МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Б.А.Міщенко, А.С.Опанасюк, Л.М.Панченко

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДО ПРАКТИЧНИХ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА»

ЧАСТИНА 3 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ ТА КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 1

для викладачів та студентів інженерного факультету денної та заочної форм навчання

**Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету.
Протокол №4 від 11.12.2002 р.**

СУМИ ВИД-ВО СУМ ДУ 2003

Збірник задач складений відповідно до навчальної програми студентів інженерного факультету. Він містить задачі з розділу “Елементи атомної фізики та квантової механіки”, що можуть бути використані як для розв'язання на практичних заняттях, так і студентами самостійно. Задачі розбиті на тридцять варіантів, це дозволяє застосовувати збірник для того, щоб видавати студентам індивідуальні завдання. У збірнику наведені приклади розв’язання задач та зведення основних формул, які при цьому використовуються.

Збірник призначений для допомоги викладачам та студентам під час роботи над загальним курсом фізики.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 1

Варіант	Номер задачі							
1	1	31	61	91	121	151	181	211
2	2	32	62	92	122	152	182	212
3	3	33	63	93	123	153	183	213
4	4	34	64	94	124	154	184	214
5	5	35	65	95	125	155	185	215
6	6	36	66	96	126	156	186	216
7	7	37	67	97	127	157	187	217
8	8	38	68	98	128	158	188	218
9	9	39	69	99	129	159	189	219
10	10	40	70	100	130	160	190	220
11	11	41	71	101	131	161	191	221
12	12	42	72	102	132	162	192	222
13	13	43	73	103	133	163	193	223
14	14	44	74	104	134	164	194	224
15	15	45	75	105	135	165	195	225
16	16	46	76	106	136	166	196	226
17	17	47	77	107	137	167	197	227
18	18	48	78	108	138	168	198	228
19	19	49	79	109	139	169	199	229
20	20	50	80	110	140	170	200	230
21	21	51	81	111	141	171	201	231
22	22	52	82	112	142	172	202	232
23	23	53	83	113	143	173	203	233
24	24	54	84	114	144	174	204	234
25	25	55	85	115	145	175	205	235
26	26	56	86	116	146	176	206	236
27	27	57	87	117	147	177	207	237
28	28	58	88	118	148	178	208	238
29	29	59	89	119	149	179	209	239
30	30	60	90	120	150	180	210	240

1 ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Зведення основних формул розділу

1 Фазова швидкість хвильового пакета

$$\upsilon = \frac{\omega}{k},$$

де ω - кутова частота; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; λ - довжина хвилі.

Групова швидкість

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

2 Співвідношення де Бройля

$$E = \hbar\omega, \; p = \hbar k,$$

де E – енергія частинки, що рухається; p – імпульс частинки; $\vec{k}$ – хвильовий вектор; $\left|\vec{k}\right| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\hbar$ - стала Планка ($\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$).

3 Зв’язок між імпульсом p частинки, що рухається, та довжиною хвилі де Бройля λ для двох випадків:

а) у класичному наближенні ($\upsilon << c$; $p = m_0\upsilon$)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\upsilon},$$

де m_0 –маса спокою частинки;

б) у релятивістському випадку (швидкість υ наближається до швидкості c світла у вакуумі;

$$p = m\upsilon = m_0\upsilon \Big/ \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\ ),$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\ .$$

4 Зв'язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією E_k частинки:

а) у класичному наближенні $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k}}$;

б) у релятивістському випадку $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k+2E_0)}}$, де E_0 – енергія спокою частинки ($E_0 = m_0c^2$).

5 Співвідношення невизначеностей:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar\,,$$

де Δp_x – невизначеність проекції імпульсу частинки на вісь x;
Δx – невизначеність її координати;

б) для енергії і часу

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar\,,$$

де ΔE – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

6 Одновимірне часове рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,,$$

де i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$); m – маса частинки; $\psi(x,t)$ - хвильова функція, яка описує стан частинки.

Хвильова функція, яка описує одновимірний рух вільної частинки,

$$\psi(x,t) = A\exp\frac{i}{\hbar}(px - Et),$$

де *A* – амплітуда хвилі де Бройля; *p* – імпульс частинки; *E* – повна енергія частинки.

Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

де *E* – повна енергія частинки; *U(x)* – потенціальна енергія; *ψ(x)* – координатна (або амплітудна) частина хвильової функції,

або в операторній формі

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

У випадку гармонічного осцилятора рівняння Шредінгера має вигляд

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0,$$

де *m* – маса частинки; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - власна частота класичного гармонічного осцилятора; *k* - жорсткість.

Для випадку тривимірної задачі рівняння Шредінгера запишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

При розв'язанні рівняння Шредінгера слід враховувати стандартні умови, яким повинна задовольняти хвильова функція: скінченність (у всьому просторі), однозначність, неперервність самої ψ - функції та її першої і другої похідної.

7 Ймовірність dW знайти частинку в інтервалі від x до $x+dx$ (в одновимірному випадку) виражається формулою

$$dW = \left|\psi(x)\right|^2 dx ,$$

де $\left|\psi(x)\right|^2$ - густина ймовірності.

Ймовірність W знайти частинку в інтервалі від x_1 до x_2 знаходиться інтегруванням dW за зазначеними границями інтегрування

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi(x)\right|^2 dx .$$

8 Власне значення енергії E_n частинки, яка перебуває на n-му енергетичному рівні в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, визначається формулою

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, ...) ,$$

де l – ширина потенціальної ями.

Відповідна до цієї енергії власна хвильова функція має вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x .$$

9 Коефіцієнт заломлення $n_з$ хвиль де Бройля на границі низького потенціального бар'єра нескінченної ширини (рис.1)

$$n_з = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} ,$$

де λ_1 і λ_2 – довжини хвиль де Бройля в областях *I* і *II* (частинка рухається із області *I* в *II*); k_1 і k_2 – відповідні значення хвильових чисел.

10 Коефіцієнти відбиття ρ і проходження τ хвиль де Бройля через низький *(U<E)* потенціальний бар'єр нескінченної ширини

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, \ \tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа хвиль де Бройля в областях *I* і *II*.

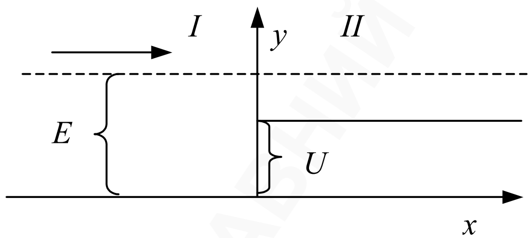

Рисунок 1

11 Коефіцієнт прозорості *D* прямокутного потенціального бар'єра скінченої ширини

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} d \right],$$

де *U* – висота потенціального бар'єра; *E* – енергія частинки; *d* – ширина бар'єра.

12 Момент імпульсу електрона на стаціонарних орбітах атома Бора

$$L = m\upsilon r = n\hbar \ \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right),$$

де *m* – маса електрона; *r* - радіус орбіти; υ - швидкість електрона на орбіті; *n* - головне квантове число; $\hbar$ - стала Планка.

13 Енергія фотона, що випромінює атом водню при переході з одного стаціонарного стану в інший,

$$E = 2\pi\hbar\omega = E_{n_2} - E_{n_1},$$

де ω - частота випромінювання; E_{n_2} і E_{n_1} – енергії атома у стаціонарних станах з якого і на який переходить атом відповідно.

14 Енергія електрона, що розміщується на n-й орбіті,

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2 n^2}.$$

15 Серійна формула визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається атомом водню при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

де R – стала Рідберга ($R = 1{,}1\cdot10^7$ м$^{-1}$); z - заряд ядра у відносних одиницях ($z = 1$ для водню).

16 Короткохвильова межа $\lambda_{\min}$ безперервного рентгенівського спектру

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U},$$

де e - заряд електрона; U - різниця потенціалів, що прикладена до рентгенівської трубки; $\hbar$ - стала Планка.

17 Закон Мозлі у загальному випадку

$$\omega = CR'(z-\sigma)^2 = R'(z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

де ω - частота ліній рентгенівського спектра; z - атомний номер елемента, що випромінює цей спектр; R' - стала Рідберга (R' = 2,07·10^{16} с$^{-1}$); σ – стала екранування; C- стала; n = 1, 2, 3,…; m = n+1, n+2,….

Закон Мозлі для K_α – ліній ($\sigma = 1,\ C = \frac{3}{4}$)

$$\omega_{K_\alpha} = \frac{3}{4} R' \left(z - 1 \right)^2 .$$

18 Енергія фотона K_α - лінії рентгенівського випромінювання

$$E_{K_\alpha} = \frac{3}{4} E_i \left(z - 1 \right)^2 ,$$

де E_i – енергія іонізації атома водню.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорювальну різницю потенціалів U. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для двох випадків:

1) $U_1 = 60\ B$;   2) $U_2 = 600\ кB$.

Розв'язок. Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її імпульсу p і визначається виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} . \qquad (1)$$

Імпульс частинки можна знайти, якщо відома її кінетична енергія E_k. Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією для нерелятивістського (коли $E_k \le E_0$) і релятивістського (коли $E_k \approx E_0$) випадків визначається співвідношеннями

$$p = \sqrt{2mE_k} ,\ \ p = \frac{1}{c} \sqrt{\left(2E_0 + E_k \right) E_k} ,$$

де $E_0 = mc^2$ - енергія спокою частинки.

Вираз (1) з урахуванням цих співвідношень запишеться у нерелятивістському та релятивістському випадках таким чином:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}}, \ \lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{\left(2E_0 + E_k\right)E_k}}. \qquad (2)$$

Порівняємо кінетичні енергії електронів, що пройшли задані в умові задачі різниці потенціалів $U_1 = 60\ В$, $U_2 = 600\ кВ$, з енергією спокою електрона і в залежності від цього зробимо висновок, яку з наведених формул необхідно використовувати для розрахунків довжини хвилі де Бройля.

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів *U,* дорівнює

$$E_k = |e|U. \qquad (3)$$

У першому випадку $E_{k1} = |e|U_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 60 = 60 \cdot eB = = 0{,}6 \cdot 10^{-4}\, MeB$, тобто енергія набагато менша від енергії спокою електрона $E_0 = mc^2 = 0{,}51\, MeB$. Тому для розрахунків можна використати нерелятивістську формулу.

У другому випадку кінетична енергія $E_{k2} = |e|U_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5 = 0{,}6 \cdot MeB$, тобто більша, ніж енергія спокою електрона. Саме тому у цьому випадку необхідно використати нерелятивістську формулу.

З урахуванням виразу (3) співвідношення (2) наберуть вигляду

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}}, \ \lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{\left(2mc^2 + eU\right)eU}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо відповідь

$$\lambda = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 60}} = 1,58\cdot 10^{-10}\ м,$$

$$\lambda = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{\frac{1}{3\cdot 10^{8}}\sqrt{\left(2\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\right)^{2} + 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}\right)\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}}} = 1,26\cdot 10^{-12}\ м.$$

Перевіримо розмірності одиниць одержаної величини:

$$\frac{|\hbar|}{\left(|m||e||U|\right)^{1/2}} = \frac{1\ Дж\cdot с}{\left(1\ кг\cdot 1\ Кл\cdot 1\ В\right)^{1/2}} = \left(\frac{1\ Дж}{1\ кг}\right)^{1/2} 1\ с = \left(\frac{1\ кг\cdot м^{2}/с^{2}}{1\ кг}\right)^{1/2}\cdot 1\ с = 1\ м.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 1,58\cdot 10^{-10}$ м; $\lambda_2 = 1,26\cdot 10^{-12}$ м.

