

СТУДЕНТСЬКА НАУКОВА РОБОТА В ГАЛУЗІ НАУК:  
**"Військові науки"**

**Тема: "АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ УРАЖЕННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ  
БАТАРЕЇ ЕВЕНТУАЛЬНОГО ПРОТИВНИКА З УРАХУВАННЯМ  
СВОЄЧАСНОСТІ ВИЯВЛЕННЯ"**

## ПЛАН

ВСТУП .....	3
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ .....	5
1.1 Формалізація задачі .....	5
2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БОЙОВОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ БАТАРЕЇ САМОХІДНИХ НЕБРОНЬОВАНИХ ГАРМАТ .....	7
2.1 Побудова ймовірнісної математичної моделі функціонування <i>сабатр</i>	7
2.2 Розрахункові формули для визначення втрати боєздатності <i>сабатр</i> .....	10
2.3 Розрахункові формули для визначення ймовірності своєчасності во- гню по <i>сабатр</i> .....	14
3 РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ .....	17
3.1 Визначення показника ефективності вогню по артилерійській батареї евентуального противника .....	17
3.2 Імовірність накриття цілі .....	17
3.3 Розрахунок ступеня ураження артилерійської батареї самохідних неброньованих гармат .....	18
ВИСНОВКИ.....	22
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	23
ДОДАТОК А.....	24



## ВСТУП

Одним із головних завдань, які розв'язуються в ході вогневого ураження евентуального противника є боротьба з його артилерією. Добре відомо, що більша частина сучасних артилерійських комплексів, що підлягають ураженню, є високоманевровими і здатні в короткі проміжки часу залишити вогневу позицію. В той же час перебування високоманеврових цілей на вогневій позиції визначається багатьма факторами, наприклад, видом об'єкту, характером задачі, яка виконується і т. ін.

Для таких умов величина втрат при нанесенні вогневого удару по високоманевровій цілі евентуального противника залежить від цілого ряду випадкових величин. Такими, наприклад, є час зайняття і час перебування цілі на вогневій позиції, час виявлення об'єкту і виконання ним вогневої задачі, час залишення вогневої позиції і т. ін. Тому, визначаючи показники ефективності та ступінь ураження високоманеврової цілі, необхідно враховувати ймовірність того, що вогневий наліт по цілі здійснено до того моменту часу, поки вона не залишила вогневу позицію.

Досить часто розв'язання цих питань базується на побудові аналітичних математичних моделей, які описуються марківськими випадковими процесами з дискретною множиною станів і неперервним часом. При побудові марківської моделі реальної системи, у якості вихідних даних необхідно мати досить повний опис функціонування системи з урахуванням усіх випадкових факторів, що впливають на зміну її фізичних станів. При цьому всі випадкові величини, які приймають участь у заданні системи, розподілені за показниковим законом.

В даній роботі процес функціонування артилерійської батареї евентуального противника (*сабатр*) описується за допомогою напівмарківського

процесу. Тобто, на відміну від марківських моделей систем, час перебування системи у відповідних станах є випадковими величинами з довільними функціями розподілу, які залежать тільки від поточного стану системи.

Робота включає в себе чотири розділи. У першому розділі формулюється задача і мета дослідження. У другому розділі, в припущенні, що процес бойового функціонування *сабатр* описується напівмарківським процесом з дискретною множиною станів і неперервним часом, побудована математична модель у вигляді системи лінійних інтегральних рівнянь. Третій розділ присвячений розрахунку ступеня ураження *сабатр*. Визначено показник ефективності ступеня ураження цілі, його розраховано з урахуванням часу підготовки на нанесення вогневого нальоту, ймовірності накриття цілі зоною рівномірного розсіювання снарядів і умовної ймовірності ураження *сабатр* за умови, що вона накрита зоною рівномірного розсіювання снарядів. У останньому, четвертому розділі, за результатами отриманих розрахунків, зроблено висновки.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

За даними повітряної розвідки виявлено артилерійську батарею самохідних неброньованих гармат евентуального противника на вогневій позиції. Бойовий порядок батареї противника — уступом назад. Координати цілі визначені на початок розгортання батареї противника на вогневій позиції.

До ураження батареї противника залучається артилерійський дивізіон 152-мм СГ 2С3. Визначення установок для стрільби на ураження здійснюється на основі повної підготовки.

Метою роботи є визначення ступеня ефективності ураження артилерійської батареї евентуального противника.

### 1.1 Формалізація задачі

З постановки задачі випливає, що в бойових діях беруть участь два однорідних протидіючих угруповання: з одного боку — артилерійська батарея евентуального противника (сторона А), з іншого — артилерійський дивізіон 152-мм СГ 2С3 (сторона В) (див. рис. 1). Очевидно, що динаміка процесу бою між протидіючими угрупованнями являє собою складну фізичну систему  $S = S(S_1^*, S_2^*)$ , елементами якої у свою чергу є, відповідно, сторони А і В, між якими встановлені зв'язки і операції. Ефективність функціонування підсистеми  $S_1^*$  і  $S_2^*$  визначається відповідними параметрами, між якими існує функціональна залежність. Враховуючи, що при веденні бойових дій важливу роль відіграє фактор випадковості, будемо вважати, що система  $S = S(S_1^*, S_2^*)$  описується випадковим процесом  $X = X(t), t \geq 0$ . У зв'язку з цим, при побудові математичної моделі бойового функціонування артилерійської батареї противника необхідно враховувати фактор випадковості. Виходячи з імовірнісних характеристик системи, у якості головного показника ефективності взяти ступінь ураження *сабатр* з урахуванням часу перебування на вогневій позиції, часу підготовки і тривалості вогневого нальоту.

