

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
МНОГОСЛОЙНОГО ПЛОСКОГО КРИВОГО БРУСА ПРИ ИЗГИБЕ С
УЧЕТОМ ИДЕАЛЬНОГО И НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ
СЛОЯМИ**

С. М. Верещака, Е.Т. Караш,

Сумский государственный университет, г. Сумы

На основе классической теории упругости анизотропного тела исследуется напряженно-деформированное состояние многослойного плоского кривого бруса. Для учета статических и кинематических условий контакта по сопряженным лицевым поверхностям соседних слоев, обладающих цилиндрической анизотропией, составлена система алгебраических уравнений. Порядок системы уравнений определяется количеством сопряженных слоев. В качестве примера рассмотрен изгиб плоского бруса при действии сосредоточенной силы на торцах. Показано, что рассмотренный вариант дискретно-структурной теории многослойных тел позволяет дать более точную оценку напряженно-деформированного состояния бруса по сравнению с классической теорией.

Ключевые слова: многослойная теория, расслоения, композитный материал, изогнутый брус.

На основі класичної теорії пружності анізотропного тіла досліджується напружено-деформований стан багатошарового плоского кривого бруса. Для урахування статичних і кінематичних умов контакту щодо зв'язаних лицевих поверхонь сусідніх шарів, які вважаються циліндрично анізотропними, складена система алгебраїчних рівнянь. Порядок системи рівнянь визначається кількістю сполучених шарів. Як приклад розглянуто згинання плоского бруса при дії зосередженої сили на торцях. Показано, що розглянутий варіант дискретно структурної теорії багатошарових тіл дозволяє дати більш точну оцінку напружено-деформованого стану бруса порівняно з класичною теорією.

Ключові слова: багатошарова теорія, розшарування, композитний матеріал, зігнутий брус.

ВВЕДЕНИЕ

Композиты многослойной структуры широко используются в различных областях современной техники, например, в конструкциях планеров военных и гражданских самолетов. Известно, что тонкостенные элементы из композитов значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с изотропными аналогами. Однако для практической реализации этих преимуществ необходимо и дальше накапливать опыт проектирования такого рода конструкций, а также совершенствовать технологию производства армированных материалов.

При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например, участков непрочности или отслоений. Традиционно используемое в расчетных моделях предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта жестких армированных слоев оказывается существенно нарушенным.

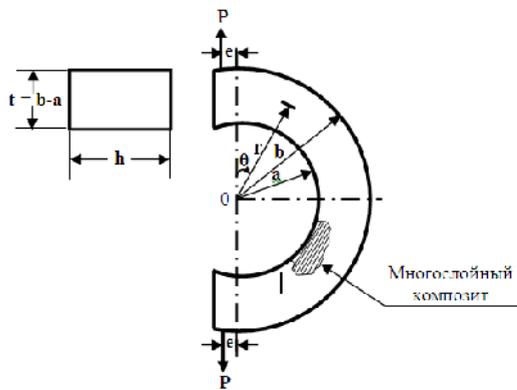
Различают два класса задач, посвященных построению различных моделей расслоений и развитию методов решения задач прочности, устойчивости и динамики тонких слоистых конструкций с дефектами структуры. К первому из них относятся задачи механики разрушения [1-4] по определению скорости роста расслоений под действием постоянных, а чаще переменных нагрузок и нахождению их критических

размеров, при которых может быть исчерпана несущая способность конструкции. Второй класс задач [5-9] связан с вопросами исследования напряженно-деформированного состояния конструкций с заданными локальными расслоениями. Размеры таких дефектов значительно меньше критических, при которых конструкция может потерять несущую способность.

В основу метода расчета рассмотренного в данной работе многослойного изогнутого кривого бруса положен дискретный подход. Система разрешающих уравнений построена для всего пакета слоев с учетом как идеального, так и неидеального контакта сопряженных поверхностей соседних слоев.

1. Многослойный криволинейный брус

На рис. 1 показана геометрия многослойного плоского изогнутого бруса толщиной t , обладающего цилиндрической анизотропией.



Криволинейный брус в плане ограничен двумя концентрическими окружностями радиусов a и b , а также двумя радиальными плоскостями, образующими угол $\theta = \pi/2$. Принято, что материал бруса ортотропный и плоскость упругой симметрии совпадает со срединной поверхностью бруса. Ось анизотропии проходит нормально к плоскости упругой симметрии через общий центр концентрических окружностей и совпадает с осью z цилиндрической системы координат. Ось x , от которой отсчитываются полярные углы

Рисунок 1 - Схема нагружения многослойного криволинейного бруса

θ , совпадает с осью y декартовой системы координат $x-y$.

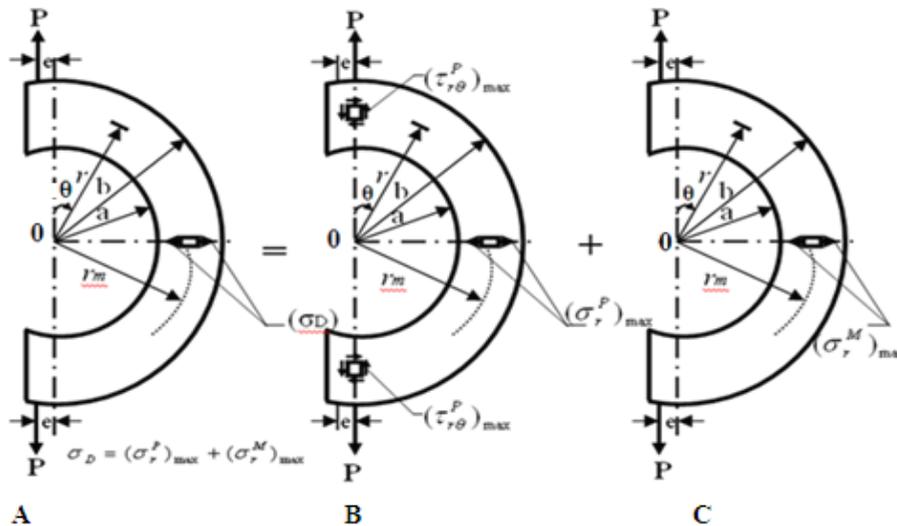


Рисунок 2 - Изгиб кривого бруса сосредоточенной поперечной силой P и изгибающим моментом M

Считается, что криволинейные стороны $r = a$ и $r = b$ не нагружены. На шарнирно закрепленные t торцы бруса действуют противоположно направленные вертикальные силы P , приложенные с эксцентриситетом e . Таким образом, используя принцип суперпозиции действия, заданную нагрузку (рис. 2) можно представить в виде суммы сосредоточенной силы P и сосредоточенного изгибающего момента $M = P \cdot e$.

