УДК 621.24

О НЕКОТОРЫХ НЕТОЧНОСТЯХ В КУРСАХ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С. Д. Косторной, *д-р техн. наук, профессор;*
Н. С. Мартынова, *канд. техн. наук,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В общем случае вихревого движения невязкой жидкости частицы, движущиеся по разным линиям тока, обладают неодинаковым количеством энергии. Постоянная Бернулли одинакова для всех линий тока только тогда, когда поток потенциальный, вихревой винтовой или вихревой, но у которого вектор скорости перпендикулярен вектору вихря.

Однако до сих пор в курсах технической и теоретической гидромеханики [3, 5-9] имеются утверждения, что энергия жидкости одинакова только на каждой линии тока и на каждой вихревой линии. В действительности в процессе течения взаимное расположение линий тока и вихревых линий изменяется, и поэтому последнее утверждение является ошибочным.

Ключевые слова: *уравнение Эйлера-Громеки, энергия жидкости, линии тока, вихри, вихревое движение.*

У загальному випадку вихрового руху нев'язкої рідини частинки, що рухаються по різних лініях струму, мають неоднакову кількість енергії. Константа Бернуллі є однаковою для усіх ліній струму лише тоді, коли потік є потенціальним, вихровим гвинтовим або вихровим, але у якого вектор швидкості перпендикулярний до вектора вихору.

Але до цього часу в курсах технічної та теоретичної гідромеханіки [3, 5-9] містяться твердження про те, що енергія рідини є однаковою лише на кожній лінії струму і на кожній вихровій лінії. У дійсності в процесі проходження взаємне розміщення ліній струму та вихрових ліній змінюється, тому останнє твердження є помилковим.

Ключові слова: *рівняння Ейлера-Громеки, енергія рідини, лінії струму, вихори, вихровий рух.*

ВВЕДЕНИЕ

В курсах и в отдельных работах по гидродинамике [3,5-9] встречаются утверждения, что при установившемся вихревом движении частицы идеальной жидкости, находящиеся на данной линии вихря, обладают одной и той же энергией, т. е. удельная энергия не изменяется по длине вихревой линии. Это несоответствующее явлению утверждение происходит, с нашей точки зрения, от неправильного истолкования уравнений Эйлера-Громеки.

Уравнения движения идеальной жидкости выражают закон изменения скорости движения частицы жидкости (или ускорения) в направлении, совпадающем с касательной к линии тока. Воспользовавшись принципом Даламбера, можно получить уравнение движения частицы жидкости в форме уравнения Ейлера, если объемные силы $\vec{F}$ имеют потенциал Π, т. е. $\vec{F} = -grad\,\Pi$ и существует функция давления (движение баротропно) $R(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p\ ,$$

или

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p\ , \qquad (1)$$

где $\vec{F}$ - единичная массовая сила, имеющая потенциал;

ρ - плотность жидкости;

$\vec{V}$ - скорость движения частицы жидкости;

p - давление;

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ - ускорение частицы жидкости, индивидуальная или субстанциональная производная;

$\left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{V})$ - конвективная производная вектора $\vec{V}$ (символическая комбинация скалярного произведения оператора набла $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \imath + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ и вектора скорости $\vec{V}$);

$\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ – локальное ускорение изменения скорости в фиксированной точке пространства.

В проекциях на оси декартовых прямоугольных координат выражение (1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Если уравнение Эйлера (1′) освободить от символической комбинации $\left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{V}$ и выделить в левой части градиентное слагаемое, тогда получим следующую модификацию уравнения Эйлера, предложенную Громека и Ламбом:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + rot\vec{V} \times \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p\ . \qquad (3)$$

Для дальнейшего наибольший интерес представляет случай, когда объемные силы имеют потенциал Π, т. е. $\vec{F} = -grad\,\Pi$, и существует функция давления (движение баротропно) $R(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$.