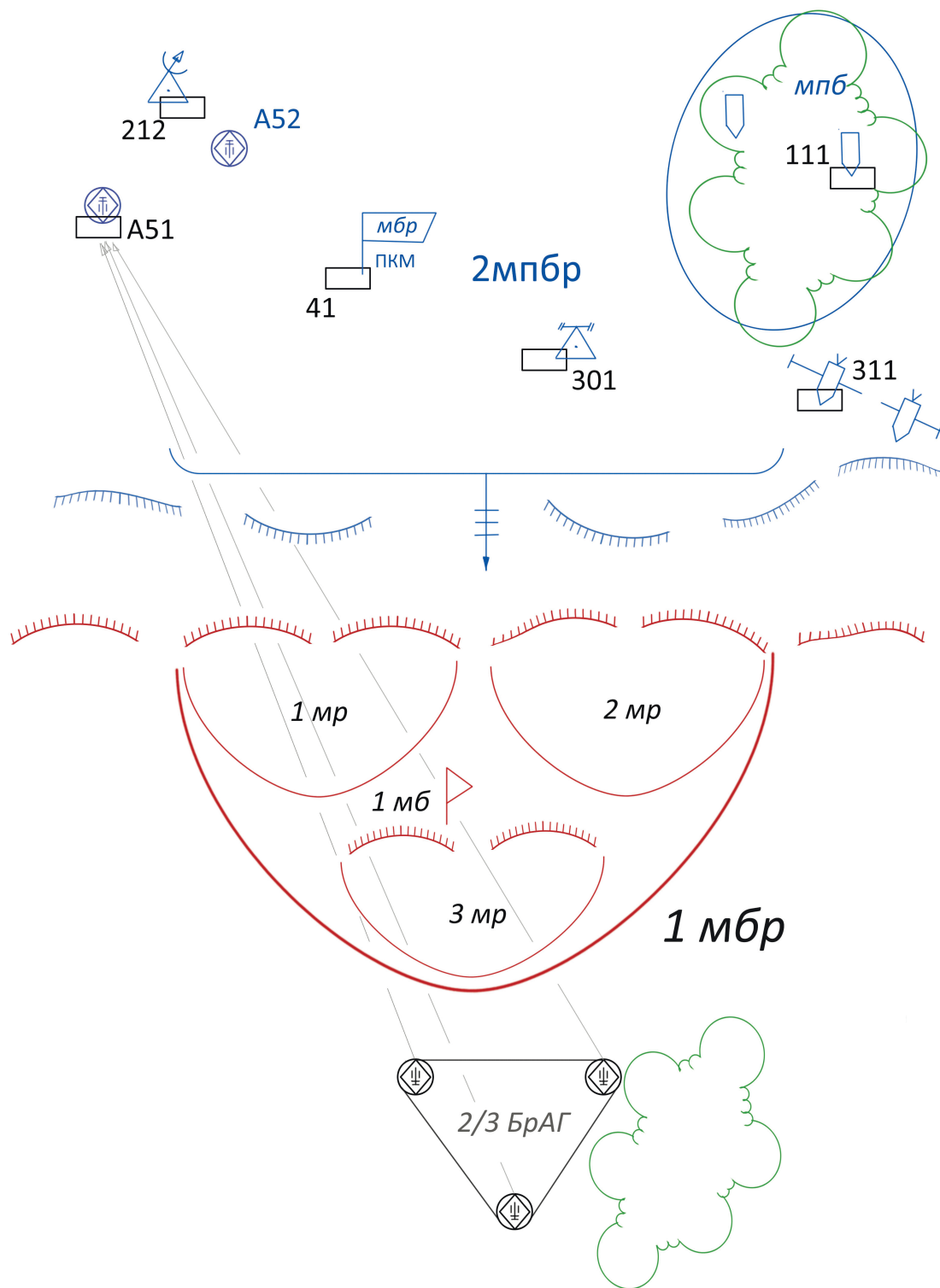


Рис. 1. Схема вогневого ураження *сабатр* дивізіоном СГ 2С3

## 2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БОЙОВОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ БАТАРЕЇ САМОХІДНИХ НЕБРОНЬОВАНИХ ГАРМАТ

### 2.1 Побудова ймовірнісної математичної моделі функціонування *сабатр*

Нехай процес бойового функціонування *сабатр* описується деякою фізичною підсистемою  $S_1^*$  системи  $S = S(S_1^*, S_2^*)$ , яка може перебувати в одному з наступних станів:

$S_1$  — батарея зайняла вогневу позицію і розгорнулась в бойовий порядок;

$S_2$  — *сабатр* виконала вогневе завдання;

$S_3$  — батарея залашила вогневу позицію;

$S_4$  — батарея знаходиться під вогневим впливом.

Орієнтований граф переходів системи  $S_1^* = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$  зі стану в стан представлено на рис. 2.

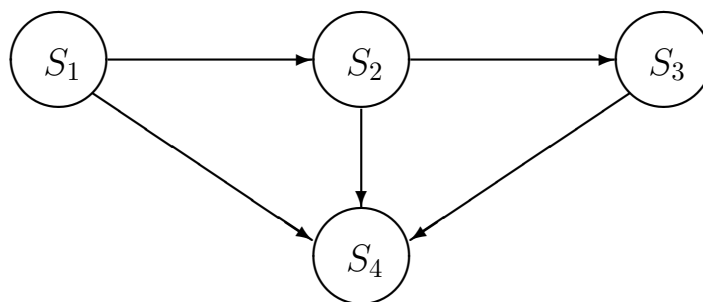


Рис. 2. Орієнтований граф станів *сабатр*

Будемо вважати, що перехід системи  $S$  із одного стану в інший (функціонування *сабатр* на вогневій позиції) відбувається наступним чином:

1) в початковий момент часу  $t = 0$  (відлік часу починаємо з моменту зайняття *сабатр* ВП і розгортання в бойовий порядок) система знаходиться

в стані  $S_1$  протягом деякого випадкового часу  $\theta_1$ , тобто це час, який система  $S$  перебуває в стані  $S_1$  до переходу в  $S_2$  або  $S_4$ , з довільною функцією розподілу  $F_{12}(t)$  або  $F_{14}(t)$ ;

2) перехід системи  $S$  зі стану  $S_i$  в стан  $S_j$  відбувається з імовірністю  $p_{ij} \geq 0$ ,  $\sum p_{ij} = 1$  для  $j \in S$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ).

3) якщо зі стану  $S_i$  відбувається перехід в стан  $S_j$ , то в цьому стані система знаходиться випадковий час  $\theta_i$  з довільною функцією розподілу  $F_{ij}(t)$  і т.д. Тоді згідно з [1, 2], математичною моделлю, яка описує процес бойового функціонування *сабатр*, є напівмарківський процес  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , з дискретною множиною станів і неперервним часом.

