

Шифр: «Шпаринні ущільнення»

Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт  
з природничих, технічних і гуманітарних наук

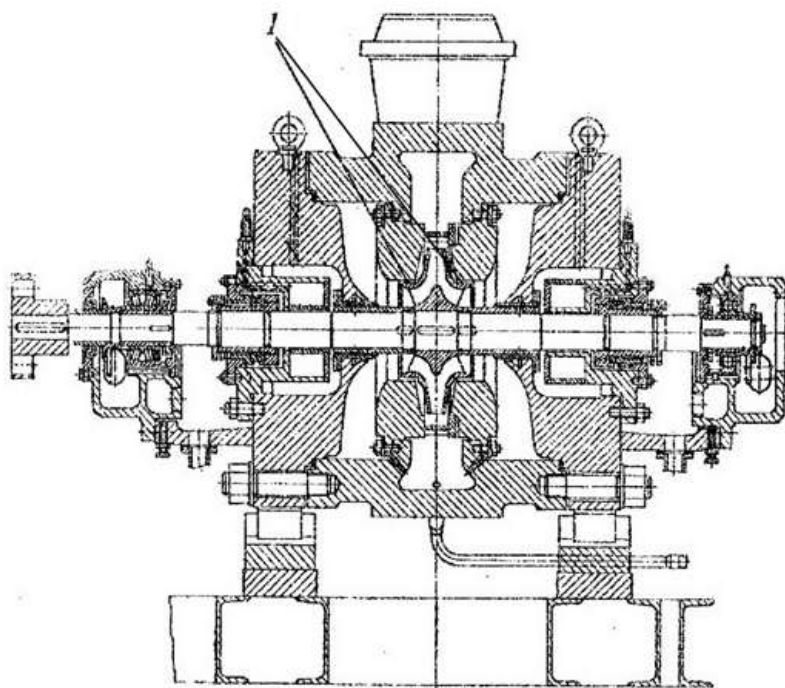
ГІДРОСТАТИЧНА СИЛА У ШПАРИННОМУ УЩІЛЬНЕННІ

## Зміст

	с.
Вступ.....	3
1 Рівняння руху рідини.....	4
2 Гідростатична сила в шпаринному ущільненні .....	9
Висновки.....	20
Список використаної літератури.....	21

## ВСТУП

У проточній частині гідромашин для усунення значних перетоків рідини із зон високого тиску в зони пониженого тиску використовуються шпаринні ущільнення, утворені спеціально виконаними поверхнями робочих коліс, валів та іншими елементами ротора разом з нерухомими елементами корпусу, рис.1 Їх ущільнюючий ефект базується на використанні гідравлічного опору кільцевих дроселів з малим ( $0,1-0,35$  мм) радіальним зазором.



1 - Шпарові ущільнення

Рисунок 1

Довгий час розрахунок безконтактних ущільнень зводився до знаходження витоків і розробка таких вузлів була основана тільки на досвіді конструктора. Але в останні роки з'явилося багато публікацій, які показують, що шпаринні ущільнення відцентрових машин суттєво впливають на динамічні характеристики ротора: виникаючі в ущільнення гідродинамічні сили в залежності від конструкції та умов роботи ущільнення можуть або знижувати віброактивність ротора, або навпаки, обумовлювати його динамічну нестійкість.

Питанню обчислення радіальної сили, яка виникає в шпаринному ущільненні, присвячено багато робіт. Разом з тим, дана задача вивчена недостатньо. Існуючі до теперішнього часу методики аналітичного та численного розрахунків гідродинамічних параметрів ущільнення дають результати, які відрізняються між собою. В той же час надійних підтверджень відповідності теоретичних розрахунків та експериментальних даних нема.

Проблема розв'язання цієї задачі обумовлена складними процесами, що протікають в турбулентному потоці, яким є рух рідини в кільцевому каналі ущільнення. До теперішнього часу поки що нема достатньо задовільної теорії турбулентного руху, яка б безпосередньо впливала із основних рівнянь гідродинаміки. Втрати напору, профіль швидкості в каналі, витік визначають по формулам, одержаним в результаті обробки експериментальних даних.

Метою даних досліджень є розробка математичної моделі руху нестискаючої рідини в кільцевих каналах ущільнень довільної довжини та аналіз впливу довжини ущільнення на витоки та пружну силу шпаринних ущільнень.

Задача вирішується при малих радіальних зміщеннях вала відносно положення його статичної рівноваги при наступних допущеннях:

- розглядаються кільцеві канали, для яких радіальний зазор значно менше діаметра;
- режим руху по всьому ущільненню – турбулентний (автомодельна область);
- граничні умови – умова прилипання частинок рідини до стінок каналу;
- допускається, що тепло, яке виділяється в результаті внутрішнього тертя, практично миттєво відводиться із кільцевого каналу.