Обозначим $\frac{V^2}{2} + R + \Pi = B$, $\vec{\Omega} = rot\vec{V}$, тогда уравнение (3) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{V} + grad\, B = 0\,, \tag{4}$$

а в проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y &= 0, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial y} + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z &= 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial z} + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Трехчлен Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + R + \Pi = B \tag{6}$$

трактуют как полную механическую энергию в данной точке, отнесенную к единице массы, т. е. по обычной терминологии, как полную удельную механическую энергию. Действительно, первое слагаемое в левой части представляет удельную кинетическую энергию, третье слагаемое — удельную потенциальную энергию объемных сил. Так как давления образуют скалярное поле, для которого понятия потенциала или потенциальной энергии не существует, то функция давления R в случае $\rho = const$, равная p/ρ, будет как потенциал давлений. Так как уравнение (4) связывает чисто кинематические величины $\vec{V}$ и $\vec{\Omega} = rot\vec{V}$ с динамическими характеристиками Π и R, тогда, записывая уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{V} = -grad\, B\,, \tag{7}$$

можно сделать вывод, что при баротропном движении идеальной жидкости под действием потенциального поля объемных сил, левая кинематическая часть этого равенства представляет собой потенциальный вектор. Следовательно, не всякое поле скоростей может быть создано в идеальной жидкости, баротропно движущейся под действием потенциального поля объемных сил, а только такое, которое удовлетворяет равенству

$$rot\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{V}\right) = 0\,, \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + rot\left(\vec{\Omega} \times \vec{V}\right) = 0\,. \tag{9}$$

Раскрывая дифференциальную операцию вихря от векторного произведения (8) по правилу векторного анализа [2]

$$rot \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{V}\right) = \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{\Omega} - \left(\vec{\Omega} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{V} + \vec{\Omega} \cdot div\vec{V} - \vec{V} \cdot div \cdot \vec{\Omega}$$

и опуская в этом равенстве последний член как тождественно равный нулю, уравнение (9) запишем в следующей форме:

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\cdot\Omega = \left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V} - \vec{\Omega}\cdot div\vec{V}\,. \tag{10}$$

Полученное выражение, используя определение индивидуальной производной по времени, будет иметь вид

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V} - \vec{\Omega}\cdot div\vec{V}\,. \tag{11}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (11), равное

$$\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V} = \vec{\Omega}\left(\nabla\vec{V}\right) = \vec{\Omega}\dot{S} - \vec{\Omega}\times\frac{1}{2}\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\dot{S}\,, \tag{12}$$

выражает эффект деформации вектора $\vec{\Omega}$ скоростным полем, где $\dot{S}$ - производная по времени симметричного тензора деформации скоростного поля. Второе слагаемое ($-\vec{\Omega}\cdot div\vec{V}$) определяет влияние сжимаемости.

Уравнение (11) называют уравнением динамической возможности движения идеальной сжимаемой среды или уравнением Гельмгольца-Фридмана, которое обобщает уравнение Гельмгольца о сохранении вихревых линий, относящееся к случаю несжимаемой жидкости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что идеальная жидкость под действием потенциального поля объемных сил с потенциалом Π совершает стационарное баротропное движение с функцией давления R. Тогда первый член в уравнении (7) равен нулю, а умножая обе части (7) скалярно на вектор скорости $\vec{V}$, получим в силу перпендикулярности последнего слагаемого вектору $\vec{V}$ следующее выражение:

$$\vec{V}\cdot grad\,B \equiv V\left(\frac{\vec{V}}{V}\cdot grad\,B\right) = 0\,.$$

Учитывая определение производной по направлению [2], из последнего выражения следует, что

$$\frac{dB}{ds} = 0\,, \tag{13}$$

где символ d/ds означает производную, взятую вдоль траектории или линии тока. Из равенства (13) следует, что вдоль линии тока трехчлен Бернулли B имеет одно и то же значение:

$$B = \frac{V^2}{2} + R + \Pi = const \text{ (вдоль линии тока).} \tag{14}$$

Полученное равенство можно рассматривать как первый интеграл уравнения Эйлера, справедливый в случае стационарного движения при наличии функции давления, представляющей потенциал объемного действия поверхностных сил и потенциала объемных сил. Этот интеграл, полученный путем скалярного умножения обеих частей уравнения (7) на вектор скорости $\vec{V}$, выражает следующую теорему Бернулли:

При стационарном баротропном движении идеальной жидкости под действием потенциальных объемных сил сумма кинетической энергии единицы массы, функции давлений и приведенного к единице массы потенциала объемных сил сохраняет вдоль линии тока (траектории) постоянное значение.

