moving are obtained. These equations differ from existed ones with the dynamic force. The dependence of dynamic force with kinematic flow characteristics is stated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиниченко П.М. Возникновение вихрей в движущейся жидкости // Вісник Сум.держ.ун-ту, 1998.- № 1(9).- С.41-47.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебн. для вузов.-М.:Наука, 1987.- 840 с.
3. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под общ.ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. - Киев: Вища школа, 1979.- 696 с.

Поступила в редколлегию 26 ноября 1998 г.

УДК 534.1: 681.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

И.Д.Пузько, доц.; В.А.Хворост, доц.

При проведении динамических испытаний объектов (машин, конструкций, узлов, соединений, отдельных деталей) на вибропрочность, вибронадежность и виброустойчивость путем кратковременного (импульсного) воздействия (нагружения) находит применение метод регистрации переходных процессов в конечном числе точек испытуемой конструкции [1,2].

В предположении, что испытуемый объект (конструкция) имеет дискретный спектр собственных частот, переходный процесс $x(t)$ диссипативной колебательной системы с конечным числом (n) степеней свободы описывается выражением [2,3]

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} X_{ak} exp(-h_k t) sin(\omega_k t + \varphi_k) , \qquad (1)$$

где X_{ak} - амплитуда процесса $x_k(t)$;

h_k - коэффициент демпфирования;

ω_k - круговая собственная частота диссипативной механической колебательной системы (МКС);

φ_k - фаза колебаний процесса $x_k(t)$;

После аппаратной регистрации и измерений n составляющих $x_k(t)$ $(k = \overline{1,n})$ переходного процесса $x(t)$ (1) производится обработка измерительной информации с целью определения инерционно-жесткостных, диссипативных и связанных с ними других параметров.

Для решения такого класса задач находит применение способ Лагранжа и его различные модификации.

При регистрации данных эксперимента переходный процесс получают в виде последовательности числовых значений в дискретные моменты времени с последующим выполнением z -преобразования и представлении получающихся при этом дробно-рациональных функций в виде цепных дробей Тилле и Лагранжа [2].

В настоящей работе излагается более рациональный с точки зрения объема, используемый для преобразований информации и степени помехоустойчивости способ, основанный на методе временных интервалов. Для реализации такого способа необходима регистрация длительности полупериода и его части переходных процессов по каждой степени свободы или каждой точке съема информации и применения следующей теоремы.

Теорема. Для линейных механических колебательных систем (ЛМКС) с конечным числом степеней свободы инерционно-жесткостные, диссипативные и связанные с ними другие параметры определяются при реализации режимов свободных колебаний и фиксации, по крайней мере, двух временных интервалов, больший из которых равен полупериоду свободных колебаний (промежутку времени между смежными моментами прохождения положения равновесия), а меньший - промежутку времени между первым моментом прохождения положения равновесия и моментом равенства нулю скорости колебаний.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем для двух случаев - МКС с одной степенью свободы и МКС с двумя степенями свободы.

Первый случай. Идентификация диссипативной МКС с одной степенью свободы.

Для k-й точки исследуемой конструкции при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости, имеет место уравнение [1,2]

$$y_{tt} + 2h_k y_t + \omega_{0k} y = 0\,, \tag{2}$$

где $h_k = b_k(2m_k)^{-1}$, $\omega_{0k}^2 = c_k m_k^{-1}$, $y_t = dy/dt$, $y_{tt} = d^2y/dt^2$, а переходный процесс описывается k-й компонентой (1).

Из осциллограммы свободных затухающих колебаний имеем (для упрощения записи в дальнейшем индекс k опускается)

$$\Delta_1 = t_2 - t_1,\ \ \Delta_2 = t_3 - t_1,\ \ \Delta_{32} = t_3 - t_2\,, \tag{3}$$

где t_1 - первый момент равенства нулю процесса $x(t)$; t_2 - момент равенства нулю процесса dx/dt; t_3 - второй момент равенства нулю процесса $x(t)$.

