

УДК 539.3

© 2008 г. В. Н. Кобзарь, Л. А. Фильштинский

ПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Предлагается метод решения двумерных внутренних и внешних граничных задач связанной термоупругости при учете конечной скорости распространения тепловых импульсов, основывающийся на построенных фундаментальных решениях соответствующих уравнений. В рамках поставленных задач дана оценка связанности термомеханических полей, а также осуществлено сравнение гиперболической и параболической моделей теплопроводности. Показано, что влияние конечной скорости распространения тепла незначительно даже при очень малых периодах продолжительности процессов (соизмеримых со временем релаксации теплового потока).

Первое решение динамической задачи о тепловом ударе на границе полупространства принадлежит В.И. Даниловской [1]. В последние годы развивается научное направление в термомеханике, связанное с учетом скорости распространения тепловых импульсов [2]. Наличие экспериментальных фактов, идущих вразрез с представлениями Фурье, послужило причиной построения ряда моделей теплопроводности, которые предсказывают конечную скорость распространения термической волны. Можно выделить класс моделей, которые приводят к гиперболическому уравнению теплопроводности. Так, обобщенное уравнение теплопроводности (но без учета связанности) используется для описания температурных полей, возникающих при высокоинтенсивном теплообмене в устройствах импульсной и лазерной техники, при лазерной обработке металлов, в процессах плазменного напыления, в энергетических каналах ядерных реакторов и во многих других промышленных технологических процессах.

Несмотря на большое число исследований в области термоупругости, актуальной остается разработка аналитических и численных методов решения граничных задач в этой области. Ниже предлагается подход к решению двумерных внутренних и внешних граничных задач (при учете конечной скорости распространения тепловых возмущений), опирающийся на фундаментальные решения двумерных уравнений связанной термоупругости [3], с последующим применением техники сингулярных интегральных уравнений.

1. Постановка задачи. В декартовой прямолинейной системе координат Ox_1x_2 рассмотрим упругую пластинку, ослабленную конечным числом отверстий с общей границей $\Gamma = \cup \Gamma_\nu$ ($\cup \Gamma_\nu = \emptyset$, $\nu = 1, 2, \dots, N$). На Γ зададим вектор напряжения, а также тепловой поток, гармонически меняющиеся во времени. Задача заключается в определении взаимосвязанных термоупругих полей при гармоническом или импульсном возбуждении рассматриваемой пластинки при учете конечной скорости распространения тепловых импульсов.

Дифференциальные уравнения связанной термоупругости имеют вид [2, 4]

$$\nabla^2 u_j + \sigma \partial_j e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T \partial_j \theta + \frac{1}{\mu} F_j = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u}_j, \quad j = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{v_T^2} \ddot{\theta} - \frac{1}{a^2} \dot{\theta} - m(\dot{e} + \tau^* \ddot{e}) = -\frac{W}{\lambda_T} - \frac{\tau^*}{\lambda_T} \dot{W} \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad m = \frac{(3\lambda + 2\mu)T_0\alpha_T}{\lambda_T}$$

Таблица 1

| Материал | $\lambda \times 10^{-10}$, Н/м ² | $\mu \times 10^{-10}$, Н/м ² | $\rho \times 10^{-3}$, кг/м ³ | $c_\epsilon \times 10^{-2}$, Дж/(кг К) | $\alpha_T \times 10^6$, К ⁻¹ | δ при $T_0 = 330$ К |
|-----------------------|---|---|--|--|---|-------------------------------|
| Неорганическое стекло | 2.48 | 2.9 | 2.5 | 8.33 | 9 | 0.0027 |
| Поливинилацетали | 0.393 | 0.098 | 1.07 | 10.8 | 230 | 0.487 |

где u_j – компоненты вектора перемещения, $e = \partial_i u_l$ ($l = 1, 2$) – объемное расширение, λ , μ – постоянные Ламе, ν – коэффициент Пуассона, α_T – температурный коэффициент линейного расширения изотропного тела, $\theta = T - T_0$ – приращение температуры (T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии, T – абсолютная температура точек тела), F_j – компоненты интенсивности объемной нагрузки, ρ – плотность, $v_T = \sqrt{a^2/\tau^*}$ – скорость распространения тепловых импульсов, τ^* – время релаксации теплового потока, $a^2 = \lambda_T/(c_\epsilon \rho)$ – коэффициент температуропроводности, c_ϵ – объемная теплоемкость при постоянной деформации, λ_T – теплопроводность материала, W – функция плотности тепловых источников.