Приклад 2 Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює E_K = 10 еВ. Використовуючи співвідношення невизначеності, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

Розв’язок. Для розв’язання задачі використаємо співвідношення невизначеностей

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

де Δx –невизначеність координати частинки; Δp_x - невизначеність імпульсу частинки; $\hbar$ - стала Планка.

Нехай атом має лінійні розміри l, тоді електрон атома буде перебувати десь в межах цієї області з похибкою

$$\Delta x = \frac{l}{2}.$$

У цьому випадку співвідношення невизначеностей набирає вигляду

$$\left(\frac{l}{2}\right)\Delta p_x \geq \hbar,$$

звідси

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \qquad (4)$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x, тобто $\Delta p_x \leq p_x$. Імпульс p_x пов'язаний з кінетичною енергією E_k співвідношенням

$$p_x = \sqrt{2mE_k}.$$

Підставивши ці вирази у (4) та перейшовши від нерівності до рівності, одержимо

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE_k}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо відповідь:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 1,23 \cdot 10^{-10} \ м.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{|\hbar|}{\left(|m||E_k|\right)^{1/2}} = \frac{1 \ Дж \cdot с}{\left(1 \ кг \cdot 1 \ Дж\right)^{1/2}} = \left(\frac{1 \ Дж}{1 \ кг}\right)^{1/2} 1 \ с = \left(\frac{1 \ кг \cdot м^2/с^2}{1 \ кг}\right)^{1/2} \cdot 1 \ с = 1 \ м.$$

Відповідь: $l_{\min} = 1,23 \cdot 10^{-10} \ м$.

Приклад 3 Електрон перебуває у потенціальному ящику шириною *l*. В яких точках у інтервалі ($0 < x < l$) густина ймовірності перебування електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

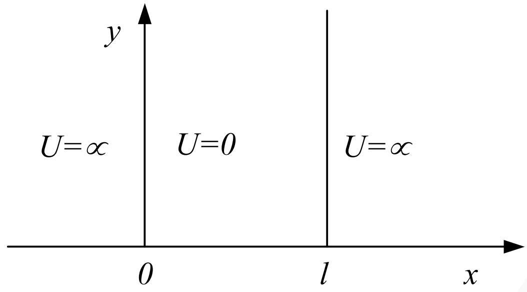

Рисунок 2

Припустимо, що квантова частинка може рухатись тільки вздовж осі *x*. При цьому рух обмежується непроникними для частинки стінками: $x = 0$ і $x = l$. Потенціальна енергія у цьому випадку має такий вигляд (рис.1): вона дорівнює нулю при $0 \le x \le l$ і обертається у нескінченність при $x < 0$ та $x > l$.

Для розв’язання задачі використаємо рівняння Шредінгера для одновимірного випадку

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi = 0 . \qquad (5)$$

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може. Тому ймовірність виявлення частинки ззовні ями дорівнює нулю. Відповідно і функція ψ за межами потенціальної ями повинна дорівнювати нулю. Із умови неперервності випливає, що хвильова функція ψ дорівнює нулю і на границях ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0 . \qquad (6)$$

Цій умові повинен задовольняти розв’язок рівняння (5).

В області $0 < x < l$, де хвильова функція не дорівнює нулю, рівняння (5) має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

(у цій області $U = 0$). Введемо позначення

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E ,$$

у результаті одержимо добре відоме з теорії коливань співвідношення

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 .$$

Розв’язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha) .$$

Умову (6) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α. Із умови $\psi(0) = 0$ одержимо

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0 ,$$

звідки випливає, що стала α повинна дорівнювати нулю. Крім того, повинна виконуватись умова

$$\psi(l) = A \sin kl = 0 , \qquad (7)$$

що можливо лише у випадку, якщо

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

($n = 0$ відпадає, оскільки при цьому $\psi \equiv 0$, тобто частинка не існує).

Підставивши значення k у співвідношення (7), одержимо власні функції частинки у потенціальному ящику шириною l

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l} = 0 .$$

Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування хвильової функції, яка у даному випадку має вигляд

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = 1 .$$

На кінцях проміжку інтегрування підінтегральна функція перетворюється у нуль. Тому значення інтеграла можна одержати, помноживши середнє значення $\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ (яке, як добре відомо, дорівнює 0,5) на довжину проміжку l: $A^2\left(\frac{1}{2}\right)l = 1$, звідки $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Таким чином, власні функції мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l} ,$$

де $n = 1, 2, 3, ...$

На першому та другому енергетичних рівнях ці функції мають вигляд

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l} ,\ \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l} . \qquad (8)$$

Ймовірність перебування частинки у будь-якій точці потенціальної ями на цих рівнях визначаються співвідношеннями

$$W_1 = \int_0^l \psi_1^{\,2}(x)\,dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx ,$$

$$W_2 = \int_0^l \psi_2^{\,2}(x)\,dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx .$$

Згідно з умовою задачі густина ймовірності перебування квантової частинки у деяких точках на першому і другому рівнях енергії однакова, звідси $\psi_1^{\,2}(x) = \psi_2^{\,2}(x)$. Після підставлення співвідношень (8) одержимо

$$\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l} .$$

Розв’язавши тригонометричне рівняння $\sin\frac{\pi x}{l} = \pm\sin\frac{2\pi x}{l}$, одержимо $x_1 = \frac{l}{3}, x_2 = \frac{2l}{3}$.

Підставивши відповідні значення x у співвідношення $\psi\psi^* = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}$, одержимо відповідь

$$\psi\psi^*_1 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{2}{l}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2l}, \quad \psi\psi^*_2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2l} .$$

Відповідь: $\psi\psi^* = \frac{3}{2l}$.

Приклад 4 Визначити довжину хвилі λ_{K_α} і енергію E_{K_α} фотона K_α- лінії рентгенівського спектру, що випромінюється ренієм при бомбардуванні його швидкими електронами.

Розв’язок. При бомбардуванні ренію швидкими електронами виникає рентгенівське випромінювання, що має лінійчастий спектр. Ці електрони проникають всередину електронної оболонки атома та вибивають електрони, що належать до електронних шарів. Найближчий до ядра електронний шар (K-шар) має два електрони. Якщо один з цих електронів виявляється вибитим за межі атома, то на вільне місце переходить електрон з шару, що лежить вище (L, M, N). При цьому виникає відповідна лінія *K*-серії. При переході електрона з L-шару на K-шар випромінюється найбільш інтенсивна K_α лінія рентгенівського спектру.

Довжина хвилі цієї лінії визначається за законом Мозлі

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R\left(z-1\right)^2 .$$

З цього співвідношення

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R\left(z-1\right)^2} .$$

Після підставлення значень фізичних величин одержимо відповідь

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3 \cdot 1{,}1 \cdot 10^7 (75-1)^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-11}\ м .$$

Знаючи довжину хвилі, визначимо енергію фотона з використанням виразу

$$E_{K_\alpha} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} .$$

Після підставлення числових значень величин знайдемо

$$E_{K_\alpha} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}2 \cdot 10^{-11}} = 5{,}64 \cdot 10^{-14}\ Дж .$$

Відповідь: $\lambda_{K_\alpha} = 2{,}2 \cdot 10^{-11}\ м$; $E_{K_\alpha} = 5{,}64 \cdot 10^{-14}\ Дж$.

Приклад 5 Визначити енергію електрона, що перебуває на другій орбіті атома водню.

Розв'язок. Згідно з теорією Бора радіус електронної орбіти і швидкість електрона на ній пов'язані співвідношенням

$$m\upsilon r = n\hbar , \tag{9}$$

де e і m – заряд і маса електрона; n - головне квантове число (n=1, 2,3,...).

У цей вираз входить дві невідомі величини r і υ. За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра і електронами надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}. \tag{10}$$

З цього рівняння знайдемо швидкість електрона:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}}. \tag{11}$$

Розв'язавши разом рівняння (9) та (11), одержимо

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 . \tag{12}$$

Енергія атома складається з кінетичної енергії електрона та енергії взаємодії електрона з ядром:

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{13}$$

З використанням співвідношення (10) одержимо

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r}.$$

Підставивши цей вираз у співвідношення (13), знайдемо

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r}.$$

Нарешті, з використанням співвідношень (11) та (12) визначимо значення енергії електрона на другій борівській орбіті:

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}.$$

Після підставлення числових значень величин знайдемо

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2 \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\cdot\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}\frac{1}{2^2} = 5{,}47\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 3{,}42\ eB.$$

Відповідь: $E_n = -5{,}47\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = -3{,}42\ eB$.

Приклад 6 Електрон в атомі гелію перейшов з п’ятого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, що при цьому випромінюється.

Розв’язок. Для визначення енергії фотона скористаємось серійною формулою для воднеподібних іонів

$$\frac{1}{\lambda} = Rz^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{14}$$

де λ - довжина хвилі фотона; R – стала Рідберга; z – заряд ядра у відносних одиницях (при z = 1 формула набирає вигляду, що є характерним для водню); n – номер орбіти, на яку перейшов електрон; m - номер орбіти, з якої перейшов електрон (n і m – головні квантові числа).

Енергія фотона E визначається співвідношенням

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тому, помноживши обидві частини рівняння (1) на hc, одержимо вираз для енергії фотона у вигляді

$$E = Rhcz^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Оскільки всі величини у співвідношенні відомі, проведемо розрахунок E:

$$E = 1{,}1\cdot 10^7 \cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8\cdot 2^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 1{,}83\cdot 10^{-18}\ Дж = 11{,}48\ еВ.$$

Відповідь: $E = 1{,}83\cdot 10^{-18}\ Дж = 11{,}48\ еВ$.

Приклад 7 Знайти енергію основного стану атома водню.

Розв'язок. Рівняння Шредінгера для тривимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

Оскільки задача є симетричною, це рівняння зручно записати у сферичних координатах. Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має вигляд

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Після підставлення цих виразів рівняння Шредінгера набирає вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\varphi}=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi. \quad (15)$$

Для того щоб одержати рівняння Шредінгера для атома водню, необхідно врахувати, що потенціальна енергія електрона має вигляд $U=-k\frac{e^2}{r}$, де $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Як розв'язок диференціального рівняння хвильову функцію візьмемо у вигляді $\psi=e^{-r/a}$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (15) і враховуючи, що часткові похідні $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ та $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ перетворюється у нуль, одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(e^{-r/a}\right)}{\partial r}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right)e^{-r/a}.$$

Після ряду перетворень одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a}e^{-r/a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right)e^{-r/a},$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{a}-\frac{2r}{a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right),$$

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)-\left(\frac{2}{a}\right)\frac{1}{r}=-\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)-\left(\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\right)\frac{1}{r}. \quad (16)$$

Прирівнявши члени, що містять $\frac{1}{r}$, одержимо

$$\left(\frac{2}{a}\right)=\left(\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\right),$$

звідси

$$a=\frac{\hbar^2}{k_0me^2}\,. \qquad (17)$$

Прирівнявши вільні члени рівняння (16), одержимо

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)=-\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right),$$

або

$$E=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\,.$$

Підставляючи у це рівняння співвідношення (17), одержимо кінцевий результат

$$E=-k_0{}^2\frac{me^4}{2\hbar^2}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{me^4}{2\hbar^2}\,.$$

Після підставлення числових значень *m, e*, $\hbar$ знайдемо

$$E=-\left(\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2\cdot\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\cdot\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}=-21{,}8\cdot 10^{-19}\text{ Дж}=-13{,}6\text{ еВ}.$$

Відповідь: $E=-21{,}8\cdot 10^{-19}$ *Дж* $=-13{,}6$ *еВ*.