## РІВНЯННЯ РУХУ РІДИНИ

Для опису розвиненого турбулентного руху рідини у шпаринному ущільненні відцентрової машини використаємо основне рівняння Рейнольдса [1]

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{\rho} \text{div} \left( -\rho \overline{v'v'} \right)$$

де  $\bar{v}$  усереднена у часі швидкість;  $\bar{v}'$  - відхилення дійсної швидкості від усередненої (пульсаційна швидкість);  $p$  – усереднений у часі тиск;  $\rho$  - густина рідини;  $\mu$  - динамічний коефіцієнт в'язкості;

Зауважимо, що доданок  $F_1 = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{v}$  характеризує силу в'язкого тертя, а

$$F_2 = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left( -\rho \overline{\bar{v}' \bar{v}'} \right) - \text{силу турбулентного тертя.}$$

Виразимо  $F_2$  аналогічно [2] через коефіцієнт опору тертя ( $\lambda$ ) и середню відносно нерухомої стінки каналу швидкість руху  $v_c$

$$\bar{F}_2 = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v_c^2}{2} \bar{v}_0,$$

$$\text{де } v_c^2 = (u_0 + u)^2 + w^2;$$

$w$  - середня осьова швидкість, обумовлена полем тиску;

$u_0$  - середня окружна швидкість, обумовлена обертанням вала;

$u$  - середня окружна швидкість, обумовлена полем тиску;

$$\bar{v}_0 - \text{орт вектора швидкості; } \bar{v}_0 (\cos \alpha; \sin \alpha) = \bar{v}_0 \left( \frac{u_0 + u}{v}; \frac{w}{v} \right).$$

Як і більшість дослідників, в силу малості величини кільцевого зазору по відношенню до довжини ущільнення та його радіуса допускаємо  $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ .

З урахуванням зроблених зауважень рівняння (1) приймає вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} \right) + \bar{F}_1 - \frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v_c^2}{2} \bar{v}_0;$$

Зауважимо, рівняння (2) описує рух елементарного об'єму суцільного середовища. При цьому доданки рівняння строго говорячи не є силами, діючими на дискретні частинки, а лише густиною розподілу сил в елементарному об'ємі

суцільного середовища. Щоб визначити силу, діючу в перерізі каналу на об'єм рідини, що знаходиться між стінками каналу одиничної ширини, проінтегруємо кожний доданок рівняння по зазору

$$\int_0^h \frac{\rho d\bar{v}}{dt} dy + \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dy \bar{i} + \int_0^h \frac{\partial p}{\partial z} dy \bar{k} = - \int_0^h \frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v^2}{2} dy \bar{v}_0 + \int_0^h \bar{F}_1 dy .$$

Ураховуючи, що  $p = p(x, z)$  і середня швидкість по величині зазору при турбулентному русі ( розглядається автомодельна область турбулентного руху рідини ) є сталими величинами, одержимо

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{d\bar{v}}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} = - \frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v^2}{2} \bar{v}_0 + \bar{F}_{1p}, \quad (3)$$

де  $\bar{F}_{1p}$  - усереднена по товщині зазору результуюча сила в'язкого тертя.

Спроектуювши (3) на осі  $x, z$  (  $z$  – координата вздовж довжини ущільнення;  $x$  – координата в окружному напрямку) одержимо

$$\begin{cases} \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{du}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} (u_0 + u) + F_{1px}, \\ \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{dw}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} w + F_{1pz}. \end{cases}$$

Осьовий рух рідини у шпаринному ущільненні обумовлений перепадом тиску. В цьому випадку сили в'язкості, що виникають в граничному ламінарному шарі значно менші від сил турбулентного тертя [1], а тому у першому наближенні ними нехтують, тобто  $F_{1pz} \approx 0$ .

Що ж стосується сил в'язкості в окружному напрямку, то потрібно відмітити, що тільки завдяки силам в'язкості в граничному ламінарному шару окружний потік набуває сталу окружну швидкість  $u_0$ . Таким чином, сили в'язкості спричиняють рух об'єму рідини, що знаходиться між стінками каналу з сталою

окружною швидкістю  $u_0 = 0,5\omega r$  відносно стінок каналу. На цей об'єм діють сили турбулентного тертя

$$F_c = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v u_0}{2}.$$

Оскільки рух рівномірний, то рівнодіюча дорівнює нулю, тобто ці сили компенсують одна одну. В цьому випадку вважаємо, що

$$F_{1x} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} u_0$$

і рівняння руху приймають вид

$$\begin{cases} \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{du}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} u, \\ \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{dw}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} w, \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) є незамкнутою, так як містить три невідомих: тиск  $p$ , середню осьову швидкість  $w$  та середню швидкість  $u$ , обумовлену полем тиску в каналі. А тому доповнимо її рівнянням нерозривності

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

усереднивши його по товщині зазору [2]

$$\frac{\partial((u_0 + u)h)}{\partial x} + \frac{\partial(wh)}{\partial z} = u(h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(h),$$

де  $u(h), v(h)$ - швидкість рухомої точки стінки в окружному та радіальному напрямках.