Выражения для компонент тензора напряжений имеют вид [5]

$$\sigma_{kj} = \lambda(\partial_i u_l)\delta_{kj} + \mu(\partial_k u_j + \partial_j u_k) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\theta\delta_{kj} \tag{1.3}$$

δ_{kj} – символ Кронекера.

Уравнения (1.1), (1.2) взаимосвязанные. Они описывают деформацию тела, возникающую при нестационарных тепловых и механических воздействиях, а также обратный эффект – изменение температуры тела, обусловленное деформацией.

Был дан анализ связанной части уравнения теплопроводности (1.2), которое было переписано (для удобства при $\tau^* = 0$, $W = 0$) следующим образом [6]:

$$\frac{\partial \Theta(x'_1, x'_2, \tau)}{\partial \tau} + \delta \dot{e}(x'_1, x'_2, \tau) = \nabla^2 \Theta(x'_1, x'_2, \tau), \quad \tau > 0$$

где введены новые (безразмерные) переменные

$$\tau = \frac{v_T^2}{a^2} t, \quad x'_j = \frac{v_T}{a} x_j, \quad j = 1, 2, \quad \Theta(x'_1, x'_2, \tau) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T \theta(x'_1, x'_2, \tau),$$

$$\delta = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{c_\epsilon \rho (\lambda + 2\mu)}$$

Для неорганических и ряда органических стекол и металлов параметр связности δ достаточно мал (см. табл. 1) и вклад деформации в температурное поле незначителен. Для поливинилацеталей (поливинилформаль, поливинилэтилаль, поливинилбутираль) коэффициент связности порядка единицы, что свидетельствует о возможном приращении температуры и напряжений при учете слагаемого, отражающего механическую связность.

2. Матрица фундаментальных решений системы. Имея в виду гармонический характер изменения во времени полевых величин, положим

$$u_j = \text{Re}[\exp(-i\omega t)U_j], \quad \sigma_{kj} = \text{Re}[\exp(-i\omega t)S_{kj}], \quad \theta = \text{Re}[\exp(-i\omega t)U_3]$$

$$e = \text{Re}[\exp(-i\omega t)e_*], \quad F_j = \text{Re}[\exp(-i\omega t)X_j], \quad W = \text{Re}[\exp(-i\omega t)Q]; \quad k, j = 1, 2$$

где $U_j, S_{kj}, U_3, e_*, X_j, Q$ – амплитуды соответствующих величин, ω – круговая частота.

Исключив в уравнениях движения и теплопроводности (1.1), (1.2) временной множитель $\exp(-i\omega t)$, представим их в амплитудах

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \gamma_2^2)U_j + \sigma \partial_j e_* - \alpha_0 \partial_j U_3 &= -\frac{1}{\mu} X_j, \quad j = 1, 2 \\ m\omega(1 + \tau^* \omega) e_* + (\nabla^2 + \gamma_T^2 + i\gamma^2)U_3 &= -\frac{1}{\lambda_T} (1 - i\omega \tau^*) Q \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad e_* = \partial_l U_l, \quad l = 1, 2, \quad \alpha_0 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T, \quad \gamma_T = \frac{\omega}{v_T}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{a^2}}$$

Пусть в точке (x_{10}, x_{20}) действует гармонически изменяющаяся во времени сосредоточенная сила $\text{Re}[P_1, P_2] \exp(-i\omega t)$ или сосредоточенный тепловой источник $\text{Re}[P_3 \exp(-i\omega t)]$. Продифференцировав первое уравнение системы (2.1) по координате x_1 , а второе – по координате x_2 , и затем сложив их, приходим к системе

$$\begin{aligned} l_{11} e_* - l_{12} U_3 &= -\frac{1}{\mu(1 + \sigma)} (\partial_1 P_1 + \partial_2 P_2) \delta(x), \quad l_{21} e_* + l_{22} U_3 = -\frac{1 - i\omega \tau^*}{\lambda_T} P_3 \delta(x) \\ l_{11} &= \nabla^2 + \gamma_1^2, \quad l_{12} = \frac{\alpha_0}{1 + \sigma} \nabla^2, \quad l_{21} = m\omega(i + \omega \tau^*), \quad l_{22} = \nabla^2 + \gamma_T^2 + i\gamma^2; \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\delta(x)$ – дельта-функция.