Приклад 8 Моноенергетичний потік електронів (E = 100 еВ) падає на низький прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини (рис.1). Визначити висоту потенціального бар'єра U, якщо відомо, що 4% електронів, що падають на бар'єр відбивається.

Розв’язок. Коефіцієнт відбиття електронів від низького потенціального бар'єра задається виразом

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 ,$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа, які відповідають руху електронів у областях I та II.

В області I кінетична енергія електрона дорівнює E_k, відповідно хвильове число задається виразом

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_k} \ .$$

Оскільки координата електрона не визначена, імпульс електрона визначається точно, а із цього випливає, що можна говорити про точне значення його кінетичної енергії.

В області II кінетична енергія електрона дорівнює $E - U$, відповідно хвильове число записується у вигляді

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\left(E - U\right)} \ .$$

Коефіцієнт відбиття можна записати таким чином:

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m\left(E - U\right)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m\left(E - U\right)}} \right)^2 .$$

Поділимо чисельник та знаменник дробу на $\sqrt{2mE}$:

$$\rho = \left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{U}{E}}}{1+\sqrt{1+\frac{U}{E}}} \right)^2 .$$

Розв'язавши рівняння відносно $\sqrt{1-\frac{U}{E}}$, одержимо

$$\sqrt{1-\frac{U}{E}} = \frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}} .$$

Підносячи обидві частини рівності до квадрата, знайдемо висоту потенціального бар'єра

$$U = \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}} \right)^2 \right] E .$$

Після підставлення числових значень фізичних величин знайдемо відповідь

$$U = \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{0,04}}{1+\sqrt{0,04}} \right)^2 \right] 100 = 55,6\ eB .$$

Відповідь: $U = 55,6\ eB$.

ЗАДАЧІ

1 Визначити довжини хвиль де Бройля електрона і протона, що пройшли однакову прискорювальну різницю потенціалів U = 400 В.

Відповідь: λ_e = 61,4 нм; λ_p =1,43 нм.

2 Кінетична енергія протона дорівнює його енергії спокою. Обчислити довжину хвилі де Бройля цього протона.

Відповідь: λ_p =2,7 пм.

3 Визначити кінетичні енергії протона і електрона, для яких довжина хвилі де Бройля дорівнює 0,06 нм.

Відповідь: E_{kp} = 727 пм; E_{ke} = 0,396 пм.

4 Протон має кінетичну енергію, що дорівнює його енергії спокою. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля протона, якщо його кінетична енергія збільшиться у 2 рази?

Відповідь: $\lambda_{p2}/\lambda_{p1}$ =1,63.

5 Кінетична енергія електрона дорівнює його енергії спокою. Обчислити довжину хвилі де Бройля для такого електрона.

Відповідь: λ_e = 1,4 пм.

6 Маса електрона, що рухається, у 2 рази більша від маси спокою. Визначити довжину хвилі де Бройля для такого електрона.

Відповідь: λ_e = 1,4 пм.

7 Використовуючи постулати Бора, знайти зв'язок між довжиною хвилі де Бройля і довжиною колової електронної орбіти.

Відповідь: $l_n = n\lambda_n$.

8 Яку кінетичну енергію повинен мати електрон, щоб його довжина хвилі де Бройля дорівнювала комптонівській довжині хвилі?

Відповідь: E_k = 0,21 МеВ.

9 Визначити довжини хвиль де Бройля електрона, що рухається зі швидкістю 1 Мм/с, атома водню, що рухається зі швидкістю, яка дорівнює середній квадратичній швидкості при температурі 27°С, і кульки масою 1 г, що рухається зі швидкістю 0,1 м/с.

Відповідь: λ_{e1} = 0,73 нм; λ_{e2} = 144 пм; $\lambda_{e3} = 6{,}6\cdot10^{-25}$ м.

10 Який імпульс повинен мати протон, щоб його дебройлівська довжина хвилі дорівнювала комптонівській довжині хвилі?

Відповідь: $p = 5\cdot10^{-19}$ кг·м/с.

11 Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, що рухається по першій борівській орбіті в атомі водню.

Відповідь: λ_e = 0,33 нм.

12 Оцінити мінімальний діаметр d плями, яка створюється на детекторі пучком атомів срібла, що випромінюються піччю з температурою T = 1200°С. Відстань від вихідної щілини печі до детектора дорівнює l = 1 м.

Відповідь: $d = 2$ мкм.

13 Написати вираз для дебройлівської довжини хвилі λ релятивістської частинки маси m; а) через її швидкість υ; б) через кінетичну енергію E_k.

Відповідь: $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{m_0\upsilon}$; $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k\left(1+\dfrac{E_k}{2m_0c^2}\right)}}$.

14 При якому значенні швидкості υ дебройлівська довжина хвилі мікрочастинки дорівнює її комптонівській довжині хвилі?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}71$ с.

15 При якій швидкості υ електрона його дебройлівська довжина хвилі буде дорівнювати: а) 500 нм; б) 0,1 нм?

Відповідь: $\upsilon_1 = 1{,}46$ км/с; $\upsilon_2 = 7{,}3$ Мм/с.

16 Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, що рухається зі швидкістю 20 км/с. До якої області електромагнітного спектру можна віднести довжину хвилі, що дорівнює знайденій?

Відповідь: $\lambda_e = 3{,}64$ нм.

17 Швидкість так званих теплових нейтронів, середня кінетична енергія яких близька до середньої енергії атомів газу при кімнатній температурі, дорівнює 2,5 км/с. Знайти довжину хвилі де Бройля для таких нейтронів.

Відповідь: $\lambda_n = 160$ пм.

18 У телевізійній трубці проекційного типу електрони розганяються до швидкості 10^8 м/с. Визначити довжину хвилі електронів без урахування і з урахуванням залежності маси від швидкості.

Відповідь: $\lambda_{e1} = 7{,}27$ пм; $\lambda_{e2} = 6{,}86$ пф.

19 Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, що рухається зі швидкістю, яка дорівнює 0,8 швидкості світла. Врахувати зміну маси зі швидкістю.

Відповідь: $\lambda_e = 1{,}82$ пм.

20 Обчислити довжину хвилі де Бройля для протона з кінетичною енергією 100 еВ.

Відповідь: λ_p = 2,86 пм.

21 Знайти довжину хвилі де Бройля для α-частинки, нейтрона і молекули азоту, що рухаються із середньою квадратичною швидкістю при температурі 25° С.

Відповідь: λ_α = 73 пм; λ_n = 145 пм; λ_N = 28 пм.

22 Електрон пройшов прискорювальну різницю потенціалів U = 510 кВ. Визначити довжину хвилі де Бройля з урахуванням зміни маси від швидкості.

Відповідь: λ_e = 1,4 пм.

23 Електрон рухається по другій орбіті атома водню. Знайти його довжину хвилі де Бройля.

Відповідь: λ_e = 0,67 нм.

24 На грань кристала нікелю падає під кутом 64° до поверхні грані паралельний пучок електронів, що рухаються з однаковою швидкістю. Беручи відстань між атомними площинами кристала такою, що дорівнює 200 пм, визначити швидкість електронів, якщо вони зазнають інтерференційного відбиття першого порядку.

Відповідь: υ = 2 Мм/с.

25 Електрон має кінетичну енергію E_k = 1,02 МеВ. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля, якщо кінетична енергія електронів зменшиться удвічі.

Відповідь: $\lambda_{e1}/\lambda_{e2}$ = 1,63.

26 Обчислити дебройлівські довжини хвиль електрона, протона і атома урану, що мають однакову кінетичну енергію 100 еВ.

Відповідь: λ_e = 123 пм; λ_p = 2,86 пм; λ_U = 0,186 пм.

27 Яку енергію необхідно додатково надати електрону, щоб його дебройлівська довжина хвилі зменшилася від 100 до 50 пм?

Відповідь: E = 0,45 кеВ.

28 Знайти дебройлівську довжину хвилі молекул водню, що відповідає їх найбільш ймовірній швидкості при кімнатній температурі.

Відповідь: λ_H = 128 пм.

29 Одержати вираз для дебройлівської довжини хвилі λ релятивістської частинки, що рухається з кінетичною енергією E_k. При яких значеннях E_k помилка у її визначенні за нерелятивістською формулою не перевищує 1% для електрона і протона?

Відповідь: $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k\left(1+\dfrac{E_k}{2m_0c^2}\right)}}$,

$E_k \leq 20{,}4$ *кеВ* для електронів і 37,5 МеВ для протонів.

30 Знайти дебройлівську довжину хвилі релятивістських електронів, що підлітають до антикатода рентгенівської трубки, якщо довжина хвилі короткохвильової границі суцільного рентгенівського спектру λ = 10 пм?

Відповідь: λ_e = 3,3 пм.

31 Середній час життя π-мезона дорівнює $1{,}9 \cdot 10^{-16}$ с. Якою повинна бути енергетична роздільна здатність приладу, за допомогою якого можна зареєструвати π-мезон?

Відповідь: ΔE = 3,5 еВ.

32 На фотографії, отриманій за допомогою камери Вільсона, ширина сліду електрона складає $0{,}8 \cdot 10^{-3}$ м. Знайти невизначеність вимірювання його швидкості.

Відповідь: $\Delta\upsilon \leq 0{,}14$ м/с.

33 Середня кінетична енергія електрона в основному стані атома водню дорівнює 13,6 еВ. Використовуючи співвідношення невизначеностей, знайти найменшу похибку, з якою можна обчислити координату електрона в атомі.

Відповідь: Δx = 52,8 пм.

34 Електрон, що рухається зі швидкістю $8 \cdot 10^6$ м/с, реєструється бульбашковою камерою. Використовуючи співвідношення невизначеностей, знайти похибку у вимірюванні швидкості електрона, якщо діаметр бульбашки, що утворився у камері, 1 мкм.

Відповідь: $\Delta\upsilon$ = 115 м/с.

35 Показати, що для частинки, невизначеність координати якої складає $\Delta x = \lambda/(2\pi)$ (λ - довжина хвилі де Бройля), невизначеність її швидкості за величиною дорівнює самій швидкості частинки.

36 Середній час життя π+-мезона дорівнює $2{,}5\cdot 10^{-8}$ с. Якою повинна бути енергетична роздільна здатність приладу, за допомогою якого можна зареєструвати π+-мезон?

Відповідь: $\Delta E = 4{,}2\cdot10^{-27}$ Дж $= 2{,}62\cdot10^{-8}$ еВ.

