ВСТУПЛЕНИЕ

Экономическая теория конца XX века – мощный инструмент исследования, анализа, объяснения и прогнозирования динамики экономической реальности, которая неустанно развивается и пополняется событиями и явлениями, которые непосредственно влияют на жизнь как целых обществ и групп людей, так и отдельных индивидов. Без преувеличения можно сказать, что современная экономика с разнообразием ее подходов и способов наблюдения, методов обработки информации и моделирования экономических систем стала в значительной мере междисциплинарным образованием, аккумулирующим результаты многих дисциплин, таких, как математика и информатика, статистика и теория вероятностей и др. Сердцевина этого образования, которую можно определить термином «*экономическая наука*», эволюционировала так стремительно, что без специального путеводителя тяжело даже охватить цепь отдельных дисциплин, выросших на древе экономики. И этот процесс продолжается.

Особое место на древе экономики занимает эконометрика. В буквальном переводе *эконометрика* означает «измерение экономики», то есть это наука, изучающая количественные закономерности и взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математико-статистических методов и моделей. Естественно, что понятие эконометрики более широкое, хотя измерение остается одной из ее составляющих.

Исследование зависимостей и взаимосвязей между объективно существующими явлениями и процессами играет в науке, особенно в экономике, большую роль. Оно дает возможность глубже понять сложный механизм причинно-следственных отношений между явлениями. В настоящее время объективно существующие зависимости и взаимосвязи между экономическими явлениями большей частью описаны только вербально. Значительно важнее количественно измерить тесноту причинно-следственных связей и выявить форму влияния. Для исследования интенсивности, вида и формы причинных влияний широко применяется корреляционный и регрессионный анализ. В приложении к экономическим процессам он может стать тем инструментом, который вскроет сложные комплексы причин и следствий. Выявление количественных соотношений в виде регрессии и сравнение действительных (наблюдаемых) величин с величинами, полученными на основании уравнений регрессии, дают возможность лучше понять природу исследуемого явления. А это, в свою очередь, позволяет воздействовать на выявленные факторы, вмешиваться в соответствующий экономический процесс с целью получения нужных результатов.

Регрессионный и корреляционный анализ находит широкое применение при прогнозировании, при решении задач народнохозяйственного планирования. Практика показала, что регрессионные уравнения – хорошие измерители связей между экономическими явлениями.

Таким образом, эконометрика является инструментом, позволяющим перейти от качественного уровня анализа к уровню, который использует количественные статистические значения исследуемых величин.

Тема 1 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СТАНОВЛЕНИИ ПРЕДМЕТА «ЭКОНОМЕТРИКА» И ЕЕ СВЯЗЬ С МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Тенденции развития экономических теорий в условиях непрерывно возрастающей сложности экономических процессов привели к образованию нового направления в науке о социально-экономических явлениях, которое получило название «***эконометрика***».

Как самостоятельная дисциплина *эконометрика* сформировалась в 20-30 гг. XX века благодаря работам Г. Мура и

Г.Шульца. До этого уже были известны попытки математической формализации экономико-статистических данных в работах В. Парето (уравнение гиперболы для описания распределения прибыли населения (1897 г.) и в работах Р. Хукера и А. Чупрова по корреляционному анализу экономических процессов. В первых работах в рамках эконометрики разрабатывались аналитико-статистические модели. В большинстве случаев это были уравнения линейной регрессии с параметрами, оцениваемыми по МНК. Такие уравнения позволяли описать как функции спроса и зависимость их от доходов, объемов выпуска продукции, уровня цен, налогов и т.п., так и функции предложения, производственные функции, отображающие технологическую зависимость выпуска продукции от затрат труда и средств производства.

Одна из первых производственных функций была построена Коббом и Дугласом в 1928 г., потом обобщена Солоу. Начиная с 30-х гг. известные экономисты Я. Танберген, Л.Клейн, Р. Стоун и др. разработали модели экономики, которые описывали статистические связи производства, конечного индивидуального и государственного спроса, цен, налогов, внешней торговли, предложения рабочей силы, накопления и износа капитала. Такие модели состояли уже из многих уравнений, в связи с чем значительно усложнились проблемы оценивания неизвестных параметров. А это, в свою очередь, привело к необходимости использования нового мат. аппарата и расширило возможности практического использования эконометрики.

К числу *типовых экономико-математических моделей*, которые на сегодняшний день разрабатывает и изучает эконометрика, относятся: производственные функции, функции спроса разных групп потребителей и целевые функции предпочтения потребителей, статистические и динамические межотраслевые модели производства, распределения и потребления продукции, модели общего экономического равновесия. Это определенным образом роднит эконометрику с макроэкономикой, поэтому не удивительно, что начиная с 50-х гг. они активно развивались рядом.

В практических исследованиях эконометрические методы используются не только в экономике. Они распространены в биологии, истории, социологии и др. общественных и естественных науках, где необходимо разрабатывать и оценивать модели, которые формализуют связи между большим количеством переменных.

Кроме того, современные эконометрические методы широко используются для сравнения эффективности разнообразных экономических гипотез и последовательного уточнения их.

В энциклопедии кибернетики имеется следующее понятие эконометрики: “Эконометрика – это направление в экономике, основанное на использовании математических моделей для анализа и прогнозирования экономических явлений и связанное с определением и оценкой адекватности реальных явлений математическим представлениям о них”. Там же: “... трудно разделить математическую экономику и эконометрику, с одной стороны, эконометрику и экономическую статистику, с другой. Можно лишь подчеркнуть связь математической экономики и эконометрики. Построение математической модели экономики всегда подтверждается оценками адекватности такой модели реальной действительности. Экономическая статистика имеет дело с устойчивыми и относительно несложными экономическими исчислениями. Появление эконометрии связано с утверждением о недостаточности таких экономико-статистических вычислений для экономического анализа и прогнозирования”.

Таким образом, можно сделать вывод, что эконометрика является синтезной дисциплиной, соединяющей в себе экономическую теорию, математическую экономику, экономическую и математическую статистику.

Что отличает эконометрику от *экономической теории*? Экономическая теория предлагает утверждения или гипотезы, которые по своей сути являются в основном качественными. Например, микроэкономическая теория утверждает, что снижение цены товара будет способствовать увеличению спроса на этот товар. Но сама теория не приводит ни единого количественного измерения взаимосвязи этих двух показателей, то есть она не показывает, на сколько увеличится или уменьшится спрос в результате определенного изменения цены товара. Таким образом, экономическая теория принимает без доказательств обратимую зависимость между ценой и спросом на товар. Задание *эконометрики* состоит в вычислении соответствующих количественных оценок. Другими словами, *эконометрика обеспечивает количественную сторону экономической теории*.

В отличие от чистой *математической экономики*, которая выражает экономическую теорию в математической форме без цели измерения или эмпирического подтверждения теории, *эконометрика*, наоборот, заинтересована в эмпирическом подтверждении экономической теории. Эконометрист часто использует математические уравнения, предложенные математиком-экономистом, но преобразовывает их в форму, наиболее приспособленную для эмпирического тестирования. Преобразование математических уравнений в эконометрические требует большой изобретательности и практических навыков.

Отличие эконометрики от *экономической статистики* тоже очень приблизительное. Экономическая статистика в основном занимается сбором, обработкой и изображением экономических данных в форме диаграмм и таблиц. В этом состоит работа экономиста-статистика. Собранные данные составляют основу для работы эконометриста. Но иногда экономисты-статистики используют собранные данные только для того, чтобы проверить ту или иную экономическую теорию, и против воли «превращаются» в эконометристов.

Таким образом, ***эконометрия*** – прикладная экономико-математическая дисциплина, изучающая динамику реальных макроэкономических явлений и процессов в экономических пространствах и сложных экономических системах при условии влияния стохастических социально-экономических факторов с использованием специальных математических моделей и методов, позволяющих произвести отображающие модельные исследования для количественного и качественного анализа и прогнозирования результатов развития сложных экономических процессов (явлений). Эконометрия выступает базовой основой для определения классов альтернативных решений в системах поддержки принятия управленческих решений.

В сжатом виде эконометрический анализ состоит из следующих этапов:

- формулирование теории или гипотезы;
- разработка эконометрической модели для проверки этой теории;
- оценка параметров выбранной модели;
- проверка модели, статистические выводы;
- прогнозирование на основании полученной модели;
- применение модели (например, для контроля).

Эконометрика делится на теоретическую и прикладную, каждая из которых в свою очередь делится на классическую и байесовскую. В нашем предмете мы будем рассматривать классический подход, так как байесовский подход не рассчитан на начинающих.

Теоретическая эконометрика касается развития методов измерения экономических связей, определенных эконометрическими моделями. В этом аспекте эконометрика базируется на математической статистике. Например, одним из наиболее используемых средств в эконометрике является метод наименьших квадратов. Задание теоретической эконометрики – детально записать предположения этого метода, его свойства и что происходит с этими свойствами, когда одно или более предположений не выполняются.

В *прикладной эконометрике* используются средства теоретической эконометрики, например, для изучения функций продуктивности, потребления, спроса и предложения.

Тема 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (ПРОЦЕССОВ)

Экономика – сложная динамическая многоуровневая система. Очевидно, что все ее уровни взаимосвязаны, хотя и отличаются по своему содержанию для экономики в целом, отдельных ее отраслей, регионов, предприятий. Изучение структуры и поведения таких систем, прогнозирование их функционирования и результатов деятельности требуют применения системного и процессного подходов с использованием методов и способов системного и процессного анализа.

Необходимость решения задач сбора и систематизации информации на всех уровнях, ее анализа, обобщения, выделения существенных признаков и параметров, описывающих реальную экономическую систему, составление ее математической модели с учетом случайных факторов внешней среды, в которой функционирует (или будет функционировать) данная система, принятие оптимальных, научно обоснованных управленческих решений является важной и актуальной проблемой, значение которой недооценивать серьезному экономисту просто невозможно.

При этом очевидно, что наиболее эффективным является научно обоснованное прогнозное решение. Возможность его получения в условиях большого количества взаимосвязанных и взаимообусловленных параметров, учитывающих комплексный охват всех основных микро- и макроэкономических показателей, может быть реализована только с использованием системного и процессного подходов.

Под *системой* можно понимать набор множеств $S = \langle \{S_i\}_{i \in I}, L, F \rangle$, где $\{S_i\}_{i \in I}, i \in I$ – множество элементов различной физической природы (неделимых по отношению к самой системе); L – множество связей между элементами; F – множество функций, выполняемых данными элементами системы.

Разделение системы на элементы является одним из первых шагов при построении ее формализованного (математического) описания.

Функцией системы будем называть правило получения результатов, предписанных назначением рассматриваемой системы.

При этом природным будет определение *структуры системы* как совокупности элементов $\{S_i\}_{i \in I}$, $i \in I$ и связей между ними L, то есть $<\{S_i\}_{i \in I}, L>$, а *модели системы* – как описание траектории ее поведения в некотором фазовом пространстве параметров.