2. Структурно-непрерывная теория анизотропного тела

Общее решение поставленной задачи изгиба криволинейного бруса из материала с цилиндрической анизотропией приведено в [10]. При этом функции напряжения в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

– при действии силы P (рис. 2 б):

$$F = [Ar^{1+\beta} + Br^{1-\beta} + Cr + Dr \ln r] \sin \theta ; \quad (1)$$

– при действии момента M (рис. 2 в):

$$F = [A' + B'r^2 + C'r^{1+k} + D'r^{1-k}]. \quad (2)$$

Здесь A, B, C, D и A', B', C', D' - произвольные константы, которые определяются из граничных условий на криволинейных поверхностях бруса и из интегральных соотношений приводимости на торцах. Параметры анизотропии β и k соответственно равны

$$\beta \equiv \sqrt{1 + \frac{E_\theta}{E_r} (1 - 2\nu_{r\theta}) + \frac{E_\theta}{E_r}}, \quad (3)$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}. \quad (4)$$

Следует отметить, что для изотропных материалов $\beta = 2$ и $k = 1$.

Три составляющие тензора напряжений (рис. 2) можно записать при помощи функций напряжений:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{F}{r} \right). \quad (5)$$

Используя физические

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \sigma_\theta, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}} \tau_{r\theta} \quad (6)$$

и геометрические

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad (7)$$

соотношения для плоского напряженного состояния ортотропного материала, а также хорошо известное тождество

$$\frac{v_{r\theta}}{E_r} = \frac{v_{\theta r}}{E_\theta}, \quad (8)$$

напряженно-деформированное состояния рассматриваемого бруса после несложных преобразований уравнений (1)-(8) будет определяться следующими функциями.

Напряжения при действии силы P

$$\begin{aligned} \sigma_r^P(r, \theta) &= [A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \sin \theta, \\ \sigma_\theta^P(r, \theta) &= [A\beta(1+\beta)r^{\beta-1} - B\beta(1-\beta)r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \sin \theta, \\ \tau_{r\theta}^P(r, \theta) &= -[A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

и при действии момента M

$$\begin{aligned} \sigma_r^M(r) &= A'(1+k)r^{k-1} + B'(1-k)r^{-k-1} + 2D', \\ \sigma_\theta^M(r) &= A'k(1+k)r^{k-1} - B'k(1-k)r^{-k-1} + 2D', \\ \tau_{r\theta}^M &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Полные напряжения в точках будут получены путем суммирования двух идентичных компонентов напряжений (9)-(10):

$$\sigma_r = \sigma_r^P + \sigma_r^M, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^P + \sigma_\theta^M, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^P + \tau_{r\theta}^M. \quad (11)$$

Подставляя (9)-(10) в физические и геометрические соотношения (6)-(8) и интегрируя полученные зависимости, несложно получить выражения для определения перемещений бруса в радиальном и окружном направлениях.

Перемещения при действии силы P

$$\begin{aligned} u_r^P(r, \theta) &= \left\{ Ar^\beta \left[\frac{1}{E_r} - (1+\beta) \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + Br^{-\beta} \left[\frac{1}{E_r} - (1-\beta) \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + D(\ln r) \left(\frac{1}{E_r} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right) \right\} \sin \theta + C_1, \\ u_\theta^P(r, \theta) &= \left\{ Ar^\beta \left[\frac{1}{E_r} - \beta(1+\beta) \frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + Br^{-\beta} \left[\frac{1}{E_r} + (1-\beta) \frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + D \left[(\ln r) \left(\frac{1}{E_r} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right) - \left(\frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right) \right] \right\} \cos \theta + C_1\theta + C_2 \end{aligned} \quad (12)$$

и при действии момента M

$$\begin{aligned}
u_r^M(r) &= A' \left\{ (1+k)r^k \left(\frac{1}{k} \frac{1}{E_r} - \frac{v_{\theta r}}{E_{\theta}} \right) \right\} - B' \left\{ (1-k)r^{-k} \left(\frac{1}{k} \frac{1}{E_r} + \frac{v_{\theta r}}{E_{\theta}} \right) \right\} + \\
&+ D' \left\{ 2r \left(\frac{1}{E_r} - \frac{v_{\theta r}}{E_{\theta}} \right) \right\} + C_1', \\
u_{\theta}^M(r, \theta) &= D' \left\{ 2r \left(\frac{1}{E_{\theta}} - \frac{1}{E_r} \right) \right\} \theta + C_1' \theta + C_2'. \quad (13)
\end{aligned}$$

В формулах (12), (13) неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, C_1', C_2' можно найти при помощи краевых условий на торцах бруса и из условий симметрии в сечении бруса с координатой $\theta = \pi/2$.

Согласно ранее принятой постановке задачи имеют место следующие граничные условия:

– при действии силы P

$$\sigma_r^P(a, \theta) = 0, \quad \sigma_r^P(b, \theta) = 0, \quad -P = \int_a^b \tau_{r\theta}^P(r, 0) dr; \quad (14)$$

– при действии момента M

$$\sigma_r^M(a, \theta) = 0, \quad \sigma_r^M(b, \theta) = 0, \quad -M = \int_a^b r \sigma_{\theta}^M(r) dr. \quad (15)$$

Подставляя последовательно выражения (9) в (14) и (10) в (15), можно получить окончательные зависимости напряжений рассматриваемого бруса, когда анизотропное тело представлено как неоднородный континуум с заданными интегральными физико-механическими характеристиками.