Записуючи усереднене рівняння нерозривності у вигляді

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(wh)}{\partial z} = u(h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(h) - u_0 \frac{\partial h}{\partial x},$$

одержимо систему рівнянь, яка описує рух рідини в кільцевих каналах довільної довжини

$$\begin{cases} \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{du}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} u, \\ \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{dw}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho v}{2} w, \\ \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(wh)}{\partial z} = u(h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(h) - u_0 \frac{\partial h}{\partial x}. \end{cases} \quad (5)$$

Запишемо систему (5) у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{du}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial x} = -k_x \frac{\mu}{h^2} u, \\ \frac{\rho}{h} \int_0^h \frac{dw}{dt} dy + \frac{\partial p}{\partial z} = -k_z \frac{\mu}{h^2} w, \\ \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(wh)}{\partial z} = u(h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(h) - u_0 \frac{\partial h}{\partial x}, \end{cases} \quad (6)$$

де

$$k_x = k_z = \frac{\lambda}{8} \text{Re}; \quad (7)$$

$\text{Re} = \frac{2\rho h v}{\mu}$  - число Рейнольдса для спірального потоку.

Відмітимо, що майже всі торії турбулентного руху рідини в тонких шарах приводять безпосередньо, або після додаткових перетворень до одного й того ж виду рівнянь, а саме до системи виду (6) [3]. Різниця теорій обумовлена тільки



коефіцієнтами  $k_x, k_z$ , які входять в (6). На рис.1 наведені залежності  $k_x = k_x(\text{Re}); k_z = k_z(\text{Re})$  [3] для деяких теорій.

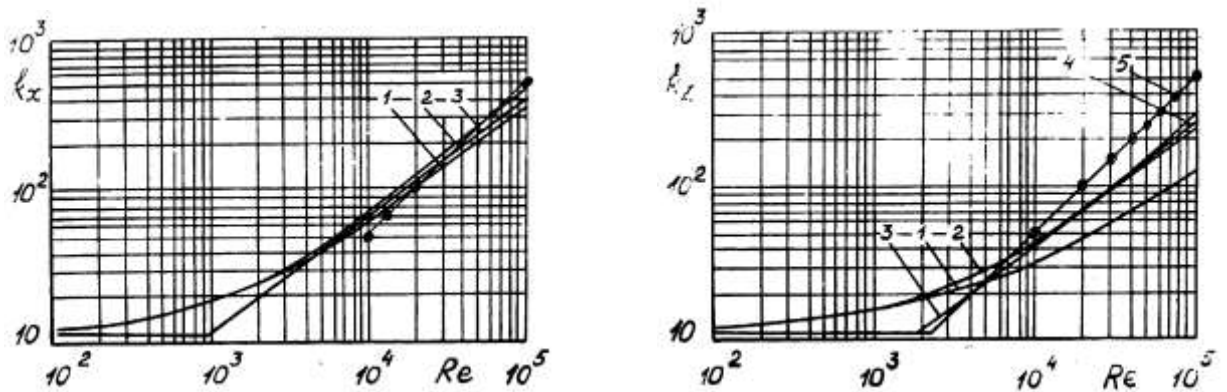


Рисунок 1 – Залежність коефіцієнтів  $k_x, k_z$  від числа Рейнольда; Re 1- теорія Константинеску; 2- теорія Нг і Пена; 3- теорія Хирса; 4, 5 – теорія Ю.Ямади для турбулентного режиму та його автомодельної області; ●—залежність (7)

### ГІДРОСТАТИЧНА СИЛА В ШПАРИННОМУ УЩІЛЬНЕННІ

Рух рідини у шпаринному ущільненні без урахування інерційних членів описується системою рівнянь [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho w}{2} u, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho w^2}{2}, \\ \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(wh)}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Переходячи до безрозмірних змінних:  $\varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\bar{z} = \frac{z}{l}$ , дану систему запишемо у

вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{\lambda r}{2h} \frac{\rho w}{2} u, \\ \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda l}{2h} \frac{\rho w^2}{2}, \\ \frac{\partial(wh)}{\partial \bar{z}} = -\frac{l}{r} \frac{\partial(uh)}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Величина радіального зазору виражається формулою

$$h = h_0 (1 - \varepsilon \cos \varphi),$$

де

$h_0$  - середній радіальний зазор

$\varepsilon = \frac{e}{h_0}$  - відносний ексцентриситет кільцевого каналу.