Поведение моделируемой системы может иметь детерминированный (строго определенный), вероятностный или индетерминированный характер.

Таким образом, математическое описание системы характеризует собственно систему, независимо от каких-либо влияющих на нее действий, а модель функционирования дает описание ее поведения при условии влияния этих действий на систему со стороны некоторых параметров внутренней и внешней среды.

Основными методами исследования систем являются методы математического моделирования, позволяющие создать описание структуры и поведения реальных (социальных, экономических, биологических, технических и др.) систем. К таким методам относятся методы, созданные в рамках таких, например, теорий, как теория вероятностей и математическая статистика, теория графов, математический анализ, теория статистических решений, причинный анализ, многофакторный анализ и др.

Решение научно-технических задач обычно обусловливает следующую последовательность шагов: а) наблюдение и эксперимент; б) теоретические исследования; в) собственно саму организацию системы (протекания процесса).

Специфика теоретической исследовательской работы, в свою очередь, обусловливает следующие этапы моделирования сложных систем:

а) постановку конкретной задачи в терминах описания процессов, присущих исследуемой системе;

б) формализацию задачи – построение математической модели задачи (системы);

в) проверку и корректирование модели, определение степени адекватности модели реальному объекту (процессу);

г) нахождение оптимального решения задачи на основе уточненной модели с помощью того или иного численного метода оптимизации, построение алгоритма решения данной задачи;

д) анализ полученных данных, придание им необходимой содержательности и практическое их использование.

Как следует из вышеприведенных этапов, работа, связанная с исследованием моделей сложных систем, сводится к различным по содержанию (в силу разной специфики) постановкам задач, к выбору (для каждой конкретной системы) определенных математических методов и способов их реализации. Поэтому владение высокой математической культурой является необходимым атрибутом для каждого исследователя сложных систем.

Перечислим *характерные признаки сложных систем*, присущие всем системам данного класса:

- *большое количество* взаимосвязанных между собой элементов и подсистем;
- *сложность функций, выполняемых системой* в процессе реализации цели функционирования;
- *многомерность системы*, обусловленная наличием большого количества связей между подсистемами;
- *взаимодействие с внешней средой* и функционирование в условиях случайных факторов;

- *наличие множества критериев оценки* качества функционирования системы и ее подсистем;
- *различие структуры*, обусловленное как различием структур ее подсистем, так и различием структур их объединения;
- *наличие руководства (управления)*, которое часто имеет иерархическую структуру, а также разветвленной информационной сети и интенсивных информационных потоков;
- *различие физической природы* подсистем, обусловленное их разной физической сущностью;
- *существование интегративных признаков*, присущих системе в целом, но не характерных для каждого ее отдельного элемента;
- *отсутствие возможности* получения достоверной информации о особенностях системы в целом при изучении ее отдельных элементов;
- *большая размерность* и сложность модели системы, требующая необходимости использования для ее исследования современных математических методов декомпозиции, макромоделирования, имитационного моделирования.

Таким образом, *сложная система* представляет собой множество взаимосвязанных и взаимодействующих элементов и подсистем различной физической природы, составляющих неразделимое целое, обеспечивающее выполнение системой некоторой сложной функции.

Наиболее общим классификационным признаком сложных систем по отношению к внешней среде можно считать разделение систем на системы *открытого* и *закрытого* видов. Для систем закрытого вида не учитывают действие объекта на среду и наоборот, а для систем открытого вида учитывается то, что характеристики среды (в общем случае) зависят от реакции объекта управления и наоборот. Внешняя среда может влиять на объект управления, изменяя множества его входных и выходных переменных и внутренних состояний.

Действия объекта на среду и среды на объект могут иметь как *детерминированный*, так и *вероятностный* характер.

Детерминированными назовем такие системы, в которых процессы взаимосвязаны таким образом, что прослеживается цепь причин и последствий (результатов), которым присуща «жесткая» причинность.

Вероятностными (стохастическими) назовем такие системы, в которых нет определенной конкретной взаимосвязи между входными и выходными переменными, однако можно установить некоторые вероятностные соотношения между ними.

С помощью стохастических моделей строятся прогнозные оценки изучаемых систем. При этом аналитические выражения статистических закономерностей определяются с помощью методов матстатистики и теории статистических решений.

Индетерминированными назовем такие системы, для которых установление причинно-следственных связей на начальном этапе исследований не представляется возможным при условии применения известного аппарата математических методов.

Примерами таких систем могут быть системы с большой размерностью параметров, неполнотой, неопределенностью или вообще отсутствием описания параметров. Другими словами, эти системы представляют собой так называемые «черные ящики», для исследования которых могут быть использованы, например, методы имитационного моделирования, в некоторой мере методы экспертных оценок, различные эвристические методы и др. Результатом использования данных методов является расширение знаний о системе с целью привлечения в дальнейшем формализованных методов исследования, позволяющее в итоге отнести рассматриваемую систему к классу детерминированных или вероятностных.

Тема 3 ПОНЯТИЕ РЕГРЕССИИ

Различают два вида зависимостей между экономическими явлениями и процессами: *функциональную* и *стохастическую*.

В случае функциональной зависимости имеется однозначное отображение множества А в множестве В. Множество А называют областью определения функции, а В – множеством значений функции. Аналитически функциональную зависимость записывают следующим образом: $y=f(x)$. Таким образом, для каждого допустимого значения x можно указать вполне определенное значение y.

Примеры функциональных зависимостей можно привести из области физических явлений. Например, в физике известен закон свободного падения. В условиях безвоздушного пространства скорость падения является произведением ускорения свободного падения на время падения. Закон Ома указывает функциональную связь между электрическим сопротивлением, силой тока и напряжением. Для законов классической механики характерно, что они справедливы для каждой отдельно взятой единицы совокупности и не содержат никаких элементов случайности. В экономике примером функциональной связи может служить зависимость производительности труда от объема произведенной продукции и затрат рабочего времени.

Совсем по-другому обстоит дело в закономерностях, проявляющихся только в массовом процессе, только при большом числе единиц совокупности. Такие закономерности называются стохастическими (вероятностными). При стохастической закономерности для заданных значений зависимой переменной можно указать ряд значений объясняющей переменной, случайно рассеянных в интервале. Каждому фиксируемому значению аргумента соответствует определенное статистическое распределение значений функции. Это обусловливается тем, что зависимая переменная, кроме выделенной переменной, подвержена влиянию ряда неконтролируемых или неучтенных факторов, а также тем, что измерение переменных неизбежно сопровождается некоторыми случайными ошибками. Поэтому значения зависимой переменной не могут быть предсказаны с достаточной точностью, а только указаны с определенной вероятностью.

В экономике приходится иметь дело со многими явлениями, имеющими вероятностный характер. В качестве примеров таких случайных величин можно назвать следующие: число бракованных изделий, получающихся в процессе изготовления за определенные промежутки времени; количество простоев оборудования за смену; стоимость продукции предприятий; полная себестоимость товарной продукции.

Регрессия – это односторонняя стохастическая зависимость, которая устанавливает соответствие между случайными переменными. Односторонняя стохастическая зависимость выражается с помощью функции, которую называют функцией регрессии.

Итак, если между явлениями отсутствует функциональная связь, а существует только стохастическая, то функция регрессии необратима. Это обусловлено:

- во-первых, самой структурой явления, определяющей направление связи;
- во-вторых, постановкой задачи исследования, когда преследуется вполне определенная цель: как по значениям одной переменной, выбранной в качестве аргумента, предсказать соответствующие значения другой (функции);
- в-третьих, способом измерения отклонения эмпирических точек.

Вследствие этого, если исследуют стохастическую зависимость переменной y от x, то устанавливают регрессию y на x. Если же изучают стохастическую зависимость x от y, то определяют регрессию x на y. Конкретный практический смысл приводит к одной из двух видов регрессии. Например, при исследовании потребления энергии (y) в зависимости от объема производства (x) разыскивают регрессию y на x. Если же, наоборот, изучается механизм влияния объема производства на величину потребления энергии, что может представлять интерес при планировании народного хозяйства, то определяют регрессию x на y.

Нередко между двумя и более переменными возникают связи, для которых логическое истолкование возможно только в одном направлении, а следовательно, имеет смысл находить только одну функцию регрессии. Так, вполне очевидно, что существует зависимость урожайности сельскохозяйственных культур (y) от количества осадков (x_1) и количества внесенных удобрений (x_2). Следовательно, нужно устанавливать регрессию y на x_1 и x_2. Другое направление зависимости не представляет практического интереса в силу того, что, например, на количество выпавших осадков не влияют урожайность и количество внесенных удобрений. То есть в некоторых случаях проблема обратимости регрессии может и не возникнуть.

Проблема неопределенности является одним из главных препятствий к применению системного подхода во всех сферах экономического анализа – национальной экономики, отдельных ее секторов, мировой экономики в целом. Поэтому его устранение является первоочередной задачей каждого исследователя любой реальной экономической системы, хотя это и очень сложная задача, которая не всегда решается.

Нахождение разных случайных зависимостей (естественно, речь идет не про все, а только про какие-то составные части, поскольку в реальных сложных экономических системах учесть все множество таких факторов невозможно) и их изучение по поводу взаимозависимости и взаимосвязи снимает в некоторой степени проблему неопределенности исследуемой экономической модели.

В данной лекции рассматривается один из возможных подходов к решению проблемы устранения неопределенности, который имеет название *регрессионного анализа*.

Односторонняя стохастическая зависимость одной случайной переменной от другой (или нескольких других) случайной переменной выражается с помощью функции, которая, в отличие от строгой математической зависимости, называется *функцией регрессии*. Принципиальным отличием между строгой функциональной зависимостью и функцией регрессии является то, что в первом случае аргумент (независимая переменная) полностью определяет значение функции и эта функция обратима (например, функция $y = 2x$ и $x = y/2$). Во втором случае (для функции регрессии) этого сказать нельзя. Исходя из вышесказанного, устанавливают регрессию y на x или x на y в зависимости от того, исследуют стохастическую зависимость y на x или x на y соответственно.

Регрессия используется для исследования и оценки зависимостей между экономическими явлениями, порожденных, как правило, совокупным действием комплекса причин. Рассматривая причинно-следственные связи, мы хотим из смешанного сочетания причин выявить действие существенных, освободившись от элементов случайности и действия второстепенных причин. Математическое решение сводится к получению функции регрессии. С помощью методов математической статистики можно исследовать зависимость между такими экономическими показателями, как национальный доход, капитальные вложения и трудовые ресурсы. Явления, подлежащие исследованию, должны быть количественно варьирующими величинами. Тогда они считаются переменными в статистическом смысле.