Принимая во внимание соотношение [2]

$$\Delta_1 = (\pi/2 - \delta)\omega_0^{-1}\,, \tag{4}$$

где δ - угол потерь,
и учитывая (3), имеем

$$\delta = \pi(1/2 - \Delta_1/\Delta_2)\,. \tag{5}$$

Учитывая (5) и соотношение [2]

$$tg\delta = h\omega_0^{-1}\,, \tag{6}$$

получим формулы для определения коэффициента h демпфирования и собственной частоты ω_0 консервативной колебательной системы (2):

$$h = (\pi/\Delta_2)ctg(\pi\,\Delta_1/\Delta_2)\,, \tag{7}$$

$$\omega_0 = (\pi/\Delta_2)/sin(\pi\,\Delta_1/\Delta_2)\,. \tag{8}$$

Определим инерционно-жесткостные параметры m, c модели (2). Для решения задачи применим метод пробной массы m^* и при учете (8) получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\omega_0^2 &= cm^{-1} = (\pi/\Delta_2)^2 / \sin^2(\pi\Delta_1/\Delta_2),\\ \bar{\omega}_0^{2} &= c(m+m^*)^{-1} = (\pi/\Delta_2^*)^2 / \sin^2(\pi\Delta_1^*/\Delta_2^*),\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где Δ_1, Δ_1^* - интервалы времени между нулевыми значениями перемещения и скорости при отсутствии пробной массы m^* и при установке на основной массе m пробной массы m^* при жестком соединении с массой m соответственно;

Δ_2, Δ_2^* - интервалы времени между смежными нулевыми значениями перемещения $x(t)$ при отсутствии пробной массы m^* и при установке на основной массе m пробной массы m^* соответственно при жестком соединении с массой m.

Из (9) определим параметры m, c по формулам:

$$m = m^*\left\{(\Delta_2^*/\Delta_2)^2\left[\sin(\pi\Delta_1^*/\Delta_2^*)/\sin(\pi\Delta_1/\Delta_2)\right]^2 - 1\right\}^{-1}, \qquad (10)$$

$$c = m^*\pi^2\left[\Delta_2^{*2}\sin^2(\pi\Delta_1^*/\Delta_2^*) - \Delta_2^2\sin^2(\pi\Delta_1/\Delta_2)\right]^{-1}. \qquad (11)$$

Принимая во внимание (7), (8), получим формулы для определения угла δ потерь, относительно затухания ξ, добротности Q, коэффициента ψ поглощения, ширины $2\Delta_0\omega$ полосы пропускания резонансного пика на уровне половинной мощности, логарифмического декремента Θ колебаний:

$$\delta = arctg\, h/\omega_1 = arctg\left[ctg(\pi\Delta_1/\Delta_2)\right], \qquad (12)$$

$$\xi = h\omega_0^{-1} = \cos(\pi\Delta_1/\Delta_2), \qquad (13)$$

$$Q = \omega_0(2h^{-1}) = \left[2\cos(\pi\Delta_1/\Delta_2)\right]^{-1}, \qquad (14)$$

$$\psi = 2\Theta = 4\pi ctg(\pi\Delta_1/\Delta_2), \qquad (15)$$

$$2\Delta_0\omega = \omega_0 Q^{-1} = \Delta_2^{-1}\cdot 2\pi ctg(\pi\Delta_1/\Delta_2), \qquad (16)$$

$$\Theta = 2\pi ctg(\pi\Delta_1/\Delta_2). \qquad (17)$$

Второй случай. Идентификация диссипативной МКС с двумя степенями свободы.

Сформулируем алгоритм для определения параметров МКС такого типа, основанный на методе, аналогичном методу динамических жесткостей, по этапам при реализации режимов свободных колебаний [3].

Первый этап. Возбуждаются свободные колебания массы m_2 и регистрируются первый и второй временные интервалы Δ_{12}, Δ_{22} между смежными моментами прохождения положения равновесия (интервал Δ_{22}) и между первым моментом прохождения положения равновесия и первым моментом равенства нулю скорости колебаний (интервал Δ_{12}).

