

2. Редько С.Ф., Ушкалов В.Ф., Яковлев В.П. Идентификация механических систем. Определение динамических характеристик и параметров. - Киев: Наук. думка, 1985. - 216 с.
3. Выховский Н.Н. Основы теории вибрационной техники. - М.: Машиностроение, 1968. - 362 с.

Поступила в редколлегию 5 декабря 1998 г.

УДК 534.1: 681.5

О НЕКОТОРЫХ ФОРМАХ КРИТЕРИЕВ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

И.Д. Пузько, доц.

При экспериментально-теоретическом исследовании и анализе моделей в виде линейных колебательных систем с конечным числом степеней свободы и реализации режимов вынужденных колебаний в форме сканирования частоты ω возбуждающего воздействия по диапазону частот формируется множество аналитических соотношений, на основе которых могут быть получены формы частотно-скоростного, амплитудно-скоростного и амплитудно-частотного критериев идентифицируемости (КИ) [1].

Первая и вторая формы частотно-скоростного КИ обосновываются следующими утверждениями.

Утверждение 1 Первая форма частотно-скоростного КИ формируется как равная нулю сумма счетного числа слагаемых, число которых равно числу скоростей сканирования частоты возбуждающего воздействия, причем каждое из слагаемых является произведением двух сомножителей: первый сомножитель – резонансная частота динамического резонансного пика, индекс которого представляет собой ряд в виде последовательного перебора индексов скоростей сканирования, образующих возрастающую последовательность целых чисел, второй сомножитель равен разности двух скоростей сканирования, причем индекс уменьшаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному слева от индекса первого сомножителя, а индекс вычитаемого соответствует индексу в последовательности скоростей сканирования, расположенному справа от индекса первого сомножителя, при этом перебор последовательности индексов или ее фрагмент образуют замкнутый цикл.

Таким образом, для последовательности индексов в виде натурального ряда чисел 1, 2, 3, ..., (n-1), n первая форма КИ для k-го резонансного пика имеет вид

$$\omega_{1k}(V_n - V_2) + \omega_{2k}(V_1 - V_3) + \dots + \omega_{nk}(V_{n-1} - V_1) = 0.$$

Утверждение 2 Вторая форма частотно-скоростного КИ формируется как равная нулю сумма счетного числа слагаемых, число которых равно числу скоростей сканирования частоты возбуждающего воздействия, причем каждое слагаемое является произведением двух сомножителей, один из которых – скорость сканирования частоты, индекс которой представляет собой ряд в виде последовательного перебора индексов скоростей сканирования, образующих возрастающую последовательность целых чисел, второй сомножитель равен разности резонансных частот динамических резонансных пиков, причем индекс уменьшаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному справа от индекса первого сомножителя, а индекс вычитаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному справа от индекса

...аемого, при этом перебор последовательности индексов скоростей сканирования или ее фрагмент образуют замкнутый цикл.

Таким образом, для последовательности индексов в виде натурального ряда чисел $1, 2, \dots, (n-1), n$ вторая форма КИ для k -го резонансного пика имеет вид

$$V_1(\omega_{2k} - \omega_{3k}) + V_2(\omega_{3k} - \omega_{4k}) + \dots + V_n(\omega_{1k} - \omega_{2k}) = 0.$$

Доказательство. При реализации трех режимов сканирования частоты возбуждающего воздействия со скоростями V_i, V_j, V_m при условиях $|V_i| < |V_j| < |V_m|$, $\text{sign} V_i = \text{sign} V_j = \text{sign} V_m = 1$ или $\text{sign} V_i = \text{sign} V_j = -\text{sign} V_m = -1$ соотношения для определения резонансной частоты ω_{0k} k -го статического резонансного пика имеют вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{0k}^{ij} &= (\omega_{ik} V_j - \omega_{jk} V_i) / (V_j - V_i), \\ \omega_{0k}^{im} &= (\omega_{ik} V_m - \omega_{mk} V_i) / (V_m - V_i), \\ \omega_{0k}^{jm} &= (\omega_{jk} V_m - \omega_{mk} V_j) / (V_m - V_j). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Очевидна необходимость выполнения приближенного равенства

$$\omega_{0k}^{ij} \approx \omega_{0k}^{im} \approx \omega_{0k}^{jm}. \quad (2)$$

Принимая во внимание (1), (2), получим соотношение

$$\omega_{ik}(V_m - V_j) + \omega_{jk}(V_i - V_m) + \omega_{mk}(V_j - V_i) = 0 \quad (3)$$

$$V_i(\omega_{jk} - \omega_{mk}) + V_j(\omega_{mk} - \omega_{ik}) + V_m(\omega_{ik} - \omega_{jk}) = 0. \quad (4)$$

Таким образом, соотношения (3) и (4) обосновывают первую и вторую формы частотно-скоростного КИ.

Первая и вторая формы амплитудно-скоростного КИ обосновываются следующими утверждениями.