Прежде чем применять математико-статистический аппарат, явление должно быть проинтерпретировано с содержательной точки зрения. На основе логического анализа исследователь решает, какую из переменных рассматривать как зависимую (следствие), или переменную, подлежащую объяснению с помощью функции регрессии, и какие переменные в ходе анализа считать объясняющими (причины), независимыми или предсказывающими. Причины и следствие должны быть объяснены экономической теорией.

Классификация (различные виды) регрессии (рис. 1):

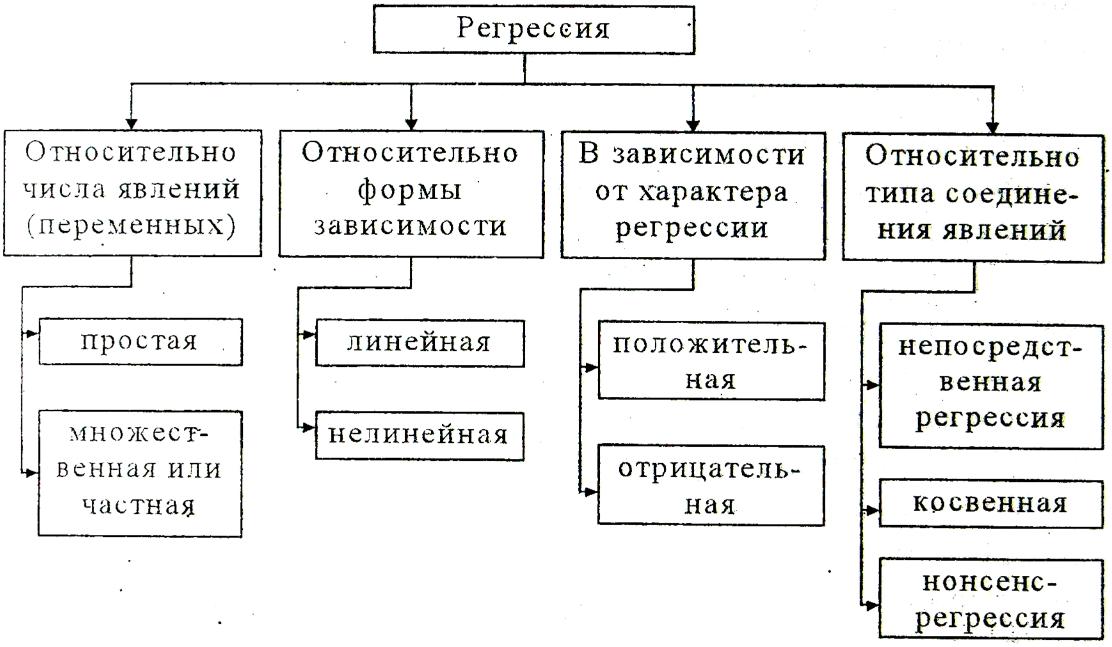


Рисунок 1 – Классификация регрессий

Относительно числа явлений (переменных), учитываемых в регрессии, различают:

- *простую регрессию*. Она представляет собой регрессию между двумя переменными. Например, между затратами на производство (зависимая, результативная переменная или переменная, подлежащая объяснению) и объемом продукции, произведенной промышленным предприятием (объясняющая, независимая или предсказывающая переменная). В качестве другого примера можно назвать зависимость прибыли предприятия (зависимая переменная) от производительности труда (объясняющая переменная);
- *множественную регрессию*. Это регрессия между зависимой переменной y и несколькими причинно обусловленны-

ми объясняющими (независимыми, или предсказывающими) $x_1, x_2,..., x_m$. Так, имеется множественная регрессия между производительностью труда (зависимая переменная) и уровнем механизации производственных процессов, фондом рабочего времени, материалоемкостью и квалификацией рабочих (объясняющие переменные). При экономических исследованиях может быть охвачен весь причинно-следственный комплекс явлений.

Относительно формы зависимости различают:

- *линейную регрессию*, выражаемую линейной функцией. При этой форме зависимости между исследуемыми переменными объективно существуют линейные соотношения;
- *нелинейную регрессию*, выражаемую нелинейной функцией. В этом случае между исследуемыми экономическими явлениями объективно существуют нелинейные соотношения.

В зависимости от характера регрессии различают:

- *положительную регрессию*. Она имеет место, если с увеличением (уменьшением) значений объясняющей переменной значения зависимой переменной также соответственно увеличиваются (уменьшаются). Например, регрессия между прибылью и объемом произведенной продукции;
- *отрицательную регрессию*. В этом случае с увеличением (уменьшением) значений объясняющей переменной значения зависимой переменной соответственно уменьшаются (увеличиваются). Например, регрессия между размером прибыли на единицу продукции и затратами на производство.

Положительная и отрицательная регрессии являются понятиями регрессионного анализа. Из названия этих регрессий вовсе не следует делать вывод о том, что положительная регрессия желательна, а отрицательная нежелательна.

Следует заметить, что понятия положительной и отрицательной регрессии, в общем, приобретают смысл только для простой регрессии, где четко определена причинная связь между явлениями. В случае же множественной регрессии предполагается существование множества одновременно развивающихся не зависимых друг от друга цепей причинно-следственных связей, среди которых часть может соответствовать прямой зависимости, а часть – обратной. Зависимая переменная находится под соединенным действием нескольких причин (объясняющих переменных), и мы не можем, как правило, четко отделить одни явления от других.

Относительно типа соединения явлений различают:

- *непосредственную регрессию*. В этом случае явления соединены непосредственно между собой. Причина оказывает прямое воздействие на следствие, т.е. зависимая и объясняющая переменные связаны непосредственно друг с другом;
- *косвенную регрессию* Косвенная регрессия имеет место, если объясняющая и зависимая переменные не состоят непосредственно в причинно-следственных отношениях, а детерминируются общей для них причиной, т.е. объясняющая переменная действует через какую-то третью или ряд других переменных на результативную переменную;
- *нонсенс-регрессия* (ложная или абсурдная регрессия). Она возникает при формальном подходе к исследуемым явлениям без уяснения того, какие причины обусловливают данную связь. В результате можно прийти к установлению ложных и даже бессмысленных зависимостей, которые не будут иметь практического значения, так как с их помощью нельзя предвидеть явления или влиять на ход их развития. Пример такой ложной зависимости: зависимость числа преподавателей вузов от числа онкологических заболеваний.

Приведенная классификация служит доказательством разнообразия и многочисленности видов регрессии. Однако на практике все виды регрессии чаще всего встречаются комбинированно. Так, существует простая линейная и простая нелинейная регрессии, множественная линейная регрессия и т.д.

Регрессию между двумя переменными назовем *простой* (парной) регрессией и будем записывать в виде $\hat{y} = f(x)$.

Переменную $\hat{y}$ называют по разному – зависимая, результативная, регрессанд, то есть переменная, подлежащая пояснению, а также прогнозируемая переменная или целевая функция. Переменную x называют независимой, объясняющей переменной, регрессором или факторным признаком.

Регрессию между зависимой переменной $\hat{y}$ и несколькими причинно обусловленными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем *множественной* регрессией и будем записывать в виде $\hat{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Линейной регрессией назовем регрессию вида

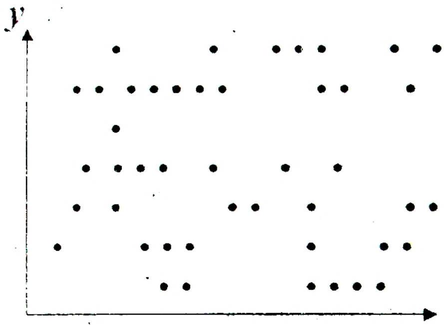
$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – объясняющие переменные; $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – оценки соответствующих параметров регрессии.

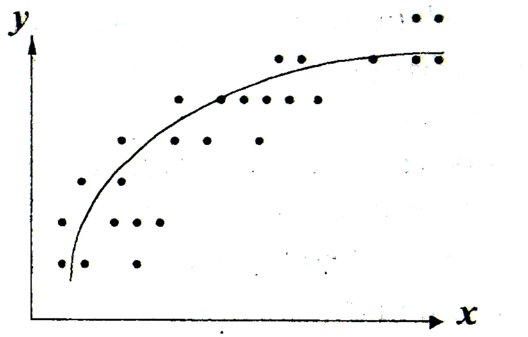
В случае парной (простой) линейной регрессии выражение примет следующий вид: $\hat{y} = b_0 + b_1x$.

Нелинейной регрессией называют регрессию, в которой функция имеет нелинейный характер. Например, нелинейной регрессией могут выступать полиномиальные регрессии вида $\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ или показательные вида $\hat{y} = ab^x$, степенные $\hat{y} = ax^b$ и т.д.

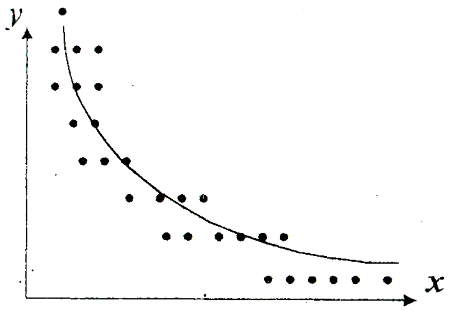
Для выявления причинно-следственных связей между переменными строят диаграммы рассеивания, которые представляют собой наглядную форму такой взаимосвязи. Для этого, используя декартовую систему координат, результат каждого наблюдения отображают точкой на плоскости. Совокупность всех точек называют *облаком*, которое определяет зависимость двух переменных (по оси абсцисс x – объясняющей переменной, по оси ординат y – результативной). Иногда для диаграммы рассеивания в литературе используются термины «*поле корреляции*» или «*поле рассеивания*». По облаку можно судить о степени связи между переменными и о виде регрессии – положительной или отрицательной (рис.2).



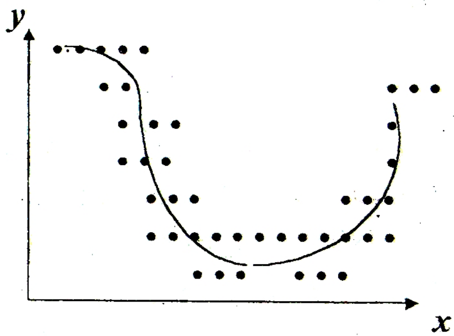
а) диаграмма рассеивания в случае отсутствия связей



б) положительная регрессия



в) отрицательная регрессия



г) комбинированная форма регрессии

Рисунок 2 – Диаграмма рассеивания

По построенному облаку можно судить о виде функции регрессии и выдвинуть гипотезу о ее математической записи. Процесс нахождения функции регрессии назовем *выравниванием* отдельных значений зависимой переменной.

Недостатки диаграмм рассеивания:

- построенные по ним регрессии носят субъективный характер (приблизительные) и поэтому являются приближенными и не совсем точно отображают характер изменений эмпирических данных;
- при большом количестве переменных (более трех) построить геометрически диаграмму рассеивания невозможно.

