розглядається як один із напрямків удосконалення моделі зі сталою структурою, який дозволяє забезпечити більш точну апроксимацію статистичних даних для змістовного обґрунтування закономірностей реального процесу. Тому на першому етапі будується модель зі сталою структурою на [–*N*, 0], вивчаються її властивості і встановлюється необхідність подальшої модифікації. Така перевірка може бути здійснена за допомогою спеціальних тестів, спрямованих на виявлення закономірностей у змінних оцінках невідомих параметрів моделі зі змінною структурою. У даній роботі для цього використовується тест Чоу [2].

Побудова модельних сплайн-функцій

У межах кожного з циклів [t_{-6}, t_{-4}), (t_{-4}, t_{-2}), (t_{-2}, t_0] будемо шукати розв'язок задачі Коші (3) у вигляді розкладання траєкторії руху на трендову і коливальну (зі змінною амплітудою) складові:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 e^{-\lambda|t-t_j|} + e^{-\nu|t-t_j|}(\boldsymbol{\beta}_2 \cos\omega t + \boldsymbol{\beta}_3 \sin\omega t). \tag{5}$$

Тут моменти часу t_{-5} (j = 5), t_{-3} (j = 3) відповідають точкам локального максимуму на першому і другому циклах, t_0 (j = 0) – моменту прогнозування, де згідно з властивістю стаціонарної динамічної системи зберігаються особливості останньої стадії [t_{-2}, t_{-1}].

Задача полягає у пошуку таких значень параметрів λ, ν, ω і невідомих векторів $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, для яких при переведенні системи із деякого початкового стану в кінцеву бажану точку $\mathbf{x}_*$ модельні траєкторії фазових координат (5) були б неперервними (сплайн-функціями) і апроксимували реальні траєкторії так, щоб виконувалися вимоги мультикритеріального регулятора [7]:

– співвідношення $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t$, $Y(t) \approx Y_t$, $t = -1, -2, \dots, -N$ задовольняються з великою точністю;

– довірчі інтервали прогнозів фазових координат $\mathbf{x}$ і потенціалу Y мають мінімальні довжини;

– оцінки невідомих коефіцієнтів моделі є нечутливими до незначних змін вхідної інформації.

У моделі (5) коефіцієнти розкладу $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ повинні змінюватися при переході від циклу до циклу (при сталих значеннях параметрів λ, ν, ω) так, щоб для $\mathbf{x}(t)$ і $Y(t)$ задовольнялися властивості сплайн-функцій. Як наслідок, будуть виникати проблеми при оцінюванні цих коефіцієнтів.

Побудуємо регресійну модель зі сталими значеннями параметрів на всьому періоді ідентифікації. Для цього виконаємо умову неперервності фазових координат $\mathbf{x}(t)$ і потенціалу $Y(t)$ у граничних точках $t_{-4} = -k_2$, $t_{-2} = -k_1$ (рис. 3).

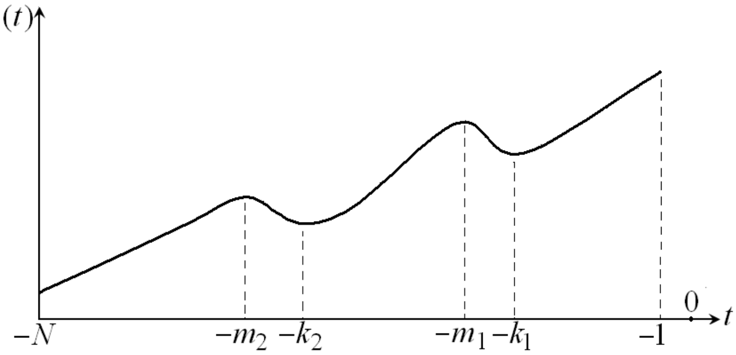


Рис. 3. Сплайн-функція у від'ємному часі

Зшивання траєкторій руху в граничних точках приводить до наступного неперервного розв'язку задачі Коші (3):

$$x(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 f_\lambda(t) + f_\nu(t)(\mathbf{b}_2 \cos\omega t + \mathbf{b}_3 \sin\omega t),$$

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, \quad t \in [-k_1, 0], \\ e^{-\lambda n_1} e^{-\lambda|t+m_1|}, \ t \in [-k_2, -k_1], \\ e^{-\lambda n_2} e^{-\lambda|t+m_2|}, \ t \in [-N, -k_2], \end{cases} \tag{6}$$

$$n_1 = 2k_1 - m_1, \quad n_2 = 2k_2 + n_1 - m_1 - m_2.$$

Векторна сплайн-функція (6) автоматично задовольняє умову асимптотичної стійкості при t↦ $-\infty$. Крім того, при сталих значеннях коефіцієнтів c0, c1, c2, c3 потенціал Y(t), поданий у вигляді (4), також автоматично перетворюється у сплайн-функцію, асимптотично стійку при t$\to -\infty$.