Формулы для определения коэффициента h_2 демпфирования и парциальной частоты ω_{02} аналогичны соотношениям (7), (8):

$$h_2 = (\pi/\Delta_{22})ctg(\pi\,\Delta_{12}/\Delta_{22})\,, \tag{18}$$

$$\omega_{02} = (\pi/\Delta_{22})/sin(\pi\,\Delta_{12}/\Delta_{22})\,. \tag{19}$$

Инерционно-жесткостные параметры m_2, c_2 определим методом пробной массы m^*.

Второй этап. На массе m_2 устанавливается пробная масса m^* (при выполнении условий физической реализуемости таких операций) при жестком соединении с массой m_2.

Возбуждаются свободные колебания массы $(m_2 + m^*)$ и регистрируются первый и второй интервалы $\Delta^*_{12}, \Delta^*_{22}$ времени, аналогичные интервалам времени Δ_{12}, Δ_{22}. Аналогично (8) имеет место формула для определения частоты ω^*_{02}:

$$\sqrt{\frac{c_2}{m_2 + m^*}} = \omega^*_{02} = \left(\pi/\Delta^*_{22}\right)/sin\left(\pi\,\Delta^*_{12}/\Delta^*_{22}\right). \tag{20}$$

Третий этап. Принимая во внимание формулы (19) и (20), получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_2}{m_2} &= \left(\pi/\Delta_{22}\right)^2 \Big/ sin^2\left(\pi\,\Delta_{12}/\Delta_{22}\right), \\ \frac{c}{m_2 + m^*} &= \left(\pi/\Delta^*_{22}\right)^2 \Big/ sin^2\left(\pi\,\Delta^*_{12}/\Delta^*_{22}\right). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из (21) определим параметры m_2, c_2 по формулам:

$$m_2 = m^*\left\{\left(\Delta^*_{22}/\Delta_{22}\right)^2\left[sin\left(\pi\Delta^*_{12}/\Delta^*_{22}\right)/sin\left(\pi\Delta_{12}/\Delta_{22}\right)\right]^2 - 1\right\}^{-1}\,, \tag{22}$$

$$c_2 = m^*\pi^2\left[\Delta^{*2}_{22}sin^2\left(\pi\Delta^*_{12}/\Delta^*_{22}\right) - \Delta^2_{22}sin^2\left(\pi\Delta_{12}/\Delta_{22}\right)\right]^{-1}. \tag{23}$$

Четвертый этап. Производится жесткое соединение массы m_2 с массой m_1. Суммарная масса $(m_2 + m_1)$ устанавливается на инерционной платформе при гибком соединении с платформой (коэффициент жесткости c_1). Возбуждаются свободные колебания массы $(m_2 + m_1)$ и регистрируются первый и второй временные интервалы $\Delta^{**}_{12}, \Delta^{**}_{22}$ между смежными моментами прохождения положения равновесия (интервал Δ^{**}_{22}) и между первым моментом прохождения положения равновесия и первым моментом равенства нулю скорости колебаний (интервал Δ^{**}_{12}).

Формулы для определения коэффициента h_1^* демпфирования и парциальной частоты ω_{01}^* аналогичны соотношениям (7), (8):

$$h_1^* = \left(\pi / \Delta_{22}^{**}\right) ctg\left(\pi\, \Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{*}\right), \qquad (24)$$

$$\omega_{01}^* = \left(\pi / \Delta_{22}^{**}\right) / sin\left(\pi\, \Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{**}\right). \qquad (25)$$

Инерционно-жесткостные параметры m_1, c_1 определим методом пробной массы m^{**}. Причем в общем случае $m^{**} \neq m^*$. В частном случае возможно выполнение условия $m^{**} = m^*$.

Пятый этап. На суммарной массе $(m_2 + m_1)$ устанавливается пробная масса m^{**} при жестком соединении масс m_1, m_2, m^{**}. Возбуждаются свободные колебания массы $\left(m_2 + m_1 + m^{**}\right)$ и регистрируются первый и второй временные интервалы $\tilde{\Delta}_{12}, \tilde{\Delta}_{22}$ между смежными моментами прохождения положения равновесия (интервал $\tilde{\Delta}_{22}$) и между первым моментом прохождения положения равновесия и первым моментом равенства нулю скорости колебаний (интервал $\tilde{\Delta}_{12}$).