Но,несмотря на указанные недостатки, выдвижение гипотезы о виде функции регрессии «на глаз» (для одной или двух объясняющих переменных) и ее согласование с теоретически построенной линией регрессии часто позволяют исследователю судить об адекватности выбранной математической модели с реальными экономическими условиями процесса.

Все было бы не очень и сложно, если бы не одно существенное обстоятельство. Нахождение регрессионных зависимостей выполняется исходя из эмпирических данных, полученных в результате эксперимента или собранных при изучении реальной экономической системы (независимо от ее вида). Но эти данные включают в себя и случайные второстепенные причины, и те, которые их вызвали. Поэтому полученные эмпирическим путем данные носят случайный характер и не всегда совпадают при повторении эксперимента. В связи с этим не учитывать эти второстепенные факторы («шум») при выявлении истинной зависимости между причиной и следствием было бы просто равноценно «прикидке на глаз» или, что то же самое, получению необъективной картины реального экономического процесса. Таким образом, функция регрессии численно оценивает усредненную зависимость между исследуемыми переменными – объясняющими и результативными, то есть такую зависимость между следствием и причиной, согласно которой другие факторы не изменяются и тем самым не накладывают «шум» на основную зависимость.

Случайную переменную u назовем *возмущенной (возмущением)*, если $u = y - \hat{y}$, где $\hat{y}$ – функция регрессии. Таким образом, если говорить на содержательном уровне, u вмещает влияние неучтенных факторов – переменных, ошибок наблюдений и погрешностей различного характера, вызванных неточностью их получения из-за различных объективных причин, например, погрешностей измерительных приборов. Ее значение изменяется для каждого наблюдения y. Таким образом, переменная y – случайная величина при заданных объясняющих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, потому что ей невозможно поставить в соответствие только одно значение из-за случайности переменной u.

Статистические зависимости будут тем точнее отражать причинно-следственную связь между переменными, чем больше данных получено при многоразовом повторении эксперимента (наблюдений).

Значение u непосредственно получить невозможно, потому что оно представляет собой интегральную случайную переменную различных, не всегда учитываемых случайных побочных факторов.

В связи с вышеизложенным переменной u отводится особенная роль, и, в отличие от других случайных переменных, она называется *латентной* переменной. В дальнейшем числовые оценки латентной переменной будем обозначать через $\hat{u}$ и называть *остатками (отклонениями)*.

Таким образом, задача регрессионного анализа – *установить вид функции, которая наилучшим образом описывала бы усредненное массовое течение экономического процесса.*

Тема 4 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОВЕДЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Общая процедура проведения исследования

Формулировка экономической проблемы. В соответствии с целью исследования на основе знаний политической экономии и экономики определенной отрасли хозяйства конкретизируются явления и процессы, зависимость между которыми подлежит оценке. Под этим подразумевается прежде всего четкое определение экономических явлений, установление объектов и периода исследования. На этом этапе исследования должны быть сформулированы экономически осмысленные и приемлемые гипотезы о зависимости экономических явлений. Затем причинно обусловленная зависимость количественно оценивается с помощью методов регрессионного анализа. Преимущество регрессионного анализа состоит в том, что на его основе делают не только общий вывод о причинно-следственном механизме, а получают конкретные сведения о том, какую форму и какой вид имеет данная зависимость.

Идентифицирование переменных. Для определения наиболее разумного числа переменных в регрессионной модели прежде всего ориентируются на соображения профессионально-теоретического характера. Исходя из физического смысла явления производят классификацию переменных на зависимую и объясняющие переменные.

Сбор статистических данных. В зависимости от цели и задач исследования устанавливают принцип отбора, а именно пользуются либо одновременными перекрестными данными, либо временными рядами. Далее принимают решение о проведении исследования по всей генеральной совокупности или выборке из нее. После этого приступают к сбору данных по каждой из переменных, включенных в анализ. Если для каких-либо экономических явлений не может быть обеспечено необходимое количество статистических данных, то следует вернуться к первому этапу исследования.

Спецификация функции регрессии. На этом этапе исследования происходит конкретная формулировка гипотезы о форме связи. Содержательные соображения должны подсказать конкретную функциональную форму соотношения между переменными: линейная или нелинейная, простая или множественная регрессии. Большей частью тип функции регрессии в процессе исследования определяется поэтапно путем исключения переменных, не оказывающих существенного влияния на зависимую переменную, и включения в анализ новых переменных с использованием критериев проверки состоятельности гипотетического вида зависимости. Эти процедуры рекомендуется выполнять на ЭВМ.

Оценка функции регрессии. На этом этапе исследования определяются численные значения параметров регрессии.

Кроме того, вычисляется ряд статистических показателей, характеризующих точность регрессионного анализа.

Оценка точности регрессионного анализа. Этому этапу исследования необходимо уделять особое внимание, поскольку на данной стадии должны быть сделаны выводы о точности результатов.

Экономическая интерпретация. Результаты регрессионного анализа сравниваются с гипотезами, сформулированными на первом этапе исследования, и оценивается их правдоподобие с экономической точки зрения.

Предсказание неизвестных значений зависимой переменной (прогноз). Построенное уравнение регрессии находит практическое применение в прогностическом анализе. Прогноз получают путем подстановки в регрессионное уравнение с численно оцененными параметрами значений объясняющих переменных. Прогнозирование результатов по регрессии лучше поддается содержательной интерпретации, чем простая экстраполяция тенденции, так как можно полнее учитывать природу исследуемого явления. Благодаря этому регрессионный анализ находит широкое применение при решении задач перспективного планирования в народном хозяйстве.

Если определена функция регрессии и она экономически обоснована, а точность статистических оценок параметров соответствует предъявляемым требованиям, то прогнозируемые значения обладают достаточной надежностью. По своему характеру они являются средними значениями, которые следует ожидать с большой вероятностью.

Итак, с помощью регрессии мы производим оценки значений зависимой переменной при усредненных условиях, что должно быть учтено в практических прогностических исследованиях. Но это обстоятельство не является недостатком регрессионного анализа, а, наоборот, наводит на мысль о необходимости установления допусков, а также о применении системы допусков при планировании и прогнозировании. Ни один инженер не будет требовать изготовления деталей с высокой точностью, например в 1 микрон, если это не связано с техническими требованиями или не обеспечивается точностными характеристиками имеющихся в распоряжении станков, а также если достижение этой точности вызывает недопустимо большие затраты труда. Использование допусков позволит относительно быстро и легко вводить необходимые изменения в планируемые показатели.

Статистические методы прогнозирования находят широкое применение в народном хозяйстве. Найденные прогностические оценки после их критического осмысливания могут быть положены в основу плановых показателей. При этом необходимо учитывать возможные изменения в самой тенденции развития экономического явления. Процесс построения статистической модели должен сопровождаться корректировкой оценок параметров регрессии и статистических характеристик в соответствии с ожидаемым изменением обстоятельств их формирования.

Тема 5 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Составление математической модели, отражающей развитие того или иного экономического процесса, начинается с оценки данных. Все методы регрессионного анализа используют аппарат математической статистики, который требует от исходных данных, чтобы они были сопоставимы и однородны, а для выявления закономерности, кроме этого, устойчивы и количество наблюдений достаточно велико. Невыполнение одного из этих требований делает бессмысленным применение математического анализа.

Сопоставимость предполагает формирование всех уровней ряда наблюдений по одной и той же методике, использование одинаковой единицы измерения и по возможности шага наблюдений. Во временных рядах (функция регрессии – однофакторная функция времени) требование одинакового шага по времени является обязательным.

Однородность достигается отсутствием сильных изломов, а также нетипичных аномальных наблюдений. При поиске закономерностей бывает целесообразно отбросить часть прошлых данных, если они отражают уже утратившую силу закономерность прошлого развития. Наличие аномальных (резко выделяющихся) наблюдений приводит к искажению результатов. Формально аномальность проявляется как сильный скачок с последующим приблизительным восстановлением предыдущего уровня.

Требование *полноты данных* обусловливается тем, что закономерность может обнаружиться лишь при наличии минимально допустимого объема наблюдений. Достаточное число наблюдений определяется в зависимости от цели проводимого исследования. Во временных рядах, например, если цель исследования – построение модели динамики с целью последующего прогноза, число уровней исходного динамического ряда должно быть не меньше семи.

Устойчивость характеризует преобладание закономерности над случайностью в изменении уровней ряда. На диаграммах рассеивания устойчивых рядов даже визуально прослеживается закономерность (тенденция развития процесса), а на графиках неустойчивых рядов изменения последовательных уровней ряда представляются хаотичными, и поэтому поиск закономерностей в формировании значений уровней таких рядов лишен смысла. Вывод об устойчивости или неустойчивости уровней исходных рядов данных можно сделать по ширине разброса опытных точек (X, Y) на плоскости. Если точки расположены близко друг к другу в виде узкой полоски, то можно утверждать наличие устойчивости и, следовательно, между переменными Y и X наблюдается относительно тесная связь. Если же точки разбросаны широко по диаграмме, то устойчивости нет и связь между переменными Y и X слабая или вообще отсутствует.

Тема 6 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДА ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

К так называемым «*парным*» зависимостям типа $y = f(x)$ относится подавляющее большинство всех формул, используемых в естественнонаучных и технических дисциплинах.

Сама по себе процедура *линейного парного регрессионного анализа* (метода наименьших квадратов на плоскости) очень проста.

Пусть имеется n пар наблюдений значений функции отклика y_i, полученных при фиксированных (в смысле записанных) значениях независимой переменной фактора x_i. Для графического изображения этих пар наблюдений в виде экспериментальных точек с координатами $(x; y)$ на плоскости в декартовых координатах строится диаграмма рассеивания, на основании которой можно судить о типе функции регрессии. Такие результаты наблюдений могут быть получены в любой экспериментальной работе.

Собственно говоря, естествоиспытатели на протяжении столетий наблюдают, что произойдет с интересующим их явлением (функцией отклика y), если изменить независимую переменную (фактор x).

Исходя из соображений профессионально-теоретического характера, исследователь рассматривает возможность описания зависимости изучаемых явлений линейной функцией. При этом следует учитывать характер скопления точек на диаграмме рассеивания. После экономического анализа можно приступать к выравниванию опытных данных, заключающемуся в построении гипотетической линии. Естественным требованием является сведение к минимуму ошибок при спецификации формы связи между переменными. Но эти ошибки обнаруживаются через отклонения эмпирических данных y_i

от значений регрессии $\hat{y}_i$, т.е. они формируют значения возмущающей переменной u:

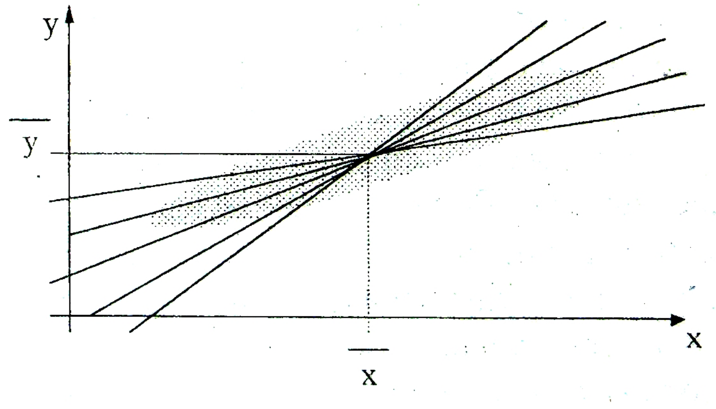
$$y_i - \hat{y}_i = \hat{u}_i, \qquad (i=1, \ldots, n),$$

где $\hat{u}_i$ – отклонение опытной точки от оцениваемой линии, измеренное по вертикали. Это отклонение может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, по какую сторону от линии лежит конкретная точка.