Сумісне оцінювання сплайн-функцій (4), (6) на періоді ідентифікації $[-N, -1]$ повинне проводитися методами лінійної економетрики [2]. Для цього нелінійність відносно параметрів λ, ν, ω моделі (6) долається, якщо вважати їх параметрами керування. Для цього можна здійснювати розумний перебір значень цих параметрів і при кожній заданій трійці (λ, ν, ω) проводити МНК-оцінювання моделі (4), (6). Критерієм вибору оптимальних МНК-оцінок розкладу моделі (4), (6) є вимоги мультикритеріального регулятора та значущість додатних МНК-оцінок коефіцієнтів розкладу (4). Остання умова забезпечує адекватний взаємозв'язок між потенціалом Y і вибраними факторами x_1, x_2, x_3 даної динамічної системи.

На першому етапі ідентифікується модель (4), (6) зі сталою структурою на всьому проміжку $[-N, -1]$. Необхідність подальшої модифікації цієї моделі шляхом перетворення її у модель зі змінною структурою встановлюється за допомогою тесту Чоу [2].

Числова реалізація побудованих алгоритмів

У даній роботі як фактори, що характеризують макроекономічну систему, обрано експорт товарів та послуг (exports of goods and services), кінцеве споживання в невиробничому секторі (final consumption expenditure of households) та валовий випуск сектору послуг (output of services sector). З економічної теорії відомо, що ці фактори суттєво впливають на макроекономічний потенціал країни, і, як показує аналіз статистичних даних макроекономічного розвитку ряду західноєвропейських країн [14], обсяги цих факторів становлять значну частку ВВП. Крім того, діаграми розсіювання названих факторів і ВВП вказують на відповідність моментів часу, в яких спостерігаються локальні максимуми та локальні мінімуми в рядах статистичних даних. Це свідчить про те, що дані макроекономічні системи розвиваються циклічно (довжина циклу 7-11 років) і, отже, для цих систем актуальною є побудова математичних моделей зі змінними структурами.

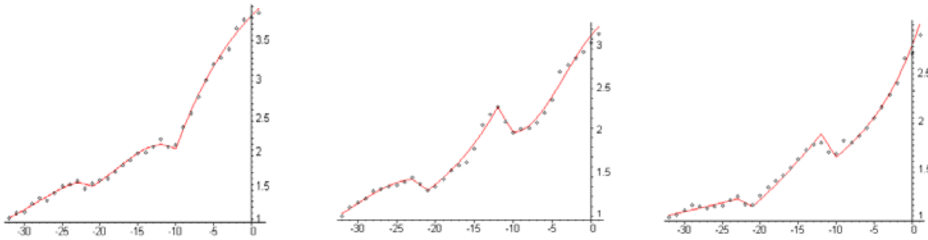
Апробація побудованих алгоритмів проводилася на прикладі Великобританії. Ідентифікація здійснювалася на базовому періоді часу 1970-2001 рр. (N=32), а прогнозні значення обчислювалися за 2002 і 2003 роки (t = 0 і t = 1).

Згідно з описаним вище алгоритмом на першому етапі оцінюється модель (4), (6) зі сталою структурою. Перебір значень параметрів керування λ, ν, ω налаштував мультикритеріальний регулятор на такі оптимальні значення: $\lambda^* = 0.097$, $\nu^* = 0.031$, $\omega^* = 0.185$. Аналіз модельних кривих і порівняння їх із відповідними діаграмами розсіювання засвідчив незадовільну апроксимацію сплайн-функціями статистичних даних. Це свідчить про необхідність перевірки моделі на змінюваність коефіцієнтів розкладу (при незмінних оптимальних значеннях параметрів керування). Залучення тесту Чоу відхилило нульову гіпотезу про сталість коефіцієнтів розкладу на періоді ідентифікації. Числові розрахунки підтвердили виконання альтернативної гіпотези (змінність коефіцієнтів) при переході від циклу до циклу.

На рис. 4, 5 наведені модельні криві фазових траєкторій і ВВП (суцільні лінії), які відповідають моделі (4), (6) зі змінною структурою. Точками тут зображені відповідні діаграми розсіювання, в яких статистичні дані нормовані (поділені на відповідні початкові значення – у 1970 р.).

Аналіз отриманих результатів свідчить про якісну апроксимацію статистичних даних модельними кривими. На рис. 4, 5 наведені також реальні статистичні дані за прогнозний період у моменти часу t = 0 (2002 р.) і t = 1 (2003 р.). Порівняння з кривими регресії свідчить про високоточні прогнозні властивості побудованої моделі.

У табл. 1 наведені кількісні характеристики роботи мультикритеріального регулятора: значення коефіцієнтів детермінації R^2, відносних півдовжин довірчих інтервалів точкових прогнозів $\xi^{(0)}$ і $\xi^{(1)}$ у моменти часу $t = 0$ і t = 1 та індексів обумовленості CI. Тут також наведені значення відносних похибок прогнозу $\delta^{(0)}$ і $\delta^{(1)}$ порівняно з реальними статистичними даними у моменти часу t = 0 і t = 1.