В дальнейшем целесообразно интегрирование системы (2.2) проводить в пространстве $D(R^2)$ обобщенных функций [7].

Подробно рассмотрим случай $P_1 \neq 0, P_2 = P_3 = 0$. Вводя разрешающую функцию $\Phi(x_1, x_2)$ по формулам

$$e_* = l_{22} \Phi, \quad U_3 = -l_{21} \Phi$$

приводим систему (2.2) к неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$(\nabla^2 \nabla^2 + d \nabla^2 + b) \Phi = -\frac{P_1}{\mu(1 + \sigma)} \partial_1 \delta(x)$$

$$d = \gamma_1^2 + i\gamma^2 + \gamma_T^2 + \frac{\mu \alpha_0 \beta_0}{1 + \sigma} (i + \omega \tau^*), \quad b = \gamma_1^2 (i\gamma^2 + \gamma_T^2), \quad \beta_0 = \alpha_0 \frac{T_0}{\lambda_T} \omega$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$\Phi = \frac{iP_1}{4\mu(1 + \sigma)(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \quad r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2} \quad (2.3)$$

где $H_p^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля первого рода порядка p , μ_j ($\text{Im} \mu_j > 0, j = 1, 2$) – корни уравнения $z^4 - dz^2 + b = 0$.

Учитывая представление (2.3), заключаем, что система (2.1) распадается на три независимых уравнения

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \gamma_2^2)U_l &= \frac{P_1 a_0}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^j d_j \partial_1 \partial_l H_0^{(1)}(\mu_j r) - \delta_{1l} \frac{P_1}{\mu} \delta(x), \quad l = 1, 2 \\ U_3 &= \frac{P_1 a_0 m\omega(i + \omega \tau^*)}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{(1 + \sigma)(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad d_j = (\sigma + 1)d - \gamma_2^2 - i\gamma^2 - \gamma_T^2 - \sigma\mu_j^2, \quad j = 1, 2$$

Введем обозначения

$$g_l^{(k)} = -\delta_{lk}H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j b_j \partial_l \partial_k H_0^{(1)}(\mu_j r), \quad l, k = 1, 2$$

$$g_l^{(3)} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \mu \beta \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_l H_0^{(1)}(\mu_j r), \quad g_3^{(k)} = m\omega(i + \omega\tau^*) a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_k H_0^{(1)}(\mu_j r) \quad (2.5)$$

$$g_3^{(3)} = \mu \beta \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r)$$

$$d_0 = 1, \quad b_0 = -\frac{1}{a_0 \gamma_2^2}, \quad b_j = \frac{1}{\gamma_2^2 - \mu_j^2}, \quad j = 1, 2; \quad \beta = -\frac{1 - i\omega\tau^*}{\lambda_T (\mu_1^2 - \mu_2^2)}$$

Интегрируя уравнения (2.4) в пространстве обобщенных функций D' , получаем

$$U_n = \frac{P_1}{4i\mu} g_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, 3$$

Рассматривая аналогичным образом случаи $P_2 \neq 0, P_1 = P_3 = 0$ и $P_3 \neq 0, P_1 = P_2 = 0$, получаем окончательные выражения для амплитуд перемещений и температуры

$$U_n^{(m)} = \frac{P_m}{4i\mu} g_n^{(m)}, \quad n, m = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Матрица фундаментальных решений $\|g_n^{(m)}\|$ используется далее при построении интегральных представлений решений граничной задачи.