При подборе прямой можно было бы выдвинуть требование, чтобы сумма отклонений всех точек от линии регрессии была равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i = 0.$$

Другими словами, это условие можно было бы сформулировать таким образом: сумма положительных отклонений должна быть равна сумме отрицательных отклонений. Но соблюдение этого условия не дает возможности однозначно определить положение этой прямой на плоскости. Практически бесконечно много прямых будут удовлетворять указанному условию, а именно это будут все те прямые, которые проходят через точку с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$:



Для нахождения однозначного решения используют одну из естественных характеристик точности подбора прямой. Если все отклонения возвести в квадрат и сложить, то результат будет непосредственно зависеть от разброса точек около искомой линии. Из всех возможных прямых должна быть выбрана такая, для которой мера рассеивания опытных точек (x_i, y_i) будет минимальна.

Таким образом, задача линейного регрессионного анализа (метода наименьших квадратов) состоит в том, чтобы, зная положение опытных точек на плоскости, так провести линию регрессии, чтобы сумма квадратов отклонений $\hat{u}_i^{\,2}$ вдоль оси Oy (вдоль оси зависимой переменной) этих точек U от проведенной прямой была минимальной (принцип Лежандра).

При данной постановке задачи речь идет об отклонениях, измеренных по вертикальной оси. С помощью метода наименьших квадратов отыскиваются такие оценки параметров уравнения регрессии, которые сводят к минимуму выбранную меру разброса экспериментальных точек. При этом происходит выравнивание эмпирических значений в одну линию регрессии. В случае линейной связи между переменными эта линия является прямой.

Для проведения вычислений по классическому методу наименьших квадратов (для проведения регрессионного анализа) к выдвигаемой гипотезе (к форме уравнения регрессии) предъявляется требование: это уравнение должно быть линейным по параметрам или допускать возможность линеаризации.

Уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах $y=b_0+b_1x$, где b_0, b_1 – постоянные числа. Учитывая это, задачу метода наименьших квадратов аналитически можно выразить следующим образом:

$$U = \Sigma\, \hat{u}_i^{\,2} = \Sigma\,[y_i - \hat{y}_i]^2 = \Sigma\,[y_i - (b_0+b_1x_i)]^2 \rightarrow min\,.$$

Для решения поставленной задачи необходимо вычислить значения коэффициентов b_0 и b_1, минимизирующие сумму отклонений U. Для этого, как известно из математического анализа, необходимо вычислить частные производные функции U по коэффициентам b_0 и b_1 и приравнять их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим искомые значения b_0 и b_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right] = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right] x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases}$$

Полученная система называется *системой нормальных уравнений*, решая которую можно найти параметры искомой регрессии. Рассмотрим оба уравнения системы.

Разделив первое уравнение системы на n, получим

$$b_0 + b_1 \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n},$$

$$b_0 + b_1 \overline{x} = \overline{y},$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ – средние арифметические значений переменных.

Таким образом, первое уравнение системы требует, чтобы линейная регрессия проходила через точку ($\bar{x}$, $\bar{y}$), то есть через *центр тяжести поля экспериментальных точек*, другими словами, первое уравнение системы определяет средний уровень искомой линии регрессии.

При $\bar{x} = 0$ второе уравнение даст

$$b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Таким образом, второе уравнение системы определяет коэффициент b_1 наклона искомой прямой относительно оси Ox.

Решим систему нормальных уравнений методом Крамера: $b_0 = \Theta_1/\Theta$, $b_1 = \Theta_2/\Theta$, где Θ – главный определитель. Имеем:

$$\Theta = \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix} = n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2,$$

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} \sum y & \sum x \\ \sum xy & \sum x^2 \end{vmatrix} = \sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x,$$

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum x & \sum xy \end{vmatrix} = n\sum xy - \sum x \sum y,$$

откуда

$$b_0 = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \quad b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}.$$

Здесь необходимо отметить, что метод наименьших квадратов является интерполяционным методом, то есть позволяет прогнозировать значения зависимой переменной с достаточной степенью вероятности только на том интервале объясняющей переменной, на котором производились наблюдения. За пределами рассматриваемого интервала тенденция зависимости может изменяться.

Тема 7 СОПРЯЖЕННЫЕ РЕГРЕССИОННЫЕ ПРЯМЫЕ

До сих пор обсуждалась регрессия y на x $\hat{y} = b_0 + b_1 x$, то есть переменная y рассматривалась как зависимая переменная, а x – как объясняющая. На практике часто встречаются экономические явления, между которыми существует взаимодействие, т.е. переменная y зависит от переменной x и, наоборот, переменная x зависит от y. В таких случаях говорят о логически обратимых регрессиях. При переходе от одной постановки задачи к другой нельзя просто из полученного уравнения регрессии y на x выразить x через y. Это связано с тем, что эмпирические точки лежат не на прямой, а подвержены рассеянию. Фиксированному значению x может соответствовать несколько значений y, а данному значению y – несколько значений переменной x. Чем больше разброс точек на диаграмме рассеивания, тем больше будут отличаться друг от друга регрессионные прямые, соответствующие различному направлению зависимости. Уравнения регрессии не выводимы друг из друга. Так как объектом изучения являются стохастические связи между двумя переменными, при исследовании зависимостей между двумя переменными теоретически всегда существуют две различные регрессионные прямые, которые называются *сопряженными* (используются также термины «альтернативные регрессионные прямые», «функция регрессии первого и второго рода»).

Все рассуждения относительно регрессии y на x верны для регрессии x на y.

В предположении линейной зависимости в качестве функции регрессии примем уравнение прямой

$$\hat{x} = b_0^* + b_1^* y.$$

По сравнению с регрессией y на x переменные в уравнении поменяли свои места. Зависимой переменной, или переменной, подлежащей объяснению, в данном случае является x, а независимой, или объясняющей переменной, – y. Коэффициенты b_0^* и b_1^* – параметры регрессии.

Из-за разброса эмпирических точек вокруг прямой регрессии снова можно рассматривать отклонения наблюдаемых значений переменной x от расчетных значений регрессии $\hat{x}$, которые мы обозначим через $\hat{v}_i$:

$$x_i - \hat{x}_i = \hat{v}_i.$$

Значения $\hat{v}_i$ являются реализациями случайной возмущающей переменной v. Эти значения – результат влияний на x не учтенных в функции регрессии переменных-факторов, включая случайные флуктуации. Возмущающая переменная v в статистическом смысле интерпретируется как ошибка спецификации регрессии. Переменную x можно тогда выразить как $x = \hat{x} + \hat{v}$.

Из сказанного выше следует, что интерпретация регрессионной прямой, параметров регрессии, расчетных значений функции регрессии x на y аналогична смысловому истолкованию тех же понятий при рассмотрении регрессии y на x. Должно быть принято во внимание только обратное направление зависимости, а также то, что отклонения $\hat{v}_i$ опытных точек от линии регрессии измеряют по горизонтальной оси. Прямая регрессии x на y строится из условия минимизации суммы квадратов отклонений, измеренных по горизонтали:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i^2 \to \min.$$

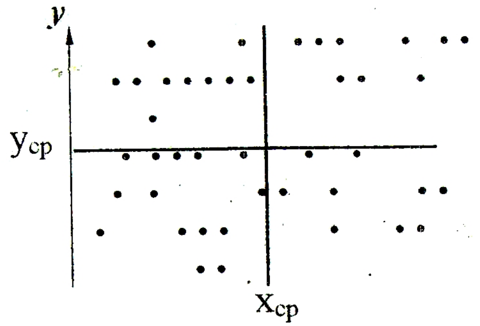
После нахождения частных производных по неизвестным параметрам и приравнивая их к нулю, получаем систему нормальных уравнений, решение которых дает нам искомые параметры

$$b_0^* = \frac{\sum x_i \sum y_i^2 - \sum y_i \sum x_i y_i}{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2},$$

$$b_1^* = \frac{n\sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i}{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}.$$

Сравнивая формулы для нахождения оценок (параметров) для обычной и сопряженной регрессий, видно, что по своей сущности они одинаковы. Только x заменено на y, а y – на x. Такая же взаимообразная перестановка величин x и y происходит и в других формулах.

На рисунке представлены две прямые регрессии, которые пересекаются в центре тяжести поля экспериментальных точек. Говорят, что они образуют «ножницы». По величине раствора ножниц можно судить приблизительно о степени зависимости обеих переменных. Чем больше раскрыты ножницы, тем слабее связь. Если обе прямые регрессии пересекаются под прямым углом, то эмпирические данные не позволяют подтвердить гипотезу о существовании зависимости между переменными. В этом случае отдельные точки случайно разбросаны по всей диаграмме рассеивания и отсутствует всякая тенденция к ориентации точек в определенном направлении:



Если отсутствует регрессия y на x, то не существует также регрессии x на y и наоборот. При $b_1 = 0$ обязательно $b_1^* = 0$ и наоборот. Если прямая регрессии y на x проходит параллельно оси абсцисс, то это неизбежно влечет за собой вытягивание прямой регрессии x на y вдоль оси ординат.

Процедура проведения парного регрессионного анализа следующая: по имеющимся эмпирическим данным строится диаграмма рассеивания, на основании которой выдвигается гипотеза о виде функции регрессии. Если в качестве гипотезы выступает линейная функция регрессии, то ее параметры находят с помощью МНК. Для удобства проведения расчетов промежуточные результаты считают в табличной форме:

Номер наблюдения	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$

В итоговой строке данной таблицы будут находиться значения соответствующих сумм. Полученные уравнения регрессии можно проверить на факт прохождения через центр тяжести поля экспериментальных точек (точку с координатами, равными средним арифметическим исследуемых переменных). Далее следует построить график регрессии на диаграмме рассеивания. По результатам проведенного регрессионного анализа и графическим построениям можно делать выводы о связи между исследуемыми переменными, ее характере, тесноте, точности прогнозов по построенным регрессионным уравнениям.

Отметим, что не всегда требуется находить обе сопряженные регрессионные прямые. Чаще всего представляет практический интерес зависимость только в одном направлении. А иногда постановка задачи оказывается содержательной только при рассмотрении односторонней зависимости.

Тема 8 МНОЖЕСТВЕННЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

В действительности каждое явление определяется действием не одной причины, а нескольких, даже комплексом причин. Их совместное действие может по-разному сказываться на следствии. «Следствие порождается совокупным действием множества причин. Сложное сочетание причин приводит к различным результатам. Действуя на следствие в одном и том же направлении, они усиливают влияние друг друга. Если часть причин имеет обратное направление в отношении объекта действия, то их совместное действие на следствие ослабляется или даже сводится на нет. Может возникнуть даже такая ситуация, когда вполне определенная, реально действующая причина не имеет явного следствия. Это означает, что наряду с этой причиной действует другая, поглощающая действие первой» [Берлин, коллектив авторов]. Итак, необходимо исследовать воздействие различных причин, т.е. исследовать зависимость одного явления от ряда других явлений, вызывающих первое.

Совершенно очевидно, что не все причины и факторы, в какой-то степени оказывающие влияние на изучаемой явление, могут быть исследованы. Мы вынуждены ограничиться только существенными причинами.

Итак, экономическое явление детерминируется множеством одновременно и совокупно действующих причин. Поэтому перед нами стоит задача исследования зависимости одной зависимой переменной y от нескольких объясняющих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в условиях конкретного места и конкретного времени. Эту задачу можно решить с помощью *множественного*, или *многофакторного, регрессионного анализа.*

При рассмотрении парного регрессионного анализа существует возможность графической интерпретации (что удобнее всего для понимания сущности метода наименьших квадратов). При изучении множественного регрессионного анализа такой возможности нет, так как не существует графической интерпретации многомерного пространства. Ясно, что n-мерное пространство – это только математический прием, экстраполяция свойств двумерного пространства на n-мерное. Поэтому нет смысла стараться наглядно представить себе n-мерное пространство.

На практике при анализе результатов научных исследований часто имеет место ситуация, когда количественное изменение изучаемого явления (*функции отклика*) зависит не от одной, а от нескольких причин (факторов). При проведении экспериментов в такой множественной ситуации исследователь записывает показания приборов о состоянии функции отклика (y) и всех факторов, от которых она зависит (x_i). Результатами наблюдений будет являться матрица результатов

$$\begin{Vmatrix} y_1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1j} & \ldots & x_{1m} \\ y_2 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2j} & \ldots & x_{2m} \\ y_3 & x_{31} & x_{32} & \ldots & x_{3j} & \ldots & x_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_i & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{ij} & \ldots & x_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nj} & \ldots & x_{nm} \end{Vmatrix}$$

Поэтому при рассмотрении решения множественных (линейных и нелинейных, но линеаризируемых) регрессий необходимо знание математического аппарата алгебры матриц.

При исследовании зависимости (по аналогии со случаем линейной регрессии) одной зависимой переменной от нескольких объясняющих переменных x_i (x_1, x_2, …, x_m) в случае линейной регрессии имеем

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m .$$

Объясняющие переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ оказывают совместное одновременное влияние на зависимую переменную y.

Как было сказано, мы не можем охватить весь комплекс причин и учесть случайность, присущую в той или иной степени причинному действию и определяемому им следствию. При простой линейной регрессии влияние прочих объясняющих переменных частично отражается в коэффициенте регрессии, что можно объяснить часто существующей двусторонней зависимостью объясняющих переменных. Итак, если располагают достаточной информацией и эмпирическим числовым материалом по нескольким причинам-факторам для переменной y, то целесообразнее и теоретически обоснованнее строить множественную регрессию. Мы уже указывали, что из-за рассеивания значений отдельных переменных функция регрессии необратима даже тогда, когда это оправдано логически и обосновано профессиональными соображениями. Необратимость характерна также для множественной регрессии. Если интересуются не только зависимостью переменной y от $x_1, \ldots, x_m$, но также зависимостью переменной x_1 от y и $x_2, \ldots, x_m$, то следует определить другую функцию (регрессию x_1 на y и $x_2, \ldots, x_m$). Теоретически существуют $m+1$ сопряженных, или альтернативных, регрессий.

Итак, будем исходить из выражения множественной регрессии. Как уже упоминалось, для постоянной b_0 в уравнении регрессии можно ввести фиктивную переменную x_0, принимающую значение, равное 1, для всех $i=1,\dots,n$: $x_{i0}=1$ для всех i.

С учетом всего этого линейную модель зависимости можно представить в виде

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_mx_m + \hat{u}.$$

Задача множественного регрессионного анализа состоит в построении такого уравнения прямой в m-мерном пространстве, отклонения результатов наблюдений x_{ij} от которой были бы минимальными. Или, другими словами, используя принцип Лежандра, следует вычислить значения коэффициентов b_0, b_1, ..., b_j, ..., b_m в линейном полиноме, что равносильно минимизации следующего выражения:

$$S = \sum_{i=1}^{n} u^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + b_3x_{i3} + \dots + b_jx_{ij} + \dots + b_mx_{im}\right)\right]^2,$$

где $\hat{y}_i$ – вычисляемые, предсказываемые, выровненные значения исследуемой характеристики.

Результаты наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_n$ записываем в форме вектор-столбца Y размерности $n\times 1$. Значения объясняющих переменных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ записываем в виде матрицы X размерности $n\times(m+1)$, а остатки (отклонения) функции регрессии – в виде вектор-столбца размерности $n\times 1$. Параметры регрессии $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ образуют вектор-столбец B размерности $(m+1)\times 1$. Итак имеем:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Функция регрессии может быть представлена компактно в матричной форме $\widehat{Y} = XB$.

Для оценки неизвестных параметров B мы снова применяем метод наименьших квадратов. Лежащее в основе этого метода требование о том, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических значений от расчетных значений регрессии должна быть минимальна, в матричной записи имеет вид

$$S = U^T U = \left(Y - \widehat{Y}\right)^T \left(Y - \widehat{Y}\right) = \left(Y - XB\right)^T \left(Y - XB\right) \to \min_b .$$

Раскроем скобки в выражении:

$$S = Y^T Y - B^T X^T Y - Y^T XB + B^T X^T XB \to \min .$$

Рассмотрим 2-е и 3-е слагаемые формулы. В них входят одни и те же составляющие (X, Y, B). Проанализируем их с точки зрения размерности получаемых результатов:

$$B^T X^T Y: \quad 1 \times (m+1) \qquad (m+1) \times n \qquad n \times 1 \quad = \quad 1 \times 1,$$

$$Y^T XB: \quad 1 \times n \qquad n \times (m+1) \qquad (m+1) \times 1 \quad = \quad 1 \times 1.$$

То есть при выполнении указанных действий получаем матрицы размерности 1×1 - матрицы, состоящие из одного элемента. При этом они получаются друг из друга транспонированием: $(B^T X^T Y)^T = Y^T XB$. Это позволяет утверждать, что рассматриваемые матрицы одинаковые, в связи с чем выражение для S можно упростить следующим образом:

$$S = Y^T Y - 2B^T X^T Y + B^T X^T XB \to \min.$$

Согласно требованию минимизации выражения S необходимо, чтобы производные по элементам вектора B были равны нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2X^T Y + 2X^T XB = 0.$$

Отсюда получаем

$$X^T XB = X^T Y.$$

Если матрица $X^T X$ обратима, то мы получим в качестве решения вектор-столбец искомых параметров регрессии

$$\underline{B = (X^T X)^{-1}(X^T Y)}.$$

Замечание. При проведении расчетов в задачах по нахождению уравнения множественной регрессии необходимо помнить о том, что при записи исходных данных в матричной форме необходимо добавить в матрицу объясняющих переменных (матрицу X) столбец для нулевой переменной, состоящий из единиц. Дальнейшие расчеты выполняются согласно правил выполнения операций над матрицами.

Тема 9 НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Между социально-экономическими явлениями и процессами не всегда существуют линейные соотношения, и часто эти соотношения нельзя упрощено выразить линейными функциями из-за неоправданно больших ошибок, возникающих при этом. В таких случаях для описания зависимостей используют нелинейную регрессию. Для выбора и обоснования типа кривой регрессии нет универсального метода. Односторонняя стохастическая зависимость между явлениями может быть описана, например, с помощью полиномиальной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$ либо с помощью гиперболической регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1\frac{1}{x}$. Применяются также степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции. Подбор функции регрессии должен производиться с применением теории той конкретной науки, на базе которой возникает задача измерения связи между явлениями. О характере зависимости между экономическими явлениями часто судят по внешнему виду эмпирического графика регрессии. Однако при малом числе наблюдений этот путь приводит к неудовлетворительным результатам, так как резкие зигзаги эмпирической (ломаной) линии регрессии затрудняют выявление закономерности. В каждом случае следует проверять возможность применения линейной регрессии хотя бы на ограниченном участке изменения переменных. И наконец, необходимо обращать внимание на то, чтобы оценки регрессии производились с достаточной степенью надежности.

Мы различаем два класса нелинейных регрессий.

К *первому классу* относятся регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных x_k, но линейные по неизвестным, подлежащим оценке параметрам регрессии b_k, $k = 1,2,\ldots,m$. Поэтому образующие этот класс нелинейные регрессии называют также *квазилинейными* регрессиями. Их преимущество состоит в том, что для них возможно непосредственное применение метода наименьших квадратов, а следовательно, остаются в силе все исходные предпосылки линейного регрессионного анализа. Используются те же самые критерии значимости, аналогично строятся доверительные интервалы и доверительные зоны.

Второй класс регрессий характеризуется нелинейностью по оцениваемым параметрам. Этот класс регрессий встречается довольно часто при исследовании экономических явлений. Однако он обладает существенным недостатком – не допускает применения обычного метода наименьших квадратов. Для решения получающейся при этом системы нелинейных уравнений привлекают итерационные методы либо прибегают к аппроксимации параметров искомой зависимости. Широко используется также линейное преобразование функции регрессии, которое позволяет применять к преобразованным параметрам статистические критерии линейной регрессии. Строгой теории нелинейной регрессии пока нет.

Нелинейные регрессии первого и второго классов называют также соответственно *существенно линейными* и *существенно нелинейными* регрессиями.

Рассмотрим в общем виде квазилинейную регрессию, т.е. функцию, нелинейную по объясняющим переменным, но линейную по оцениваемым параметрам:

$$\widehat{y} = b_0 + b_1 F_1(x) + b_2 F_2(x) + \ldots + b_m F_m(x),$$

где $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_m(x)$ – функции от объясняющих переменных x. Они не содержат других параметров. Так, например, это могут быть функции вида $F_1(x) = \log x$ или $F_2(x) = \dfrac{1}{x}$ и т.д. В этом случае часто говорят о функциональной регрессии.

Как уже упоминалось, наиболее распространенный метод оценки параметров нелинейных регрессий состоит в линейном преобразовании нелинейной регрессии, что позволяет применять по отношению к ним МНК.