37 Виходячи зі співвідношення невизначеностей, оцінити розміри ядра атома, вважаючи, що мінімальна енергія нуклона в ядрі 8 МеВ.

Відповідь: $d = 1{,}6$ фм.

38 Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити енергію електрона, що перебуває на першій борівській орбіті в атомі водню.

Відповідь: $E = 13{,}6$ еВ.

39 Використовуючи співвідношення невизначеностей, показати, що в ядрі не можуть перебувати електрони. Лінійні розміри ядра прийняти такими, що дорівнюють $5{,}8\cdot10^{-15}$ м. Врахувати, що питома енергія зв'язку в середньому складає 8 МеВ/нуклон.

Відповідь: $E = 80$ МеВ > 8 МеВ.

40 Атом випромінює фотон з довжиною хвилі 0,550 мкм. Тривалість випромінювання 10 нс. Визначити найбільшу похибку, з якою може бути виміряна довжина хвилі випромінювання.

Відповідь: $\Delta\lambda = 1{,}6\cdot10^{-14}$ м.

41 Хвильова функція частинки масою m, що рухається в одновимірному полі з потенціалом $U(x)$, має вигляд $\psi(x) = Ax\cdot\exp\left(-\dfrac{x}{a}\right)$ $(x>0)$, $\psi(x)=0$ $(x\le 0)$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей середню кінетичну енергію E_k частинки. Знайти потенціальну енергію $U(x)$ при $x>0$ і повну енергію E, якщо відомо, що $U(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Відповідь: $E_k = 21$ *еВ*; $U = 34$ *еВ*; $E = 55$ *еВ*.

42 Під час руху частинки вздовж осі x її швидкість виявляється визначеною з точністю до $\Delta\upsilon = 2{,}3$ см/с. Оцінити невизначеність координати Δx: а) для електрона; б) для броунівської частинки маси $m\sim10^{-13}$ г; в) для дробинки масою $m\sim0{,}1$ г.

Відповідь: $\Delta x_e = 0{,}5$ см; $\Delta x_б = 10^{-14}$ см; $\Delta x_д = 10^{-27}$ см.

43 Потік електронів, що летять паралельно один одному з швидкістю $\upsilon = 1{,}00\cdot 10^5$ м/с, проходить через щілину шириною b = 0,1 мм. Знайти ширину Δx центрального дифракційного максимуму, що спостерігається на екрані, віддаленому від щілини на відстань l =10 см. Порівняти Δx з шириною щілини b.

Відповідь: Δx = 0,015 мм.

44 Використавши співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальну енергію E, що може мати частинка масою m, яка перебуває в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі з шириною l.

Відповідь: $E \sim \dfrac{\hbar^2}{ml^2}$.

45 Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну енергію E одновимірного гармонічного осцилятора. Маса осцилятора дорівнює m, власна частота ω.

Відповідь: $E \sim \hbar\omega$.

46 Паралельний пучок моноенергетичних електронів падає нормально на діафрагму з вузькою прямокутною щілиною шириною b =1 мкм. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який віддалений від щілини на відстань l = 50 см, ширина центрального дифракційного максимуму Δx = 0,36 мм.

Відповідь: $\upsilon = 2\cdot 10^6$ м/с.

47 Паралельний пучок електронів, прискорених різницею потенціалів U = 25 В, падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, відстань між якими d = 50 мкм. Визначити відстань між сусідніми максимумами дифракційної картини на екрані, розміщеному на відстані l = 100 см від щілин.

Відповідь: x = 4,9 мкм.

48 Оцінити найменші похибки, з якими можна визначити швидкість електрона, протона і кульки масою 1 мг, якщо координати частинок і центра кульки встановлені з невизначеністю Δx = 1 мкм.

Відповідь: $\Delta\upsilon_e$=115 м/с; $\Delta\upsilon_p$=0,063 м/с; $\Delta\upsilon_к=10^{-22}$ м/с.

49 Оцінити за допомогою співвідношення Гейзенберга невизначеність швидкості електрона в атомі водню, враховуючи, що розмір атома l = 0,10 нм. Порівняти отриману величину зі швидкістю електрона на першій борівській орбіті даного атома.

Відповідь: $\Delta\upsilon = 10^6$ м/с; $\upsilon_1 = 2{,}2\cdot 10^6$ м/с.

50 Оцінити, у скільки разів для частинки, невизначеність розміщення якої $\Delta x = \lambda$, де λ - її довжина хвилі де Бройля, невизначеність швидкості менша за саму швидкість частинки.

Відповідь: $\Delta\upsilon/\upsilon = 2\pi$.

51 Вільний електрон спочатку був локалізований в області розміром l = 0,1 нм. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей час, за який ширина відповідного хвильового пакета збільшиться в N = 10 разів.

Відповідь: $\tau = 1{,}5\cdot 10^{-16}$ с.

52 Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію електрона, локалізованого в області розміром l = 0,20 нм.

Відповідь: E_k = 1 еВ.

53 Електрон з кінетичною енергією E_k = 4 еВ локалізований в області розміром l = 1 мкм. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

Відповідь: $\Delta\upsilon/\upsilon = 10^{-4}$.

54 Електрон перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями дорівнює l. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей силу тиску електрона на стінки цієї ями при мінімально можливій його енергії.

Відповідь: $F \sim \dfrac{\hbar^2}{ml^3}$.

55 Частинка масою m рухається в одновимірному потенціальному полі $U = \dfrac{kx^2}{2}$ (гармонічний осцилятор). Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімально можливий імпульс частинки в такому полі.

Відповідь: $p_{\min} \sim 1{,}45\cdot 10^{-17}(mk)^{\frac{1}{4}}$.

56 Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімально можливу енергію електрона в атомі водню і відповідно ефективну відстань його від ядра.

Відповідь: $E_{\min} = -13{,}6\ eB$; $r_e \sim 53\ пм$.

57 Знайти довжину хвилі фотона, що відповідає переходу електрона з другої борівської орбіти на першу в одноразово іонізованому атомі гелію.

Відповідь: $\lambda = 1{,}35 \cdot 10^{-8}$ м.

58 Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію E_k електрона, що рухається усередині сферичної області діаметром $d = 0{,}1$ нм.

Відповідь: $E_k = 15$ еВ.

59 Визначити відносну невизначеність $\Delta p/p$ імпульсу частинки, яка рухається, якщо допустити, що невизначеність її координати дорівнює довжині хвилі де Бройля.

Відповідь: $\Delta p/p = 0{,}16$.

60 Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити найменші похибки $\Delta\upsilon$ у визначенні швидкості дейтрона і α-частинки, якщо координати центра мас цих частинок можуть бути встановлені з невизначеністю 1 мкм.

Відповідь: $\Delta\upsilon_д = 0{,}031$ м/с; $\Delta\upsilon_\alpha = 0{,}016$ м/с.

61 Частинка в потенціальній ямі шириною l перебуває в збудженому стані. Визначити ймовірність перебування частинки в інтервалі $0<x<l/2$ на третьому енергетичному рівні.

Відповідь: $W = 0{,}5$.

62 Обчислити відношення імовірностей перебування електрона на першому і другому енергетичних рівнях одновимірної потенціальної ями, ширина якої l, в інтервалі $0 <x<l/4$.

Відповідь: $\dfrac{W_1}{W_2} = 0{,}36$.

63 Визначити, при якій ширині одновимірної потенціальної ями дискретність енергії електрона стає порівнянною з енергією теплового руху при температурі 300 К.

Відповідь: $l = 5{,}37$ нм.

64 Електрон перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої l = 0,1 нм. Визначити імпульс електрона.

Відповідь: $p = 3{,}3 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с.

65 Електрон перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої 0,1 нм. Визначити середню силу тиску, що спричиняє електрон на стінки ями.

Відповідь: $P = 6 \cdot 10^{-18}$ Па.

66 Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м. Визначити енергію, що випромінюється при переході електрона з третього енергетичного рівня на другий.

Відповідь: $E = 1{,}52 \cdot 10^{-19}$ Дж = 0,95 еВ.

67 Електрон знаходиться в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої l =1 нм. Визначити найменшу різницю енергетичних рівнів електрона.

Відповідь: $\Delta E = 5{,}98 \cdot 10^{-20}$ Дж = 0,37 еВ.

68 Визначити, при якій температурі дискретність енергії електрона, що перебуває в одновимірній потенціальній ямі, ширина якої $2 \cdot 10^{-5}$ м, стає порівнянною з енергією теплового руху.

Відповідь: $T \approx 7\,мкК$.

69 Частинка в потенціальній ямі шириною l перебуває в збудженому стані. Визначити імовірність перебування частинки в інтервалі $0<x<\frac{l}{4}$ на другому енергетичному рівні.

Відповідь: $W = \frac{1}{4}$.

70 Визначити ширину одновимірної потенціальної ями з нескінченно високими стінками, якщо при переході електрона з третього енергетичного рівня на другий випромінюється енергія 1 еВ?

Відповідь: l = 1,37 нм.

71 В одновимірній потенціальній ямі шириною l з нескінченними стінками перебуває N електронів. Визначити повну енергію E і силу F тиску електронів на стінки ями. Взаємодією електронів знехтувати.

Відповідь: $E = 1{,}64 \cdot 10^{-16}$ Дж; $F = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Н.

72 Знайти хвильову функцію і значення енергії частинки масою m, що перебуває в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l.

Відповідь: $\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$; $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$.

73 Частинка, що рухається в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі, перебуває в основному стані. Обчислити ймовірність W того, що координата x частинки має значення, що лежить у межах від $\eta\, d$ до $(1-\eta)\, d$, де d - ширина ями; η - число, яке дорівнює 0,3676.

Відповідь: $W = 1 - 2\int_0^{\eta d} \frac{2}{d} \sin^2 \frac{\pi n x}{d} dx = 0{,}5$.

74 Електрон перебуває в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі шириною l =1,00 нм. Знайти:

а) густину енергетичних рівнів електрона dn/dE (тобто кількість рівнів, що припадає на одиничний інтервал енергії); б) значення цієї густини в околі рівня з номером $n = 10^{10}$; в) середнє значення енергії $\langle E_n \rangle$ перших $n = 10^{10}$ рівнів.

Відповідь: $\frac{dn}{dE} = \frac{d}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$; $1{,}33 \cdot 10^4$; 0,12 МеВ.

75 Частинка масою m перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями дорівнює l. Знайти можливі значення енергії частинки, маючи на увазі, що реалізуються лише такі стани її руху, для яких у межах даної ями укладається ціле число дебройлівських напівхвиль.

Відповідь: $E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}$.

76 Частинка перебуває в основному стані в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l з абсолютно непроникними стінками ($0<x<l$). Знайти ймовірність перебування частинки в області $\frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}$.

Відповідь: $W = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0{,}61$.

77 Частинка перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями дорівнює l. Знайти нормовані хвильові функції стаціонарних станів частинки, узявши початок відліку координати x у середині ями.

Відповідь: $\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi n x}{l}$; $l = 1, 3, 5 \ldots$; $\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}$;

$l = 2, 4, 6, \ldots$

78 Електрон перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями l така, що енергетичні рівні розміщені дуже густо.