Виходячи з [2, 3] цей процес задамо конструктивно за допомогою початкового розподілу

$$p = p_i, i \in S, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

і напівмарківської матриці

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t). \quad (2)$$

Таким чином, розв'язок задачі зводиться до визначення перехідних імовірностей

$$P_{ij} = P\{X(t) = S_j / X(0) = S_i\}, (i, j = 1, \dots, 4) \quad (3)$$

які [2] задовольняють наступній системі лінійних інтегральних рівнянь:

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}[1 - F_i(t)] + \sum_{k \in S} \int_0^t Q_{ik}(du)P_{ik}(t - u), \quad (4)$$

$$F_i(t) = \sum_{j \in S} Q_{ij}(t) = \sum_j p_{ij}F_{ij}(t) = P_i(\theta_i < t), \quad (5)$$

де  $Q_{ik}(du) = dQ_{ik}(u)$ ;  $\theta_i$  — час перебування системи  $S$  в стані  $S_i$  незалежно від переходу в наступний стан;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Приймаючи до уваги орієнтований граф станів системи  $S$  (рис. 2) і (4) запишемо перехідні ймовірності  $P_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ), які визначають процес функціонування *сабатр* на ВП.

$$P_{12}(t) = \int_0^t Q_{12}(du)P_{22}(t-u) = \int_0^t Q_{12}(du) [1 - F_2(t-u)], \quad (6)$$

$$P_{13}(t) = \int_0^t Q_{12}(du) \int_0^{t-u} Q_{23} [1 - F_3(t-u-v)], \quad (7)$$

$$P_{23}(t) = \int_0^t Q_{23}(du)P_{33}(t-u) = \int_0^t Q_{23}(du) [1 - F_3(t-u)]. \quad (8)$$

Відмітимо тепер, що у відповідності до фізичного змісту задачі, стан  $S_4$  інтерпретується як втрата боєздатності *сабатр* (за класифікацією станів [1, 2] випадкового процесу він є поглинаючим), так як потрапляння в нього системи  $S$  на різних етапах свого функціонування призводить до невиконання поставленого завдання.

Позначимо момент першого потрапляння системи  $S$  в стан  $S_4$  через  $\eta$ , тоді

$$P_{i4}(t) = P_{i4}\{\eta < t\}, (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

це ймовірність того, що *сабатр* втратила боєздатність, а  $\eta$  — час, необхідний противнику для виявлення і нанесення вогневого удару по *сабатр*.

Шукані ймовірності визначимо з (4), маємо, послідовно, (див. рис. 2)

$$P_{14}(t) = Q_{14}(t) + \int_0^t Q_{12}(du)Q_{24}(t-u) + \int_0^t Q_{12}(du) \int_0^{t-u} Q_{23}(dv)Q_{34}(t-u-v), \quad (10)$$

$$P_{24}(t) = Q_{24}(t) + \int_0^t Q_{23}(du)Q_{34}(t-u), \quad (11)$$

$$P_{34}(t) = Q_{34}(t). \quad (12)$$

Отримані загальні співвідношення і напівмарківська матриця дають можливість підрахувати ймовірність втрати боєздатності (потрапляння в стан  $S_4$  зі станів  $S_1, S_2$  або  $S_3$ ) *сабатр* при нанесенні вогневого удару артилерійським дивізіоном 152-мм СГ 2С3.

## 2.2 Розрахункові формули для визначення втрати боєздатності *сабатр*

Оскільки функціонування *сабатр* на ВП описується напівмарківським процесом, то задамо його вектором  $p = \{p_i, i \in S\} = \{1, 0, 0, 0\}$  і напівмарківською матрицею

$$Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in S\} = \{p_{ij}(1 - e^{-\lambda_i t}), t \geq 0, \sum p_{ij} = 1, \lambda_i > 0\}, \quad (13)$$

де  $\{p_{ij}, i, j \in S\} = P$ -матриця імовірностей переходу ланцюга Маркова.

За даними [4–6] час  $t$  перебування високоманеврової цілі на вогневій позиції включає в себе час зайняття вогневої позиції і розгортання в бойовий порядок — від 4 до 5 хв., час підготовки і виконання вогневого завдання - від 5 до 6 хв., час залишення вогневої позиції - від 2 до 3 хв. Отже, час перебування *сабатр* на вогневій позиції розглядається як випадкова величина, яка в результаті реалізації може приймати які завгодно значення в інтервалі  $t_{min} = 11$  хв.,  $t_{max} = 14$  хв. Оскільки  $t$  є випадковою величиною, очікуване значення часу перебування батареї противника у відповідних станах на вогневій позиції будемо оцінювати за формулою

$$\bar{t}_i = \frac{t_{min} + t_{max}}{2}, (i = 1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Дані розрахунків зводимо у таблицю 1.

№/№	Стани функціонування <i>сабатр</i>	Оцінка перебування у станах, хв.		
		$t_{min}$	$t_{max}$	$\bar{t}_i (i = 1, 2, 3, 4)$
1	Зайняття ВП	4	5	$\bar{t}_1 = 4.5$
2	Виконання вогневого завдання	5	6	$\bar{t}_2 = 5.5$
3	Залишення вогневої позиції	2	3	$\bar{t}_3 = 2.5$
4	Тривалість вогневого нальоту			$\bar{t}_4 = 10$

Табл. 1. Числові значення складових часу функціонування *сабатр* у відповідних станах



Елементи матриці  $P$  [3, 7] визначимо з умови, що

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{j \in S} a_{ij}} = \frac{\bar{t}_i}{\sum_{i \in S} \bar{t}_i}, \quad (15)$$

де  $a_{ij}$  — середній час перебування системи  $S$  в стані  $S_i$  до переходу в  $S_j$ . Маємо, з урахуванням даних таблиці 1.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.24 & 0.11 & 0.45 \\ 0 & 0.3 & 0.14 & 0.56 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Далі,  $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$  — функція розподілу часу  $\theta_i$  перебування системи  $S$  в стані  $S_i$ ,  $i \in S$ , знайдемо

$$M(\theta_i) = \int_0^\infty t dF_i(t) = \lambda_i \int_0^\infty t e^{-\lambda_i t} dt = \frac{1}{\lambda_i} \quad (17)$$

Поклавши  $M(\theta_i) = \bar{t}_i$ , отримуємо, що  $\lambda_i = \frac{1}{\bar{t}_i}$  — величина обернена до середнього часу перебування системи  $S$  в стані  $S_i$ . Враховуючи умову нашої задачі (див. табл. 1)

$$\lambda_1 = 0.22, \lambda_2 = 0.18, \lambda_3 = 0.4. \quad (18)$$

Після підстановки (13) в (12), (11), (10) відповідно знаходимо ймовірності потрапляння *сабатр* під вогневий вплив:

$$P_{34}(t) = Q_{34}(t) = p_{34}(1 - e^{-\lambda_3 t}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P_{24}(t) &= Q_{24}(t) + \int_0^\infty Q_{23}(du) Q_{34}(t-u) = \\ &= p_{24}(1 - e^{-\lambda_2 t}) + \lambda_2 p_{23} p_{34} \int_0^\infty e^{-\lambda_2 u} (1 - e^{-\lambda_3(t-u)}) du = \\ &= p_{24}(1 - e^{-\lambda_2 t}) + p_{23} p_{34} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} p_{23} p_{34} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_3 t}), \end{aligned} \quad (20)$$