$x_1(t)$ $x_2(t)$ $x_3(t)$

Рис. 4. Траєкторії фазових координат моделі зі змінною структурою та відповідні діаграми розсіювання

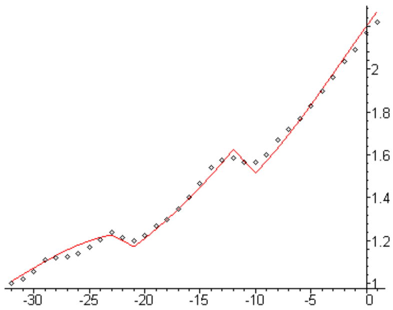


Рис. 5. Траєкторія ВВП та відповідна діаграма розсіювання

Таблиця 1 – Характеристики модельних траєкторій руху

Змінні	R^2	$\zeta^{(0)}$	$\delta^{(0)}$	$\zeta^{(1)}$	$\delta^{(1)}$	CI
$x_1(t)$	99.62	3.67%	0.68%	3.85%	1.60 %	24.41
$x_2(t)$	99.27	4.62%	2.80%	4.87%	4.57%	17.82
$x_3(t)$	99.65	4.01%	2.13%	4.17%	3.98%	15.36
$Y(t)$	99.34	4.74%	3.42%	5.02%	3.42%	68.04

Високі значення коефіцієнтів детермінації, вузькі довірчі інтервали і малі відносні помилки прогнозів та низькі значення індексів обумовленості свідчать про адекватність побудованої моделі зі змінною структурою статистичним даним.

Висновки

У даній роботі запропоновано модель зі змінною структурою макроекономічної динаміки і досліджена ефективність її використання при імітаційному моделюванні та короткостроковому прогнозуванні. Високі імітаційні, прогнозні та робастні властивості моделі свідчать про її адекватність статистичним даним. Усе це вказує на можливість використання моделі зі змінною структурою при прогнозуванні розвитку макроекономічних процесів, які розвиваються циклічно.

1. *Колемаев В. А.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем / В. А. Колемаев. – М. : Юнити, 2005. – 295 с.
2. *Назаренко О. М.* Основи економетрики : підручник ; 2–ге вид., перероб. / О. М. Назаренко – К. : Центр навч. л–ри, 2005. – 392 с.
3. *McQuinn K.* Solow (1956) as a Model of Cross-Country Growth Dynamics. – Munich Rersonal RePEc Archive / K. McQuinn, K. Whelan– 2007. – No. 5892, posted 22. – P. 1–26.
4. *Назаренко О. М.* Імітація та прогнозування економічного зростання за допомогою моделі трисекторної економіки типу Солоу / О. М. Назаренко, Н. М. Манько // Механізм регулювання економіки .– 2009. – № 4. – С. 136–142.
5. *Ramsay J. O.* Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach / J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell, J. Cao. // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. –2007. – Vol. 69, Issue 5. – P. 741–796.
6. *Barro R. J.* Economic Growth / R. J. Barro, S.-i-M.Xavier– N.Y. : McGraw-Hill. – 1995. – 540 p.
7. *Назаренко А. М.* Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ-моделей / А. М. Назаренко, Д. В. Фильченко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2009. – Вип. 158. – С. 81–99.
8. *Тихомиров Н. П.* Учебник по дисциплине «Эконометрика» / Н. П. Тихомиров, Е. Ю. Дорохина – М. : Изд-во Рос. экон. акад., 2002. – 640 с.
9. *Nazarenko O. M.* Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective / O. M. Nazarenko., D .V. Filchenko // International Journal of Innovating Computing, Information and Control. – 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 1553–1566.
10. *Альбрехт Э. Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России» / Э. Г. Альбрехт, 2002. – Т. 5. – С. 54–86.
11. *Intriligator M. D.* Mathematical optimization and economic theory / M.D. Intriligator – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2002. – 508 p.
12. *Айвазян С. А.* Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян – М. : Юнити. – 1998. – 1022 с.
13. *Greene W. H.* Econometric analysis, Fifth Editional / W. H. Greene– N. J.: Prentice Hall Upper Saddle River. – 2003. – 1056 p.
14. European statistics: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/.
15. *Анищенко В. С.* Детерминированный хаос / В. С. Анищенко // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 6. – С. 70–76.

Отримано 23.10.2010 р.

А.М. Назаренко, П.Ю. Поляков

Математическое моделирование макроэкономических систем с переменной структурой

Предложен подход к спецификации и идентификации макроэкономической модели с переменной структурой. Апробация построенных алгоритмов проведена на реальных статистических данных макроэкономической динамики. Полученная модель с переменной структурой продемонстрировала более высокие имитационные, прогнозные и робастные свойства по сравнению с аналогичной моделью с постоянной структурой.

Ключевые слова: циклические процессы, переменная структура, релейные управления, параметрическая идентификация, кусочно-линейная регрессия, сплайн-функция.

O.M. Nazarenko, P.Yu. Polyakov

Mathematical modelling of macroeconomical systems with variable structure

An approach of the specification and identification of macroeconomic models with variable structure is proposed. An approbation of the constructed algorithms is performed on real macroeconomic dynamics. The model with variable structure has showed higher simulating, forecasting and robust properties in comparison with the same model with a constant structure.

Keywords: cyclic processes, variable structure, relay control, parametric identification, piecewise-linear regression, spline-function.