Напряжения в плоском кривом брусом из анизотропного материала при действии силы P

$$\begin{aligned}
\sigma_r^P(r, \theta) &= \frac{P}{bhg_1} \frac{b}{r} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^{\beta} + \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \left(\frac{b}{r} \right)^{\beta} - 1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{\beta} \right] \sin \theta, \\
\sigma_{\theta}^P(r, \theta) &= \frac{P}{bhg_1} \frac{b}{r} \left[(1+\beta) \left(\frac{r}{b} \right)^{\beta} + (1-\beta) \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \left(\frac{b}{r} \right)^{\beta} - 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \right] \sin \theta, \\
\tau_{r\theta}^P(r, \theta) &= \frac{P}{bhg_1} \frac{b}{r} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^{\beta} + \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \left(\frac{b}{r} \right)^{\beta} - 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \right] \cos \theta, \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$g_1 = \frac{2}{\beta} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \right] + \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \right] \ln \frac{a}{b}; \quad (17)$$

при действии момента M

$$\begin{aligned}
\sigma_r^M(r) &= -\frac{M}{b^2hg} \left[1 - \frac{1 - (a/b)^{k+1}}{1 - (a/b)^{2k}} \left(\frac{r}{b} \right)^{k-1} - \frac{1 - (a/b)^{k-1}}{1 - (a/b)^{2k}} \left(\frac{a}{b} \right)^{k+1} \left(\frac{b}{r} \right)^{k+1} \right], \\
\sigma_{\theta}^M(r) &= -\frac{M}{b^2hg} \left[1 - \frac{1 - (a/b)^{k+1}}{1 - (a/b)^{2k}} k \left(\frac{r}{b} \right)^{k-1} + \frac{1 - (a/b)^{k-1}}{1 - (a/b)^{2k}} k \left(\frac{a}{b} \right)^{k+1} \left(\frac{b}{r} \right)^{k+1} \right],
\end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta}^M = 0, \quad (18)$$

где

$$g = \frac{1-(a/b)^2}{2} - \frac{k}{k+1} \frac{[1-(a/b)^{k+1}]^2}{[1-(a/b)^{2k}]} + \frac{k(a/b)^2 [1-(a/b)^{k-1}]^2}{k-1 [1-(a/b)^{2k}]}. \quad (19)$$

Следуя предложенному ранее алгоритму, формулы для определения перемещений точек анизотропного бруса несложно составить при помощи выражений (12), (13), известных значений постоянных A, B, D, A', B', D' и заданных краевых условий.

3. Дискретно структурная теория многослойного бруса при идеальном контакте слоев

На рис. 3 показан многослойный плоский изогнутый брус в форме полукольца в плане, на каждом из торцов которого действуют сосредоточенная поперечная сила P и изгибающий момент M . Брус состоит из N слоев. Поле напряжений и перемещений каждого i слоя ($i=1, 2, \dots, N$) определяется соотношениями (9) – (10), (12) – (13).

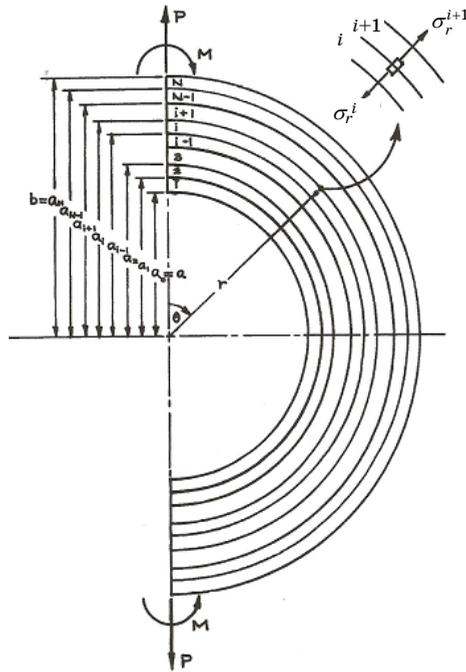


Рисунок 3 - Структура многослойного изогнутого плоского бруса

Имея по сопряженным поверхностям i и $i+1$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) слоя, когда $r = a_i$ (рис. 3), статические и кинематические условия идеального контакта:

– при действии силы P

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (20)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(i)}(a_i, \theta) = \tau_{r\theta}^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (21)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (22)$$

$$u_\theta^{P(i)}(a_i, \theta) = u_\theta^{P(i+1)}(a_i, \theta); \quad (23)$$

– при действии момента M

$$\sigma_r^{M(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{M(i+1)}(a_i, \theta), \quad (24)$$

$$u_r^{M(i)}(a_i, \theta) = u_r^{M(i+1)}(a_i, \theta), \quad (25)$$

$$u_\theta^{M(i)}(a_i, \theta) = u_\theta^{M(i+1)}(a_i, \theta). \quad (26)$$

Кроме того, на лицевых поверхностях бруса, когда $r = a$ и $r = b$ (рис. 3), дополнительно имеют место статические граничные условия:

– при действии силы P

$$\sigma_r^{P(1)}(a, \theta) = 0, \quad (27)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(1)}(a, \theta) = 0, \quad (28)$$

$$\sigma_r^{P(N)}(b, \theta) = 0, \quad (29)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(N)}(b, \theta) = 0; \quad (30)$$

– при действии момента M

$$\sigma_r^{M(1)}(a, \theta) = 0, \quad (31)$$

$$\sigma_r^{M(N)}(b, \theta) = 0. \quad (32)$$

Как упоминалось ранее, на прямолинейных торцах бруса должны выполняться следующие граничные условия равновесия:

– при действии силы P

$$P = h \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tau_{r\theta}^{P(i)}(r, 0) dr; \quad (33)$$

– при действии момента M

$$-M = h \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} r \sigma_\theta^{M(i)}(r) dr. \quad (34)$$

Сравнив первое и третье уравнения (9), следует отметить, что напряжения σ_r^P и $\tau_{r\theta}^P$ имеют одинаковые зависимости от координаты r . Таким образом, если σ_r^P удовлетворяет граничным условиям (20), (27),

(29), то $\tau_{r\theta}^P$ будет удовлетворять граничным условиям (21), (28), (30) автоматически.

Пусть многослойный брус состоит из N ортотропных слоев. Для решения поставленной задачи согласно дискретно структурной теории следует подставить функции напряжений (9), (10) и перемещений (12), (13) в граничные условия (20), (22), (23), (27), (29), (33) или (24)-(26), (31), (32), (34). При этом имеют место две системы из $3 \times N$ линейных алгебраических уравнений. Решая эти две системы, можно найти значения $3 \times N$ неизвестных постоянных A_i, B_i, D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), когда на брус действует сила P , и значения $3 \times N$ неизвестных постоянных A_i', B_i', D_i' ($i = 1, 2, \dots, N$) при действии момента M .