Аналогично формуле (8) имеет место соотношение для определения частоты $\tilde{\omega}_{01}$:

$$\tilde{\omega}_{01} = \sqrt{\frac{c_1}{m_2 + m_1 + m^{**}}} = \left(\pi / \tilde{\Delta}_{22}\right) / sin\left(\pi\, \tilde{\Delta}_{12} / \tilde{\Delta}_{22}\right). \qquad (26)$$

Шестой этап. Принимая во внимание формулы (25), (26), получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_1}{m_2 + m_1} &= \left(\pi / \Delta_{22}^{**}\right)^2 / sin^2\left(\pi\, \Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{**}\right), \\ \frac{c}{m_1 + m_2 + m_0^{**}} &= \left(\pi / \tilde{\Delta}_{22}\right)^2 / sin^2\left(\pi\, \tilde{\Delta}_{12} / \tilde{\Delta}_{22}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

В системе (27) неизвестными являются m_1, c_1, а m_2 определяется формулой (22).

Определим параметры m_1, c_1 по формулам:

$$m_1 = \frac{m^{**}\left(\Delta_{22}^{**}\right)^2 \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{**}\right)}{\tilde{\Delta}_{22}^2 \sin^2\left(\pi\tilde{\Delta}_{12} / \tilde{\Delta}_{22}\right) - \Delta_{22}^{**} \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{**}\right)} - m^* \left[\left(\frac{\Delta_{22}^{**}}{\Delta_{22}}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{**}\right)}{\sin^2\left(\pi\Delta_{12} / \Delta_{22}\right)} - 1\right]^{-1}, \qquad (28)$$

$$c_1 = \left(m_2 + m_1\right)\left(\frac{\pi}{\Delta_{22}^{**}}\right)^2 sin^{-2}\left(\pi\Delta_{12}^{**} / \Delta_{22}^{**}\right), \qquad (29)$$

$m = m_1 + m_2$ определяется при учете (22), (28),

$$m_1 + m_2 = \frac{m^{**}\left(\Delta_{22}^{**}\right)^2 \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right)}{\tilde{\Delta}_{22}^2 \sin^2\left(\pi\tilde{\Delta}_{12}/\tilde{\Delta}_{22}\right) - \Delta_{22}^{**} \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right)}. \tag{30}$$

Соотношение (29) при учете (30) имеет вид

$$c_1 = \frac{\pi^2 m^{**}}{\tilde{\Delta}_{22}^2 \sin^2\left(\pi\tilde{\Delta}_{12}/\tilde{\Delta}_{22}\right) - \left(\Delta_{22}^{**}\right)^2 \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right)}. \tag{31}$$

Определим коэффициент h_1 демпфирования на основании следующих соображений.

По определению

$$h_1 = b_1/2m_1. \tag{32}$$

Для случая жесткого соединения масс m_1 и m_2 имеет место соотношение

$$h_1^* = b_1/2\left(m_1 + m_2\right) = b_1 / \left[2m_1\left(1 + m_2 / m_1\right)\right]. \tag{33}$$

Принимая во внимание (32), (33), получим

$$h_1 = h_1^*\left(1 + m_2/m_1\right). \tag{34}$$

Из (34) при учете (22), (24), (28) имеем:

$$h_1 = \left(\pi/\Delta_{22}^{**}\right) ctg\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right)\left\{1 + m^* \middle/ \left\{\left[\left(\Delta_{22}^{**}/\Delta_{22}\right)^2 \times \right.\right.\right.$$
$$\left. \times \frac{\sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right)}{\sin^2\left(\pi\Delta_{12}/\Delta_{22}\right)} - 1\right] \times m^{**}\left(\Delta_{22}^{**}\right)^2 \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right) / \tag{35}$$
$$\left. \left. / \left[\tilde{\Delta}_{22} \sin^2\left(\pi\tilde{\Delta}_{12}/\tilde{\Delta}_{22}\right) - \Delta_{22}^{**} \sin^2\left(\pi\Delta_{12}^{**}/\Delta_{22}^{**}\right)\right] - m_0^*\right\}\right\}.$$