3. Интегральные уравнения граничной задачи связанной термоупругости. Комплексные граничные равенства на контуре Γ в случае силового и теплового возбуждения имеют вид

$$S_1 - e^{2i\psi} S_2 = 2e^{i\psi} (X_{1n} - iX_{2n}), \quad S_1 - e^{-2i\psi} \tilde{S}_2 = 2e^{-i\psi} (X_{1n} + iX_{2n}), \quad -\lambda_T \frac{\partial U_3}{\partial n} = \Phi \quad (3.1)$$

$$S_1 = S_{11} + S_{22}, \quad S_2 = S_{22} - S_{11} + 2iS_{12}, \quad \tilde{S}_2 = S_{22} - S_{11} - 2iS_{12}$$

где X_{1n}, X_{2n} – компоненты вектора внешней нагрузки, действующей на граничной площадке с нормалью n , Φ – заданный на контуре Γ тепловой поток, ψ – угол между внешней нормалью к контуру Γ и осью Ox_1 .

Для определения волновых полей напряжений и температуры в пластинке, введем интегральные представления амплитуд перемещений и температуры в виде сверток

$$U_n(z) = \int \sum_{\Gamma m=1}^3 Z_m(\zeta) g_n^{(m)}(\zeta, z) ds, \quad \zeta \in \Gamma = \bigcup_{\nu=1}^N \Gamma_\nu, \quad n = 1, 2, 3; \quad (3.2)$$

$$Z_m(\zeta) = \{Z_{m\nu}(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}$$

где $Z_m(\zeta)$ – неизвестные “плотности”, $g_n^{(m)}$ – определенные формулами (2.5) компоненты матрицы фундаментальных решений (2.6). С использованием выражений (3.2) и закона (1.3) находим компоненты тензора напряжений, после чего определяем комбинации полевых величин, входящие в условия (3.1). Подстановка предельных значений этих величин в граничные условия приводит к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода на контуре Γ

$$\pm 4iW_p(\zeta_0) + \int \sum_{\Gamma^m=1}^3 W_m(\zeta) K_{pm}(\zeta, \zeta_0) ds = F_p(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup_{v=1}^N \Gamma_v, \quad p = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Здесь

$$W_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\mp i\psi} (Z_1 \pm iZ_2), \quad W_3 = \mu \alpha_T Z_3$$

$$K_{ll}(\zeta, \zeta_0) = -\gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0) \exp[(-1)^{l-1} i(\alpha_0 + \psi - 2\psi_0)] - \\ - a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j \{ \sigma(d_j b_j \mu_j^2 + \alpha^*) \exp[(-1)^{l-1} i(\psi - \alpha_0)] + \\ + d_j b_j \mu_j^2 \exp[(-1)^{l-1} i(\alpha_0 + \psi - 2\psi_0)] \} H_1^{(1)}(\mu_j r_0), \quad l = 1, 2$$

$$K_{lk}(\zeta, \zeta_0) = a_0 \exp[(-1)^k i(3\alpha_0 - 2\psi_0 - \psi)] \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j b_j \mu_j^3 H_3^*(\mu_j r_0) - \\ - a_0 \sigma \exp[(-1)^{l-1} i(\alpha_0 - \psi)] \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j (d_j b_j \mu_j^2 + \alpha^*) H_1^{(1)}(\mu_j r_0), \quad k = 1, 2; \quad l+k = 3$$

$$K_{l3}(\zeta, \zeta_0) = \beta \frac{1+v}{1-v} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \{ \exp[(-1)^{l-1} 2i(\alpha_0 - \psi_0)] \mu_j^2 H_2^{(1)}(\mu_j r_0) - (\gamma_2^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_0) \}$$

$$K_{3l}(\zeta, \zeta_0) = iE\sigma T_0 \alpha_T^2 \alpha_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \{ \exp[(-1)^{l-1} i(\psi + \psi_0 - 2\alpha_0)] H_2^{(1)}(\mu_j r_0) - \\ - \exp[(-1)^{l-1} i(\psi - \psi_0)] H_0^{(1)}(\mu_j r_0) \}$$