В качестве примера ниже представлены две системы из 9 уравнений каждая для определения неизвестных постоянных:

при действии силы P –

$$\begin{aligned}
 & A_1 \beta_1 a_0^{\beta_1} - B_1 \beta_1 a_0^{-\beta_1} + D_1 = 0, \\
 & A_1 \beta_1 a_1^{\beta_1} - B_1 \beta_1 a_1^{-\beta_1} + D_1 - A_2 \beta_2 a_1^{\beta_2} + B_2 \beta_2 a_1^{-\beta_2} - D_2 = 0, \\
 & A_2 \beta_2 a_2^{\beta_2} - B_2 \beta_2 a_2^{-\beta_2} + D_2 - A_3 \beta_3 a_2^{\beta_3} + B_3 \beta_3 a_2^{-\beta_3} - D_3 = 0, \\
 & A_3 \beta_3 a_3^{\beta_3} - B_3 \beta_3 a_3^{-\beta_3} + D_3 = 0, \\
 & A_1 a_1^{\beta_1} \left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1 + \beta_1) \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}} \right] + B_1 a_1^{-\beta_1} \left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1 - \beta_1) \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}} \right] + D_1 \ln a_1 \left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}} \right] - \\
 & - A_2 a_1^{\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 + \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}} \right] - B_2 a_1^{-\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 - \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}} \right] - D_2 \ln a_1 \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}} \right] = 0, \\
 & A_2 a_2^{\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 + \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}} \right] + B_2 a_2^{-\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 - \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}} \right] + D_2 \ln a_2 \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}} \right] - \\
 & - A_3 a_2^{\beta_3} \left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1 + \beta_3) \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}} \right] - B_3 a_2^{-\beta_3} \left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1 - \beta_3) \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}} \right] - D_3 \ln a_2 \left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}} \right] = 0, \\
 & A_1 a_1^{\beta_1} \frac{\beta_1}{E_\theta^{(1)}} [(1 + \beta_1) - v_{\theta r}^{(1)}] - B_1 a_1^{-\beta_1} \frac{\beta_1}{E_\theta^{(1)}} [(1 + \beta_1) - v_{\theta r}^{(1)}] + D_1 \frac{1}{E_\theta^{(1)}} (1 - v_{\theta r}^{(1)}) - \\
 & - A_2 a_1^{\beta_2} \frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] + B_2 a_1^{-\beta_2} \frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] - D_2 \frac{1}{E_\theta^{(2)}} (1 - v_{\theta r}^{(2)}) = 0, \\
 & A_2 a_2^{\beta_2} \frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] - B_2 a_2^{-\beta_2} \frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] + D_2 \frac{1}{E_\theta^{(2)}} (1 - v_{\theta r}^{(2)}) - \\
 & - A_3 a_2^{\beta_3} \frac{\beta_3}{E_\theta^{(3)}} [(1 + \beta_3) - v_{\theta r}^{(3)}] + B_3 a_2^{-\beta_3} \frac{\beta_3}{E_\theta^{(3)}} [(1 + \beta_3) - v_{\theta r}^{(3)}] - D_3 \frac{1}{E_\theta^{(3)}} (1 - v_{\theta r}^{(3)}) = 0, \\
 & h \sum_{i=1}^3 [A_i (a_i^{\beta_i} - a_{i-1}^{\beta_i}) + B_i (a_i^{\beta_i} - a_{i-1}^{-\beta_i}) + D_i (\ln a_i - \ln a_{i-1})] = P. \quad (35)
 \end{aligned}$$

при действии момента M –

$$\begin{aligned}
& A_1'(1+k_1)a_0^{k_1-1} + B_1'(1-k_1)a_0^{-k_1-1} + 2D_1' = 0, \\
& A_1'(1+k_1)a_1^{k_1-1} + B_1'(1-k_1)a_1^{-k_1-1} + 2D_1' - \\
& -A_2'(1+k_2)a_1^{k_2-1} - B_2'(1-k_2)a_1^{-k_2-1} - 2D_2' = 0, \\
& A_2'(1+k_2)a_2^{k_2-1} + B_2'(1-k_2)a_2^{-k_2-1} + 2D_2' - \\
& -A_3'(1+k_3)a_2^{k_3-1} - B_3'(1-k_3)a_2^{-k_3-1} - 2D_3' = 0, \\
& A_3'(1+k_3)a_3^{k_3-1} + B_3'(1-k_3)a_3^{-k_3-1} + 2D_3' = 0, \\
& A_1' \left\{ (1+k_1)a_1^{k_1} \left(\frac{1}{k_1} \frac{1}{E_r^{(1)}} - \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_{\theta}^{(1)}} \right) \right\} - B_1' \left\{ (1-k_1)a_1^{-k_1} \left(\frac{1}{k_1} \frac{1}{E_r^{(1)}} + \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_{\theta}^{(1)}} \right) \right\} + \\
& + D_1' \left\{ 2a_1 \left(\frac{1}{E_r^{(1)}} - \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_{\theta}^{(1)}} \right) \right\} - A_2' \left\{ (1+k_2)a_1^{k_2} \left(\frac{1}{k_2} \frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right) \right\} + \\
& + B_2' \left\{ (1-k_2)a_1^{-k_2} \left(\frac{1}{k_2} \frac{1}{E_r^{(2)}} + \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right) \right\} - D_2' \left\{ 2a_1 \left(\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right) \right\} = 0, \\
& A_2' \left\{ (1+k_2)a_2^{k_2} \left(\frac{1}{k_2} \frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right) \right\} - B_2' \left\{ (1-k_2)a_2^{-k_2} \left(\frac{1}{k_2} \frac{1}{E_r^{(2)}} + \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right) \right\} + \\
& + D_2' \left\{ 2a_2 \left(\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right) \right\} - A_3' \left\{ (1+k_3)a_2^{k_3} \left(\frac{1}{k_3} \frac{1}{E_r^{(3)}} - \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_{\theta}^{(3)}} \right) \right\} + \\
& + B_3' \left\{ (1-k_3)a_2^{-k_3} \left(\frac{1}{k_3} \frac{1}{E_r^{(3)}} + \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_{\theta}^{(3)}} \right) \right\} - D_3' \left\{ 2a_2 \left(\frac{1}{E_r^{(3)}} - \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_{\theta}^{(3)}} \right) \right\} = 0, \\
& D_1' \left\{ 2a_1 \left(\frac{1}{E_{\theta}^{(1)}} - \frac{1}{E_r^{(1)}} \right) \right\} - D_2' \left\{ 2a_1 \left(\frac{1}{E_{\theta}^{(2)}} - \frac{1}{E_r^{(2)}} \right) \right\} = 0, \\
& D_2' \left\{ 2a_2 \left(\frac{1}{E_{\theta}^{(2)}} - \frac{1}{E_r^{(2)}} \right) \right\} - D_3' \left\{ 2a_2 \left(\frac{1}{E_{\theta}^{(3)}} - \frac{1}{E_r^{(3)}} \right) \right\} = 0, \\
& h \sum_{i=1}^3 [A_i' k_i (a_i^{k_i+1} - a_{i-1}^{k_i+1}) - B_i' k_i (a_i^{-k_i+1} - a_{i-1}^{-k_i+1}) + D_i' (a_i^2 - a_{i-1}^2)] = -M. \quad (36)
\end{aligned}$$

После подстановки неизвестных постоянных A_i, B_i, D_i ($i = 1, 2, 3$) и A_i', B_i', D_i' ($i = 1, 2, 3$), полученных в результате решения уравнений (35), (36), в функции напряжений и перемещений (9)-(13) соответственно несложно получить полную картину напряженно-деформированного состояния каждого слоя плоского криволинейного бруса.