Слід зауважити, що окружна швидкість  $u$  є величиною одного порядку малості відносно  $\varepsilon$ , тоді вважаємо, що  $uh \approx uh_0$ .

Представимо осьову швидкість у вигляді  $w = w(\bar{z}) + w_\varepsilon(\bar{z})$ ,

де  $w(\bar{z})$  - осьова швидкість між концентрично розташованими стінками, а  $w_\varepsilon(\bar{z})$  - осьова швидкість, обумовлена ексцентричним розташуванням вала.

Оскільки величина радіального зазору не змінюється по довжині ущільнення, то  $w(\bar{z})$  є величина стала, тобто  $w(\bar{z}) = w_0$ .

Таким чином  $wu \approx uw_0$ . На підставі зроблених зауважень систему запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{\lambda r}{2h_0} \frac{\rho w_0}{2} u, \\ \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda l}{2h} \frac{\rho w^2}{2}, \\ \frac{\partial(wh)}{\partial \bar{z}} = -\frac{lh_0}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (8)$$

Виразивши із першого рівняння системи (8)  $u$

$$u = -\frac{4h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

та продиференціювавши даний вираз по  $\varphi$ , одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{4h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \quad (9)$$

Із урахуванням (9) третє рівняння системи (8) прийме вид

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{l}{r} \frac{4h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \quad (10)$$

Із (10) знаходимо закон зміни осьової швидкості

$$w = w(0) + \frac{l}{r} \frac{4h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} \int_0^{\bar{z}} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} d\bar{z} = w(0) + \frac{l}{r} \frac{4h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} a_1(\varphi; \bar{z}),$$

$$\text{де } a_1(\varphi, \bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} d\bar{z}.$$

Представимо швидкість

$$w(0) = w_0 + \Delta w \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi,$$

де  $w_0$  - швидкість на вході через концентричний зазор,  $\Delta w$  - зміна швидкості, обумовлена ексцентриситетом.

Таким чином, осьова швидкість приймає вид

$$w = w_0 + \Delta w \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi + \frac{l}{r} \frac{4h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} a_1(\varphi; \bar{z}) \quad (11)$$

Підставивши (11) у друге рівняння системи (8) та нехтуючи членами другого порядку малості по відношенню до  $\varepsilon$ , отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda l}{2h} \frac{\rho}{2} (w_0^2 + 2\Delta w \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi + w_0 \frac{l}{r} \frac{8h_0}{\lambda r} \frac{1}{\rho w_0} a_1(\varphi; \bar{z}))$$

Представимо тиск у шпаринному ущільненні у вигляді

$$p = f_0(\bar{z}) + f_1(\bar{z}) \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi \quad (12)$$

де  $f_0(\bar{z})$  - тиск у концентричному зазорі,  $f_1(\bar{z}) \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi$  - тиск, обумовлений зміщенням вала.

Приймаючи до уваги, що

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = -f_1(\bar{z}) \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi, \quad \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = f_0'(\bar{z}) + f_1'(\bar{z}) \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi; \quad a_1(\varphi; \bar{z}) = -\int_0^{\bar{z}} f_1(\bar{z}) d\bar{z} \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi,$$

запишемо рівняння (12) у вигляді

$$f_0'(\bar{z}) + f_1'(\bar{z}) \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi = -\frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} - \frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi - \frac{\lambda l}{2h_0} \rho w_0 \Delta w \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi +$$

$$+ 2 \left( \frac{l}{r} \right)^2 \int_0^{\bar{z}} f_1(\bar{z}) d\bar{z} \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi$$

Прирівнюючи величини одного порядку малості, одержимо

$$f_0'(\bar{z}) = -\frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2};$$

$$f_1'(\bar{z}) = -\frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} - \frac{\lambda l}{2h_0} \rho w_0 \Delta w + 2 \left( \frac{l}{r} \right)^2 \int_0^{\bar{z}} f_1(\bar{z}) d\bar{z} \quad (13)$$

Слід зауважити, що перше рівняння характеризує розподіл тиску у шпаринному ущільненні при концентричному розташуванні вала, а друге – розподіл тиску, обумовлений зміщенням вала.

Розв'язок першого рівняння має вид

$$f_0(\bar{z}) = f_0(0) - \frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} \bar{z},$$

де  $f_0(0)$  - тиск на вході в кільцевий концентричний канал .