Утверждение 3 Первая форма амплитудно-скоростного КИ формируется как равная нулю сумма счетного числа слагаемых, число которых равно числу скоростей сканирования частоты ω возбуждающего воздействия, каждое слагаемое является произведением двух множителей, один из которых — максимум огибающей полуразмахов колебаний динамического резонансного пика, индекс которого представляет собой ряд в виде последовательного перебора индексов ряда скоростей сканирования частоты, образующих возрастающую последовательность целых чисел, второй сомножитель равен разности квадратов двух скоростей сканирования, причем индекс уменьшаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному справа от индекса первого сомножителя, а индекс вычитаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному слева от индексов первого сомножителя, при этом перебор последовательности индексов или ее фрагмент образуют замкнутый цикл.

Утверждение 4 Вторая форма амплитудно-скоростного КИ формируется как равная нулю сумма счетного числа слагаемых, число которых равно числу скоростей сканирования частоты ω возбуждающего воздействия, каждое слагаемое является произведением двух множителей, один сомножитель — квадрат скорости сканирования

частоты ω , индекс которого представляет собой ряд последовательного перебора индексов ряда скоростей сканирования частоты, образующих возрастающую последовательность целых чисел, второй сомножитель — разность максимумов огибающих полуразмахов колебаний динамически резонансных пиков, причем индекс уменьшаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному слева от индекса первого сомножителя, а индекс вычитаемого соответствует индексу в последовательности индексов скоростей сканирования, расположенному справа от индекса первого сомножителя. При этом перебор последовательности индексов или ее фрагмент образуют замкнутый цикл.

Доказательство. При реализации множества режимов сканирования частоты ω возбуждающего воздействия со скоростями $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ сканирования при условиях $|V_1| < |V_2| < \dots < |V_n|$ $\text{sign}V_1 = \text{sign}V_2 = \dots = \text{sign}V_n = 1$ или $\text{sign}V_1 = \text{sign}V_2 = \dots = \text{sign}V_n = -1$ для k -го статического резонансного пика в первом приближении имеют место соотношения [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} Y_{0k}^{(1)} &= (Y_1 V_2^2 - Y_2 V_1^2) / (V_2^2 - V_1^2) \\ Y_{0k}^{(2)} &= (Y_1 V_3^2 - Y_3 V_1^2) / (V_3^2 - V_1^2) \\ Y_{0k}^{(n-1)} &= (Y_1 V_n^2 - Y_n V_1^2) / (V_n^2 - V_1^2) \\ Y_{0k}^{(S)} &= (Y_{n-1} V_n^2 - Y_n V_{n-1}^2) / (V_n^2 - V_{n-1}^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $S = C_n^2 = n! / [2!(n-2)!]$,

$Y_i (i = \overline{1, n})$ — максимальное значение огибающей полуразмахов колебаний i -го динамического резонансного пика, соответствующего скорости V_i сканирования частоты.

Очевидна необходимость приближенного равенства

$$Y_{0k}^1 = Y_{0k}^2 = \dots = Y_{0k}^{n-1} = \dots = Y_{0k}^S. \quad (6)$$

Принимая во внимание (5), (6), получим соотношения:

$$\begin{aligned} Y_{1k}(V_2^2 - V_3^2) + Y_{2k}(V_3^2 - V_1^2) + \dots + Y_{nk}(V_{n+1}^2 - V_{n-1}^2) + \dots + \\ + Y_{Sk}(V_1^2 - V_{S-1}^2) = 0 \quad \text{или} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_1^2(Y_{Sk} - Y_{2k}) + V_2^2(Y_{1k} - Y_{3k}) + \dots + V_n^2(Y_{(n-1)k} - Y_{(n+1)k}) + \dots + \\ + V_S^2(Y_{S-1,k} - Y_{1,k}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, соотношения (7), (8) обосновывают первую и вторую формы амплитудно-скоростных КИ.

Утверждение 5 Первая форма амплитудно-частотного КИ формируется как частное, равное квадрату ширины полосы пропускания резонансного пика на уровне половинной мощности, причем делимое — среднее арифметическое суммы счетного числа слагаемых, количество которых равно числу скоростей сканирования частоты ω возбуждающего воздействия, каждое слагаемое равно квадрату разности между

резонансными частотами динамического и статического резонансных пиков, а делитель — разность между максимумом огибающей полуразмахов колебаний статического резонансного пика и средним арифметическим суммы максимумов огибающих полуразмахов колебаний динамических резонансных пиков, число которых равно числу скоростей сканирования частоты возбуждающего воздействия.

