

УДК 532.511

К УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

П.М.Калиниченко, ст.преп.

Уравнения движения идеальной жидкости впервые были получены Эйлером. Они положили начало отсчета теоретической гидромеханике. Применение этих уравнений к решению ряда задач гидромеханики, таких, как обтекание тел цилиндрической формы (известный парадокс Эйлера-Даламбера) и др., приводило к результату, резко противоречащему опыту. Поэтому несколько позже Стоксом было предложено учесть в уравнениях движения жидкости силы вязкостного трения. Для отдельного класса течений, к которым можно отнести прямолинейные течения, это позволило получить результаты, согласующиеся с опытом. Картина обтекания тел произвольной формы, как и картина внутреннего течения жидкости в криволинейном канале, существенно расходится с опытом, особенно на участках, имеющих переменную кривизну. По мнению автора, причину этому следует искать не в установлении связи между касательными напряжениями и значениями скоростей для произвольного течения, как это делается в настоящее время, а в самих уравнениях движения жидкости. В работе [1] показано, что в уравнениях движения идеальной, а значит и вязкой жидкости, не учтена динамическая сила. Данное утверждение получено из рассмотрения закона сохранения массы. Установим, откуда берется динамическая сила или, другими словами, где теряется эта сила при выводе уравнений движения жидкости.

В движущейся жидкости выделим произвольный конечный объем  $W$ , ограниченный поверхностью  $S$ , и запишем для него уравнения, выражающие закон количества и момента количества движения жидкости [2]:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \vec{v} dW = \int_W \rho \vec{F} dW + \int_S \vec{P}_n dS, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} \int_W \vec{r} \times \rho \vec{v} dW = \int_W \vec{r} \times \rho \vec{F} dW + \int_S \vec{r} \times \vec{P}_n dS.$$

После известных преобразований первое уравнение системы (1) приводится к уравнениям движения жидкости в напряжениях [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \Omega_y v_z - \Omega_z v_y &= X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \Omega_z v_x - \Omega_x v_z &= Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial z} + \Omega_x v_y - \Omega_y v_x &= Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Второе уравнение системы (1) приводится к известным соотношениям:

$$P_{yz} = P_{zy}, \quad P_{zx} = P_{xz}, \quad P_{xy} = P_{yx}. \tag{3}$$

выражающим теорему о взаимности касательных напряжений [2].

Остановимся на рассмотрении движения идеальной (невязкой) жидкости. Уясним некоторые свойства напряженного состояния идеальной жидкости. Для наглядности рассмотрим плоское напряженное состояние жидкости. В идеальной жидкости в произвольном месте выделим элемент, имеющий форму прямоугольника, грани которого являются главными площадками, по которым действуют главные напряжения  $P_1$  и  $P_2$ . Проведем сечение  $ab$ , характеризующееся нормалью  $\vec{n}_\alpha$ , образующей с главной осью угол  $\alpha$  (рис.1).

Напряжения  $P_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  по площадке  $\vec{n}_\alpha$  вызываются действием главных напряжений  $P_1$  и  $P_2$  и определяются известными зависимостями [3]:

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P_1 \cos^2 \alpha + P_2 \sin^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{P_1 - P_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

В идеальной жидкости взаимодействие между частицами сводится лишь к нормальным напряжениям, которые направлены вдоль главных осей. Следуя классической гидромеханике в покоящейся жидкости, касательные напряжений равны нулю:  $\tau_\alpha=0$ , а нормальные -  $P_\alpha$  не зависят от ориентации площадки, на которой они действуют. Из (4) это

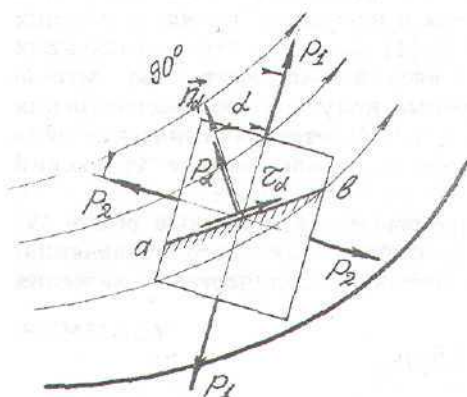


Рисунок 1 - Плоское напряженное состояние в движущейся жидкости

возможно, если  $P_1=P_2$ . В движущейся равномерно и прямолинейно жидкости напряженное состояние подобно покоящейся жидкости, так как в ней отсутствует динамическое взаимодействие потока с граничной поверхностью. Если поток идеальной жидкости вступает в динамическое взаимодействие с ограничивающей его поверхностью или контуром, то согласно теореме Коши-Гельмгольца о разложении скорости жидкой частицы происходит деформация жидкого объема. Деформация жидкой