Знайти густину рівнів dn/dE, тобто їх кількість на одиничний інтервал енергії, у залежності від E. Обчислити dn/dE для E=1,0 еВ, якщо l = 1,0 нм.

Відповідь: $\frac{dn}{dE} = \frac{d}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$; $dn/dE = 5{,}1 \cdot 10^{25}$ Дж$^{-1}$ = $8{,}16 \cdot 10^{6}$ еВ$^{-1}$.

79 Електрон перебуває в прямокутній потенціальній ямі з непроникними стінками. Ширина ями l = 0,2 нм, енергія електрона в ямі E = 37,8 еВ. Визначити номер n енергетичного рівня і модуль хвильового вектора k.

Відповідь: $n = 2$; $k = 3{,}14 \cdot 10^{10}$ м$^{-1}$.

80 Частинка в потенціальній ямі перебуває в основному стані. Яка імовірність виявлення частинки: а) у середній третині ями; б) у крайній третині ями?

Відповідь: $W_1 = 0{,}609$; $W_2 = 0{,}195$.

81 Частинка перебуває в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі. Знайти відношення різниці $\Delta E_{n,n+1}$ сусідніх енергетичних рівнів до енергії E_n частинки у випадку, якщо $n = 2$.

Відповідь: $\Delta E_{n,n+1} / E_n = \frac{5}{4}$.

82 Частинка перебуває в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі. Знайти відношення різниці $\Delta E_{n,n+1}$ сусідніх енергетичних рівнів до енергії E_n частинки у випадку якщо $n = 5$.

Відповідь: $\Delta E_{n,n+1} / E_n = \dfrac{11}{25}$.

83 Частинка перебуває в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі. Знайти відношення різниці $\Delta E_{n,\ n+1}$ сусідніх енергетичних рівнів до енергії E_n частинки у випадку, якщо $n = \infty$.

Відповідь: $\Delta E_{n,n+1} / E_n = 0$.

84 Електрон перебуває в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі шириною l = 0,1 нм. Визначити в електрон-вольтах найменшу різницю енергетичних рівнів електрона.

Відповідь: $\Delta E = 113$ еВ.

85 Частинка в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі шириною l перебуває в збудженому стані (n = 3). Визначити, у яких точках інтервалу $0 < x < l$ густина імовірності перебування частинки має максимальне і мінімальне значення.

Відповідь: $W_{\min} = \dfrac{l}{3}, \dfrac{2l}{3}; W_{\max} = \dfrac{l}{6}, \dfrac{l}{2}, \dfrac{5l}{6}$.

86 У прямокутній потенціальній ямі шириною l з абсолютно непроникними стінками ($0 < x < l$) перебуває частинка в основному стані. Знайти імовірність W знаходження цієї частинки в області $l/4 < x < \dfrac{3}{4}l$.

Відповідь: W = 0,82.

87 Частинка в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі перебуває в основному стані. Яка ймовірність W виявлення частинки в крайній чверті ями?

Відповідь: W = 0,09.

88 Частинка перебуває в основному стані в прямокутній ямі шириною l з абсолютно непроникними стінками. У скільки разів відрізняються ймовірності місцезнаходження частинки:

а) у крайній третині; б) у крайній чверті ями?

Відповідь: $W_1 / W_2 = 2,17$.

89 Електрон перебуває в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенціальній ямі шириною l. У яких точках в інтервалі $0 < x < l$ густина ймовірності перебування електрона на другому і третьому енергетичних рівнях однакова? Обчислити густину ймовірності для цих точок. Рішення пояснити графіком.

Відповідь: $W_1 = 0,2\ l$; $W_2 = 0,4\ l$; $W_3 = 0,6\ l$; $W_4 = 0,8\ l$; $\psi^2{}_{0,2;0,8} = \dfrac{1,81}{l}; \psi^2{}_{0,4;0,6} = \dfrac{0,69}{l}$.

90 Електрону в потенціальній ямі шириною l відповідає хвильове число $k = \dfrac{\pi n}{l}$ (n = 1, 2, 3, ...). Використовуючи зв'язок енергії E електрона з хвильовим числом k, одержати вираз для власних значень енергії E_n.

Відповідь: $E_n = \dfrac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}$.

91 Визначити швидкість υ електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі λ_{min} у суцільному спектрі рентгенівського випромінювання дорівнює 1 пм.

Відповідь: $\upsilon = 21$ Мм/с.

92 Визначити короткохвильову межу λ_{min} суцільного спектру рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює під напругою U=30 кВ.

Відповідь: $\lambda_{min} = 41$ пм.

93 Обчислити найбільшу довжину хвилі λ_{max} у K-серії характеристичного рентгенівського спектру скандію.

Відповідь: $\lambda_{max} = 304$ пм.

94 Під час дослідження лінійчатого рентгенівського спектру деякого елемента було знайдено, що довжина хвилі λ лінії K_α дорівнює 76 пм. Що це за елемент?

Відповідь: z = 41; ніобій.

95 Яку найменшу різницю потенціалів U_{min} необхідно прикласти до рентгенівської трубки, антикатод якої покритий ванадієм (z = 23), щоб у спектрі рентгенівського випромінювання з’явились усі лінії К-серії ванадію? Межа К-серії ванадію λ=226 пм.

Відповідь: U_{min} = 5,5 кВ.

96 Визначити енергію E фотона, який відповідає K_α-лінії у характеристичному спектрі марганцю (z = 25).

Відповідь: E =5,9 кеВ.

97 У атомі вольфраму електрон перейшов з М-шару на L-шар. Беручи сталу екранування σ такою, що дорівнює 5,5, визначити довжину хвилі λ фотона, що випромінюється.

Відповідь: λ = 0,14 нм.

98 Рентгенівська трубка працює під напругою U = 1 МВ. Визначити найменшу довжину хвилі λ_{min} рентгенівського випромінювання.

Відповідь: λ_{min} = 1,24 пм.

99 Розрахувати довжину хвилі λ і енергію E фотона, який належить K_α - лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання платини.

Відповідь: λ = 20,5; E = 60,5 кеВ.

100 При якій найменшій напрузі U_{min} на рентгенівській трубці починають з’являтись лінії К-серії міді?

Відповідь: U_{min} = 8 кВ.

101 До електродів рентгенівської трубки прикладена різниця потенціалів 60 кВ. Найменша довжина хвилі рентгенівських променів, що одержані від цієї трубки, дорівнює 0,0206 нм. Знайти з цих даних сталу Планка.

Відповідь: $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

102 Знайти короткохвильову межу суцільного рентгенівського спектру для випадків, коли до рентгенівської трубки прикладена різниця потенціалів: а) 30 кВ; б) 40 кВ; в) 50 кВ.

Відповідь: λ_1 = 41,3 пм; λ_2 = 31пм; λ_3 = 24,8 пм.

103 Знайти короткохвильову межу суцільного рентгенівського спектру, якщо відомо, що зменшення прикладеної до рентгенівської трубки напруги на 23 кВ збільшує шукану довжину хвилі в 2 рази.

Відповідь: λ = 27 пм.

104 Довжина хвилі γ випромінювання радію дорівнює

λ = 0,0016 нм. Яку різницю потенціалів треба прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати рентгенівські промені з цією довжиною хвилі?

Відповідь: U = 770 кВ.

105 Яку найменшу напругу треба прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати всі лінії К-серії, якщо матеріалом антикатода взяти платину?

Відповідь: U = 79 кВ.

106 Яку найменшу напругу треба прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати всі лінії К-серії, якщо матеріалом антикатода взяти мідь?

Відповідь: U = 8 кВ.

107 Яку найменшу напругу треба прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати всі лінії К-серії, якщо матеріалом антикатода взяти срібло?

Відповідь: U = 23,5 кВ.

108 Яку найменшу напругу треба прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати всі лінії К-серії, якщо матеріалом антикатода взяти вольфрам?

Відповідь: U = 69 кВ.

109 Знайти сталу екранування для L-серії рентгенівських променів, якщо відомо, що при переході електрона в атомі вольфраму з М-шару на L-шар випромінюються рентгенівські промені з довжиною хвилі λ = 0,143 нм.

Відповідь: σ = 5,5.

110 При переході електрона в атомі з L-шару на K-шар випромінюються рентгенівські промені з довжиною хвилі 0,0788 нм. Який це атом? Для К-серії стала екранування дорівнює одиниці.

Відповідь: z = 40, цирконій.

111 Знайти довжину хвилі L_α – лінії в характеристичному рентгенівському спектрі заліза. Стала екранування σ = 5,7.

Відповідь: λ = 1,76 нм.

112 У якого елемента довжина хвилі L_α-лінії в характеристичному рентгенівському спектрі дорівнює 1,23 нм? Стала екранування σ = 5,7.

Відповідь: $z = 30$, цинк.

113 Антикатод рентгенівської трубки бомбардується електронами, швидкість яких 100 Мм/с. Визначити максимальну частоту випромінювання в суцільному рентгенівському спектрі з урахуванням залежності маси електрона від швидкості його руху.

Відповідь: $\nu = 9{,}22 \cdot 10^{18}$ Гц.

114 При якій найменшій напрузі рентгенівська трубка може дати промені з найменшою довжиною хвилі 13,3 пм?

Відповідь: $U = 93$ кВ.

115 Найменша довжина хвилі рентгенівських променів, отриманих від трубки, що працює при напрузі 40 кВ, дорівнює 31 пм. Обчислити за цими даними сталу Планка.

Відповідь: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

116 Рентгенівська трубка працює при напрузі 30 кВ. Знайти найменше значення довжини хвилі рентгенівського випромінювання.

Відповідь: $\lambda = 41{,}3$ пм.

117 Знайти найменшу довжину хвилі рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює при напрузі 150 кВ.

Відповідь: $\lambda = 8{,}27$ пм.

118 Атомні площини кристала віддалені одна від одної на 210 пм. Чому дорівнює довжина хвилі рентгенівських променів, що падають на кристал, якщо відбиття першого порядку спостерігається під кутом 45°?

Відповідь: $\lambda = 297$ пм.

119 При опромінені кристала хлористого калію ($KC1$) монохроматичними рентгенівськими променями з довжиною хвилі 145 пм і кутом між пучком рентгенівських променів і поверхнею кристала 14°20' по'являється максимум першого порядку. Знайти відстань між сусідніми атомними площинами кристала.

Відповідь: $d = 293$ пм.

120 Чому дорівнює стала кристалічної ґратки хлористого натрію ($NaC1$), якщо монохроматичне рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі 71,2 пм відбивається від його природної грані площини спайності? Максимум першого порядку має місце при куті 7°18'.

Відповідь: a = 280 пм

121 Знайти: а) радіуси перших трьох борівських електронних орбіт в атомі водню; б) швидкість електрона на них.

Відповідь: r_1 = 53 пм; r_2 = 212 пм; r_3 = 477 пм; υ_1 = 2,19 Мм/с; υ_2 = 1,1 Мм/с; υ_3 = 0,73 Мм/с.

122 Знайти числове значення кінетичної, потенціальної і повної енергій електрона на першій борівській орбіті.

Відповідь: E_k = 13,6 еВ; U = -27,2 еВ; E = -13,6 еВ.

