УДК 621.178 (088.8)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

И. Д. Пузько, *канд. техн. наук,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В работе получены аналитические соотношения для определения оценок параметров математической модели в виде дифференциальных уравнений третьего порядка. Приведен алгоритм, основанный на спектрально - интервальном методе исследования для двух групп информационных массивов временных интервалов и чисел циклов колебаний, соответствующих двум группам информационных массивов изменений амплитудных значений затухающих колебательных процессов.

Использованы уравнения первого приближения для амплитуды и фазы асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение третьего порядка, уравнения первого приближения, асимптотический метод, регрессия, оценка параметров, спектрально-интервальный метод.*

У роботі отримані аналітичні співвідношення для визначення оцінок параметрів математичної моделі у вигляді диференціального рівняння третього порядку. Наведений алгоритм, що базується на спектрально - інтервальному методі дослідження для двох груп інформаційних масивів часових інтервалів і чисел циклів коливань, що відповідають двом групам інформаційних масивів змін амплітудних значень загасальних коливальних процесів. Використані рівняння першого наближення для амплітуди і фази асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського.

Ключові слова: *диференціальне рівняння третього порядку, рівняння першого наближення, асимптотичний метод, регресія, оцінка параметрів, спектрально-інтервальний метод.*

ВВЕДЕНИЕ

По определению к классу нелинейных колебательных систем дробного порядка относятся дифференциальные уравнения, старшая производная левой части которых имеет порядок нечетной степени (3,5,7...). [1,2].

Асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ) применяют для нахождения решений дифференциальных уравнений произвольного порядка [2], где исследованы вопросы существования и устойчивости решений.

Однако вопросы определения и оценки значений параметров для колебательных систем такого класса в известных исследованиях не рассматривались.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Отметим тот факт, что асимптотический метод КБМ применяют, в частности, для нахождения решения дифференциального уравнения третьего порядка при учете существования только собственных колебаний [2]:

$$x''' + \xi x'' + \Omega^2 x' + \xi\Omega^2 x = -\varepsilon\beta x^3\,, \tag{1}$$

где ξ, Ω, β – постоянные величины; $\Omega \gg \varepsilon$, ε – малый положительный параметр; x', x'', x''' – первая, вторая, третья производные по времени t.

Уравнения первого приближения для амплитуды и фазы решения $x = X_a \cos(\upsilon t + \psi)$ согласно асимптотическому методу КБМ имеют вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_a}{dt} &= \frac{3\varepsilon\beta X_a{}^3}{8\left(\Omega^2+\xi^2\right)}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \Omega + \frac{3\varepsilon\beta\xi X_a{}^2}{8\left(\Omega^2+\xi^2\right)\Omega}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В работе [3] на основании (2) получены аналитические соотношения для определения значений параметров и оценок параметров математической модели в виде слабонелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Сформирован новый алгоритм, основанный на спектрально-интервальном методе для одного из двух информационных массивов временных интервалов и чисел циклов колебаний при изменении амплитудных значений затухающего колебательного процесса от первого постоянного начального значения до первого постоянного конечного значения с учётом погрешности измерений.

В нашем исследовании ставится и решается задача получения оценок коэффициентов дифференциального уравнения третьего порядка, основанная на алгоритме спектрально-интервального метода при использовании двух информационных массивов временных интервалов и чисел циклов колебаний для двух информационных массивов амплитудных значений затухающих колебательных процессов при изменении массивов амплитуд от первого начального постоянного значения до первого постоянного конечного значения, от второго начального постоянного значения до второго постоянного конечного значения.

Приведенный алгоритм определения оценок параметров решает задачу более корректным способом.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Из системы уравнений (2) первого приближения после исключения малого положительного параметра ε получим одно уравнение:

$$d\psi - \Omega dt = \Omega^{-1}\xi \frac{dX_a}{X_a}. \tag{3}$$

Принимая во внимание соотношение $\psi = 2\pi n$ (n – число циклов колебаний), после проведения операций интегрирования (3) получим соотношение

$$2\pi n - \Omega\Delta t = \Omega^{-1}\xi \ln\left(\frac{X_{aк}}{X_{aн}}\right), \tag{4}$$

где n – число циклов затухающих колебаний на временном интервале Δt при изменении амплитудных значений от постоянного начального значения $X_{aн}$ до постоянного конечного значения $X_{aк}$.