$$K_{33}(\zeta, \zeta_0) = -\frac{2}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j (\gamma_1^2 - \mu_j^2) H_1^{(1)}(\mu_j r_0) \cos(\alpha_0 - \psi_0)$$

$$\alpha^* = 2(1+v)\alpha_T m \omega (i + \omega \tau^*), \quad H_3^*(\mu_j r_0) = \frac{16i}{\pi \mu_j^3 r_0^3} + H_3^{(1)}(\mu_j r_0), \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0)$$

$$F_{1,2}(\zeta_0) = \frac{1}{\mu} (N \pm iT)(\zeta_0), \quad F_3(\zeta_0) = -\frac{2\alpha_T}{1 - i\omega \tau^*} \Phi(\zeta_0)$$

N и T – амплитуды нормальных и касательных усилий, приложенных на контуре Γ , E – модуль Юнга; верхний знак в уравнении (3.3) соответствует внутренней, нижний – внешней задаче.

Нормальное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и температура θ на контуре Γ определяются по формулам

$$\sigma_{\theta\theta}^{\pm} = \operatorname{Re} \left[\exp(-i\omega t) S_{\theta\theta}^{\pm} \right], \quad \theta = \operatorname{Re} [\exp(-i\omega t) U_3]$$

$$S_{\theta\theta}^{\pm}(\zeta_0) = 2\mu\sigma \left\{ \pm \frac{i}{(1-\nu)\sigma} [W_1(\zeta_0) + W_2(\zeta_0)] + \int \sum_{\Gamma m=1}^3 W_m(\zeta) R_m(\zeta, \zeta_0) ds \right\} - N$$

$$U_3(\zeta_0) = \int \sum_{\Gamma m=1}^3 W_m(\zeta) R_3^{(m)}(\zeta, \zeta_0) ds$$

$$R_l(\zeta, \zeta_0) = -a_0 \exp[(-1)^l i(\alpha_0 - \psi)] \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j (d_j b_j \mu_j^2 + \alpha^*) H_0^{(1)}(\mu_j r_0) \quad (3.4)$$

$$R_3^{(l)}(\zeta, \zeta_0) = m\omega(i + \omega\tau^*) a_0 \exp[(-1)^l i(\alpha_0 - \psi)] \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r_0); \quad l = 1, 2$$

$$R_3(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\beta(1+\nu)}{\sigma(1-\nu)} \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_2^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_0)$$

$$R_3^{(3)}(\zeta, \zeta_0) = \frac{\beta}{\alpha_T} \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_0)$$

4. Импульсное возбуждение пластинки с отверстием. Пусть на контуре отверстия Γ действует трапецевидный импульс по времени

$$\frac{N}{N_0} = \begin{cases} t/t_b, & 0 \leq t \leq t_b \\ 1, & t_b \leq t \leq t_c \\ (t-t_d)/(t_c-t_d), & t_c \leq t \leq t_d \\ 0, & t_d \leq t < \infty \end{cases}$$