або

$$P_{24}(t) = s + m e^{-\lambda_2 t} - n e^{-\lambda_3 t}, \quad (21)$$

$$\text{де } s = p_{24} + p_{23}p_{34}, m = \frac{\lambda_2 p_{23} p_{34}}{\lambda_2 - \lambda_3} - p_{24}, n = \frac{\lambda_2 p_{23} p_{34}}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Аналогічно попередньому

$$P_{14}(t) = s_1 - m_1 e^{-\lambda_1 t} + n_1 e^{-\lambda_2 t} - p_1 e^{-\lambda_3 t}, \quad (22)$$

$$\text{де } s_1 = p_{14} + p_{12}p_{24} + p_{12}p_{23}p_{34},$$

$$m_1 = p_{14} - p_{12}p_{24} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + p_{12}p_{23}p_{34} \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$n_1 = p_{12}p_{23}p_{34} \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - p_{12}p_{24} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 p_{12} p_{23} p_{34}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Підставимо в (19), (20), (22), і значення  $p_{ij}$  з (17) і  $\lambda_i$  з (18), в результаті отримаємо розрахункові формули для визначення шуканих імовірностей:

$$P_{14}(t) = 0.611 + 0.424e^{-0.22t} - 1.008e^{-0.18t} - 0.027e^{-0.4t}, \quad (23)$$

$$P_{24}(t) = 0.672 - 0.764e^{-0.18t} + 0.092e^{-0.4t}, \quad (24)$$

$$P_{34}(t) = 0.8 - 0.8e^{-0.4t}. \quad (25)$$

Припускаємо, що вогневий наліт по *сабатр* евентуального противника триває 10 хвилин, розрахуємо ймовірності переходу системи зі станів  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$  в стан  $S_4$ . Тобто для ситуації, коли *сабатр* займає ВП, виконує вогневе завдання і залишає ВП.

Дані розрахунків зводимо до таблиці 2.

№/№	Імовірності переходів	Тривалість вогневого нальоту $t$ , хв.									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$P_{14}(t)$	0.091	0.169	0.235	0.291	0.339	0.380	0.414	0.444	0.469	0.491
2	$P_{24}(t)$	0.096	0.180	0.255	0.319	0.374	0.421	0.461	0.495	0.523	0.547
3	$P_{34}(t)$	0.264	0.441	0.559	0.639	0.692	0.727	0.751	0.767	0.778	0.785

Табл. 2. Імовірності переходу системи  $S$  в стан  $S_4$  зі станів  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$

Графічна ілюстрація залежності імовірностей переходу  $P_{i4}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) від тривалості вогневого нальоту представлена на рис. 3.