Для знаходження розв'язку другого рівняння представимо  $f_1(\bar{z})$  у вигляді:

$$f_1(\bar{z}) = C_0 + C_1 \bar{z} + C_2 \bar{z}^2 + C_3 \bar{z}^3 + \dots + C_n \bar{z}^n + \dots \quad (14)$$

Припустивши, що ряд (14) абсолютно збіжний, одержимо

$$\frac{df_1(\bar{z})}{d\bar{z}} = C_1 + 2C_2 \bar{z} + 3C_3 \bar{z}^2 + \dots + nC_n \bar{z}^{n-1} + \dots \quad (15)$$

$$\int_0^{\bar{z}} f_1(\bar{z}) d\bar{z} = C_0 \bar{z} + C_1 \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots + C_{n-1} \frac{\bar{z}^n}{n} + \dots \quad (16)$$

Підставляючи (15) та (16) у (13), та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержимо рекурентні співвідношення

$$C_{2n+1} = b_0^n \frac{C_1}{(2n+1)!};$$

$$C_{2n} = b_0^n \frac{C_0}{(2n)!},$$

$$\text{де } C_1 = -\frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} - \frac{\lambda l}{2h_0} \rho w_0 \Delta w; \quad b_0 = 2 \left( \frac{l}{r} \right)^2$$

Маємо:

$$f_1(\bar{z}) = C_0 + C_1 \bar{z} + C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_0^n \bar{z}^{2n}}{(2n)!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_0^n \bar{z}^{2n+1}}{(2n+1)!} = C_0 \cdot ch(\sqrt{b_0} \bar{z}) + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} sh(\sqrt{b_0} \bar{z})$$

Слід зауважити, що одержаний ряд  $f_1(\bar{z})$  є абсолютно збіжним, що не суперечить припущенню та підтверджує правомірність вищенаведених викладок.

Таким чином, розподіл тиску у каналі приймає вид

$$p(\bar{z}) = f_0(0) - \frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} \bar{z} + \left[ C_0 \cdot ch(\sqrt{b_0} \bar{z}) + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} sh(\sqrt{b_0} \bar{z}) \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi$$

Для знаходження  $f_0(0)$ ,  $w_0$ ,  $C_0$  використаємо граничні умови

$$\begin{cases} p(0) = p_{10} - \xi_{11} \frac{\rho w^2(0)}{2}, \\ p(1) = p_{20} - \xi_2 \frac{\rho w^2(1)}{2}, \end{cases} \quad (17)$$

де

$p(0)$  – тиск на вході шпаринного ущільнення;

$p(1)$  – тиск на виході шпаринного ущільнення;

$p_{10}$  – тиск перед входом шпаринного ущільнення;

$p_{20}$  – тиск за шпаринним ущільненням;

$\xi_{11}$  – коефіцієнт вхідних втрат на вході в ущільнення

$\xi_2$  – коефіцієнт відновлення осьової швидкості на виході із ущільнення

Система (17) приймає вид

$$\begin{cases} p(0) = p_{10} - \xi_{11} \frac{\rho}{2} (w_0^2 + 2w_0 \Delta w \varepsilon \cos \varphi) = p_0(0) + C_0 \varepsilon \cos \varphi, \\ p(1) = p_{20} - \xi_2 \frac{\rho w^2(1)}{2} = p_0(0) - \frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} + \left[ C_0 \cdot ch(\sqrt{b_0}) + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} sh(\sqrt{b_0}) \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

Прирівнюючи величини одного порядку малості, із першого рівняння одержимо

$$p_0(0) = p_{10} - \xi_{11} \frac{\rho w_0^2}{2}$$

$$C_0 = -\xi_{11} \rho w_0 \Delta w$$

При цьому друге рівняння приймає вид

$$p_{20} - \xi_2 \frac{\rho w^2(1)}{2} = p_{10} - \xi_{11} \frac{\rho}{2} w_0^2 - \frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} + \left[ C_0 \cdot ch(\sqrt{b_0}) + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} sh(\sqrt{b_0}) \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi$$

Враховуючи

$$w^2(1) = w_0^2 + 2w_0 \Delta w \varepsilon \cos \varphi + 4 \left( \frac{l}{r} \right)^2 \frac{2}{\rho \xi_1} a_1(\varphi; \bar{z}),$$

$$\text{де } a_1(\varphi; \bar{z}) = - \int_0^{\bar{z}} f_1(\bar{z}) d\bar{z} \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi = - \left[ \frac{C_0}{\sqrt{b_0}} sh \sqrt{b_0} + \frac{C_1}{b_0} ch \sqrt{b_0} - \frac{C_1}{b_0} \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi.$$

Маємо

$$w^2(1) = w_0^2 + 2w_0\Delta w\varepsilon \cos\varphi - 4\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{2}{\rho\xi_l} \left[ \frac{C_0}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{b_0} ch\sqrt{b_0} - \frac{C_1}{b_0} \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi$$