Например, парная полиномиальная регрессия y на x $\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_m x^m$ – с помощью простой замены сводится к множественной линейной регрессии y на z:

$$z_1 = x, \quad z_2 = x^2, \quad z_3 = x^3, \ \ldots \ , \quad z_m = x^m.$$

В результате такой замены получаем множественную линейную регрессию y на z с теми же параметрами, что и у исходной нелинейной регрессии y на x:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + \ldots + b_m z_m.$$

Следовательно, формулы для нахождения коэффициентов линейной множественной регрессии $b_0, b_1, \ldots, b_m$ пригодны также для нахождения параметров нелинейной простой регрессии.

Показательная регрессия $\hat{y} = ab^x$ относится к существенно нелинейным регрессиям, т.е. к зависимостям, нелинейным относительно оцениваемых параметров. Использование этого класса регрессий связано с вычислительными трудностями, так как указанные регрессии не допускают непосредственного применения обычного метода наименьших квадратов. Для того чтобы сделать это возможным, исходные данные подвергают преобразованиям, главное назначение которых состоит в линеаризации рассматриваемых зависимостей по оцениваемым параметрам. В данном случае регрессию можно подвергнуть логарифмическому преобразованию, например, по основанию 10 (при логарифмировании можно брать логарифмы с любым основанием в зависимости от условия и принципа рациональности решения):

$$\lg \hat{y} = \lg(ab^x)$$

С учетом свойств логарифмов выражение примет вид

$$\lg \hat{y} = \lg a + x \lg b .$$

Произведя замену переменных

$$\lg \hat{y} = Z,\ \lg a = A,\ \lg b = B ,$$

получим линейную парную регрессию z на x

$$Z = A + Bx .$$

К полученному уравнению можно применять метод наименьших квадратов. При этом требование МНК (критерий Лежандра) будет сводиться к условию $\sum_i (z_i - Z_i)^2 \to \min$, а не к условию $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min$. Для определения искомой зависимости нужно выполнить логарифмическое преобразование переменной y, т.е. прологарифмировать эмпирические значения y_i, $z_i = \lg y_i$.

Таким образом, с помощью МНК мы сможем найти параметры линейной регрессии Z на x, зная которые можно вычислить параметры исходной нелинейной регрессии по формулам $a = 10^A$; $b = 10^B$.

Рассмотрим дробно-рациональное уравнение регрессии $\hat{y} = \dfrac{b_0 x^3}{x - b_1 x^3}$. Для того чтобы привести к линейному виду данную нелинейную регрессию y на x, возведем обе части уравнения в (–1) степень. Получим

$$\frac{1}{\hat{y}}=\frac{x-b_1x^3}{b_0x^3}.$$

После преобразований правой части имеем

$$\frac{1}{\hat{y}}=\frac{x}{b_0x^3}-\frac{b_1x^3}{b_0x^3} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{\hat{y}}=\frac{1}{b_0x^2}-\frac{b_1}{b_0}.$$

Нетрудно заметить, что с помощью следующей замены переменных

$$\hat{y}'=\frac{1}{\hat{y}},\ b_0'=-\frac{b_1}{b_0},\ b_1'=\frac{1}{b_0},\ x'=\frac{1}{x^2}$$

исходная нелинейная регрессия y на x сводится к линейной регрессии y' на x'

$$\hat{y}'=b_0'+b_1'x',$$

применяя к которой МНК, можно найти числовые значения параметров b_0', b_1'. Формулы для нахождения начальных параметров нелинейной регрессии будут иметь вид

$$b_0=\frac{1}{b_1'},\ \ b_1=-b_0b_0'=-\frac{b_0'}{b_1'}.$$

Итак, некоторые функции с помощью преобразования переменных поддаются линеаризации относительно своих параметров. Параметры регрессии исходных функций находят путем обратных преобразований. Линеаризация связей дает возможность применять для нахождения оценок параметров МНК.

Тема 10 СПЕЦИФИКАЦИЯ ФОРМЫ СВЯЗИ МЕЖДУ ИССЛЕДУЕМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В процессе проведения регрессионного анализа находят уравнение регрессии $\hat{y} = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, при этом значения $\hat{y}_i$, найденные по данной формуле, зависят от оценок параметров регрессии b_k. Значения параметров регрессии определяются видом функции регрессии (прямая, парабола, гипербола и т.д.). В связи с этим выбор оптимальной спецификации формы связи между переменными Y и X приобретает решающее значение. Подбор такой функции регрессии, которая как можно лучше бы характеризовала изучаемую закономерность связи между результативной и объясняющей переменными, является основной задачей регрессионного анализа. Поэтому на этапе, предшествующем построению функции регрессии, необходим обстоятельный качественный анализ исследуемой зависимости. На основании этого анализа формируется гипотеза о типе функции, правдоподобие которой затем статистически проверяется по эмпирическим данным.

Нами уже рассмотрен принцип проведения *линейного* регрессионного анализа, где уравнением регрессии является уравнение прямой $\hat{y} = b_0 + b_1 x$. Коэффициент b_1 характеризует наклон прямой к оси OX ($b_1 = tg\varphi$). Этот коэффициент является мерой влияния, оказываемого изменением переменной X на переменную $\hat{y}$. Согласно уравнению линейной регрессии b_1 указывает величину изменения $\hat{y}$ при изменении аргумента X на одну единицу.

На практике для оценки влияния факторного признака X на результативный признак Y обычно используют коэффициент эластичности.

Например, *коэффициент эластичности спроса от дохода* показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении дохода на один процент. В данном случае причинным фактором (объясняющей переменной) является доход населения, а в качестве зависимой переменной выступает спрос на некоторые товары (группы товаров). Следует отметить, что коэффициенты эластичности являются важнейшими характеристиками производственных функций, которые используются при исследовании диапазона взаимозаменяемости ресурсов производства, определении эффективности тех или иных затрат, прогнозировании изменения прибыли предприятия или фирмы под воздействием различных факторов и решении многих других проблем.

Если производственная функция, характеризующая связь переменных Y и X, имеет вид $\hat{y} = f(X)$, то коэффициент эластичности вычисляется по формуле

$$E_X = \lim_{\Delta X \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\hat{y}}{\hat{y}}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta X}{X}\cdot 100\%\right)\right],$$

т.е.

$$E_X = \frac{X}{\hat{y}}\cdot\frac{d\hat{y}}{dX} = \frac{X}{\hat{y}}\cdot f'(X).$$

Он показывает, на сколько процентов изменится значение $\hat{y}$ при увеличении переменной X на 1%.

В случае линейной регрессии коэффициент эластичности вычисляют по формуле

$$E_X = b_1\cdot\frac{\overline{X}}{\overline{Y}},$$

где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ – средние признаков X и Y, найденные по результатам выборки. Параметр E_X показывает, на сколько процентов в среднем изменится результативный признак Y, если объясняющий признак X увеличится на 1%.

В реальных экономических условиях связь между переменными адекватно представима, как правило, в нелинейной форме.

Остановимся на моделировании монотонных процессов, т.е. когда при $X_{i+1} > X_i$ разность $Y_{i+1} - Y_i$ сохраняет постоянный знак ($i = 1,2,\ldots,n-1$). Если $Y_{i+1} > Y_i$, то функцию регрессии называют *кривой роста* (*положительная* регрессия), в случае $Y_{i+1} < Y_i$ – *кривой спада* (*отрицательная* регрессия). Такие кривые позволяют описывать процессы трех основных типов:

- без предела роста (спада);
- с пределом роста (спада) без точки перегиба;
- с пределом роста (спада) и точкой перегиба.

Например, для описания процессов *без предела роста* служат функции:

– линейная $\hat{y} = b_0 + b_1 x$;

– степенная $\hat{y} = b_0 \cdot X^{b_1}$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$;

– показательная $\hat{y} = b_0 \cdot b_1^X$, $b_0 > 0$, $b_1 > 1$;

– логарифмическая $\hat{y} = b_0 + b_1 \ln x$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$

и др.

Степенная функция $\hat{y} = b_0 \cdot X^{b_1}$ часто используется в экономических исследованиях, поскольку соответствует предположению о постоянном изменении зависимой переменной при изменении объясняющей переменной на 1% (постоянная эластичность между переменными Y и X).

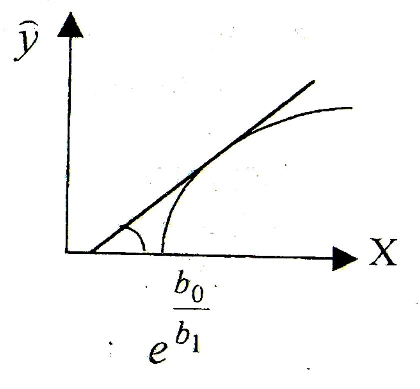
Показательная функция времени $\hat{y} = b_0 \cdot b_1^t$ характеризует временные ряды с приблизительно постоянным темпом прироста в единицу времени ($g = b_1 - 1$). Действительно, в данном случае

$$\frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}} = \frac{Y_i}{Y_{i-1}} - 1 \approx \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i-1}} - 1 = \frac{b_0 \cdot b_1^t}{b_0 \cdot b_1^{t-1}} - 1 = b_1 - 1 = g.$$

Средний темп прироста для временного ряда здесь также приблизительно будет равен g:

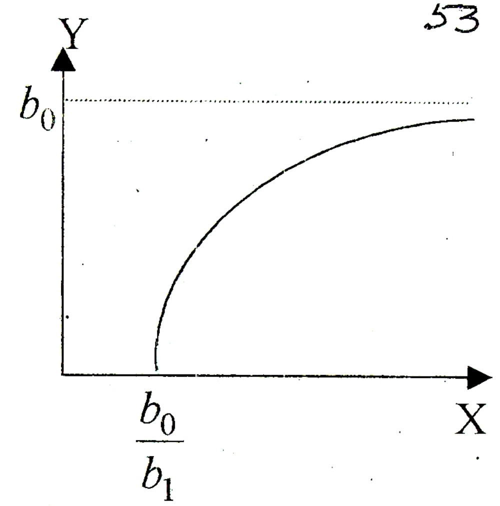
$$\sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_1}} - 1 \approx \sqrt[n-1]{\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_1}} - 1 = \sqrt[n-1]{\frac{b_0 \cdot b_1^n}{b_0 \cdot b_1}} - 1 = b_1 - 1 = g.$$

Для логарифмической функции $\hat{y} = b_0 + b_1 \ln x$ производная $\frac{d\hat{y}}{dX} = \frac{b_1}{X}$, и она может применяться в тех случаях, когда тангенс угла наклона касательной к функции регрессии уменьшается пропорционально росту переменной X.