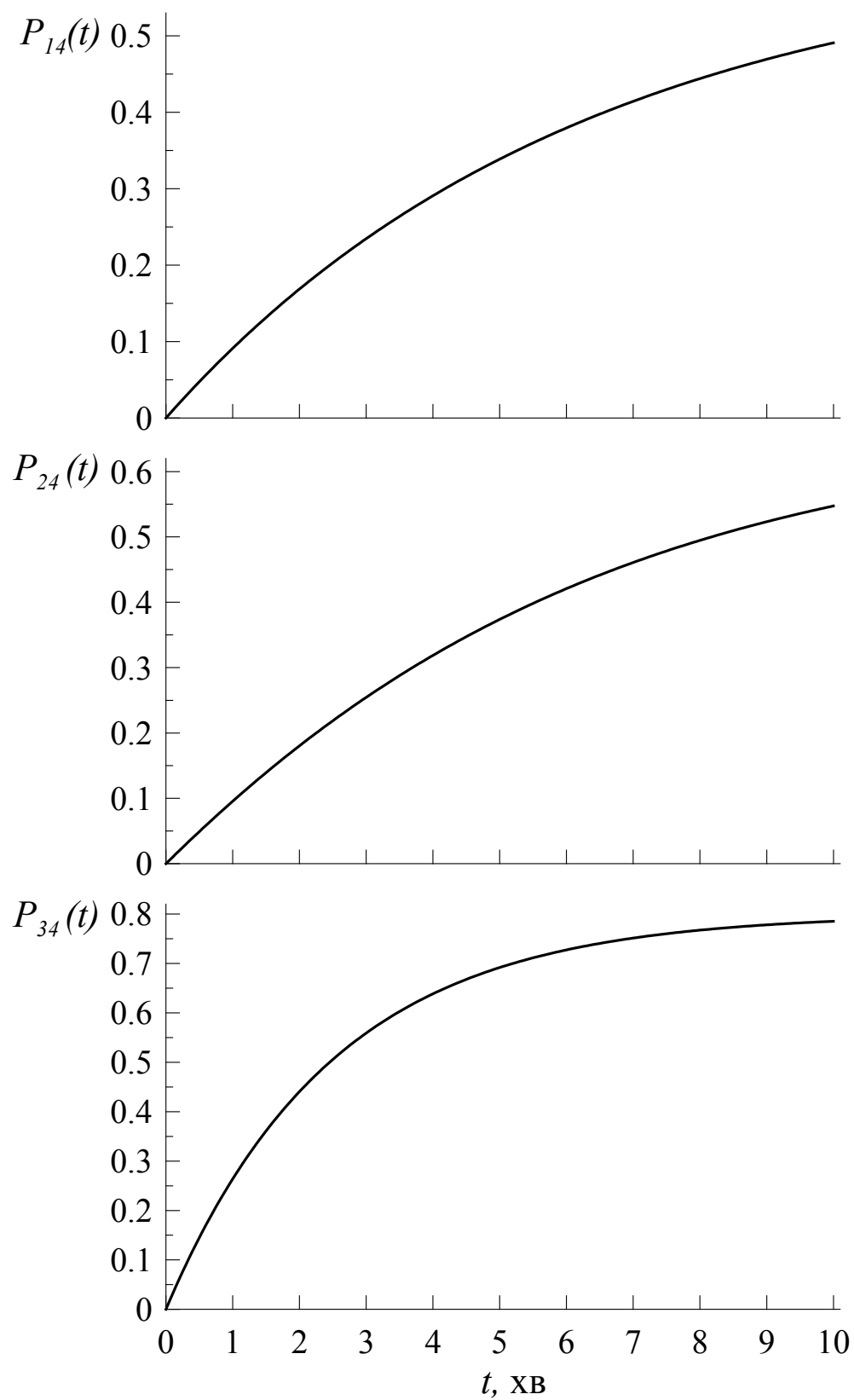


Рис. 3. Імовірності переходів у стан  $S_4$  зі станів  $S_1, S_2, S_3$

### 2.3 Розрахункові формули для визначення ймовірності своєчасності вогню по *сабатр*

Одним із головних завдань, які розв'язується в ході ураження противника є боротьба з його артилерією. Сучасні реальні об'єкти, які підлягають ураженню є високоманевровими і здатні в короткі проміжки часу виконати вогневе завдання і залишити вогневу позицію. В [4, 8] для визначення ступеня ураження високоманеврових цілей пропонується наступна формула:

$$M^* = M \cdot P_c, \quad (26)$$

де  $M$  — математичне сподівання відносного числа ураження окремих цілей зі складу групової;  $P_c$  — ймовірність своєчасності вогню по цілі.

З ймовірнісної точки зору [9–11] величини  $M$  і  $P_c$ , що входять до (26) є характеристиками випадкових величин. Це, наприклад, момент зайняття вогневої позиції, виконання бойової задачі, час необхідний для визначення координат цілі, підготовка даних і нанесення вогневого удару.

Ці величини в свою чергу залежать [4, 8] від багатьох факторів таких як рівень підготовки особового складу, часу функціонування комплексу, швидкодії АСУ артилерійської системи, ефективності засобів розвідки і т.д. Виходячи з вище сказаного і (26) бачимо, що ступінь ураження високоманеврової цілі значною мірою залежить від  $P_c$  — ймовірності своєчасності вогню.

Позначимо через  $t_n$  випадкову величину — час перебування високоманеврової цілі на вогневій позиції, і нехай  $\varphi(t_n)$  — щільність розподілу часу  $t_n$ . Через  $t_{\text{підг}}$  випадкову величину — час необхідний на підготовку і нанесення вогневого удару і  $f(t_{\text{підг}})$  — щільність розподілу часу  $t_{\text{підг}}$ . З фізичної точки зору зрозуміло, що нанесення вогневого удару по цілі буде своєчасним лише при умові, якщо  $t_{\text{підг}} < t_n$ ; якщо ж  $t_{\text{підг}} \geq t_n$ , нанесення вогневого удару по цілі не буде своєчасним і вона залишиться неураженою.

Позначимо через  $\nu$  відношення  $\frac{t_{\text{підг}}}{t_{\text{п}}}$  тобто, покладемо  $\nu = \frac{t_{\text{підг}}}{t_{\text{п}}}$ . Параметр  $\nu$ , як відношення двох випадкових величин, є випадковою величиною і при значеннях  $\nu < 1$  ( $\nu \geq 1$ ) виступає в ролі ймовірнісної характеристики своєчасності вогню по цілі. Тоді для визначення  $P_c$  необхідно знайти закон розподілу параметра  $\nu$ . Маємо,

$$P_c \left\{ \frac{t_{\text{підг}}}{t_{\text{п}}} \leq \nu \right\} = P_c \{ t_{\text{підг}} \leq \nu t_{\text{п}} \} = \int_0^{\infty} F(\nu t_{\text{п}}) \varphi(t_{\text{п}}) dt_{\text{п}}, \quad (27)$$

де  $F(\nu t_{\text{п}})$  — функція розподілу випадкової величини  $t_{\text{підг}}$ , за умови, що  $t_{\text{підг}} = \nu t_{\text{п}}$ .

Знайдемо щільність розподілу параметра  $\nu$ , для цього продиференціюємо (27) по  $\nu$ , тобто

$$\frac{dP_c \{ t_{\text{підг}} \leq \nu t_{\text{п}} \}}{d\nu} = \psi(\nu) = \int_0^{\infty} f(\nu t_{\text{п}}) t_{\text{п}} \varphi(t_{\text{п}}) dt_{\text{п}}. \quad (28)$$

Звідки отримуємо співвідношення для знаходження ймовірності своєчасності вогню по цілі

$$P_c = \int_0^1 \psi(\nu) d\nu, \quad (29)$$

або

$$P_c = \int_0^1 \int_0^{\infty} f(\nu t_{\text{п}}) t_{\text{п}} \varphi(t_{\text{п}}) dt_{\text{п}} d\nu. \quad (30)$$

Нехай за результатами статистичного моделювання не виявлено протиріччя гіпотезі про належність експоненціальному розподілу часу  $t_{\text{підг}}$  до вогневого удару, а час  $t_{\text{п}}$  — перебування батареї евентуального противника на вогневій позиції підпорядковується нормальному закону, тоді

$$f(t_{\text{підг}}) = \lambda e^{-\lambda t_{\text{підг}}}, \quad (31)$$

де  $\lambda$  — невідомий параметр розподілу випадкової величини  $t_{\text{підг}}$ , а

$$\varphi(t_{\text{п}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{\text{п}}}} e^{-\frac{(t_{\text{п}} - m_{t_{\text{п}}})^2}{2\sigma_{t_{\text{п}}}^2}}, \quad (32)$$

де  $m_{t_{\text{п}}}$  і  $\sigma_{t_{\text{п}}}$  — невідомі параметри розподілу випадкової величини  $t_{\text{п}}$ .