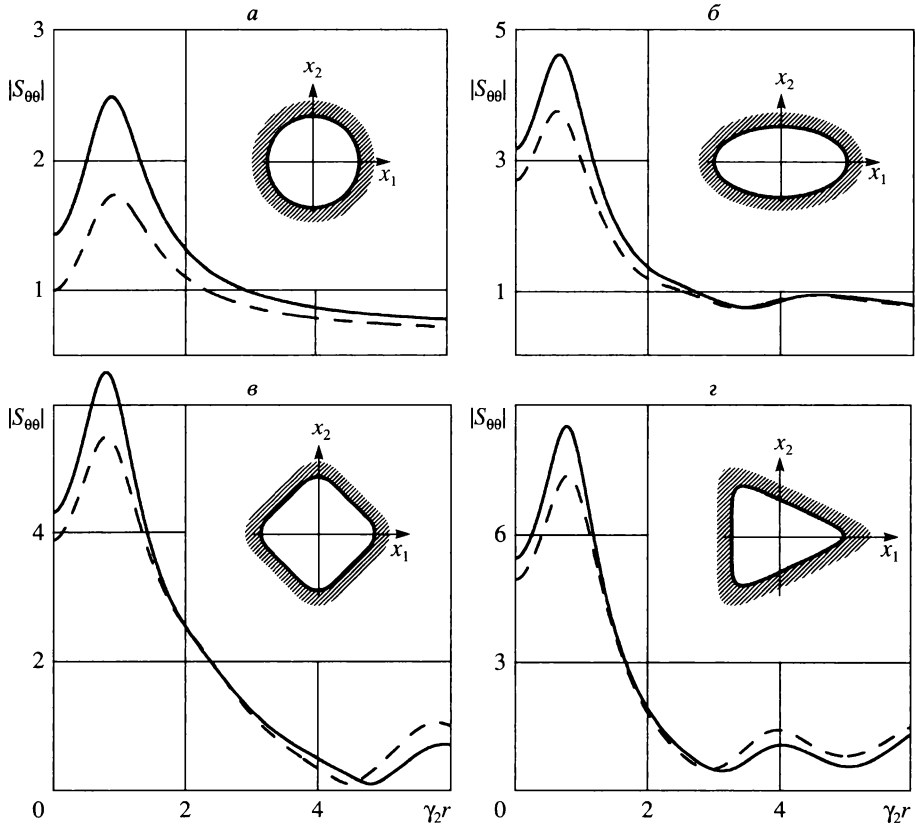
где N_0, t_b, t_c, t_d – параметры импульса.

В этом случае решение динамической задачи можно “собрать” из пакета монохроматических волн с помощью одностороннего интегрального преобразования Фурье по времени

$$F_*(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F(x_1, x_2, t) e^{i\omega t} dt, \quad F(x_1, x_2, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F_*(x_1, x_2, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Применив преобразование Фурье к уравнениям движения и теплопроводности (1.1), (1.2), придем к системе (2.1) относительно соответствующих трансформант.

Полевые величины определяются при помощи обратного преобразования Фурье.



Фиг. 1

5. Результаты расчетов. Пусть неограниченная упругая среда ослаблена одним отверстием. Для численной реализации построенного алгоритма введем параметризацию контура отверстия Γ

$$\zeta = \zeta(\varphi_k), \quad \zeta_0 = \zeta(\varphi_{0l}), \quad 0 \leq \varphi_k, \varphi_{0l} \leq 2\pi$$

Применяя к сингулярным интегральным уравнениям (3.3) метод механических квадратур [8] и принимая во внимание интерполяционную формулу (для нечетного числа точек разбиения контура)

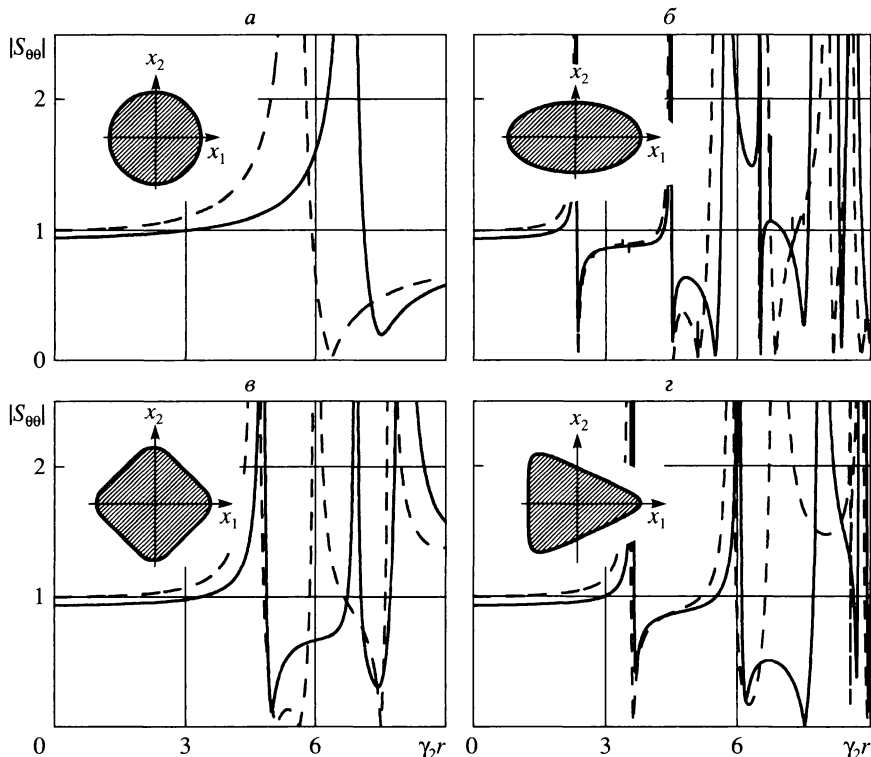
$$W(\varphi_{0l}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+l} W(\varphi_k) \operatorname{cosec} \frac{\varphi_k - \varphi_{0l}}{2}, \quad \varphi_k = \frac{\pi(2k-1)}{n}, \quad \varphi_{0l} = \frac{2\pi(l-1)}{n},$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