4. Дискретно-структурная теория многослойного бруса при неидеальном контакте слоев

Пусть между слоями плоского изогнутого бруса (рис. 3) при

определенных значениях внешней нагрузки из-за разрушения клеевой прослойки [11] возможно возникновение упругого проскальзывания двух соседних слоев относительно друг друга. При этом между разностью перемещений в окружном направлении $u_{\theta}^{(i)}(a_i, \theta)$, $u_{\theta}^{(i+1)}(a_i, \theta)$ сопряженных поверхностей соседних слоев и касательными напряжениями $\tau_{r\theta}^{(i)}(a_i, \theta)$, когда $r = a_i$ (рис. 3), существует зависимость

$$u_{\theta}^{(i)}(a_i, \theta) - u_{\theta}^{(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{(i)}. \quad (37)$$

В общем случае параметр $K^{(i)} = K^{(i)}(a_i, \theta)$. В качестве предельных из уравнения (37) имеет место два варианта:

- при $1/K^{(i)} = 0$ – имеет место идеальное проскальзывание;
- при $K^{(i)} = 0$ – идеальный контакт. Считая, что радиальные напряжения $\sigma_r^{(i)}(a_i, \theta)$ и $u_r^{(i)}(a_i, \theta)$ при переходе через поверхность раздела слоев скачка не имеют, статические и кинематические условия неидеального контакта для заданных внешних нагрузок имеют вид:

- при действии силы P

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (38)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (39)$$

$$u_{\theta}^{P(i)}(a_i, \theta) - u_{\theta}^{P(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{P(i)}; \quad (40)$$

- при действии момента M

$$\sigma_r^{M(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{M(i+1)}(a_i, \theta), \quad (41)$$

$$u_r^{M(i)}(a_i, \theta) = u_r^{M(i+1)}(a_i, \theta), \quad (42)$$

$$u_{\theta}^{M(i)}(a_i, \theta) - u_{\theta}^{M(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{M(i)}. \quad (43)$$

Так же, как и для случая идеального контакта слоев на лицевых поверхностях бруса, когда $r = a$ и $r = b$ (рис. 3), дополнительно имеют место статические граничные условия (27)-(32) и статические условия равновесия на торцах бруса (33), (34) соответственно для заданных видов внешней нагрузки.

Для принятого варианта дискретно-структурной теории с неидеальным контактом слоев системы уравнений (35) в соответствии с граничными условиями (38)-(40) принимают вид при действии силы P :

$$A_1 \beta_1 a^{\beta_1} - B_1 \beta_1 a^{-\beta_1} + D_1 = 0,$$

$$A_1 \beta_1 a_1^{\beta_1} - B_1 \beta_1 a_1^{-\beta_1} + D_1 - A_2 \beta_2 a_2^{\beta_2} + B_2 \beta_2 a_2^{-\beta_2} - D_2 = 0,$$

$$A_2 \beta_2 a_2^{\beta_2} - B_2 \beta_2 a_2^{-\beta_2} + D_2 - A_3 \beta_3 a_3^{\beta_3} + B_3 \beta_3 a_3^{-\beta_3} - D_3 = 0,$$

$$A_N \beta_N a_N^{\beta_N} - B_N \beta_N a_N^{-\beta_N} + D_N = 0,$$

$$\begin{aligned}
& A_1 a_1^{\beta_1} \left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1 + \beta_1) \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_{\theta}^{(1)}} \right] + B_1 a_1^{-\beta_1} \left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1 - \beta_1) \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_{\theta}^{(1)}} \right] + D_1 \ln a_1 \left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - \frac{v_{\theta r}^{(1)}}{E_{\theta}^{(1)}} \right] - \\
& - A_2 a_1^{\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 + \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right] - B_2 a_1^{-\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 - \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right] - D_2 \ln a_1 \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right] = 0, \\
& A_2 a_2^{\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 + \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right] + B_2 a_2^{-\beta_2} \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1 - \beta_2) \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right] + D_2 \ln a_2 \left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{v_{\theta r}^{(2)}}{E_{\theta}^{(2)}} \right] - \\
& - A_3 a_2^{\beta_3} \left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1 + \beta_3) \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_{\theta}^{(3)}} \right] - B_3 a_2^{-\beta_3} \left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1 - \beta_3) \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_{\theta}^{(3)}} \right] - D_3 \ln a_2 \left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - \frac{v_{\theta r}^{(3)}}{E_{\theta}^{(3)}} \right] = 0, \\
& A_1 a_1^{\beta_1} \frac{\beta_1}{E_{\theta}^{(1)}} [(1 + \beta_1) - v_{\theta r}^{(1)}] - B_1 a_1^{-\beta_1} \frac{\beta_1}{E_{\theta}^{(1)}} [(1 + \beta_1) - v_{\theta r}^{(1)}] + D_1 \frac{1}{E_{\theta}^{(1)}} (1 - v_{\theta r}^{(1)}) - \\
& - A_2 a_1^{\beta_2} \frac{\beta_2}{E_{\theta}^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] + B_2 a_1^{-\beta_2} \frac{\beta_2}{E_{\theta}^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] - D_2 \frac{1}{E_{\theta}^{(2)}} (1 - v_{\theta r}^{(2)}) = \\
& = -K^{(1)} (A_1 \beta_1 r^{\beta_1 - 1} - B_1 \beta_1 r^{-\beta_1 - 1} + \frac{D_1}{r}), \\
& A_2 a_2^{\beta_2} \frac{\beta_2}{E_{\theta}^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] - B_2 a_2^{-\beta_2} \frac{\beta_2}{E_{\theta}^{(2)}} [(1 + \beta_2) - v_{\theta r}^{(2)}] + D_2 \frac{1}{E_{\theta}^{(2)}} (1 - v_{\theta r}^{(2)}) - \\
& - A_3 a_2^{\beta_3} \frac{\beta_3}{E_{\theta}^{(3)}} [(1 + \beta_3) - v_{\theta r}^{(3)}] + B_3 a_2^{-\beta_3} \frac{\beta_3}{E_{\theta}^{(3)}} [(1 + \beta_3) - v_{\theta r}^{(3)}] - D_3 \frac{1}{E_{\theta}^{(3)}} (1 - v_{\theta r}^{(3)}) = \\
& = -K^{(2)} (A_2 \beta_2 r^{\beta_2 - 1} - B_2 \beta_2 r^{-\beta_2 - 1} + \frac{D_2}{r}),
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^3 [A_i (a_i^{\beta_i} - a_{i-1}^{\beta_i}) + B_i (a_i^{\beta_i} - a_{i-1}^{\beta_i}) + D_i (\ln a_i - \ln a_{i-1})] = P. \quad (44)$$