Підставимо (31) і (32) в (30), маємо

$$P_c = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{\Pi}}} \int_0^1 \int_0^{\infty} t_{\Pi} e^{-\lambda\nu t_{\Pi}} e^{-\frac{(t_{\Pi}-m_{t_{\Pi}})^2}{2\sigma_{t_{\Pi}}^2}} dt_{\Pi}. \quad (33)$$

Для зручності викладок покладемо  $t_{\Pi} = t$  і після простих перетворень представимо (33) у вигляді

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{m_t^2}{2\sigma_t^2}} \int_0^1 e^{\frac{(m_t-\sigma_t^2\lambda\nu)^2}{2\sigma_t^2}} \int_0^{\infty} [(m_t - \sigma_t^2\lambda\nu) + \sigma_t u] e^{-\frac{u^2}{2}} du d\nu = \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_t^2}{2\sigma_t^2}} \int_0^1 e^{\frac{(m_t-\sigma_t^2\lambda\nu)^2}{2\sigma_t^2}} \left\{ (m_t - \sigma_t^2\lambda\nu) \int_{\frac{\sigma_t^2\lambda\nu-m_t}{\sigma_t}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \sigma_t \int_{\frac{\sigma_t^2\lambda\nu-m_t}{\sigma_t}}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (34)$$

Скористаємось тим [10, 12], що  $\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$  — функція Лапласа. Після деяких спрощень і інтегрування отримуємо наступні співвідношення для шуканої ймовірності:

$$P_c = \left(1 - e^{-m_t + \frac{\sigma_t^2\lambda^2}{2}}\right) \left[0.5 + \Phi\left(\frac{m_t - \sigma_t^2\lambda}{\sigma_t}\right)\right] + \left[\Phi\left(\frac{m_t}{\sigma_t}\right) - \Phi\left(\frac{m_t - \sigma_t^2\lambda}{\sigma_t}\right)\right]. \quad (35)$$

Методом максимальної правдоподібності можна показати, що точковими оцінками невідомих параметрів  $m_t$  і  $\sigma_t$  нормального розподілу є  $\bar{x}_B$  і  $\sigma_B$ , тобто  $\bar{x}_B \approx m_t$ ,  $\sigma_B \approx \sigma_t$ , а точковою оцінкою параметра  $\lambda$  є величина обернена до  $\bar{x}_B = M(t_{\text{підг}})$ .

З [4–6] слідує, що середній час підготовки дивізіону до виконання вогневого завдання складає 2.5 – 3 хвилини, тоді  $\lambda = 0.36$ , а середній час перебування батареї на вогневій позиції складає 11 – 14 хвилин, тому  $m_t = 12.5$ , а  $\sigma_t = 1.5$ . Підставляємо ці дані в (35) і скористаємось [10] таблицею для значень функції  $\Phi(x)$ , остаточно отримуємо  $P_c = 0.98$ .

### 3. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

#### 3.1 Визначення показника ефективності вогню по артилерійській батареї евентуального противника

Величина математичного сподівання  $M$  за умов, що розсіювання снарядів розподілене за рівномірним законом і ціль накрита областю розривів, визначається за формулою:

$$M = \theta \cdot \left( 1 - e^{-\frac{NS_3}{\Gamma_{зрр}\Phi_{зрр}}} \right), \quad (36)$$

де  $\theta$  — імовірність накриття цілі областю розривів (влучення в прямокутник зі сторонами  $\Gamma_{зрр}$  і  $\Phi_{зрр}$ );  $N$  — загальна витрата снарядів;  $S_3$  — зведена зона ураження;  $\Gamma_{зрр}(\Phi_{зрр})$  — глибина (фронт) зони рівномірного розподілення снарядів.

#### 3.2 Імовірність накриття цілі

З урахуванням штучного та технічного розсіювання снарядів, а також наявності помилок підготовки установок для ведення вогню, імовірність накриття цілі областю розривів  $\theta$  залежить від багатьох параметрів і в загальному випадку може бути задана у вигляді функціональної залежності:

$$\theta = f(E'_{\partial_3}, E'_{нз}, B^2_{\partial_3}, B^2_{\delta_3}, n_{\Gamma}, n_{\Phi}, h_x, h_z, \Gamma_{зрр}, \Phi_{зрр}), \quad (37)$$

де  $E'_{\partial_3}$  ( $E'_{нз}$ ) — зведені серединні помилки підготовки за дальністю (напрямком);  $B^2_{\partial_3}$  ( $B^2_{\delta_3}$ ) — зведені серединні помилки розсіювання за дальністю (напрямком);  $n_{\Gamma}$  ( $n_{\Phi}$ ) — число установок прицілу (кутоміру);  $h_x$  ( $h_z$ ) — відстань між точками прицілювання за дальністю (напрямком).

Згідно з [4] імовірність накриття цілі зоною рівномірного розсіювання може бути визначена за допомогою зведеної функції Лапласа [4, 13] за форму-

лою:

$$\theta = \hat{\phi} \left( \frac{\Gamma_{зрп}}{2E'_{\partialз}} \right) \cdot \hat{\phi} \left( \frac{\Phi_{зрп}}{2E'_{нз}} \right), \quad (38)$$

де  $\hat{\phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\rho^2 t^2} dt$  — зведена функція Лапласа (табульована [1]),  $\rho = 0.4769$ ;

$$E'_{\partialз} = \sqrt{E_{\partialз}^2 + 0.038\Gamma_y^{*2}}, E'_{нз} = \sqrt{E_{нз}^2 + 0.038\Phi_y^{*2}}, \quad (39)$$

зведені серединні помилки підготовки під час стрільби по груповій цілі за дальністю і напрямком;

$$\Phi_y^* = (1 - \sqrt{\Delta n})\Phi_y + \Phi_y, \Gamma_y^* = (1 - \sqrt{\Delta n})\Gamma_y + \Gamma_y, \quad (40)$$

умовні розміри цілі по фронту і глибині у випадку, коли гармати на вогневій позиції розміщені уступом вперед (назад), ромбом та іншими способами;  $\Delta n$  — математичне сподівання частки площі цілі, що накрита зоною ураження для  $n$  виявлених гармат [4], обирається з таблиці 3.

n	1	2	3	4	5	6
$\Delta n$	0,56	0,71	0,82	0,92	0,98	1

Табл. 3. Імовірність накриття батареї противника зоною ураження в залежності від числа виявлених гармат

$$\Gamma_{зрп} = \sqrt{26.4B_{\partialз}^2 + (n_{\Gamma}^2 - 1)h_x^2}, \Phi_{зрп} = \sqrt{26.4B_{\deltaз}^2 + (n_{\Phi}^2 - 1)h_z^2}. \quad (41)$$

### 3.3 Розрахунок ступеня ураження артилерійської батареї самохідних неброньованих гармат

Вихідні дані: Ціль — артилерійська батарея неброньованих гармат противника ( $n = 6$  г); елемент ураження — самохідні неброньовані гармати; бойовий порядок батареї противника — уступом назад, фронт  $\Phi$  і глибина  $\Gamma$  вогневої позиції визначені за даними повітряної розвідки  $300 * 150$  м; розвідано дві гармати.