частицы возможна при выполнении условия  $P_1 \neq P_2$ . Если  $P_1 \neq P_2$ , а, значит,  $P_1 - P_2 \neq 0$ , то из (4) в движущейся идеальной жидкости касательные напряжения на площадках  $\alpha$ , не совпадающих с главными площадками, отличны от нуля:  $\tau_\alpha \neq 0$ , а нормальные напряжения  $P_\alpha$  зависят от ориентации площадки  $\vec{n}_\alpha$ , то есть  $P_\alpha(\vec{r}, \vec{n})$ . Как первое  $\tau_\alpha \neq 0$ , так и второе  $P_\alpha(\vec{n})$  утверждения получены на основании теоремы Коши-Гельмгольца и известных для напряженного состояния уравнений (4). В классической гидромеханике для движущейся идеальной жидкости условия  $\tau_\alpha=0$  и независимость  $P_\alpha$  от ориентации площадки  $\alpha$  постулируются [2], что находится в противоречии с теоретически обоснованным в данной работе результатом  $\tau_\alpha \neq 0$  и  $P_\alpha(\vec{n})$ . Полученные утверждения  $\tau_\alpha \neq 0$  и  $P_\alpha(\vec{n})$  положим в основу наших дальнейших рассуждений. Следует заметить, что касательные напряжения  $\tau_\alpha$  в идеальной жидкости обусловлены не

трением, как это принято считать в вязкой жидкости, а напряженным состоянием в потоке идеальной жидкости.

Для  $P_1 \neq P_2$  характерны два случая напряженного состояния, соответствующие однородной и неоднородной деформации жидкой частицы. Деформация однородна, если  $P_1 - P_2 = const$  в каждой точке пространства, занятого движущейся жидкостью. В противном случае, когда  $P_1 - P_2 \neq const$ , деформация неоднородна. Если деформация однородна, то для любого замкнутого контура  $l$ , выделенного в

движущейся идеальной жидкости, 
$$\oint_l \tau_\alpha dl = \frac{P_1 - P_2}{2} \oint_l \sin 2\alpha dl = 0.$$
 А это

значит, что циркуляция скорости по любому замкнутому контуру  $l$  измениться не может, и если она в какой-либо момент времени была равна нулю, то и в другие моменты, до и после данного, будет равна нулю. Следуя теореме Стокса, поток вихрей через область, ограниченную контуром  $l$ , будет равен нулю. Так как контур выбран произвольно, то течение идеальной жидкости, в которой  $P_1 - P_2 = const$ , будет

потенциальным -  $rot \vec{V} = 0$ . К данному классу течений можно отнести движение идеальной жидкости в концентричном канале. На участках с переменной кривизной линии тока  $P_1 - P_2 \neq const$ , а, значит, для выделенного замкнутого контура  $l$  
$$\oint_l \tau_\alpha dl \neq 0.$$
 Это свидетельствует о

возникновении и исчезновении в потоке идеальной жидкости вихревого движения и может служить подтверждением полученных в работе [1] результатов.

Из уравнений движения жидкости в напряжениях (2) получим уравнения движения идеальной жидкости.

Для выделения в правой части уравнений (2) гидродинамического давления воспользуемся известным в гидромеханике соотношением, связывающим напряжение  $\vec{P}_n$ , действующее на площадке  $\vec{n}$  выделенного тетраэдра, с напряжениями  $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ , действующими на координатных плоскостях [2]:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_x \alpha_{nx} + \vec{P}_y \alpha_{ny} + \vec{P}_z \alpha_{nz}, \quad (5)$$

где  $\alpha_{nx} = \cos(n, x)$ ,  $\alpha_{ny} = \cos(n, y)$ ,  $\alpha_{nz} = \cos(n, z)$ .