123 Обчислити кінетичну енергію електрона, що перебуває на n-й орбіті атома водню. Задачу розв'язати для n = 1, 2, 3 і ∞.

Відповідь: $E_{\kappa n} = \dfrac{4\varepsilon_0{}^2 h^3 n^3}{ml^4}$; E_{k1} = 13,6 еВ; E_{k2} = 3,4 еВ; E_{k3} = =1,51 еВ; $E_{k\infty}$ = 0.

124 Знайти: 1) період обертання електрона на першій борівській орбіті в атомі водню; 2) його кутову швидкість.

Відповідь: $T_{об} = 1{,}43\cdot10^{-16}$ с; $\omega = 4{,}4\cdot10^{16}$ рад/с.

125 Знайти: а) радіус першої борівської електронної орбіти для одноразово іонізованого атома гелію; б) швидкість електрона на ній.

Відповідь: r_1 = 26,6 пм; υ_1 = 4,37 Мм/с.

126 Скориставшись уявленнями теорії Бора, обчислити: а) радіуси двох перших орбіт електрона в атомі водню; б) швидкість електрона на цих орбітах; 3) прискорення на них.

Відповідь: r_1 = 53 пм; r_2 = 212 пм; υ_1 = 2,19 Мм/с;

υ_2 = 1,1 Мм/с; $a_1 = 90\cdot10^{25}$ м/с^2; $a_2 = 5{,}56\cdot10^{21}$ м/с^2.

127 На якій орбіті швидкість електрона атома водню дорівнює 734 км/с?

Відповідь: n = 3.

128 Визначити кутову швидкість електрона на першій борівській орбіті атома водню.

Відповідь: $\omega = 4{,}14\cdot10^{16}$ с$^{-1}$.

129 Визначити для першої і другої орбіт атома водню значення сили кулонівського притягання і напруженість електричного поля.

Відповідь: F_1 = 82,4 нН; E_1 = 515 ГВ/м; F_2 = 5,14 нН;

E_2 = 32,1 ГВ/м.

130 Атом водню переведений з нормального стану в збуджений, що характеризується головним квантовим числом 2. Знайти енергію збудження атома.

Відповідь: E = 10,2 еВ.

131 У скільки разів збільшиться радіус орбіти електрона в атомі водню, що перебуває в основному стані, при збудженні його квантом з енергією 12,09 еВ?

Відповідь: $r_n/r_1 = 9$.

132 Перехід електрона в атомі водню з n - ї на k - ту орбіту (k = 1) супроводжується випромінюванням фотона з довжиною хвилі 102,6 нм. Знайти радіус n-ї орбіти.

Відповідь: r = 475 пм.

133 Довести, що для атома водню на борівських стаціонарних орбітах укладається ціле число довжин хвиль де Бройля. Визначити довжини хвиль на першій і третій орбітах.

Відповідь: $2\pi r_n = n\lambda$; r_1 = 332 пм; r_3 = 996 пм.

134 Яку роботу необхідно виконати, щоб видалити електрон з другої орбіти атома водню за межі притягання його ядром?

Відповідь: A = 0,545 аДж.

135 Відповідно до класичної електродинаміки електрон, що рухається з прискоренням a, випромінює в одиницю часу енергію $\frac{dE}{dt} = -k\frac{2e^2}{3c^2}a^2$, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, де e - заряд електрона; c - швидкість світла; ε_0 - електрична стала. Виходячи з класичних уявлень і обмежуючись допущенням, що повне прискорення електрона увесь час збігається з доцентровим, оцінити час життя атома. Початковий радіус орбіти електрона взяти таким, що дорівнює $r = 10^{-10}$ м.

Відповідь: $t = \frac{m^2c^2r^3}{4k^2c^4} = 13\ нс$.

136 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення радіусів орбіт.

Відповідь: $r_n/r_1 = 4$.

137 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення магнітного моменту електрона до механічного.

Відповідь: $\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} = 8{,}79\cdot 10^{10}\ кл/кг$.

138 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення повних енергій.

Відповідь: $\frac{E_2}{E_1} = 8\,4$.

139 Визначити, як зміниться орбітальний момент імпульсу електрона в атомі водню при переході електрона зі збудженого стану в основне з випромінюванням одного кванта з довжиною хвилі λ = 97,25 нм.

Відповідь: Зменшиться в 4 рази.

140 У спектрі атомарного водню інтервал між першими двома лініями, що належать до серії Бальмера, складає λ = =$1{,}71\cdot10^{-7}$ м. Визначити сталу Рідберга.

Відповідь: $R = 1{,}09\cdot10^{7}$ м$^{-1}$.

141 Квант світла з енергією E = 15 еВ вибиває електрон з атома водню, що перебуває в нормальному стані. З якою відносною швидкістю буде рухатися електрон удалині від ядра?

Відповідь: $\upsilon = 6{,}89\cdot10^{5}$ м/с.

142 Частинка масою m рухається по коловій орбіті в центрально-симетричному потенціальному полі $U = ar^2/2$. Знайти за допомогою борівської умови квантування можливі радіуси орбіт і рівні енергії цієї частинки.

Відповідь: $r_n = \sqrt{\frac{n\hbar}{m\omega}}$; $E_n = n\hbar\omega$; $\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$.

143 Обчислити колову частоту обертання електрона на другій борівській орбіті іона He^{+}.

Відповідь: $\omega = 2{,}07\cdot10^{16}$ с$^{-1}$.

144 Знайти для воднеподібних систем магнітний момент, що відповідає руху електрона на n-й орбіті, а також відношення магнітного моменту до механічного. Обчислити магнітний момент електрона, що перебуває на першій борівській орбіті.

Відповідь: $p_m = \frac{e\hbar}{2m}n$; $\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m}$; $p_1 = 9{,}23\cdot10^{-24}$ Кл/кг.

145 Обчислити індукцію магнітного поля в центрі атома водню, обумовленого рухом електрона по першій борівській орбіті.

Відповідь: B = 12,5 Тл.

146 Енергія зв'язку електрона в основному стані атома *He* дорівнює $E_{зв}$ = 24,6 еВ. Знайти енергію, необхідну для видалення обох електронів з цього атома.

Відповідь: $E = E_{зв} + 4\hbar R = 79\ eB.$

147 С якою мінімальною кінетичною енергією повинен рухатися атом водню, щоб при непружному лобовому зіткненні з іншим атомом водню, що перебуває у стані спокою, один з них виявився здатним випромінити фотон? Врахувати, що до зіткнення обидва атоми знаходяться в основному стані.

Відповідь: $\frac{3}{2}\hbar R = 20{,}5\ eB.$

148 Обчислити за теорією Бора період $T_{об}$ обертання електрона в атомі водню, що перебуває в збудженому стані з головним квантовим числом n = 2.

Відповідь: $T_{об} = 1{,}14 \cdot 10^{-16}$ с.

149 У скільки разів зміниться період $T_{об}$ обертання електрона в атомі водню, якщо при переході в незбуджений стан атом випромінив фотон з довжиною хвилі λ = 97,5 нм?

Відповідь: $T_{обn}/\ T_{об1} = 64$.

150 На скільки змінилася кінетична енергія електрона в атомі водню при випромінюванні атомом фотона з довжиною хвилі λ = 435нм?

Відповідь: $E_k = 4{,}56 \cdot 10^{-19}\ Дж = 2{,}85\ eB.$

151 Знайти найменшу і найбільшу довжини хвиль спектральних ліній водню у видимій області спектру.

Відповідь: λ = 656 нм.

152 Знайти найбільшу довжину хвилі в ультрафіолетовій серії спектру водню. Яку найменшу швидкість повинні мати електрони, щоб під час збудження атомів водню ударами електронів по'явилася ця лінія?

Відповідь: λ = 121 нм; υ = 1,9 Мм/с.

153 Визначити потенціал іонізації атома водню.

Відповідь: E_i = 13,6 В.

154 Визначити перший потенціал збудження атома водню.

Відповідь: E_1 = 10,2 В.

155 Яку найменшу енергію (в електрон-вольтах) повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів по'явилися всі лінії всіх серій спектру водню? Яку найменшу швидкість повинні мати ці електрони?

Відповідь: $E = 13{,}6$ еВ; $\upsilon = 2{,}2$ Мм/с.

156 У яких межах повинна розміщуватись енергія електронів, що бомбардують атом, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів спектр мав тільки одну спектральну лінію?

Відповідь: $10{,}2$ еВ $\le E \le 12{,}1$ еВ.

157 Яку найменшу енергію (в електрон-вольтах) повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів спектр водню мав три спектральні лінії? Знайти довжини хвиль цих ліній.

Відповідь: $E \ge 10{,}2$ еВ; $\lambda_1 = 656$ нм; $\lambda_2 = 122$ нм; $\lambda_3 = 103$ нм.

158 У яких межах повинні розміщуватись довжини хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла спостерігалися три спектральні лінії?

Відповідь: $97{,}3\ нм \le \lambda \le 102{,}6\ нм$.

159 На скільки зміниться кінетична енергія електрона в атомі водню при випромінюванні ним фотона з довжиною хвилі $\lambda = 486$ нм?

Відповідь: $\Delta E_k = 2{,}56$ еВ.

160 У яких межах повинні лежати довжини хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла радіус орбіти електрона збільшився в 9 разів?

Відповідь: $97{,}3\ нм \le \lambda \le 102{,}6\ нм$.

161 На дифракційну ґратку нормально падає пучок світла від розрядної трубки, наповненої атомарним воднем. Стала ґратки дорівнює $5\cdot10^{-4}$ см. Якому переходу електрона відповідає спектральна лінія, що спостерігається за допомогою цієї ґратки у спектрі п'ятого порядку під кутом 41°?

Відповідь: $3 \to 2$.

162 Знайти найменшу довжину хвилі фотона, що випромінюється електроном при переході із збудженого в основний стан в іоні гелію He^+.

Відповідь: λ = 30,4 нм.

163 Яка найменша енергія необхідна для збудження іона Li^{++}?

Відповідь: E = 92 еВ.

164 Знайти різницю енергій іонізації іонів He^{+} та атома водню.

Відповідь: E = 41 еВ.

165 Визначити межу серії водневих ліній, розміщених в далекій ультрафіолетовій частині спектру (серія Лаймана).

Відповідь: λ = 121,6 –91,2 нм.

166 Визначити енергію фотона, що відповідає найменшій довжині хвилі в ультрафіолетовій серії водню.

Відповідь: $E = 2{,}18\cdot10^{-10}$ Дж.

167 Знайти довжини хвиль першої, другої і третьої ліній видимої серії водню (серія Бальмера).

Відповідь: λ_1 = 656,3 нм; λ_2 = 486,1 нм; λ_3 = 434 нм.

168 Чому дорівнює довжина хвилі четвертої спектральної лінії в інфрачервоній області спектру водню (серія Пашена)?

Відповідь: λ_4 = 1,005 мкм.

169 Експериментально встановлено, що друга спектральна лінія водневої серії Брекета відповідає довжині хвилі 2,63 мкм. На підставі цих даних установити наближене значення сталої Рідберга.

Відповідь: $R = 1{,}095\cdot10^{7}$ м$^{-1}$.