До ураження батареї противника залучається артилерійський дивізіон 152-мм СГ 2С3 (3 батареї по 6 г = 18 г). Витрата снарядів — 24 на гармату, дальність стрільби 8 км.

Для розрахунків скористаємось даними з додатка А.

1. Так як виявлено  $n = 2$  гармати, то згідно з таблицею 3 і (40) підраховуємо умовні розміри цілі по фронту  $\Phi_y^*$  і глибині  $\Gamma_y^*$ :

$$\Phi_y^* = (1 - \sqrt{\Delta_2})300 + 300 = (1 - \sqrt{0.71})300 + 300 = 347 \text{ м},$$

$$\Gamma_y^* = (1 - \sqrt{\Delta_2})150 + 150 = (1 - \sqrt{0.71})150 + 150 = 174 \text{ м}.$$

2. Зведені серединні помилки підготовки та розсіювання  $E'_{\partial_3}$ ,  $E'_{\text{нз}}$ ,  $B_{\partial_3}$ ,  $B_{\delta_3}$  за дальністю стрільби 8 км для зразка озброєння 152-мм СГ 2С3 відшукуємо за табл. А (див. додаток А)  $E'_{\partial_3} = 58$  м,  $E'_{\text{нз}} = 35$  м,  $B_{\partial_3} = 38$  м,  $B_{\delta_3} = 19$  м.

Підставивши отримані величини у (39), визначимо зведені серединні помилки під час стрільби по груповій цілі за дальністю і напрямком:

$$E'_{\partial_3} = \sqrt{E_{\partial_3}^2 + 0.038\Gamma_y^{*2}} = \sqrt{58^2 + 0.038 \cdot 174^2} = 67 \text{ м},$$

$$E'_{\text{нз}} = \sqrt{E_{\text{нз}}^2 + 0.038\Phi_y^{*2}} = \sqrt{35^2 + 0.038 \cdot 347^2} = 76 \text{ м}.$$

3. Зону рівномірного розподілу точок падіння снарядів підраховуємо за формулою (41) при числі установок прицілу  $n_r = 3$ , числу установок кутотіра  $n_\phi = 6$  (за числом гармат), відстань між точками прицілювання  $h_x = 67$  м за дальністю і  $h_z = 33$  м за напрямком, маємо:

$$\Gamma_{\text{зрп}} = \sqrt{26.4B_{\partial_3}^2 + (n_r^2 - 1)h_x^2} = \sqrt{26.4 \cdot 38^2 + 8 \cdot 67^2} = 272.09 = 272 \text{ м},$$

$$\Phi_{\text{зрп}} = \sqrt{26.4B_{\delta_3}^2 + (n_\phi^2 - 1)h_z^2} = \sqrt{26.4 \cdot 19^2 + 35 \cdot 33^2} = 218.28 = 218 \text{ м}.$$

4. Остаточню знаходимо шукану ймовірність  $\theta$  за формулою (38):

$$\theta = \hat{\phi}\left(\frac{\Gamma_{\text{зрп}}}{2E'_{\partial_3}}\right) \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\Phi_{\text{зрп}}}{2E'_{\text{нз}}}\right) = \hat{\phi}\left(\frac{272}{2 \cdot 67}\right) \cdot \hat{\phi}\left(\frac{218}{2 \cdot 76}\right) = 0.5515.$$

5. Умовну ймовірність ураження самохідної батареї неброньованих гармат противника за умови, що ціль накрита зоною рівномірного розсіювання, знайдемо за формулою

$$p_y = 1 - e^{-\frac{NS_3}{\Gamma_{зрп}\Phi_{зрп}}}. \quad (42)$$

Загальна витрата снарядів на ураження цілі, згідно з умовою задачі

$$N = 3 \cdot 6 \cdot 24 = 432 \text{ сн.}$$

Зведену зону ураження знаходимо за таблицею В (див. додаток А)  $S_3 = 145\text{м}^2$ , тоді з (42)

$$p_y = 1 - e^{-\frac{432 \cdot 145}{272 \cdot 218}} = 0.6517.$$

З формули (36) визначаємо математичне сподівання відносного числа уражених окремих цілей зі складу групової

$$M = \theta \cdot \left(1 - e^{-\frac{NS_3}{\Gamma_{зрп}\Phi_{зрп}}}\right) = 0.5515 \cdot 0.6517 = 0.3594.$$

Ймовірність своєчасності вогню визначаємо за формулою  $P_{ci}^* = P_c \cdot P_{i4}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), а показник ураження батареї —  $M^* = M \cdot P_c^*$ . Отримані розрахунки дають можливість відповісти на поставлене питання задачі — визначення ступеня ураження *сабатр*.

$t$ , хв.	$P_{14}^*$	$P_{24}^*$	$P_{34}^*$	$M_{14}^*$	$M_{24}^*$	$M_{34}^*$
1	0.089	0.094	0.259	0.032	0.034	0.093
2	0.165	0.177	0.432	0.059	0.064	0.155
3	0.230	0.249	0.548	0.083	0.090	0.197
4	0.285	0.312	0.626	0.102	0.112	0.225
5	0.332	0.366	0.678	0.119	0.132	0.244
6	0.372	0.412	0.713	0.134	0.148	0.256
7	0.406	0.452	0.736	0.146	0.162	0.265
8	0.435	0.485	0.752	0.156	0.174	0.270
9	0.460	0.513	0.763	0.165	0.184	0.274
10	0.481	0.536	0.770	0.173	0.192	0.277

Табл. 4. Значення показника ефективності ураження батареї еventуального противника

Графічно, зміна показника ефективності ступеня ураження батареї евен-туального противника, проілюстрована на рис. 4.