Интеграл Бернулли можно получить и непосредственно из уравнения Эйлера (1) без преобразования его к форме Громека-Ламба (3).

Действительно, переписывая в условиях теоремы уравнение (1) в виде

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -grad(\Pi + R)$$

и умножая его скалярно на вектор $\vec{V}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\vec{V} \cdot grad(\Pi + R).$$

По определению индивидуальной производной по времени от скалярной функции в случае стационарного движения [2], будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \vec{V} \cdot grad\left(\frac{V^2}{2}\right) \quad \text{или} \quad \vec{V} \cdot grad\left(\frac{V^2}{2} + R + \Pi\right) = 0,$$

что, по предыдущему, и приводит к равенству (14).

Из уравнения (4) в случае стационарного движения следует постоянство величины B вдоль любой вихревой линии, если умножить обе части уравнения (7) скалярно на $\vec{\Omega}$ и рассуждать так же, как и при выводе равенства (14), предполагая, что частица жидкости движется по вихревой линии

$$\vec{\Omega} \cdot grad\, B \equiv \Omega\left(\frac{\vec{\Omega}}{\Omega} \cdot grad\, B\right) = \Omega \frac{dB}{dl} = 0,$$

где d/dl определяет дифференцирование вдоль дуги вихревой линии. Из полученного выражения в предположении, что жидкость движется по вихревой линии, следует, что и вдоль вихревой линии величина B имеет одно и то же значение:

$$B = \frac{V^2}{2} + R + \Pi = const \text{ (вдоль вихревой линии).} \qquad (15)$$

Полученный результат в работах [3,5-10] и других, в которых считается, что энергия идеальной жидкости сохраняется постоянной при стационарном течении на вихревой линии во всех случаях стационарного течения, за исключением работ [1,2], в которых данный вопрос не рассматривался, является ошибочным, так как использовано неправильное объяснение результата (15).

При стационарном вихревом движении вектор $\vec{\Omega} \times \vec{V} = \vec{C}$ образует потенциальное векторное поле с потенциалом B, включая случай винтового потока, когда $\vec{\Omega} \times \vec{V} = 0$. Но именно при этом условии через каждую точку пространства в векторном поле нельзя провести поверхность, ортогональную к векторным линиям поля вектора $\vec{\Omega} \times \vec{V} = 0$, на которой бы располагались векторы $\vec{\Omega} \cdot u \cdot \vec{V}$ и проходящей через эту точку, так как этот вектор имеет модуль, равный нулю. Это так называемый вихревой винтовой поток, для которого не существует нормальных к линиям тока сечений, так как необходимым и достаточным условием существования поверхностей, нормальных к линиям тока, является условие $(\vec{\Omega} \bullet \vec{V}) = 0$, когда вектор скорости перпендикулярен вектору вихря [4]. Движение жидкости при условии $(\vec{\Omega} \bullet \vec{V}) = 0$ называют сложнослоистым или квазипотенциальным. Ортогональные поверхности являются поверхностями уровня трехчлена Бернулли и вместе с тем полной удельной механической энергии. Касательные плоскости к этим поверхностям содержат векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{V}$. Поверхности уровня в таком случае можно получить, взяв какую-нибудь линию тока и провести через все ее точки вихревые линии; эти вихревые линии образуют вихревую поверхность - поверхность уровня, проходящую через данную линию тока. Можно поступить и иначе: взяв некоторую вихревую линию, через все ее точки провести линии тока; тогда и эти линии тока образуют поверхность тока, проведенную через данную вихревую линию (рис.1).

Значения констант в правых частях равенств (14) и (15) имеют разные значения вдоль разных линий тока или вихревых линий. Одинаковые значения констат имеют лишь те линии тока, которые проходят через точки одной и той же вихревой линии, или вихревые линии, проведенные через точки одной и той же линии тока. Значения констант в этих равенствах определяются величиной трехчлена Бернулли в какой-нибудь одной почему-либо характерной или заданной наперед точке линии тока или вихревой линии. В общем случае константы эти различны для линий тока или вихревых линий, не лежащих на одной и той же поверхности тока или вихревой поверхности уровня полной механической энергии.