Тоді

$$\begin{aligned} p_{20} - \xi_2 \frac{\rho}{2} \left[ w_0^2 + 2w_0\Delta w\varepsilon \cos\varphi - 4\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{2}{\rho\xi_l} \left[ \frac{C_0}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{b_0} ch\sqrt{b_0} - \frac{C_1}{b_0} \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi \right] = \\ = p_{10} - \xi_{11} \frac{\rho}{2} w_0^2 - \xi_l \frac{\rho}{2} w_0^2 + \left[ C_0 sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} ch\sqrt{b_0} \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

Прирівнюючи величини одного порядку малості, одержимо

$$p_{10} - p_{20} = \frac{\rho w_0^2}{2} (\xi_{11} + \xi_l - \xi_2);$$

$$\Delta p = \frac{\rho w_0^2}{2} \xi_0; \quad \frac{\Delta p}{\xi_0} = \frac{\rho w_0^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} -\xi_2 \frac{\rho}{2} \left[ 2w_0\Delta w\varepsilon \cos\varphi - 4\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{2}{\rho\xi_l} \left[ \frac{C_0}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{b_0} ch\sqrt{b_0} - \frac{C_1}{b_0} \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi \right] = \\ = \left[ C_0 sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} ch\sqrt{b_0} \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\text{або } -\xi_2 \rho w_0 \Delta w + \xi_2 \cdot 4\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{2}{\rho\xi_l} \left[ \frac{C_0}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{b_0} ch\sqrt{b_0} - \frac{C_1}{b_0} \right] = C_0 sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} ch\sqrt{b_0}$$

Оскільки

$$2w_0\Delta w = -\frac{2}{\rho} \frac{C_0}{\xi_{11}}, \quad w_0\Delta w\rho = -\frac{C_0}{\xi_{11}}$$

$$C_1 = -\xi_l \frac{\rho w_0^2}{2} - \xi_l \frac{\rho w_0}{2} \frac{2\Delta w}{w_0} = -\xi_l \frac{\rho w_0^2}{2} + \frac{\xi_l}{\xi_{11}} C_0$$

Тоді



$$\begin{aligned} & \xi_2 \frac{C_0}{\xi_{11}} + 2\xi_2 \left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{1}{\xi_l} \left[ C_0 \frac{sh\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}} - \xi_l \frac{\rho w_0^2}{2h_0} (ch\sqrt{b_0} - 1) + \frac{1}{b_0} \frac{\xi_l}{\xi_{11}} C_0 (ch\sqrt{b_0} - 1) \right] = \\ & = C_0 sh\sqrt{b_0} - \xi_l \frac{\rho w_0^2}{2} \frac{sh\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}} + \frac{\xi_l}{\xi_{11}} C_0 \frac{sh\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}} \end{aligned}$$

$$C_0 = \frac{k_2}{k_1} \frac{\rho w_0^2}{2} \xi_l = \frac{k_2}{k_1} \frac{\Delta p}{\xi_0} \xi_l,$$

$$\text{де } k_1 = ch\sqrt{b_0} + \frac{\xi_l}{\xi_{11}} \frac{sh\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}} - \frac{\xi_2}{\xi_{11}} - 2\xi_2 \left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{1}{\xi_l} \left[ \frac{sh\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}} + \frac{1}{b_0} \frac{\xi_l}{\xi_{11}} (ch\sqrt{b_0} - 1) \right];$$

$$k_2 = \frac{sh\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}} - 2\xi_2 \left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{1}{\xi_l} \frac{1}{b_0} (ch\sqrt{b_0} - 1).$$

$$C_1 = -\xi_l \frac{\rho w_0^2}{2} + \frac{\xi_l}{\xi_{11}} \frac{k_2}{k_1} \frac{\rho w_0^2}{2} \xi_l = -\frac{\rho w_0^2}{2} \xi_l \left( 1 - \frac{\xi_l}{\xi_{11}} \frac{k_2}{k_1} \right) = -\frac{\Delta p}{\xi_0} \xi_l \left( 1 - \frac{\xi_l}{\xi_{11}} \frac{k_2}{k_1} \right).$$

Розподіл тиску у каналі приймає вид

$$p(\bar{z}) = p_{10} - \xi_{11} \frac{\rho w_0^2}{2} - \frac{\lambda l}{2h_0} \frac{\rho w_0^2}{2} \bar{z} + \left[ C_0 \cdot ch(\sqrt{b_0} \bar{z}) + \frac{C_1}{\sqrt{b_0}} sh(\sqrt{b_0} \bar{z}) \right] \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi$$