сводим их к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений плотностей $W_m(\varphi_k)$ в точках интерполяции φ_k

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^3 W_m(\varphi_k) \left[\pm 4i(-1)^{k+l} \delta_{pm} \operatorname{cosec} \frac{\varphi_k - \varphi_{0l}}{2} + 2\pi K_{pm}(\varphi_k, \varphi_{0l}) \frac{ds}{d\varphi}(\varphi_k) \right] = nF_p(\varphi_{0l})$$

$$p = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2, \dots, n$$



Фиг. 2

$$\frac{ds}{d\varphi}(\varphi_k) = \sqrt{[\xi'(\varphi_k)]^2 + [\eta'(\varphi_k)]^2}, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

Соотношения (3.4) преобразуются к виду

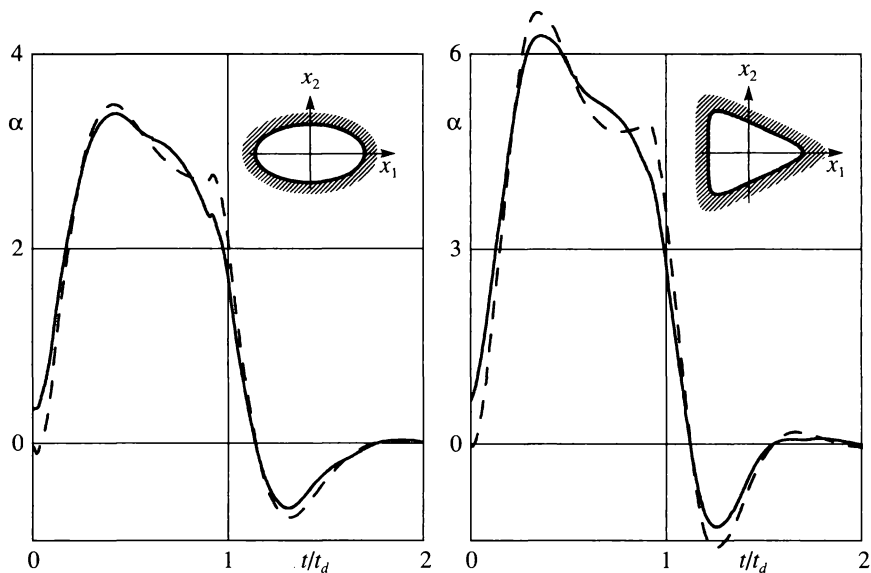
$$S_{\theta\theta}^{\pm}(\varphi_{0l}) = \frac{2\pi\sigma}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \pm \frac{i}{(1-\nu)\sigma} (-1)^{k+l} \operatorname{cosec} \frac{\varphi_k - \varphi_{0l}}{2} [W_1(\varphi_k) + W_2(\varphi_k)] + \right. \\ \left. + 2\pi \sum_{m=1}^3 W_m(\varphi_k) R_m(\varphi_k, \varphi_{0l}) \frac{ds}{d\varphi}(\varphi_k) \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

$$U_3(\varphi_{0l}) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^3 W_m(\varphi_k) R_3^{(m)}(\varphi_k, \varphi_{0l}) \frac{ds}{d\varphi}(\varphi_k)$$

В динамической задаче был применен алгоритм обратного преобразования Фурье, основанный на аппроксимации изображения с помощью цепных дробей [9, 10].