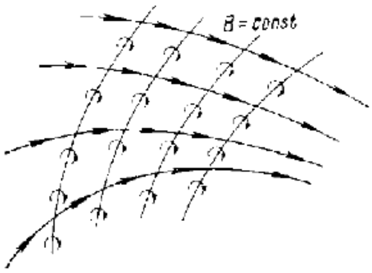

Рисунок 1 - Вихретоковая поверхность - поверхность уровня

Таким образом, если во всех точках пространства выполняется векторное равенство

$$\vec{\Omega} \times \vec{V} = 0\,, \tag{16}$$

то поверхностей уровня нет, хотя для элементарной струйки тока можно провести нормальное к ней сечение. Иначе обстоит дело с трубками конечного размера. Для того чтобы такие трубки имели сечения, нормальные к линиям тока внутри трубок и на их поверхности, то необходимо выполнение условия существования поверхностей, нормальных к линиям тока [4]:

$$\vec{V} \cdot rot\vec{V} = 0\,. \tag{17}$$

Рассматривая семейство поверхностей $\varphi(x_1, x_2, x_3) = const$, пересекающих линии тока, условием ортогональности линий тока этим поверхностям будет скалярная функция $grad\varphi = \lambda\overline{V}$, взяв от обеих частей которого операцию rot, слева получим нуль, а справа $rot(\lambda\overline{V}) = \lambda\, rot\overline{V} + grad\,\lambda \times \overline{V}$. Умножая обе части таким образом полученного равенства $0 = \lambda\, rot\overline{V} + grad\,\lambda \times \overline{V}$ скалярно на $\overline{V}$ и учитывая, что второе слагаемое справа перпендикулярно к вектору $\overline{V}$, убедимся, что условием существования ортогональных к линиям тока поверхностей будет условие (17).

Таково ограничение, накладываемое на поле скоростей, без выполнения которого невозможно существование сечений трубок тока, нормальных к линиям тока.

Равенство (17) выполняется в следующих трех случаях:

а) $\vec{\Omega} = 0$ – движение безвихревое или потенциальное;

б) $\vec{\Omega} \parallel \vec{V}$ - движение вихревое, но вихревые линии совпадают с линиями тока; при котором частицы в своем мгновенном вращении поворачиваются вокруг касательных к линиям тока. Такое движение называется винтовым. С винтовым движением приходится иметь дело, например, при рассмотрении так называемых «свободных» вихрей, сходящих с поверхности крыла или лопасти конечного размаха;

в) $\vec{V} \cdot rot\vec{V} = V_1\Omega_1 + V_2\Omega_2 + V_3\Omega_3 = 0$, движение вихревое, но которое характеризуется взаимно перпендикулярным расположением векторов $\vec{\Omega}$ и $\vec{V}$ и выполнением необходимого и достаточного условия существования ортогональных к линиям тока поверхностей (живых сечений). Такая форма течения жидкости называется квазипотенциальным или слоистым.

Сравнивая случаи б) и в), когда энергия жидкости в вихревом потоке на вихревой линии остается постоянной, необходимо отметить следуещее:

1) векторное произведение в случае б) представляет собой нулевой вектор, модуль которого равен нулю, т. е. когда начало и конец вектора совпадают.

При такой форме течения не происходит силового взаимного влияния на линии тока и вихревые линии, а свободные вихри движутся по линиям тока со скоростью потока;

2) скалярное произведение двух векторов в случае в) представляет собой скаляр, равный максимальной величине призведения модулей вектора скорости и вектора вихря, т. е. градиенту изменения полной механической энергии в потоке жидкости или максимальным взаимным влиянием линий тока и вихревых линий. В этом случае вихревой поток может быть расслоен на поверхности, на которых энергия имеет некоторое постоянное значение.