Процессы *с пределом роста* характерны для многих относительных показателей (потребление продуктов питания на душу, внесение удобрений на единицу площади, затраты на одну гривну произведенной продукции и т.п.). В таких случаях принимается гипотеза о существовании асимптотического уровня и могут быть использованы следующие функции: первая и вторая функции Торнквиста, гиперболическая функция

$$\hat{y} = b_0 - \frac{b_1}{X}, \quad b_0 > 0, \quad b_1 > 0.$$



Для гиперболической функции $\frac{d\hat{y}}{dX} = \frac{b_1}{X^2}$, так что тангенс угла наклона касательной к этой кривой всегда положителен и убывает с возрастанием X. При $X \to \infty$ $\hat{y} \to b_0$, т.е. оценка параметра b_0 служит оценкой асимптотического уровня.

Кривые *с пределом роста и точкой перегиба* широко используются при статистическом анализе спроса на некоторые новые товары. Наиболее простой и удобной для практических приложений является здесь кривая Джонсона

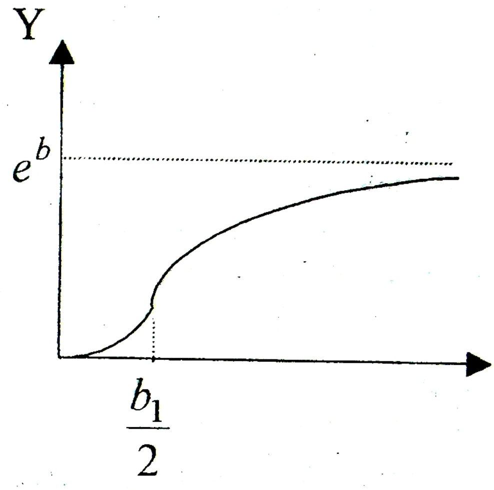
$$\hat{y} = e^{b_0 - \frac{b_1}{X}}, \ b_0, b_1 > 0.$$

Значение $\hat{y}$ в этой формуле не определено для X=0, однако при $X \to 0$ имеем $Y \to 0$, что позволяет положить $\hat{y}(0) = 0$ и получить функцию, которая непрерывна справа в точке X=0:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial X} = \frac{b_1}{X^2} \cdot e^{b_0 - \frac{b_1}{X}}, \qquad \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial X^2} = \left(\frac{b_1^2}{X^4} - \frac{2b_1}{X^3} \right) \cdot e^{b_0 - \frac{b_1}{X}}.$$

Так как $\frac{\partial \hat{y}}{\partial X} > 0$ при $X > 0$, то кривая Джонсона возрастает при положительных значениях X. Приравнивая к нулю вторую производную, находим единственную точку перегиба при $X = \frac{b_1}{2}$.

Слева от этой точки наблюдается рост функции с положительным ускорением ($\hat{y}''(X) > 0$), а справа от точки $X = {b_1}/{2}$ функция растет с замедлением ($\hat{y}''(X) < 0$). Если $X \to \infty$, то $\hat{y} \to e^{b_0}$. Таким образом, кривая Джонсона имеет вид, изображенный на рисунке.



Таким образом, предварительный качественный экономический анализ исследуемого процесса или явления может выявить определенные свойства данной зависимости, что наложит определенные требования на уравнение регрессии, а это сузит круг функций, подходящих для ее описания.

Тема 11 ВЫБОР ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ МОНОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ

При моделировании монотонных процессов (возрастающих или убывающих), когда число наблюдений n невелико и неясно, есть ли асимптотический уровень и перегиб в тенденции изменения результативной переменной X, может быть использована одна из следующих функций регрессии, зависящих от двух параметров:

1 $\hat{y} = b_0 + b_1 X$;

2 $\hat{y} = b_0 + b_1 \ln X$;

3 $\hat{y} = b_0 + \frac{b_1}{X}$;

4 $\hat{y} = b_0 \cdot b_1^X$;

7 $\hat{y} = \frac{1}{b_0 + b_1 X}$;

8 $\hat{y} = \frac{1}{b_0 + b_1 \ln X}$;

5 $\hat{y} = b_0 \cdot X^{b_1}$;

6 $\hat{y} = e^{b_0 + \frac{b_1}{X}}$;

9 $\hat{y} = \dfrac{X}{b_0 + b_1 X}$

Первые производные этих функций при $X > 0$ имеют постоянные знаки, следовательно, сами функции либо возрастают, либо убывают при положительных X (в зависимости от значения параметров).

Приведенные девять зависимостей примечательны тем, что если все эмпирические точки (X_i, Y_i) удовлетворяют одному из этих уравнений, то и средние значения $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ также ему удовлетворяют. При этом в качестве средних значений $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ могут быть средние арифметические (как в случае с линейной регрессией), средние геометрические или средние гармонические.

Вспомним, что среднее арифметическое n положительных чисел определяется по формуле

$$\overline{Z}_{ар} = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n},$$

среднее геометрическое -

$$\overline{Z}_{геом} = \sqrt[n]{z_1 z_2 \ldots z_n},$$

среднее гармоническое -

$$\overline{Z}_{гарм} = \frac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}.$$

Однако специфика регрессионного анализа заключается в том, что с помощью уравнений регрессии описываются стохастические (вероятностные) зависимости. В этом случае эмпирические точки не лежат на некоторой кривой, а рассеяны около нее. Однако не смотря на это, точка, координатами которой являются средние значения, характерные для данной кривой, обязательно должна лежать на кривой. Так, в теме 6 было показано, что линейная регрессия обязательно проходит через точку с координатами, равными средним арифметическим значениям переменных, рассчитанным по эмпирическим данным. Каждая из предложенных функций имеет свою характерную точку, координаты которых представлены в таблице 1.

Таблица 1

Вид эмпирической функции	$\bar{X}$	$\bar{Y}$
1 $\hat{y} = b_0 + b_1 X$	$\bar{X}_{ар}$	$\bar{Y}_{ар}$
2 $\hat{y} = b_0 + b_1 \ln X$	$\bar{X}_{геом}$	$\bar{Y}_{ар}$
3 $\hat{y} = b_0 + \dfrac{b_1}{X}$	$\bar{X}_{гарм}$	$\bar{Y}_{ар}$
4 $\hat{y} = b_0 \cdot b_1^X$	$\bar{X}_{ар}$	$\bar{Y}_{геом}$
5 $\hat{y} = b_0 \cdot X^{b_1}$	$\bar{X}_{геом}$	$\bar{Y}_{геом}$
6 $\hat{y} = e^{b_0 + \frac{b_1}{X}}$	$\bar{X}_{гарм}$	$\bar{Y}_{геом}$
7 $\hat{y} = \dfrac{1}{b_0 + b_1 X}$	$\bar{X}_{ар}$	$\bar{Y}_{гарм}$
8 $\hat{y} = \dfrac{1}{b_0 + b_1 \ln X}$	$\bar{X}_{геом}$	$\bar{Y}_{гарм}$
9 $\hat{y} = \dfrac{X}{b_0 + b_1 X}$	$\bar{X}_{гарм}$	$\bar{Y}_{гарм}$

Для проверки пригодности выбранной эмпирической функции, используя исходные опытные данные, находят значения $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Таким образом, наряду с диаграммой рассеивания, построенной на основании эмпирических данных, мы получили девять характерных точек, через которые обязаны пройти девять предложенных кривых. Тогда кривые можно сравнивать между собой на основании того, насколько их характерные точки согласуются с эмпирическим облаком рассеивания.

Возможным критерием выбора наилучшей функции может служить критерий, основанный на величине отклонения реальных значений от соответствующих прогнозов, построенных по уравнению регрессии. В данном случае мы располагаем прогнозными значениями (средними значениями зависимой переменной), рассчитанными в точке с абсциссой, равной соответствующему среднему значению объясняющей переменной. Далее нужно определить значение зависимой переменной, которое должно ожидаться в реальной экономической действительности. При этом возможны два случая:

- данная ситуация уже проверена опытным путем, то есть соответствующее среднее значение объясняющей переменной находится среди опытных статистических данных;
- среднего значения объясняющей переменной нет среди опытных данных.

В первом случае мы сразу имеем реальное значение зависимой переменной. Во втором случае соответствующее значение $Y(\overline{X})$ можно определить с помощью линейной интерполяции, соединив отрезком две соседние точки с координатами (X_i, Y_i), (X_{i+1}, Y_{i+1}). Здесь X_i и X_{i+1} – промежуточные значения, между которыми содержится $\overline{X}$ $(X_i < \overline{X} < X_{i+1})$. При этом нет ни одной эмпирической точки с координатами (x, y), для которой $X_i < x < \overline{X}$ или $\overline{X} < x < X_{i+1}$. То есть нужно брать такие две точки, которые наиболее близки к рассматриваемой характерной точке, но в первом случае (для i-й точки) ее абсцисса меньше абсциссы характерной точки, а во втором (для $(i+1)$-й точки) – больше.

Из уравнения прямой получаем

$$Y(\overline{X}) = Y_i + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i}(\overline{X} - X_i).$$

При выборе критерия будем исходить из естественного требования повышения точности прогнозов по построенным регрессиям. Точность прогнозов можно охарактеризовать отклонением реального значения зависимой переменной от полученного ее прогнозного значения, однако этой характеристики недостаточно. Так, получая при прогнозе значение 105 и сравнивая его с реально наблюдаемым значением 100, видно, что погрешность прогноза составляет 5 единиц. Однако такую же оценку получит прогноз 1005 при реальном значении, равном 1000. Очевидно, что во втором случае прогноз более точен. Поэтому логично рассматривать такие относительные показатели: погрешность 5 по отношению к ожидаемому значению 100 (оценка – 0,05) и погрешность 5 по отношению к 1000 (оценка – 0,005).

Таким образом, в качестве критерия выбора наилучшей функциональной зависимости можно выбрать следующий:

$$\left|\frac{Y - \overline{Y}}{Y}\right| \to \min.$$

Процедура выбора наилучшей функции для описания некоторого монотонного процесса выглядит следующим образом: для предложенных девяти функций регрессии находят координаты характерных точек. Далее определяют значение зависимой переменной $Y(\overline{X})$ и сравнивают его со значением

$\overline{Y}$ с помощью указанного критерия. Все указанные расчеты удобно представлять в табличной форме:

Вид функции	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$Y(\overline{X})$	$\left\|\frac{\hat{Y}-\overline{Y}}{\hat{Y}}\right\|$

Функция, которая получит наименьшую оценку, будет считаться наилучшей для описания данного монотонного процесса.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грубер Й. Эконометрия: Учебное пособие для студентов экономических специальностей. – К., 1996.– Т. 1. Введение в эконометрию.– 400 с.
2. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия.
3. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник.– К.: Товариство "Знання", КОО, 1998.– 494 с.
4. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учебное пособие.– М.: Высш. шк., 1988.– 239 с.
5. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика: Начальный курс.
6. Назаренко А.М. Эконометрика: Учебное пособие.– Сумы, 2000.
7. Ферстер Э., Ренц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа: Руководство для экономистов.– М.: Финансы и статистика, 1983.– 302 с.