При действии момента M система уравнений (36) как в случае идеального, так и неидеального контакта остается неизменной. Это обусловлено тем, что напряжение $\tau_{r\theta}^{M(i)}$ в граничном условии (43) при чистом изгибе бруса (третье уравнение (10)) равно 0.

5. Пример расчета

В качестве примера расчета рассмотрено напряженно-деформированное состояние плоского кривого бруса при изгибе. Брус имеет форму полукольца в плане и изготовлен из многослойного стеклопластика с 16 однонаправленными армированными слоями с заданной схемой укладки $[0_4^{\circ} / -75^{\circ} / 0_2^{\circ} / -75^{\circ} / 75^{\circ} / 0_2^{\circ} / -75^{\circ} / 0_4^{\circ}]$.

Геометрические параметры бруса (рис. 1): размеры поперечного сечения - $h = 48$ мм, $t = 4$ мм; радиусы внутренней и внешней поверхностей бруса - $a = 100$ мм, $b = 104$ мм; радиус срединной поверхности $a_m = (a + b)/2 = 102$ мм; эксцентриситет действия поперечной силы - $e = 20$ мм.

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе [12]. Модули упругости E_e , сдвига G_e и коэффициент Пуассона ν_e наматываемых лент, набранных из

алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_b = 55000 \text{ МПа}$, $G_b = 22000 \text{ МПа}$, $\nu_b = 0,25$. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_m = 3550 \text{ МПа}$, $G_m = 1270 \text{ МПа}$, $\nu_m = 0,4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70% общего объема.

Технические постоянные рассматриваемого многослойного стеклопластика для различных схем армирования сведены в таблице 1. Рассмотрены три расчетные модели бруса. Первая модель представляет брус как анизотропный континуум $[0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ]$ со следующими физико-механическими характеристиками (табл. 1): $E_\theta = 34500 \text{ МПа}$, $E_r = 23870 \text{ МПа}$, $G_{r\theta} = 6620 \text{ МПа}$, $\nu_{\theta r} = 0,405$. Параметры, определяемые по формулам (3) – (4), равны $\beta = 2,617$, $k = 1,2$.

Таблица 1 - Упругие характеристики стеклопластиков

Схема армирования	E , МПа	G , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
$[0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ]$	$E_z = 23800$ $E_\theta = 34500$ $E_r = 23870$	$G_{\theta z} = 7490$ $G_{rz} = 5014$ $G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{z\theta} = 0,077$ $\nu_{zr} = 0,397$ $\nu_{\theta r} = 0,405$	$\nu_{\theta z} = 0,11$ $\nu_{rz} = 0,4$ $\nu_{r\theta} = 0,284$
$[0_4^\circ / -75^\circ]$	$E_z = 22800$ $E_\theta = 35500$ $E_r = 23800$	$G_{\theta z} = 7390$ $G_{rz} = 4870$ $G_{r\theta} = 6760$	$\nu_{z\theta} = 0,069$ $\nu_{zr} = 0,397$ $\nu_{\theta r} = 0,402$	$\nu_{\theta z} = 0,107$ $\nu_{rz} = 0,41$ $\nu_{r\theta} = 0,272$
$[0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ]$	$E_z = 24810$ $E_\theta = 33600$ $E_r = 23900$	$G_{\theta z} = 7530$ $G_{rz} = 5240$ $G_{r\theta} = 6380$	$\nu_{z\theta} = 0,079$ $\nu_{zr} = 0,395$ $\nu_{\theta r} = 0,403$	$\nu_{\theta z} = 0,104$ $\nu_{rz} = 0,38$ $\nu_{r\theta} = 0,293$

Для анализа напряжений и перемещений бруса применяется структурно непрерывная теория, т. е. зависимости (16)-(19) и (12), (13). При определении неизвестных постоянных C_1, C_2, C_1', C_2' , которые включают выражения перемещений (12)-(13), используются следующие краевые условия. Считается, что на торце бруса, при $\theta = 0$, перемещения в окружном направлении равны нулю, т.е. $u_\theta^P(r, 0) = 0$, $u_\theta^M(r, 0) = 0$.

Кроме того, исходя из условий симметрии деформации сдвига $\gamma_{r\theta}$, определяемые по третьей формуле (7), в поперечном сечении бруса с координатой $\theta = \pi/2$ будут равны нулю, т. е. $\gamma_{r\theta}^P(r, \pi/2) = 0$, $\gamma_{r\theta}^M(r, \pi/2) = 0$.

Дискретно-структурная теория с идеальным контактом соседних слоев применялась при расчете бруса по второй модели. Считалось, что брус состоит из трех однонаправленных слоев ($N = 3$). Первый ($i = 1$) и третий ($i = 3$) слои с кодом $[0_4^\circ / -75^\circ]$ и $[-75^\circ / 0_4^\circ]$ имеют такие параметры – $E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(3)} = 35500 \text{ МПа}$, $E_r^{(1)} = E_r^{(3)} = 23800 \text{ МПа}$, $G_{r\theta}^{(1)} = G_{r\theta}^{(3)} = 6760 \text{ МПа}$,

$\nu_{\theta r}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(3)} = 0,402$, $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = 2,634$, $k^{(1)} = k^{(3)} = 1,222$; второй слой

($i=2$) кодом $[0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ]$ соответственно $E_{\theta}^{(2)} = 33600$ МПа, $E_r^{(2)} = 23900$ МПа, $G_{r\theta}^{(2)} = 6380$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0,403$, $\beta^{(2)} = 2,59$, $k^{(2)} = 1,171$.

Определяя неизвестные постоянные A_i, B_i, D_i ($i = 1,2,3$) и A_i', B_i', D_i' ($i = 1, 2, 3$) из решения уравнений (35), (36), несложно затем найти функции напряжений и перемещений (9)-(13) для каждого слоя плоского криволинейного бруса.