Проекция векторного равенства (5) на оси координат запишутся в виде:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= P_{xx} \alpha_{nx} + P_{yx} \alpha_{ny} + P_{zx} \alpha_{nz}, \\ P_{ny} &= P_{xy} \alpha_{nx} + P_{yy} \alpha_{ny} + P_{zy} \alpha_{nz}, \\ P_{nz} &= P_{xz} \alpha_{nx} + P_{yz} \alpha_{ny} + P_{zz} \alpha_{nz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (6) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} P_{nn} &= \frac{P_{nx}}{\alpha_{nx}} = P_{xx} + P_{yx} \frac{\alpha_{ny}}{\alpha_{nx}} + P_{zx} \frac{\alpha_{nz}}{\alpha_{nx}}, \\ P_{nn} &= \frac{P_{ny}}{\alpha_{ny}} = P_{xy} \frac{\alpha_{nx}}{\alpha_{ny}} + P_{yy} + P_{zy} \frac{\alpha_{nz}}{\alpha_{ny}}, \\ P_{nn} &= \frac{P_{nz}}{\alpha_{nz}} = P_{xz} \frac{\alpha_{nx}}{\alpha_{nz}} + P_{yz} \frac{\alpha_{ny}}{\alpha_{nz}} + P_{zz}. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $P_{nn}$  - проекция напряжения  $\vec{P}_n$  на нормаль к площадке  $\vec{n}$ .

Так как  $P = -\frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz})$  - гидродинамическое давление, то нормальные напряжения можно представить в виде:

$$\begin{aligned} P_{nn} &= -P + P'_{nn}, \\ P_{xx} &= -P + P'_{xx}, \\ P_{yy} &= -P + P'_{yy}, \\ P_{zz} &= -P + P'_{zz}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этого следует

$$P'_{xx} + P'_{yy} + P'_{zz} = 0. \quad (9)$$

Решая совместно (7) и (8), получим:

$$\begin{aligned} P'_{xx} &= P'_{nn} - \left( P_{yx} \frac{\alpha_{ny}}{\alpha_{nx}} + P_{zx} \frac{\alpha_{nz}}{\alpha_{nx}} \right), \\ P'_{yy} &= P'_{nn} - \left( P_{xy} \frac{\alpha_{nx}}{\alpha_{ny}} + P_{zy} \frac{\alpha_{nz}}{\alpha_{ny}} \right), \\ P'_{zz} &= P'_{nn} - \left( P_{xz} \frac{\alpha_{nx}}{\alpha_{nz}} + P_{yz} \frac{\alpha_{ny}}{\alpha_{nz}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что  $\alpha_{ny} = \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n}$ ,  $\alpha_{nx} = \frac{\Delta S_x}{\Delta S_n}$ ,  $\frac{\alpha_{ny}}{\alpha_{nx}} = \frac{\Delta S_y}{\Delta S_x} = \frac{dx}{dy} = \frac{V_x}{V_y}$  и т.д., и совместно решая (9) и (10), будем иметь:

$$\begin{aligned} P'_{xx} &= \frac{1}{3} \left[ -2 \left( P_{yx} \frac{V_x}{V_y} + P_{zx} \frac{V_x}{V_z} \right) + \left( P_{xy} \frac{V_y}{V_x} + P_{zy} \frac{V_y}{V_z} \right) + \left( P_{xz} \frac{V_z}{V_x} + P_{yz} \frac{V_z}{V_y} \right) \right], \\ P'_{yy} &= \frac{1}{3} \left[ \left( P_{yx} \frac{V_x}{V_y} + P_{zx} \frac{V_x}{V_z} \right) - 2 \left( P_{xy} \frac{V_y}{V_x} + P_{zy} \frac{V_y}{V_z} \right) + \left( P_{xz} \frac{V_z}{V_x} + P_{yz} \frac{V_z}{V_y} \right) \right], \\ P'_{zz} &= \frac{1}{3} \left[ \left( P_{yx} \frac{V_x}{V_y} + P_{zx} \frac{V_x}{V_z} \right) + \left( P_{xy} \frac{V_y}{V_x} + P_{zy} \frac{V_y}{V_z} \right) - 2 \left( P_{xz} \frac{V_z}{V_x} + P_{yz} \frac{V_z}{V_y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение движения жидкости в напряжениях (2), учитывая (8), перепишем в векторном виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \frac{1}{\rho} \vec{F}^{\partial}. \quad (12)$$

Здесь  $\vec{F}^{\partial} = F_x^{\partial} \vec{i} + F_y^{\partial} \vec{j} + F_z^{\partial} \vec{k}$  - вектор динамической силы, проекции которого на оси координат имеют вид:

$$\begin{aligned} F_x^{\partial} &= \frac{\partial P'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{zx}}{\partial z}, \\ F_y^{\partial} &= \frac{\partial P'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{zy}}{\partial z}, \\ F_z^{\partial} &= \frac{\partial P'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Установим связь динамической силы  $\vec{F}^{\partial}$  с кинематическими характеристиками потока. Для этого рассмотрим частный случай течения жидкости, удовлетворяющий условиям  $\rho = \text{const}$ ,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ ,  $\vec{F} = 0$ . Уравнения движения (12) для такого течения запишутся в виде

$$\text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{grad} \frac{P}{\rho} + \vec{\Omega} \times \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{F}^{\partial} = 0. \quad (14)$$

