РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Жигилий Д.А., ст. преподаватель, Ткаченко Я.В., студент, СумГУ, г. Сумы

Рассмотрим ступенчатый стержень эллиптического и треугольного поперечных сечений соответственно, который закреплен на двух концах и скручивается моментом M в сечении соединения эллипса и треугольника рис. 1.

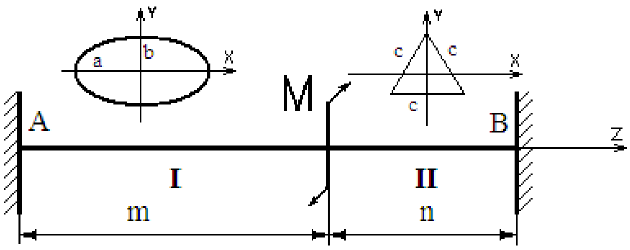

Рисунок 1 - Статически неопределимый призматический стержень при кручении

Используя гипотезу жёсткого контура и считая в уравнениях равновесия Коши объёмные силы равными нулю задача о кручении призматического стержня сводится к решению гармонического уравнения Лапласа для функции кручения: $\nabla^2\varphi=\partial^2\varphi/\partial x^2+\partial^2\varphi/\partial y^2=0$ для функции с граничными условиями отсутствия внешних сил на контуре L поперечного сечения.

При введении функции напряжений F(x,y) Прандтля ($\tau_{xz}=\frac{\partial F}{\partial y}=G\cdot\theta\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)$, $\tau_{yz}=-\frac{\partial F}{\partial x}=-G\cdot\theta\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)$) гармоническое уравнение Лапласа будет иметь вид уравнения Пуассона $\nabla^2 F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-G\cdot\theta$ с тождественным граничным условием на контуре L поперечного сечения F=const.

Стержень эллиптического сечения имеет уравнение контура $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ и принятую функцию напряжений $F=A\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$, удовлетворяющую граничному условию F=0, на контуре сечения.

Подставляя в уравнение Пуассона получим A и окончательно:

$$\theta_I=\frac{M_{kpI}}{G\cdot I_{kpI}};\ I_{kpI}=\frac{\pi\cdot a^3\cdot b^3}{a^2+b^2};\ \tau_I=\frac{M_{kpI}\cdot r_I}{I_{kpI}},\ r_I=\frac{\sqrt{b^4\cdot x^2+a^4\cdot y^2}}{a^2+b^2}.$$

Распределение напряжений показано на рис. 2. Максимальное напряжение имеет место на концах малой оси эллипса (x=0, y=±b).

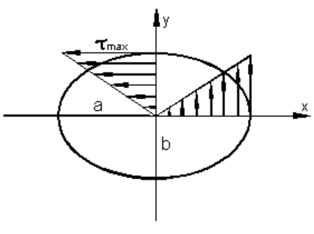

Рисунок 2 - Эпюра полных касательных напряжений при кручении эллиптического сечения

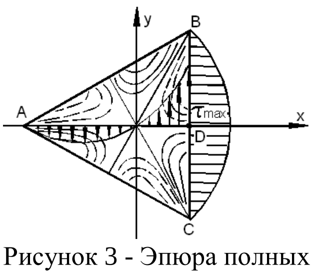

Рисунок 3 - Эпюра полных касательных напряжений при кручении треугольного сечения

Для стержня треугольного сечения контур сечения определяется уравнением: $x=\frac{c}{2\sqrt{3}}$, $x+\frac{2\cdot c}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\cdot y=0$, $x+\frac{2\cdot c}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot y=0$.

Примем функцию депланации φ в виде: $\varphi=A(y^3-3x^2 y)$. Она удовлетворяет уравнению Лапласа является решением задачи Сен-Венана о кручении. Удовлетворяя граничным условиям получим:

$$\theta_{II}=\frac{M_{kpII}}{G\cdot I_{kpII}};\ I_{kpII}=\frac{\sqrt{3}\cdot c^4}{80};$$

$$\tau_{II} = \frac{M_{kp\,II}}{I_{kp\,II} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4 \cdot y^2 \left(x - \frac{c}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(x^2 - y^2 - \frac{c}{\sqrt{3}} \cdot x \right)^2} \ .$$

Распределение напряжений показано на рис. 3. Максимальное напряжение имеет место по середине стороны треугольника ($x = \frac{c}{2\sqrt{3}}$, y=0).

На основании уравнения совместности деформаций найдены моменты реакции в защемлении: $M_A = \frac{M \cdot \frac{n}{I_{kpII}}}{\frac{m}{I_{kpI}} + \frac{n}{I_{kpII}}}$, $M_B = \frac{M \cdot \frac{m}{I_{kpI}}}{\frac{m}{I_{kpI}} + \frac{n}{I_{kpII}}}$.

На основании равной материалоёмкости (равенства площадей эллипса и треугольника) и одновременного удовлетворения условиям прочности ($\tau_{I\max} = \tau_{II\max}$) или жёсткости ($\theta_I = \theta_{II}$) найдена рациональная зависимость между соотношением длин полуосей эллипса a/b и соотношением длин участком ступенчатого стержня m/n .