Третья модель бруса, которая соответствует дискретно-структурной теории с неидеальным контактом соседних слоев, идентична второй модели. Основное отличие между этими двумя моделями – разные условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев, которые определяются соответствующими граничными условиями (27)-(32) и (38)-(43). При этом изменяется величина неизвестных постоянных A_i, B_i, D_i ($i = 1,2,3$) в результате решения системы уравнений (44) и соответственно функции напряжений и перемещений (9), (11)-(13).

На рис. 4 даны графики изменения нормальных тангенциальных напряжений σ_{θ}^P по толщине бруса в зависимости от условий контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев.

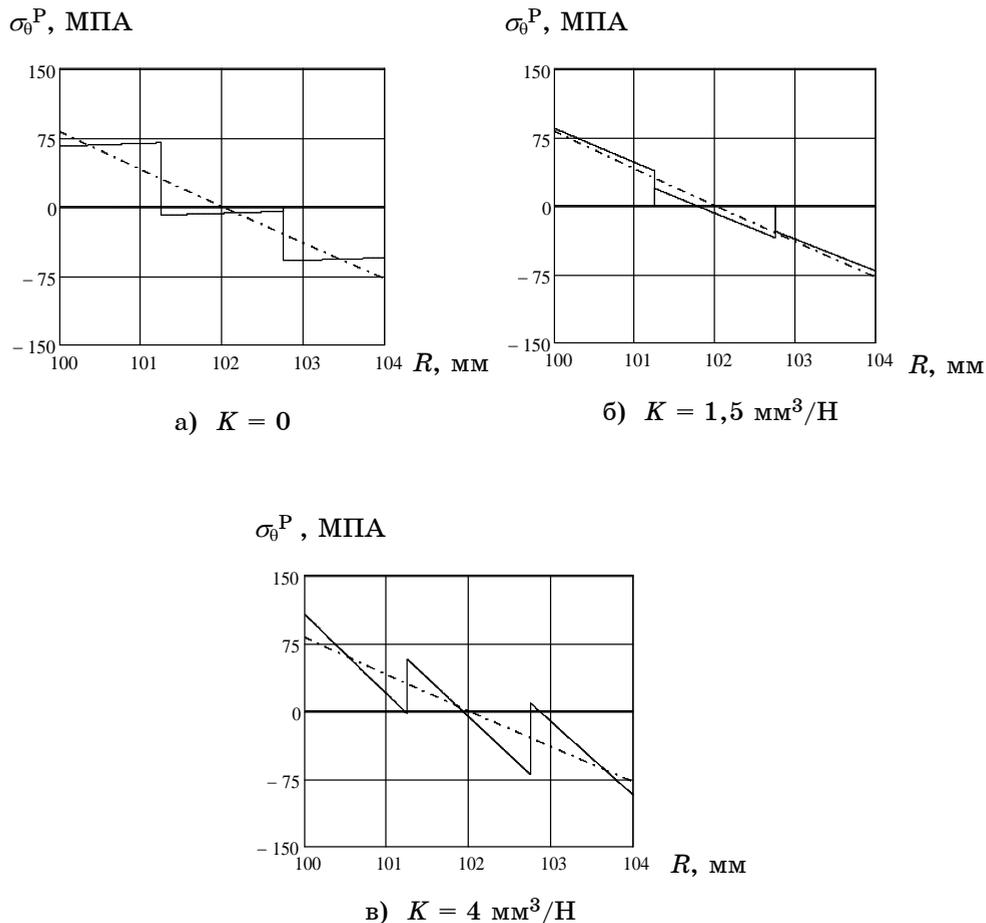


Рисунок 4 - График изменения тангенциальных напряжений σ_{θ}^P по толщине бруса в сечении с координатой $\theta = \pi/2$

Графики изменения перемещений в радиальном направлении вдоль наружной лицевой поверхности бруса показаны на рис.5. Представленные результаты получены при действии сосредоточенной растягивающей силы $P = 100$ Н (рис. 2 б), приложенной без эксцентриситета. Для проведения сравнительного анализа рассмотрены три расчетные модели бруса. Графики напряжений и перемещений, полученные согласно непрерывно структурной теории, даны при помощи штрихпунктирных линий. Сплошными линиями показаны результаты, которые соответствуют дискретно структурной теории многослойного бруса с учетом как идеального, так и неидеального контакта сопряженных лицевых поверхностей соседних слоев. Значения коэффициентов K_i ($i=1, 2$) для рассматриваемого трехслойного бруса (37) считаются одинаковыми, т.е. $K_1 = K_2 = K$.