Знаходимо гідростатичну силу, що діє на ротор

$$\begin{aligned} F_e &= -rl \int_0^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} p(\bar{z}) \cos \varphi d\varphi d\bar{z} = -rl \int_0^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} (f_0(\bar{z}) + f_1(\bar{z}) \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi d\bar{z} = \\ &= -\frac{rl\pi}{h_0} e \left[ C_0 \frac{1}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} + \frac{C_1}{b_0} (ch\sqrt{b_0} - 1) \right] = \\ &= -\frac{rl\pi}{h_0} e \left[ \frac{k_2}{k_1} \frac{\Delta p}{\xi_0} \xi_l \frac{1}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} - \frac{\Delta p}{\xi_0} \xi_l \left( 1 - \frac{\xi_l}{\xi_{11}} \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{1}{b_0} (ch\sqrt{b_0} - 1) \right] = \quad (18) \\ &= -\frac{\Delta p r l \pi \xi_l}{\xi_0 h_0} e \left[ \frac{k_2}{k_1} \frac{1}{\sqrt{b_0}} sh\sqrt{b_0} - \left( 1 - \frac{\xi_l}{\xi_{11}} \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{1}{b_0} (ch\sqrt{b_0} - 1) \right] \end{aligned}$$

Переходячи в (18) до границі при  $b_0 \rightarrow 0$  одержимо вираз

$$F_e = -K_0 e = \frac{\Delta p r l \pi \xi_l (\xi_{11} + \xi_2)}{2 \xi_0^2 h_0} e,$$

який співпадає з виразом для знаходження гідростатичної сили по методиці короткого ущільнення [2].

Для оцінки впливу довжини ущільнення на гідростатичну силу запишемо (18) у виді

$$F_e = -K_0 K_l e$$

де  $K_l = \frac{2\xi_0}{\xi_{11} + \xi_2} \left[ \frac{k_2}{k_{1l}} \frac{1}{\sqrt{b_0}} sh \sqrt{b_0} - \left( 1 - \frac{\xi_l k_2}{\xi_{11} k_1} \right) \frac{1}{b_0} (ch \sqrt{b_0} - 1) \right]$  - коефіцієнт впливу.

Аналіз коефіцієнта  $K_l$  показує, що він залежить від двох параметрів  $\frac{l}{r}$  та  $\frac{r}{h_0}$ , які характеризують геометричні розміри ущільнення.

На рис. 1 наведена залежність  $K_l$  від вказаних параметрів. Видно, що вплив параметра  $\frac{r}{h_0}$  не суттєвий, особливо при  $\frac{r}{h_0} \geq 400$ . З ростом параметра  $\frac{l}{r}$  значення коефіцієнта впливу зменшується. Так, наприклад, при  $\frac{l}{r} = 2,25$  він становить майже 0,5, тобто значення гідростатичної сили шпаринного ущільнення, розраховані по методиці короткого ущільнення, та по методиці, яка враховує обумовлені перепадом тиску окружні перетоки, відрізняються майже вдвічі. Таким чином, методика короткого ущільнення може застосовуватись тільки для шпарин з певними параметрами.

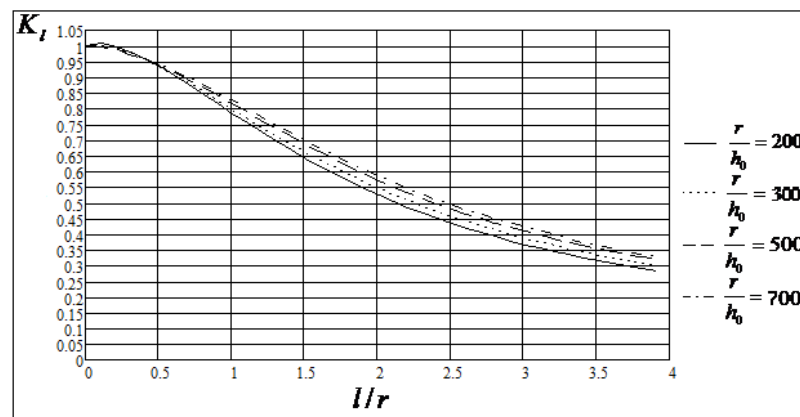


Рисунок 1 - Залежність коефіцієнту  $K_l$  від довжини ущільнення

Рисунок 2 дає можливість проаналізувати, в яких межах параметра  $\frac{l}{r}$  для розрахунку пружної сили можна використовувати методику короткого ущільнення.