Рассматривая общий случай вихревого течения, когда линии тока и линии вихря не совпадают и, следовательно, когда движение частиц жидкости по линии вихря невозможно, тогда изменение удельной энергии по любому перемещению, в том числе и по линии вихря, будет переходить с одной линии тока на другую. Так как частицы жидкости, находящиеся на разных линиях тока, обладают разной удельной энергией, то на линии вихря в таком случае удельная энергия не может сохраняться постоянной.

Этот случай движения жидкости соответствует течению в рабочем колесе насоса или турбины.

Между тем, как указывалось выше, принято считать, что энергия вдоль линии вихря во всех случаях сохраняется постоянной. К этому приходят обычно следующим путем [7]. Берут в качестве исходного уравнение Эйлера-Громеки, написанное в форме (8), и умножают его обе части скалярным образом на единичный вектор $\vec{t}$, касательный к вихревой линии,

Вектор $\cdot\, grad\left(\dfrac{V^2}{2} + R + \Pi\right) = gradB$ совпадает с направлением скорости, поэтому только произведение этого вектора на элемент линии тока t дает производную по этой линии. Умножение же этого градиента на любое другое произвольное перемещение не может привести к производной по этому направлению. Поэтому уравнение (15) ошибочно. Оно будет справедливым только для линии вихря, перпендикулярной линии тока или винтового потока.

В таком случае принимая, что dx, dy, dz являются проекциями элемента вихря $d\Omega$, мы получим выполнение условия существования ортогональных к линиям тока нормальных (живых) сечений.

Из получаемого указанным образом равенства B = const на линии тока и на линии вихря можно сделать вывод, что в потоке жидкости существуют энергетические поверхности B = const, на которых располагаются линии тока и линии вихря. Таким образом, вихревой поток может быть условно расслоен на поверхности, на которых энергия имеет некоторое постоянное значение. Эти поверхности должны быть перпендикулярны вектору $\vec{\Omega} \times \vec{V}$ и удовлетворять условию (17).

ВЫВОДЫ

Таким образом, из приведенного анализа следует, что на линии вихря, если она не совпадает с линией тока и не удовлетворяет условию (17), удельная энергия «B = const» не может оставаться постоянной. Она изменяется по длине данной вихревой линии, а если в потоке существует поверхность равной удельной энергии, т. е. поверхность «B = const», то вихревые линии лежат на этой поверхности.

SUMMARY

ABOUT CERTAIN INACCURACIES IN THE COURSES OF TECHNICAL HYDROMECHANICS WHILE INTEGRATING THE EQUATIONS ON PERFECT LIQUID MOTIONS

Kostornoy S. D., Martynova N. S.,
Sumy State University, Sumy

In general the vortex motion of inviscid fluid particles moving on different streamlines have different amounts of energy. Constant Bernoulli is the same for all the current lines only when the flow is potential. A vortex or spiral vortex but in which the vector velocity is perpendicular to the vortex. However until now in course of technical and theoretical fluid mechanics (3, 5-9) there are allegations that the energy of the liquid is the same only on each streamline and on each vortex line. In fact in the process current relative position of streamlines and vortex lines changes and so the last assertion is untrue.

Key words: *Euler-Gromeka equation, energy of liquid, current streamlets, vortices, vortex motion.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. - М.: Физматгиз, 1963. - Ч.1. - 584 с.
2. Кочин Н. Е. Векторный анализ и начало тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. - М.: Наука, 1965. - 426 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. - М.: Наука,1970. – 904 с.; 1987. - 840 с.
4. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными / П. К. Рашевский. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. - 356с.
5. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. - М.: Машиностроение, 1987. - 440 с.
6. Повх И. Л. Техническая гидромеханика / И. Л. Повх. - Л.: Машиностроение, 1976. - 504 с.
7. Дейч М. Е. Гидрогазодинамика / М. Е. Дейч, А. Е. Зарянкин. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 384 с.
8. Милн-Томсон А. М. Техническая гидродинамика / А. М. Милн-Томсон. - М.: Мир, 1964. - 655 с.
9. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор. - М.: Мир, 1973. - 759 с.

Поступила в редакцию 16 ноября 2011 г.