170 Найбільша довжина хвилі спектральної водневої лінії серії Лаймана 121,6 нм. Обчислити найбільшу довжину хвилі в серії Бальмера.

Відповідь: λ = 656,6 нм.

171 При переході електрона атома водню з однієї з можливих орбіт на іншу, більш близьку до ядра, енергія атома зменшується на 1,892 еВ. Визначити довжину хвилі випромінювання.

Відповідь: λ = 657 нм.

172 Обчислити найменше значення енергії, при якому в результаті збудження атомів водню з'являється повний спектр.

Відповідь: E = 13,63 еВ.

173 Атомарний водень переведений з нормального стану в збуджений з головним квантовим числом n = 3. Які спектральні лінії можуть з'явитися в спектрі водню при переході атома зі збудженого стану в нормальний?

Відповідь: $2 \to 1, \lambda = 121,6$ *нм*; $3 \to 1, \lambda = 102,6$ *нм*; $3 \to 2, \lambda = 656,3$ *нм*.

174 Які спектральні лінії з'являться у видимій області спектру при збудженні атомів водню електронами з енергією 13 еВ?

Відповідь: λ_1 = 656,3 нм; λ_2 = 486,1 нм; λ_3 = 434,0 нм.

175 Атом водню освітлюється ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі 100 нм. Визначити, які спектральні лінії з'являться в спектрі водню.

Відповідь: λ_1 = 121,6 нм; λ_2 = 102,6 нм; λ_3 = 656,6 нм.

176 Різниця довжини хвиль між головними лініями серій Лаймана і Бальмера в спектрі атомарного водню дорівнює λ = 534,7 нм. Визначити за цими даними сталу Планка.

Відповідь: h = 6,64·10^{-34} Дж·с.

177 Електрон, що має удалині від протона, який перебуває у стані спокою, швидкість υ = 1,870· 10^6 м/с, захоплюється останнім, у результаті чого утворюється збуджений атом водню. Визначити довжину хвилі фотона, що випромінюється при переході атома в нормальний стан.

Відповідь: λ = 52,7 нм.

178 Які спектральні лінії з'являться при збудженні атомарного водню електронами з енергією: а) 12,5 еВ; б) 14 еВ?

Відповідь: а) λ_1 = 103 нм; λ_2 = 127 нм; λ_3 = 656 нм; б) всі.

179 При спостереженні спектру атомарного водню, отриманого за допомогою дифракційної ґратки з періодом d = 2 мкм, виявлено, що одна зі спектральних ліній серії Бальмера в спектрі другого порядку відповідає куту дифракції φ = 29°05''. Визначити головне квантове число енергетичного рівня атома, переходу з якого відповідає дана лінія.

Відповідь: n = 4.

180 Скориставшись теорією Бора, визначити для дворазово іонізованого атома літію (Li^{++}) радіус першої орбіти; перший потенціал збудження; довжину хвилі резонансної лінії (лінії, що виникає при переході з першого збудженого стану в основний); потенціал іонізації.

Відповідь: $r_1 = 18$ пм; λ =13,5 нм; φ_1 =91,88 В; φ_2 =122 В;

181 Псі-функція деякої частинки має вигляд $\psi = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, де r - відстань частинки від силового центра; A - константа. Знайти: а) значення коефіцієнта A; б) середню відстань $\langle r\rangle$ частинки від центра.

Відповідь: $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$; $\langle r\rangle = \frac{a}{2}$.

182 Псі-функція деякої частинки має вигляд $\psi = \left(\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}\right)^{-1}\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$, де r - відстань частинки від силового центра; a - константа. Знайти середню відстань $\langle r\rangle$ частинки від центра.

Відповідь: $\langle r\rangle = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$.

183 Псі-функція деякої частинки має вигляд $\psi = A\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$, де r – відстань частинки від силового центра; A - стала. Знайти: а) значення коефіцієнта A; б) найбільш ймовірну $r_{йм}$ і середню $\langle r\rangle$ відстані частинки від центра.

Відповідь: $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3\sqrt{\pi}}}$; $r_{йм} = a$; $\langle r\rangle = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$.

184 Псі-функція основного стану гармонічного осцилятора має вигляд $\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{\alpha^2x^2}{2}\right)$, де $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ (m – маса; ω - власна частота осцилятора). Енергія осцилятора в цьому стані $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Знайти середнє значення модуля координати $\langle|x|\rangle$; виразити $\langle|x|\rangle$ через класичну амплітуду a (яка пов'язана з енергією осцилятора співвідношенням $E = \dfrac{ma^2\omega^2}{2}$) і порівняти цей вираз із співвідношенням, одержаним для класичного осцилятора $\langle |x| \rangle = \dfrac{2a}{\pi}$.

Відповідь:

$$\langle |x| \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi m\omega}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564\,;\ a = \frac{\sqrt{\pi}}{a};\ \langle |x| \rangle_{кл} = 0{,}886 \langle |x| \rangle_{кв}.$$

185 Псі-функція основного стану гармонічного осцилятора має вигляд $\psi_0(x) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\dfrac{\alpha^2 x^2}{2} \right)$, де $\alpha = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}$ ($m-$ маса; ω - власна частота осцилятора). Енергія осцилятора в цьому стані $E_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega$. Знайти середнє значення потенціальної енергії осцилятора.

Відповідь: $E_n = \dfrac{\hbar\omega}{4} = \dfrac{E_0}{2}$.

186 Частинка перебуває в сферично-симетричному потенціальному полі в стаціонарному стані $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi a}} \dfrac{1}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, де r - її відстань від центра поля. Знайти $\langle r \rangle$.

Відповідь: $\langle r \rangle = \dfrac{a}{2}$.

187 Частинка масою m перебуває в одновимірному потенціальному полі $U(x) = kx^2$, де k – позитивна стала. Знайти $\langle U \rangle$ частинки у стані, який описується хвильовою функцією $\psi = A\exp(-\alpha x^2)$, де A і α - невідомі сталі.

Відповідь: $\langle U \rangle = \dfrac{\hbar}{4}\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

188 Псі-функція основного стану воднеподібного атома має вигляд $\psi = A\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$, де r_0 – радіус першої борівської орбіти. Знайти значення сталої A.

Відповідь: $A = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^{\ 3}}}$.

189 Псі-функція основного стану воднеподібного атома має вигляд $\psi = A\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$, де r_0 – радіус першої борівської орбіти. Знайти густину ймовірності $\frac{dW}{dr}$ перебування електрона на відстані r від ядра.

Відповідь: $\frac{dW}{dr} = \frac{4r^2}{r_0^{\ 3}}\exp\left(-\frac{2r}{r_0}\right)$.

190 Псі-функція основного стану воднеподібного атома має вигляд $\psi = A\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$, де r_0 – радіус першої борівської орбіти. Знайти найбільш ймовірну відстань $r_{йм}$ електрона від ядра.

Відповідь: $r_{йм} = r_0$.

191 Псі-функція основного стану воднеподібного атома має вигляд $\psi = A\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$, де r_0 – радіус першої борівської орбіти. Знайти середню відстань $\langle r \rangle$ електрона від ядра.

Відповідь: $\langle r \rangle = \frac{3}{2} r_0$.

192 Псі-функція основного стану воднеподібного атома має вигляд $\psi = A\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$, де r_0 – радіус першої борівської орбіти. Знайти середнє значення потенціальної енергії електрона $\langle U \rangle$.

Відповідь: $\langle U \rangle = -\dfrac{ke^2}{r_0}$.

193 Псі-функція основного стану воднеподібного атома має вигляд $\psi = A\exp\left(-\dfrac{r}{r_0}\right)$, де r_0 – радіус першої борівської орбіти. Знайти ймовірність W_η того, що електрон перебуває на відстані r_1 від ядра, що більша ніж ηr_0.

Відповідь: $W_\eta = \left(2\eta 2 + 2\eta + 1\right)\exp\left(-2\eta\right)$.

194 Хвильова функція частинки масою m для основного стану в одновимірному потенціальному полі $U(x) = \dfrac{kx^2}{2}$ має вигляд $\psi(x) = A\exp(-\alpha x^2)$, де A - нормувальний коефіцієнт; α - позитивна стала. Знайти за допомогою рівняння Шредінгера сталу α та енергію E частинки в цьому стані.

Відповідь: $\alpha = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$; $E = \dfrac{\hbar\omega}{2}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

195 Визначити енергію електрона атома водню в стаціонарному стані, для якого хвильова функція $\psi(r) = A(1 + ar)\exp(-\alpha r)$, де A, a і α - деякі сталі.

Відповідь: $E = -\dfrac{k^2 me^4}{8\hbar^2}$.

196 Хвильова функція електрона в основному стані атома водню має вигляд $\psi(r) = A\exp(-\dfrac{r}{r_0})$, де A - деяка стала; r_0 - перший борівський радіус. У скільки разів середня відстань електрона від ядра $\langle r \rangle$ перевищує найбільш ймовірну $r_{йм}$.

Відповідь: $\langle r \rangle / r_{йм} = 1{,}5$.

197 Хвильова функція електрона в основному стані атома водню має вигляд $\psi(r) = A\exp(-\dfrac{r}{r_0})$, де A - деяка стала; r_0 - перший борівський радіус. Знайти середнє значення модуля кулонівської сили, що діє на електрон.

Відповідь: $\langle F\rangle = \dfrac{2ke^2}{{r_0}^2}$.

198 Хвильова функція електрона в основному стані атома водню має вигляд $\psi(r) = A\exp(-\dfrac{r}{r_0})$, де A - деяка стала; r_0 - перший борівський радіус. У скільки разів сила Кулона, що діє на електрон на найбільш ймовірній відстані від ядра більша за силу, що діє на середній відстані.

Відповідь: $F_1/F_2 = 2{,}25$.

199 Хвильова функція, що описує рух електрона в основному стані атома водню, має вигляд $\psi(r) = A\exp(-\dfrac{r}{r_0})$, де A - деяка стала; r_0 - перший борівський радіус. У скільки разів потенціальна енергія електрона в полі ядра на найбільш ймовірній відстані більша, ніж на середній відстані.

Відповідь: $U_1/U_2 = 1{,}5$.

200 Хвильова функція, що описує рух електрона в основному стані атома водню, має вигляд $\psi(r) = A\exp(-\dfrac{r}{r_0})$, де A - деяка стала; r_0 - перший борівський радіус. Знайти для основного стану атома водню відношення середньої потенціальної енергії $\langle U\rangle$ до середнього значення $\langle F\rangle$ кулонівської сили.

Відповідь: $\langle U\rangle / \langle F\rangle = \dfrac{r_0}{2}$.

201 Хвильова функція, що описує рух електрона в основному стані атома водню, має вигляд $\psi(r) = A\exp\left(-\dfrac{r}{r_0}\right)$, де A - деяка стала; r_0 - перший борівський радіус. Середнє значення потенціальної енергії для цього стану дорівнює $\langle U\rangle = -\dfrac{ke^2}{r_0}$. Знайти значення сталої A.

Відповідь: $A = -\frac{1}{\sqrt{\pi r_0{}^3}}$.

202 Написати рівняння Шредінгера для електрона, що перебуває у воднеподібному атомі.

Відповідь: $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0$.