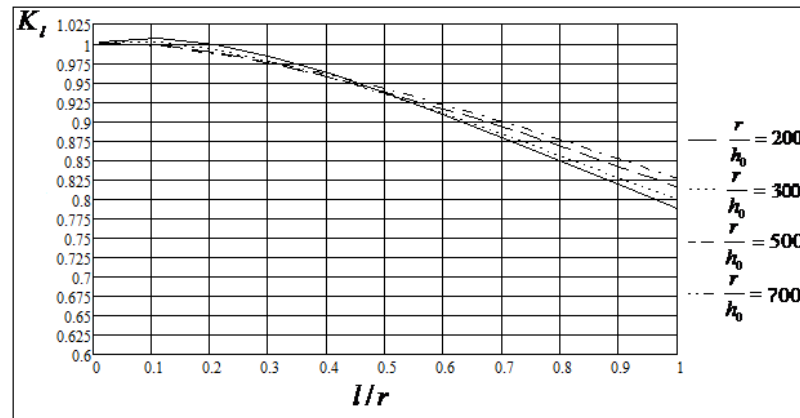


Рисунок 2 – Межі застосування методики короткого ущільнення.

Видно, що загальноприйняте допущення моделі короткого ущільнення  $\frac{l}{r} \leq 0,5$  може привести до 7%-ої похибки, що є прийнятним. В той час слід відмітити, що при  $\frac{l}{r} > 0,5$  бажано використовувати коефіцієнт впливу, оскільки похибка, як видно із рисунка 2, стрімко зростає.

Запишемо гідростатичну силу (18) у вигляді

$$F_e = -\Delta p \cdot \pi \cdot r \cdot K \cdot e,$$

$$\text{де } K = \frac{l}{r} \frac{r}{h_0} \frac{\xi_l}{\xi_0} \left[ \frac{k_2}{k_1} \frac{1}{\sqrt{b_0}} sh \sqrt{b_0} - \left( 1 - \frac{\xi_l}{\xi_0} \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{1}{b_0} (ch \sqrt{b_0} - 1) \right]$$

Залежність безрозмірного коефіцієнта  $K$  (назвемо його коефіцієнтом безрозмірної жорсткості) показана на рис. 3. Зауважимо, що його величина визначається тільки параметрами  $\frac{l}{r}$  та  $\frac{r}{h_0}$  ущільнення. Приведена на рис. 3

діаграма характеризує гідростатичну силу і дає можливість уникнути додаткових розрахунків при дослідженні впливу геометричних розмірів шпарин на дану силу.

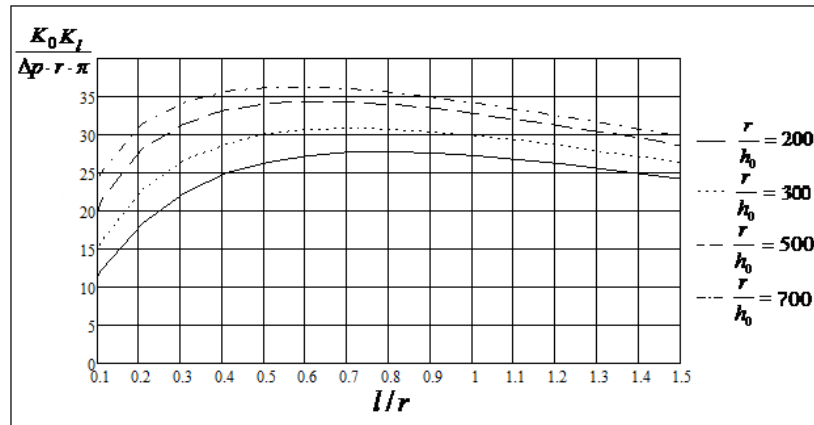


Рисунок 3 – Безрозмірна жорсткість шпаринного ущільнення.

## ВИСНОВКИ

В результаті проведених досліджень руху рідини в тонких кільцевих зазорах була запропонована математична модель шпаринного ущільнення, яка дозволяє провести розрахунки витoku та гідродинамічних сил.

Одержаний аналітичний вираз гідростатичної сили, що виникає у шпаринному ущільненні довільної довжини. Проведено аналіз впливу довжини ущільнення на величину даної сили та оцінені межі застосування методики короткого ущільнення. Запропонована діаграма безрозмірної жорсткості шпаринного ущільнення, яка дає можливість уникнути додаткових розрахунків при дослідженні впливу геометричних розмірів шпарин на гідростатичну силу.

## Список використаної літератури:

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – изд-во «Наука», главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1973, 847 с
2. Марцинковский В. А. Щелевые уплотнения. Теория и практика. – Сумы: Изд-во Сумского государственного университета, 2005. 415с.
3. Сери А. З. Некоторые направления развития теории смазки Рейнольдса //Тр. Амер. о-ва инж.-мех. / Сер. Проблемы трения и смазки. -1987. № 1. с.21-39.