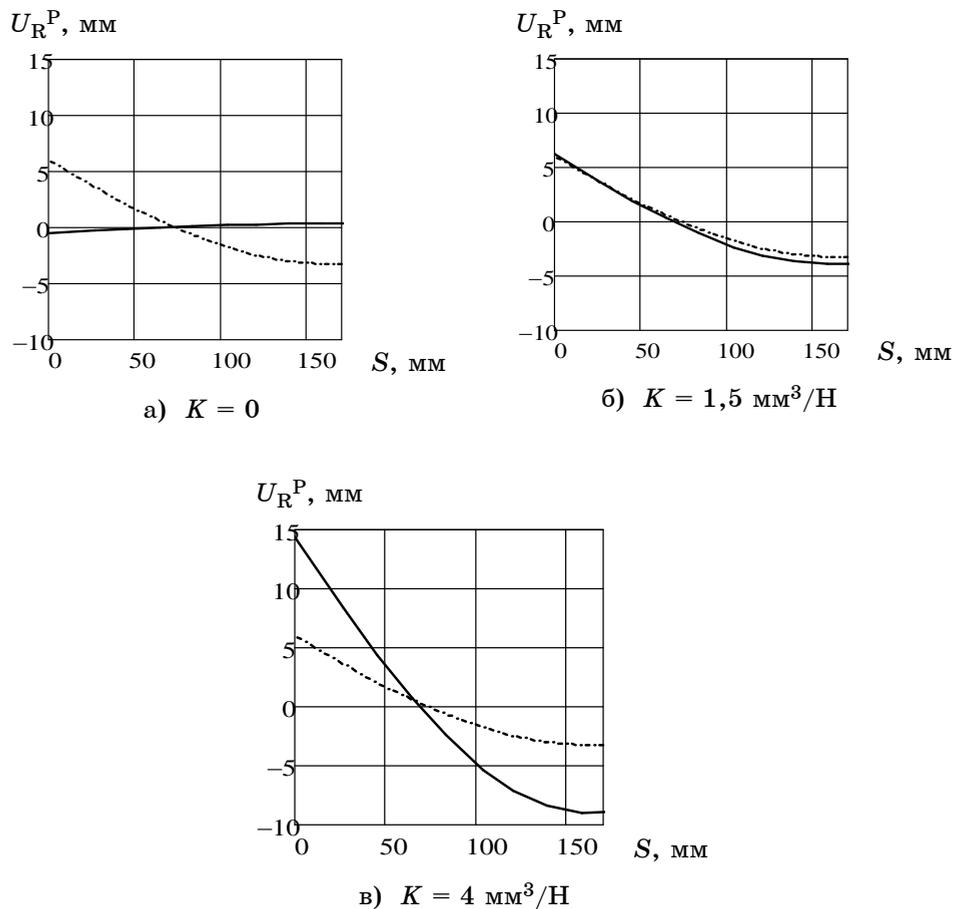


Рисунок 5 - График изменения радиальных перемещений u_r^P по внешней контуре бруса в зависимости от координаты $s = \theta r$

Анализ теоретических результатов, представленных на рис. 4 и 5, позволяет отметить следующее. При учете жесткого идеального контакта сопряженных поверхностей соседних слоев рис. 4, а распределение напряжений σ_θ^P существенно отличается от результатов, полученных по классической анизотропной теории. Так, например, тангенциальные напряжения сжатия на внешней поверхности бруса согласно теории с

учетом идеального контакта слоев равны $\sigma_{\theta}^P = -55,6$ МПа, что в 1,4 раза меньше соответствующих напряжений, полученных по классической теории.

Кроме того, по линии сопряжения слоев имеет место скачок тангенциальных напряжений. Это означает, что при составлении дискретной модели многослойного бруса не были учтены статические условия контакта слоев в окружном направлении. Как видно из рис. 5 а учет только кинематических условий идеального жесткого контакта слоев заметно снижает значения радиальных перемещений бруса по сравнению с классической теорией.

На рис. 4 б, в, рис. 5 б, в построены графики тангенциальных напряжений и радиальных перемещений. Они построены с учетом допущения об упругом проскальзывании соседних слоев друг относительно друга. Это позволило заметно уточнить реальную картину деформации многослойного бруса при действии сосредоточенной силы P . Так, например, напряжения σ_{θ}^P и перемещения u_r^P , полученные по первой и третьей моделям, когда значение коэффициента равно $K = 1,5$ мм³/Н, практически совпадают. С увеличением коэффициента K до значения $K = 4$ мм³/Н наблюдается заметное увеличение тангенциальных напряжений на лицевых поверхностях бруса, а также почти в два раза происходит увеличение радиальных перемещений точек сечения бруса с координатой $\theta = \pi/2$.

ВЫВОДЫ

Таким образом, проведенные на основе классической теории упругости анизотропного тела и дискретноструктурной теории многослойных элементов исследования напряженно-деформированного состояния плоского кривого бруса, позволяют сделать следующий вывод. Модель многослойного бруса когда допускается упругое проскальзывание сопряженных поверхностей соседних слоев относительно друг друга, частично отображает реальную картину деформации такого конструктивного элемента. На примере плоского кривого бруса при действии сосредоточенной силы показано, что с увеличением коэффициента K до значения $K = 4$ мм³/Н наблюдается заметное увеличение тангенциальных напряжений на лицевых поверхностях бруса, а также почти в два раза происходит увеличение радиальных перемещений точек сечения бруса с координатой $\theta = \pi/2$. Этот фактор может стать основной причиной разрушения такого бруса.

SUMMARY

STRESS-STRAIN STATE OF A LAMINATED CURVED FLAT BAR AT BENDING, TAKING INTO CONSIDERATION IDEAL AND NON-IDEAL CONTACT BETWEEN LAYERS

*Vereshchaka S. M., Karash E. T.,
Sumy State University, Sumy*

The stress-strain behavior of laminated curved flat bar based on the classical theory of elasticity of an anisotropic body is investigated. To account the static and kinematic conditions of contact for dual front surfaces of adjacent layers with cylindrical anisotropy a system of algebraic equations was composed. The order of the system of equations is determined by the number of conjugated segments. As an example, the authors consider a flat bar bending under the action of concentrated forces on the ends. It is demonstrated that the considered variant of discrete structural theory of multilayer may give a more accurate estimate of the stress-strain state of timber compared to classical theory.

Key words: multilayer theory, delamination, composite material, curved bar.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин / В. В. Болотин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – № 4. – С. 153-160.
2. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
3. Ochoa Ozder O. A parametric study on strain energy release rates of compression members/ Ozder O. Ochoa, Allan Moore // Compos. Struct. – 1989. – V.11, № 2. – P. 151-163.
4. Sun C. T. Growth of delamination cracks due to bending in a [90/0/90] laminae / C.T. Sun, Manoharan M.G. // Compos. Sci. and Technol. – 1989. – V.34, № 4. – P. 365-377.
5. Зубко В. И. Цилиндрический изгиб пакета трансверсально-изотропных пластин при наличии зон сцепления, проскальзывания, отслоения / В. И. Зубко, Б. Н. Полевой, В. М. Шопа // Механика композитных материалов. – 1990. – № 3. – С. 508-512.
6. Малышев А. П. Переходные процессы в оболочке с расслоениями / А. П. Малышев // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 101-105.
7. Верещака С. М. Напряженное состояние многослойных тонкостенных элементов с межфазными дефектами структуры / С. М. Верещака, Г. И. Львов // Механика композитных материалов. – 2005. – Т.41, № 6. – С. 761-772.
8. Suemasu H. Analytical method to solve postbuckling behavior of delaminated composite plates / H. Suemasu, S.S. Wang // J. Jap. Soc. Compos. Mater. – 1988. – V.14, № 1. – P. 26 – 35.
9. Ko W.L. Delamination Stresses in Semicircular laminated Composite Bars, NASA TM 4026, 1988.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
11. Верещака С. М. Прочность многослойного полого цилиндра с дефектами структуры / С. М. Верещака, Е. Т. Караш // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки. - 2011. - №1. - С. 75-88.
12. Верещака С. М. Анализ напряженного состояния многослойного полого цилиндра при действии внутреннего давления / С. М. Верещака, Е. Т. Караш // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». - 2010. - №3. - С. 7-19.

Поступила в редакцию 25 октября 2011 г.