Таким образом, в работе сформулирована теорема и приведены алгоритмы, необходимые для решения задач параметрической идентификации диссипативных МКС с одной и двумя степенями свободы. Теорема и алгоритмы базируются на методе двух неравных между собой временных интервалов, больший из которых равен интервалу времени между смежными моментами прохождения положения равновесия, а меньший – интервалу времени между первым моментом прохождения положения равновесия и моментом равенства нулю скорости колебаний.

SUMMARY

In this work a theorem is formulated and algorithms are given for parametric identifiability of dissipative mechanical oscillation systems with one and two freedom degrees. Algorithms are based on the method of two-time intervals one of which is equal to time interval between contiguous passing moments of equilibrium position, and another - to time interval between the first passing moment of equilibrium position and the moment, equal to zero oscillation speed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Божко А.Е., Личкатый Е.А., Полищук О.Ф. и др. Резонансные виброиспытательные системы / Под ред. Божко А.Е.; АН Украины, Ин-т проблем машиностроения. - Киев: Наук. думка, 1992. - 248 с.

2. Редько С.Ф., Ушкалов В.Ф., Яковлев В.П. Идентификация механических систем. Определение динамических характеристик и параметров. - Киев: Наук. думка, 1985. - 216 с.
3. Быховский Н.Н. Основы теории вибрационной техники.-М.: Машиностроение, 1968. - 362 с.

Поступила в редколлегию 5 декабря 1998 г.

УДК 534.1: 681.5

О НЕКОТОРЫХ ФОРМАХ КРИТЕРИЕВ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

И.Д. Пузько, доц.

При экспериментально-теоретическом исследовании и анализе моделей в виде линейных колебательных систем с конечным числом степеней свободы и реализации режимов вынужденных колебаний в форме сканирования частоты ω возбуждающего воздействия по диапазону частот формируется множество аналитических соотношений, на основе которых могут быть получены формы частотно-скоростного, амплитудно-скоростного и амплитудно-частотного критериев идентифицируемости (КИ) [1].

Первая и вторая формы частотно-скоростного КИ обосновываются следующими утверждениями.

Утверждение 1 Первая форма частотно-скоростного КИ формируется как равная нулю сумма счетного числа слагаемых, число которых равно числу скоростей сканирования частоты возбуждающего воздействия, причем каждое из слагаемых является произведением двух сомножителей: первый сомножитель– резонансная частота динамического резонансного пика, индекс которого представляет собой ряд в виде последовательного перебора индексов скоростей сканирования, образующих возрастающую последовательность целых чисел, второй сомножитель равен разности двух скоростей сканирования, причем индекс уменьшаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному слева от индекса первого сомножителя, а индекс вычитаемого соответствует индексу в последовательности скоростей сканирования, расположенному справа от индекса первого сомножителя, при этом перебор последовательности индексов или ее фрагмент образуют замкнутый цикл.

Таким образом, для последовательности индексов в виде натурального ряда чисел 1, 2, 3, ..., (*n*-1), *n* первая форма КИ для *k*-го резонансного пика имеет вид

$$\omega_{1k}\left(V_n - V_2\right) + \omega_{2k}\left(V_1 - V_3\right)+\ldots+\omega_{nk}\left(V_{n-1} - V_1\right) = 0.$$

Утверждение 2 Вторая форма частотно-скоростного КИ формируется как равная нулю сумма счетного числа слагаемых, число которых равно числу скоростей сканирования частоты возбуждающего воздействия, причем каждое слагаемое является произведением двух сомножителей, один из которых – скорость сканирования частоты, индекс которой представляет собой ряд в виде последовательного перебора индексов скоростей сканирования, образующих возрастающую последовательность целых чисел, второй сомножитель равен разности резонансных частот динамических резонансных пиков, причем индекс уменьшаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному справа от индекса первого сомножителя, а индекс вычитаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному справа от индекса