Форма амплитудно-частотного КИ обосновывается следующим соотношением:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega_{ik} - \omega_{0k})^2 \left/ \left(Y_{0k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ik} \right) \right. = (2\Delta_{0k}\omega)^2. \quad (9)$$

Доказательство. Для k -го статического резонансного пика при реализации режима сканирования частоты ω возбуждающего воздействия со скоростью V_i при учете [1, 2] имеет место соотношение:

$$Y_{0k} - Y_{ik} = (\omega_{ik} - \omega_{0k})^2 \tau_k^2, \quad (10)$$

$$\tau_k = Q_k / \omega_{0k};$$

Y_{0k} — максимум огибающей полуразмахов колебаний k -го статического резонансного пика;

Y_{ik} — максимум огибающей полуразмахов колебаний динамического резонансного пика, соответствующего скорости V_i сканирования частоты;

ω_{0k} — резонансная частота k -го статического резонансного пика;

Q_k — добротность k -го статического резонансного пика.

При реализации счетного множества режимов сканирования частоты возбуждающего воздействия со скоростями $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ при выполнении условий $|V_1| < |V_2| < \dots < |V_n|$, $\text{sign}V_1 = \text{sign}V_2 = \dots = \text{sign}V_n = 1$ и $\text{sign}V_1 = \text{sign}V_2 = \dots = \text{sign}V_n = -1$ и при учете (9) имеет место система соотношений:

$$\left. \begin{aligned} Y_{0k} - Y_{1k} &= (\omega_{1k} - \omega_{0k})^2 \tau_k^2 \\ Y_{0k} - Y_{2k} &= (\omega_{2k} - \omega_{0k})^2 \tau_k^2 \\ Y_{0k} - Y_{ik} &= (\omega_{ik} - \omega_{0k})^2 \tau_k^2 \\ Y_{0k} - Y_{nk} &= (\omega_{nk} - \omega_{0k})^2 \tau_k^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из (11) следует соотношение

$$\tau_k^2 \sum_{i=1}^n (\omega_{ik} - \omega_{0k})^2 \left/ \sum_{i=1}^n (Y_{0k} - Y_{ik}) \right. = 1. \quad (12)$$

После простых преобразований из (12) следует соотношение

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega_{ik} - \omega_{0k})^2}{\left(Y_{0k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ik} \right)} = \left(\frac{\omega_{0k}}{Q_k} \right)^2 = (2\Delta_{0k}\omega)^2, \quad (13)$$

где $2\Delta\omega_k = \omega_{0k}/Q_k$ — ширина полосы пропускания k -го статического резонансного пика на уровне половинной мощности.

Систему (11) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y_{0k} - Y_{1k}}{Y_{0k} - Y_{2k}} &= \left(\frac{\omega_{1k} - \omega_{0k}}{\omega_{2k} - \omega_{0k}} \right)^2 \\ \frac{Y_{0k} - Y_{ik}}{Y_{0k} - Y_{i+1,k}} &= \left(\frac{\omega_{ik} - \omega_{0k}}{\omega_{i+1,k} - \omega_{0k}} \right)^2 \\ \frac{Y_{0k} - Y_{nk}}{Y_{0k} - Y_{n-1,k}} &= \left(\frac{\omega_{nk} - \omega_{0k}}{\omega_{n-1,k} - \omega_{0k}} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из (14) следует соотношение

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Y_{0k} - Y_{ik}}{Y_{0k} - Y_{jk}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{\omega_{ik} - \omega_{0k}}{\omega_{jk} - \omega_{0k}} \right)^2 \quad (15)$$

Из соотношения (15) следует утверждение.

Утверждение 6 Вторая форма амплитудно-частотного КИ формируется в виде равенства суммы частных от деления разностей максимумов огибающих полуразмахов колебаний одного статического и двух динамических резонансных пиков, соответствующих конечным и разным скоростям сканирования частоты возбуждающего механическую колебательную систему воздействия, сумме квадратов частных от деления разности частот максимумов огибающих полуразмахов колебаний статического и двух динамических резонансных пиков, соответствующих конечным и разным скоростям сканирования частоты возбуждающего механическую колебательную систему воздействия.

Таким образом, получены аналитические соотношения, устанавливающие зависимость показателей динамических и статических резонансных пиков, которые могут найти применение при решении задач параметрической идентификации механических колебательных систем, амплитудно-частотные характеристики которых имеют конечное число резонансных пиков по диапазону частот.

SUMMARY

This work grounds different forms of speed-frequency, speed-amplitude, amplitude-frequency criteria of identifiability of linear oscillation systems with final freedom degree number, which define dependence between frequency scanning speed and frequencies of peak maxima, between frequency scanning speed and maxima of envelope amplitudes of dynamic resonance peak oscillations, between maxima of envelope amplitudes of static and dynamic resonance peak oscillations and frequencies of these maxima.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пузько И.Д. Параметрические зависимости статических и динамических резонансных пиков амплитудно-частотных характеристик // Вестник СумГУ, 1995. — №3. — С.80-83.
2. Пузько И.Д., Хворост В.А. Идентификация колебательных систем методом сканирования частоты // Вестник СумГУ, 1996. — №1(5). — С.50-56.

Поступила в редколлегию 5 декабря 1998 г.