203 Написати рівняння Шредінгера для лінійного гармонічного осцилятора. Врахувати, що сила, яка повертає частинку в положення рівноваги, $F = kx$ (де k - коефіцієнт пропорційності; x - зміщення).

Відповідь: $\psi_{xx}{}'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\psi = 0$.

204 Написати рівняння Шредінгера для вільного електрона, що рухається в напрямку осі x зі швидкістю υ. Знайти розв'язок цього рівняння.

Відповідь: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$; $\psi(x,t) = \exp\left[\frac{i(Et - p_x x)}{\hbar}\right]$.

205 Провести нормування хвильової функції $\psi = Ae^{-r/a}$.

Відповідь: $A = -\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$.

206 Чим обумовлена вимога скінченності ψ-функції?

207 Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів має вигляд $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(U - E)\psi = 0$. Обґрунтувати, виходячи з цього рівняння, вимоги, що висувають до хвильової функції, - її безперервність і безперервність першої похідної від хвильової функції.

208 Чи може вираз $|\psi(x)|^2$ бути більше одиниці**.** Чому?

Відповідь: Так.

209 Довести, що якщо ψ-функція циклічно залежить від часу (тобто $\psi(x,t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(x)$), то густина імовірності є тільки функцією координати.

210 Електрон у атомі водню описується у основному стані хвильовою функцією $\psi(r) = Ae^{-r/a}$. Визначити відношення ймовірностей W_1/W_2 перебування електрона у сферичних шарах товщиною $\Delta r = 0{,}01a$ та радіусами $r_1 = 0{,}5\ a$ і $r_2 = 1{,}5\ a$.

Відповідь: $W_1/W_2 = 0{,}825$.

211 Знайти енергію електрона, при якій він майже безперешкодно пройде над прямокутним бар'єром висотою $U_0 = 5$ еВ і шириною $d = 10^{-8}$ см.

Відповідь: $E = 9$ еВ.

212 Моноенергетичний потік електронів (E = 100 еВ) падає на низький прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини. Визначити висоту потенціального бар'єра U, якщо відомо, що 4% електронів, що падають на бар'єр, відбиваються.

Відповідь: $U = 55{,}6$ еВ.

213 Електрон з енергією E = 4,9 еВ рухається у позитивному напрямку осі x (рис.3). Висота U потенціального бар'єра дорівнює 5 еВ. При якій ширині d бар'єра ймовірність проходження електрона крізь нього буде дорівнювати 0,2.

Відповідь: $d = 0{,}495$ нм.

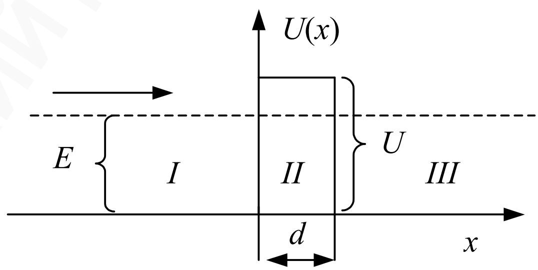

Рисунок 3.

214 Написати рівняння Шредінгера для електрона з енергією E, що рухається в позитивному напрямку осі x для областей I та II (рис.3), якщо на межі цих областей існує низький потенціальний бар’єр висотою U.

Відповідь: $\psi_1''(x) + k_1^{\,2}\varphi_1(x) = 0$; $\psi_2''(x) + k_2^{\,2}\varphi_2(x) = 0$; $k_1 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$; $k_2 = \dfrac{2m(E-U)}{\hbar^2}$.

215 Вважаючи, що вирази для коефіцієнта відбиття ρ від потенціального бар’єра і коефіцієнта проходження τ відомі, показати, що $\rho + \tau = 1$.

216 Електрон з енергією E = 25 еВ зустрічає на своєму шляху бар’єр висотою U = 9 еВ (рис.3). Визначити коефіцієнт заломлення $n_з$ хвиль де Бройля на межі бар’єра.

Відповідь: $n_з = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 - \dfrac{U}{E}}$.

217 Протон з енергією E = 1 МеВ змінив при проходженні потенціального бар’єра дебройлівську довжину хвилі на 1%. Визначити висоту U потенціального бар’єра.

Відповідь: U = 20 кеВ.

218 На шляху електрона з дебройлівською довжиною хвилі λ_1 = 0,1 нм розміщений потенціальний бар’єр висотою U = 120 еВ. Визначити довжину хвилі де Бройля λ_2 після проходження бар’єра.

Відповідь: $\lambda_1 = \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\dfrac{1 - mU\lambda_1^{\,2}}{2\pi^2\hbar^2}}}$.

219 Електрон з енергією E = 100 еВ попадає на потенціальний бар'єр висотою U = 64 еВ. Визначити імовірність W того, що електрон відіб'ється від бар'єра.

Відповідь: W = 0,0625.

220 Визначити показник заломлення n хвиль де Бройля при проходженні частинкою потенціального бар'єра с коефіцієнтом відбиття ρ = 0,5.

Відповідь: n = 0,172.

221 При якому відношенні висоти U потенціального бар'єра і енергії E електрона, що падає на бар'єр, коефіцієнт відбиття $\rho = 0{,}5$?

Відповідь: $U/E = 0{,}971$.

222 Кінетична енергія E_k електрона в два рази перевищує висоту U потенціального бар'єра. Визначити коефіцієнт відбиття ρ і коефіцієнт проходження τ електронів на межі бар'єра.

Відповідь: $\rho = 0{,}0295$; $\tau = 0{,}97$.

223 Коефіцієнт проходження протонів τ через потенціальний бар'єр дорівнює 0,8. Визначити показник заломлення $n_з$ хвиль де Бройля на границі бар'єра.

Відповідь: $n_з = 0{,}384$.

224 Обчислити коефіцієнт проходження τ електрона з енергією $E = 100$ еВ через потенціальний бар'єр висотою $U = 99{,}75$ еВ.

Відповідь: $\tau = 0{,}2$.

225 Визначити густину ймовірності $|\psi(0)|^2$ перебування електрона в області високого потенціального бар'єра (рис.3) в точці $x = 0$, якщо енергія електрона дорівнює E, висота потенціального бар'єра дорівнює U і ψ - функція нормована так, що $A_1 = 1$.

Відповідь: $|\psi(0)|^2 = \dfrac{4E}{U}$.

226 Знайти ймовірність W проходження електрона через прямокутний потенціальний бар'єр при різниці енергій $U - E =$ =1 еВ, якщо ширина бар'єра: а) $d = 0{,}1$ нм; б) $d = 0{,}5$ нм.

Відповідь: $W_1 = 0{,}35$; $W_2 = 5{,}9 \cdot 10^{-3}$.

227 Електрон проходить через прямокутний потенціальний бар'єр шириною $d = 0{,}5$ нм. Висота U бар'єра більша від енергії E електрона на 1 %. Обчислити коефіцієнт прозорості D, якщо енергія електрона: а) $E = 10$ еВ; б) $E = 100$ еВ.

Відповідь: $D_1 = 0{,}2$; $D_2 = 0{,}0065$.

228 Ширина d прямокутного потенціального бар'єра дорівнює 0,2 нм. Різниця енергій $U - E = 1$ еВ. У скільки разів зміниться імовірність W проходження електрона через бар'єр, якщо різниця енергій зросте в $n = 10$ разів?

Відповідь: $\dfrac{W_1}{W_2} = 79$.

229 Електрон з енергією E = 9 еВ рухається в позитивному напрямку осі x. При якій ширині d потенціального бар'єра коефіцієнт прозорості $D = 0{,}1$, якщо висота U бар'єра дорівнює 10 еВ? Зобразити на рисунку вид хвильової функції (її дійсну частину) у межах кожної з областей *I, II, III* (див. рис. 3).

Відповідь: $d = \dfrac{\hbar \ln \dfrac{1}{D}}{2\sqrt{2m(U-E)}} = 0{,}22 \quad нм$.

230 При якій ширині d прямокутного потенціального бар'єра коефіцієнт прозорості D для електронів дорівнює 0,01? Різниця енергій $U - E$ = 10 еВ.

Відповідь: d = 0,143 нм.

231 Електрон з енергією E рухається в позитивному напрямку осі x. При якому значенні $U - E$, вираженому в електрон-вольтах, коефіцієнт прозорості $D = 10^{-3}$, якщо ширина d бар'єра дорівнює 0,1 нм?

Відповідь: $U - E = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\hbar \ln \dfrac{1}{D}}{2d}\right)^2 = 0{,}45 \quad еВ$.

232 Електрон з енергією E = 9 еВ рухається в позитивному напрямку осі x. Оцінити імовірність W того, що електрон пройде через потенціальний бар'єр, якщо його висота U = 10 еВ і ширина d = 0,1 нм.

Відповідь: W = 0,2.

233 Прямокутний потенціальний бар'єр має ширину d = = 0,1 нм. При якій різниці енергій $U - E$ ймовірність W проходження електрона через бар'єр дорівнює 0,99?

Відповідь: $U - E = 10^{-4}$ еВ.

234 Ядро випромінює α-частинки з енергією E =5 МеВ. У першому наближенні можна вважати, що α-частинки проходять через прямокутний потенціальний бар'єр висотою U = 10 МеВ і шириною d = 5 фм. Знайти коефіцієнт прозорості D бар'єра для α-частинок.

Відповідь: D = 0,89.

235 Протон і електрон пройшли однакову прискорювальну різницю потенціалів U = 10 кВ. У скільки разів відрізняються коефіцієнти прозорості D_q для електрона і D_p для протона, якщо висота U бар'єра дорівнює 20 кеВ і ширина d = 0,1 пм?

Відповідь: $D_q/D_p = 74$.

236 Знаючи відношення амплітуд імовірності $\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ для хвилі, відбитої від бар'єра, і $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$. для хвилі, що проходить крізь бар’єр, знайти вирази для коефіцієнтів відбиття ρ і коефіцієнта проходження τ.

Відповідь: $\rho = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$; $\tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$.

237 Визначити коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля для протонів на межі потенціальної сходинки (рис.1). Кінетична енергія протонів дорівнює 16 еВ, а висота U потенціальної сходинки дорівнює 9 еВ.

Відповідь: $n = \sqrt{1 + \frac{U}{E}} = 1{,}25$.

238 Електрон має енергію E = 10 еВ. Визначити, у скільки разів зміняться його швидкість υ, довжина хвилі де Бройля λ і фазова швидкість при проходженні через потенціальний бар'єр (див. рис.1) висотою U = 6 еВ.

Відповідь: $\upsilon_1/\upsilon_2 = 0{,}632$; $\lambda_1/\lambda_2 = 1{,}58$; $\upsilon_{ф1}/\upsilon_{ф2} = 0{,}632$.

239 Коефіцієнт відбиття протона від потенціального бар'єра ρ дорівнює $2{,}5 \cdot 10^{-5}$. Визначити, який відсоток складає висота U бар'єра від кінетичної енергії E_k протонів, що падають на бар'єр.

Відповідь: $U/E_k = 2\%$.

240 Електрон з енергією E = 10 еВ падає на потенціальний бар'єр. Визначити висоту U бар'єра, при якій показник заломлення n хвиль де Бройля і коефіцієнт відбиття ρ чисельно збігаються.

Відповідь: U = 9,13.