При задании двух интервалов изменения амплитудных значений: от X_{a_1} до X_{a_2}, от X_{a_3} до X_{a_4}, соответствующих временных интервалов $\Delta_1 t, \Delta_2 t$ и соответствующих чисел n_1, n_2 циклов колебаний, на основании (4) получим два алгебраических уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi n_1 - \Omega\Delta_1 t &= \Omega^{-1}\xi \ln\left(\frac{X_{a_2}}{X_{a_1}}\right), \\ 2\pi n_2 - \Omega\Delta_2 t &= \Omega^{-1}\xi \ln\left(\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При проведении измерений амплитудные значения, временные интервалы и числа циклов колебаний фиксируют и регистрируют при наличии случайных ошибок.

Поэтому для нахождения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}, \hat{\xi}$ параметров $\Omega, \Omega^{-1}\xi, \xi$ в соответствии с системой уравнений (5) необходимо сформировать регрессионную зависимость, сформировать информационный массив и методом наименьших квадратов получить нормальные уравнения.

В нашем случае минимизируемые функции S_1, S_2 имеют вид

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{N}\left[2\pi n_{1i} - \hat{\Omega}\Delta_{1i}t - \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\right]^2, \\ S_2 &= \sum_{i=1}^{N}\left[2\pi n_{2i} - \hat{\Omega}\Delta_{2i}t - \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)\right]^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Сформируем частные производные $\dfrac{\partial S_1}{\partial \hat{\Omega}}, \dfrac{\partial S_1}{\partial\left(\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\right)}, \dfrac{\partial S_2}{\partial \hat{\Omega}}, \dfrac{\partial S_2}{\partial\left(\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\right)}$ и получим две системы уравнений относительно $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t + \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} = 2\pi\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t, \tag{7}$$

$$\hat{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} + \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right) = 2\pi\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}, \tag{8}$$

$$\hat{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t + \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} = 2\pi\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t, \tag{9}$$

$$\hat{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} + \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) = 2\pi\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}. \tag{10}$$

Из системы уравнений (7), (8) получим аналитические соотношения для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}, \hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega} = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right) - \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]}{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]^2 \right\}}; \qquad \textbf{(11)}$$

$$\hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}} - \sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]}{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]^2 \right\}}; \qquad \textbf{(12)}$$

$$\hat{\xi} = 4\pi^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right) - \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]}{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]^2 \right\}^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}} - \sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \right]. \qquad \textbf{(13)}$$

Из системы уравнений **(9)**, **(10)** получим другие соотношения для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi}, \hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega} = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} \right]}{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} \right]^2 \right\}}; \qquad \textbf{(14)}$$

$$\hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} = 2\pi \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}} - \sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} \right\}}{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} \right]^2 \right\}}; \qquad \textbf{(15)}$$

$$\hat{\xi} = 4\pi^2 \frac{\left\{\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right\}}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]^2\right\}} \times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}} - \sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]. \qquad \textbf{(16)}$$

Из системы уравнений (7), (9) получим ещё одни аналитические соотношения для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}, \hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega} = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\right]}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\right\}}; \qquad \textbf{(17)}$$

$$\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi} = 2\pi \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t - \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t\right)}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\right\}}; \qquad \textbf{(18)}$$

$$\hat{\xi} = 4\pi^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\right]}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\right\}^2} \times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t - \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t\right). \qquad \textbf{(19)}$$

Из системы уравнений (8), (10) получим ещё одни аналитические соотношения для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}, \hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega} = 2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad (20)$$

$$\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi} = 2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}-\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad (21)$$

$$\hat{\xi} = 4\pi^2\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]^2}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}-\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]. \qquad (22)$$

Из системы уравнений (7), (10) получим ещё одни аналитические соотношения для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}, \hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega} = 2\pi\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]}; \qquad (23)$$

$$\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi} = 2\pi\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}-\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]}; \qquad (24)$$

$$\hat{\xi} = 4\pi^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right) - \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{n_{2i}} - \sum_{i=1}^{N} n_{1i}\Delta_{1i}t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t}\right]. \quad (25)$$

Из системы уравнений (8), (9) получим ещё одни аналитические соотношения для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}, \hat{\xi}$:

$$\hat{\Omega} = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\right]}; \quad (26)$$

$$\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi} = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} - \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\right]}; \quad (27)$$

$$\hat{\xi} = 4\pi^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{4i}}}{X_{a_{3i}}}\right)^{\Delta_{2i}t} - \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln^2\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)\right]^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{N} n_{2i}\Delta_{2i}t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{\Delta_{1i}t} - \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{X_{a_{2i}}}{X_{a_{1i}}}\right)^{n_{1i}}\right]. \quad (28)$$