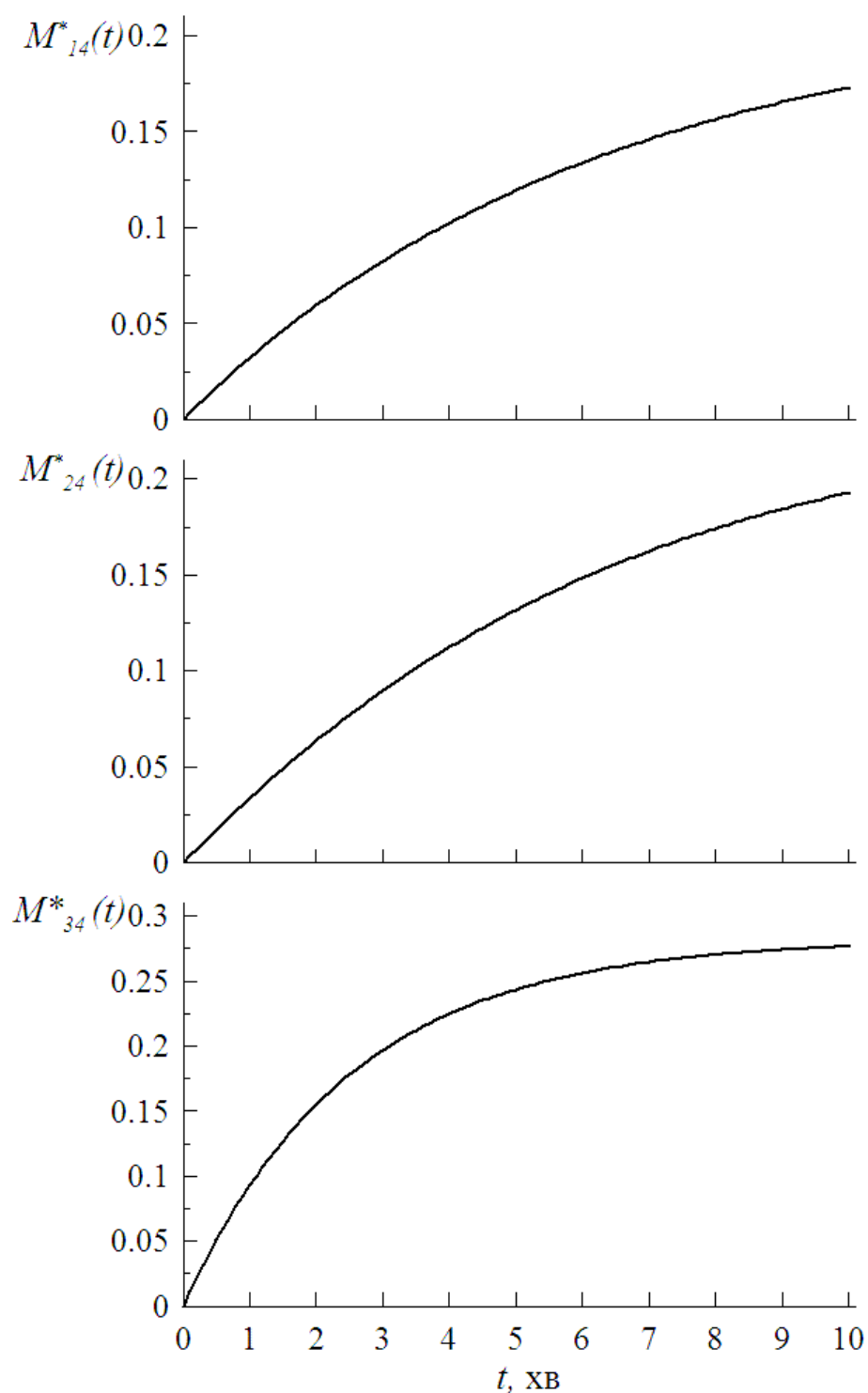


Рис. 4. Зміна показника ефективності ураження батареї самохідних неброньованих гармат евен-туального противника

## ВИСНОВКИ

В роботі наведена математична модель функціонування *сабатр* евентуального противника на вогневій позиції у відповідних станах. Опис функціонування *сабатр* задається напівмарківським процесом і системою лінійних інтегральних рівнянь. Отримана загальна формула для визначення своєчасності вогню по цілі. За умови, що час перебування цілі на вогневій позиції розподілений за нормальним законом, а час підготовки до ураження — за показниковим, знайдено розрахункові співвідношення.

Аналіз отриманого розв'язку системи і результати розрахунків, в рамках поставленої задачі, дають можливість зробити наступні висновки:

1. Вирішальними факторами при ураженні *сабатр* противника є ймовірність її своєчасного виявлення і час на підготовку вогневого нальоту. Найбільший ступінь ураження *сабатр* спостерігається за умови її виявлення в станах  $S_1$  або  $S_2$ .

2. Необхідно зробити більш жорсткими вимоги до системи управління підрозділами, тобто: з метою зменшення часу підготовки вогневого нальоту необхідно зменшити час на розвідку, прийняття рішень і передачу даних на ВП. Виникає необхідність комплексування засобів розвідки і управління.

3. Наведена математична модель може бути узагальнена на цілий ряд аналогічних задач, наприклад, для дослідження ефективності ураження засобів розвідки, КСП, ПТРК, батарей причіпних гармат і т. д.

Таким чином, розглянута задача і її розв'язок вказують на широкі можливості застосування математичного моделювання у дослідженні різноманітних проблем військової справи. Кількісні оцінки, отримані в результаті моделювання, дозволяють командирам і штабам раціонально використовувати бойові угруповання в операціях і бойових діях, знаходити оптимальні варіанти їх використання, краще прогнозувати тактичну обстановку і приймати найбільш вірні рішення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Карлин С. Основы теории случайных процессов — М.: Мир, 1971 — 535 с.
2. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения — К.: Наукова думка, 1976 — 181 с.
3. Королюк В.С. Стохастические модели систем — К.: Наукова думка, 1989 — 203 с.
4. Барковский А.Ф. Основы оценки эффективности и выработки рекомендаций по поражению целей огнем артиллерии — П.: ВАУ, 2000. — 310 с.
5. Правила стрільби і управління вогнем артилерії — К.: Варта, 1995 — 305 с.
6. Мазуренко В.О., Свідлов Ю.І., Супрун В.М. Збірник таблиць для розрахунку ймовірностей, підготовки й оцінки ефективності стрільби та прийняття рішень у військовій справі — С.: СумДУ, 2005 — 164 с.
7. Чжун-Кай-Май Однородные цепи Маркова — М.: Мир, 1964 — 426 с.
8. Городнов В.П. Моделирование боевых действий частей, соединений объединений войск ПВО — Х.: АПО, -1987. — 378 с.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей — М.: Наука-1988. — 448 с.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций — М.: Сов. Радио, 1972. — 550 с.
11. Максимов Ю.Д. Вероятностные разделы математики — С.П.: Ив. Федоров, 2001 — 592 с.
12. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов — М.: Наука, 1969 — 227 с.
13. Абчук В.А м др. Справочник по исследованию операций — М.: Воениздат, 1979. — 368 с.

## Додаток А