Зависимости амплитуды модуля нормального окружного напряжения $|S_{\theta\theta}|$ от относительного волнового числа $\gamma_2 r$ ($r = 0.1$ м) представлены на фиг. 1 для неограниченной пластинки с отверстием и на фиг. 2 для пластинки конечных размеров. Параметрические уравнения контуров отверстий на фиг. 1 и контуров конечных пластинок на фиг. 2 имеют вид:

а) $\zeta = R e^{i\varphi}$, б) $\zeta = R_1 \cos \varphi + i R_2 \sin \varphi$, в) $\zeta = R(e^{i\varphi} + 0.14036 e^{-3i\varphi})$,



Фиг. 3

$$\text{г) } \zeta = R(e^{i\varphi} + 0.25e^{-2i\varphi}).$$

Здесь

$$R = 10^{-1} \text{ м}, R_1 = 1.3 \cdot 10^{-1} \text{ м}, R_2 = 0.7 \cdot 10^{-1} \text{ м}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

На контуре Γ заданы нормальное усилие $N = 1 \text{ Н/м}^2$ и нулевой тепловой поток Φ . В качестве материала взят поливинилбутираль (коэффициент связности $\delta = 0.431$), физико-химические характеристики которого [2, 5] при $T_0 = 293 \text{ К}$ приведены в последней строке табл. 2. Сплошные кривые построены при учете связанности полей деформации и температуры, штриховые – без учета связанности.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов зависимости величины $\alpha = \sigma_{\theta\theta}/N_0$ от времени при возбуждении пластинки трапециевидным импульсом давления $N_0 = 1 \text{ Н/м}^2$ длительности $t_d = 10^{-6} \text{ с}$ (при $t_b = 0.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $t_c = 0.9 \cdot 10^{-6} \text{ с}$). Параметрические уравнения контуров отверстий – те же, что для вариантов б и г на фиг. 1, 2. Расчеты проводились для поливинилбутираля (время релаксации теплового потока $\tau^* = 10^{-5} \text{ с}$). Сплошные кривые соответствуют гиперболической модели теплопроводности (учет релаксации теплового потока), а штриховые – параболической (без учета релаксации).

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что для таких материалов, как поливинилбутираль, эффект связанности может быть значительным, особенно в области пиковых значений частоты возбуждения. Существенно меняются и амплитудно-частотные характеристики конечных пластин.

Таблица 2

| Материал | $E \times 10^{-10}$, Н/м ² | c_ϵ , Дж/(кг К) | $\rho \times 10^{-3}$, кг/м ³ | ν | $\alpha_T \times 10^6$, К ⁻¹ | α_T , Дж/(м с К) | δ |
|--------------------|---|-----------------------------|--|-------|---|----------------------------|----------|
| Алюминий | 7 | 861 | 2.7 | 0.34 | 26 | 207 | 0.038 |
| Полистирол | 0.255 | 1077 | 1.04 | 0.3 | 70 | 0.16 | 0.015 |
| Поливинил-бутираль | 0.275 | 1077 | 1.07 | 0.4 | 230 | 0.16 | 0.431 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // ПММ, 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 316–318.
2. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
3. Фильштинский Л.А., Сиренко Ю.В. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости // Теорет. и прикл. механика. 2003. Вып. 37. С. 157–161.
4. Nowacki W. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: PAN, 1966 = Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
5. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 181 с.
6. Voley V.A., Weiner J.H. Theory of Thermal Stresses. N.Y.; L.: Wiley, 1960 = Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
9. Babolian E., Biazar J., Vahidi A.R. A new computational method for Laplace transforms by decomposition method // Appl. Math. Comput. 2004. V. 150. № 3. P. 841–846.
10. Abate J., Choudhury G.L., Whitt W. An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models // Computational Probability/Ed. W. Grassman. Boston: Kluwer, 1999. P. 257–323.

Сумы (Украина)
e-mail: leonid@mphis.sumdu.edu.ua
vladyslav.kobzar@gmail.com

Поступила в редакцию
25.I.2007