Таким образом, для получения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\xi}$ параметров Ω, ξ колебательной системы дробного (третьего) порядка, как следует из соотношений (11), (13), (14), (16), (17), (19), (20), (22), (23), (25), (26), (28), необходимо сформулировать, представить и выполнить следующий алгоритм:

1) представить задание для выбора первого и второго диапазонов изменения амплитуд затухающих колебаний от первого постоянного начального значения X_{a_1} до первого постоянного конечного значения X_{a_2}, от второго постоянного начального значения X_{a_3} до второго постоянного конечного значения X_{a_4};

2) провести измерение первого временного интервала $\Delta_1 t$ и числа n_1 циклов колебаний в этом временном интервале при изменении амплитудных значений от X_{a_1} до X_{a_2};

3) провести N повторений измерения первого временного интервала $\Delta_{1i}\left(t\right)$ (i=1, 2,..., N) и числа n_{1i} (i=1, 2,..., N) циклов колебаний в этом временном интервале при N повторениях измерений изменения амплитудных значений от $X_{a_{1i}}$ до $X_{a_{2i}}$ (i=1, 2,..., N);

4) провести измерение второго временного интервала $\Delta_2 t$ и числа n_2 циклов колебаний в этом временном интервале при изменении амплитудных значений от X_{a_3} до X_{a_4};

5) провести N повторений измерения второго временного интервала $\Delta_{2i} t$ (i=1, 2,..., N) и числа n_{2i} (i=1, 2,..., N) циклов колебаний в этом временном интервале при изменении амплитудных значений от $X_{a_{3i}}$ до $X_{a_{4i}}$ (i=1, 2,..., N);

6) на основании соотношений (11), (13), (14), (16), (17), (19), (20), (22), (23), (25), (26), (28) при учёте зафиксированных множеств $\Delta_{1i}\left(t\right)$, $\Delta_{2i} t$, n_{1i}, n_{2i}, $X_{a_{1i}}$, $X_{a_{2i}}$, $X_{a_{3i}}$, $X_{a_{4i}}$ (i=1, 2,..., N) при использовании регрессионных зависимостей и метода наименьших квадратов определяют оценки $\hat{\Omega}, \hat{\xi}$ параметров Ω, ξ, что приводит к сглаживанию случайных погрешностей измерений.

Приведенный алгоритм реализует спектрально-интервальный метод, основанный на двух множествах временных интервалов, соответствующих двум множествам чисел циклов колебаний, ограниченных двумя множествами изменений амплитудных значений двух множеств затухающих колебательных процессов.

При проведении дальнейших исследований необходимо выполнить компьютерное моделирование решений дифференциального уравнения третьего порядка для оценки эффективности приведённого алгоритма оценки параметров.

ВЫВОДЫ

В работе получены аналитические соотношения для определения оценок параметров математической модели в виде дифференциального уравнения третьего порядка. Приведен алгоритм, основанный на спектрально-интервальном методе исследования для двух групп информационных массивов временных интервалов и чисел циклов колебаний, соответствующих двум группам информационных массивов изменений амплитудных значений затухающих колебательных процессов.

Использованы уравнения первого приближения для амплитуды и фазы асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского.

SUMMARY

ASYMPTOTIC METHOD OF PARAMETRIC IDENTIFICATION IN NONLINEAR OSCILLATING SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER

Puzko I. D.,
Sumy State University, Sumy

In this paper analytical relationships for parameters determining estimates of the mathematical model in the form of differential equations of third order are received.

An algorithm, based on spectral-interval method of investigation for two groups of data sets of time intervals and numbers of cycles of oscillation are proposed. Also there is considered amplitude values of damped oscillatory processes.

The author used first-approximation equations for the amplitude and phase of the asymptotic method by Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky

Key words: *differential equations of third order, equations of first approximation, the asymptotic method, the regression parameter estimation, spectral-interval method.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Божко А. Е. Резонансные виброиспытательные системы / А. Е. Божко. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. Митропольский Ю. А. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю. А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. - Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.
3. Пузько И. Д. О параметрической идентификации нелинейных колебательных систем дробного порядка / И. Д. Пузько //Вісник СумДУ. Серія Технічні науки. – 2008. – № 4. – С.140 – 145.
4. Редько С. Ф. Идентификация динамических систем Определение динамических характеристик и параметров / С. Ф. Редько, В. Ф. Ушкалов, В. П. Яковлев. – Киев : Наук. думка, 1985. – 216 с.

Поступила в редакцию 20 июня 2011 г.