Из проекции векторного равенства (14) на направление, касательное к линии тока, энергия  $E = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2}$  в каждой точке линии тока есть величина постоянная. Если  $E = \text{const}$  в какой-то области, то и в каждой точке потока жидкости  $E = \text{const}$ . Для данного потока из проекции векторного равенства (14) на направление, нормальное к линии тока, будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \vec{F}^{\partial} = \vec{\Omega} \times \vec{V}. \quad (15)$$

Из (15) вектор динамической силы  $\vec{F}^{\partial}$  нормален линиям тока и является результатом возникающего в идеальной жидкости вихревого движения.

Таким образом, система уравнений движения жидкости, основываясь на полученных уравнениях (11), (12), (15) и уравнении неразрывности, примет окончательный вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P, \quad \vec{\Omega} \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial P'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial P'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k} \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0.$$

Система уравнений (16) совместно с (11) является замкнутой. Она состоит из 10 уравнений и содержит 10 неизвестных ( $P, P'_{xx}, P'_{yy}, P'_{zz}, P'_{xy} = P'_{yx}, P'_{xz} = P'_{zx}, P'_{yz} = P'_{zy}, V_x, V_y, V_z$ ).

В работе показано, что в движущейся идеальной жидкости касательные напряжения, обусловленные напряженным состоянием, отличны от нуля, а нормальные напряжения  $P(r, n)$  зависят от ориентации площадки. На основании этого получены уравнения движения идеальной жидкости (16), отличающиеся от существующих появлением в правой части уравнений динамической силы, являющейся результатом возникновения вихрей в движущейся жидкости. Установлена зависимость динамической силы с кинематическими характеристиками потока.

## SUMMARY

It is proved, that tangential stresses in a moving perfect liquid are grounded by the stressed condition of liquid flow and differ from zero. On this base the equations of perfect liquid

moving are obtained. These equations differ from existed ones with the dynamic force. The dependence of dynamic force with kinematic flow characteristics is stated.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каливниченко П.М. Возникновение вихрей в движущейся жидкости // Вісник Сум. держ. ун-ту, 1998. - № 1(9). - С.41-47.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебн. для вузов.-М.:Наука, 1987.- 840 с.
3. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под общ.ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. - Киев: Вища школа, 1979.- 696 с.

Поступила в редколлегию 26 ноября 1998 г.

УДК 534.1: 681.5

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

И.Д.Пузько, доц.; В.А.Хворост, доц.

При проведении динамических испытаний объектов (машин, конструкций, узлов, соединений, отдельных деталей) на вибропрочность, вибронадежность и виброустойчивость путем кратковременного (импульсного) воздействия (нагружения) находит применение метод регистрации переходных процессов в конечном числе точек испытываемой конструкции [1,2].

В предположении, что испытываемый объект (конструкция) имеет дискретный спектр собственных частот, переходный процесс  $x(t)$  диссипативной колебательной системы с конечным числом ( $n$ ) степеней свободы описывается выражением [2,3]

$$x(t) = \sum_{k=1}^n X_{ak} \exp(-h_k t) \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (1)$$

где  $X_{ak}$  - амплитуда процесса  $x_k(t)$ ;

$h_k$  - коэффициент демпфирования;

$\omega_k$  - круговая собственная частота диссипативной механической колебательной системы (МКС);

$\varphi_k$  - фаза колебаний процесса  $x_k(t)$ ;

После аппаратной регистрации и измерений  $n$  составляющих  $x_k(t)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) переходного процесса  $x(t)$  (1) производится обработка измерительной информации с целью определения инерционно-жесткостных, диссипативных и связанных с ними других параметров.

Для решения такого класса задач находит применение способ Лагранжа и его различные модификации.

При регистрации данных эксперимента переходный процесс получают в виде последовательности числовых значений в дискретные моменты времени с последующим выполнением  $z$ -преобразования и представлении получающихся при этом дробно-рациональных функций в виде цепных дробей Тилле и Лагранжа [2].

В настоящей работе излагается более рациональный с точки зрения объема, используемый для преобразований информации и степени помехоустойчивости способ, основанный на методе временных