

Шифр: „Знання - сила”

Конкурсна студентська робота

з галузевої науки «Машинознавство (динаміка і міцність)»

тема:

*„Вплив випадкової зміни параметрів
системи «ротор-шарпинні ущільнення»
на вібраційні характеристики відцентрового насоса”*

ЗМІСТ

Вступ	2
1. Рівняння руху і граничні умови	4
2. Розподіл тиску в зазорі	8
3. Обчислення сил і моментів, що діють на стінки ущільнення.....	13
4. Рівняння сумісних радіально-кутових коливань одномасової моделі ротора в шпаринних ущільненнях	20
5. Вплив випадкової зміни змушуючої сили на амплітуди коливань ротора в шпаринних ущільненнях	24
Висновки	29
Список використаної літератури	30

Вступ

Одним з основних показників технічного стану роторних машин є рівень вібрації. У відцентрових насосах динаміка ротора визначається, головним чином, гідродинамічними силами тиску та їх моментами, що виникають у циліндричних дроселюючих каналах ущільнень. У свою чергу локальні (розподіл тиску та швидкостей у зазорі) та інтегральні (витрата рідини, радіальні сили та моменти) характеристики потоку в ущільненнях визначаються і залежать від характеру руху самого ротора. Саме тому ротор і ущільнення являють собою єдину замкнену гідромеханічну систему. Для аналізу цієї системи вхідними даними є гідродинамічні характеристики ущільнень.

Завдяки своїй простоті, низькій вартості, надійності роботи в широкому діапазоні ущільнюваного тиску і швидкостей обертання так звані шпаринні (щілинні) ущільнення (рис. 1) є найпоширенішими ущільненнями проточної частини відцентрових насосів. Вони являють собою кільцеві дроселі, утворені робочим колесом 1, що обертається, і нерухомими втулками 2 і 3. Однією з головних особливостей цього типу ущільнень є те, що вони мають суттєвий вплив на динамічні характеристики ротора: амплітуду вимушених коливань, критичні частоти коливань та границі стійкості. Внаслідок взаємозв'язку гідродинамічних процесів у робочих колесах і зазорах шпаринних ущільнень ротор відцентрового насоса генерує вібрації більш потужні та широкі за спектральним складом, ніж у інших машинах. Тому аналіз динаміки та визначення способів зниження віброактивності роторів відцентрових насосів є однією з актуальних задач сьогодення, розв'язання якої дозволить підвищити якість машин цього класу в цілому.

Більшість дослідників [1-6] розв'язують задачу підвищення надійності і герметичності системи "ротор-ущільнення" у детерміністичній постановці, не враховуючи випадкової зміни параметрів як самих ущільнень, так і зовнішніх навантажень, що діють на ротор. Насправді прийняті у насосо- та компресоробудуванні допуски на розміри робочих поверхонь ущільнювальних пар [3], як правило, складають 0.03 – 0.06 мм, тобто є

співрозмірними з величиною зазору в ущільненнях (0.2 – 0.4 мм), при цьому відносний розкид величини зазору у різних конструкціях може складати $\pm(10 - 30)\%$, що зводить до нуля будь-які зусилля з підвищення точності розрахунку. Саме тому в роботі крім звичайного детерміністичного розрахунку проведено ймовірнісний розрахунок, в якому відповідні параметри описуються випадковими величинами або функціями.

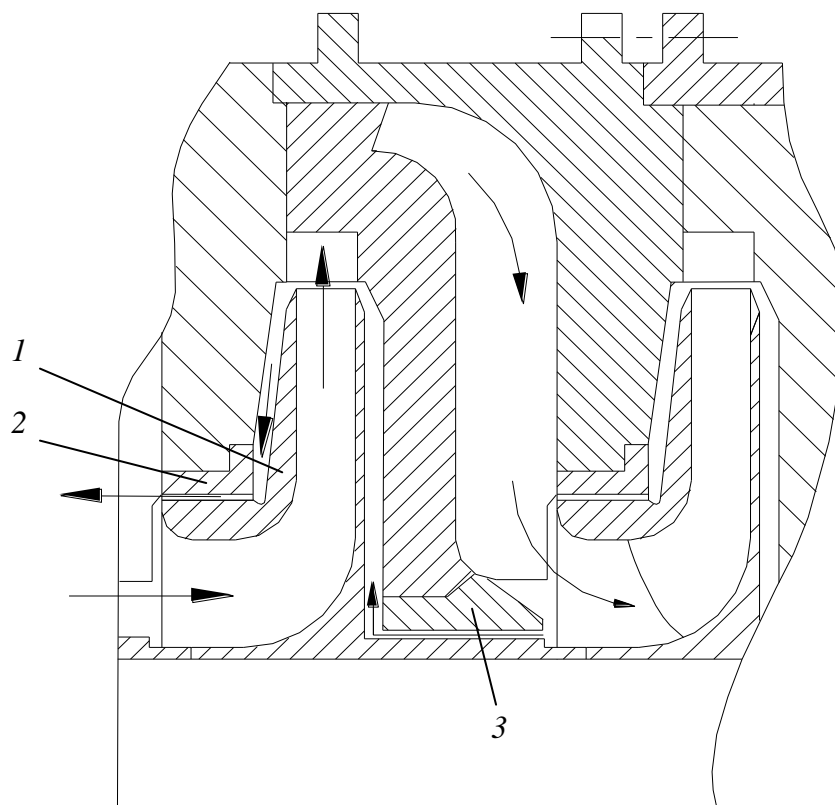


Рисунок 1 - Ступінь багатоступінчастого насоса:

1 – шпаринне ущільнення робочого колеса, 2 – міжступеневе ущільнення

1. РІВНЯННЯ РУХУ І ГРАНИЧНІ УМОВИ

Потік в'язкої нестисливої рідини в циліндричному зазорі описується рівнянням Рейнольдса [1]

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u_j'} \right), \quad (1)$$

де $\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u_j'} \right)$ - сили уявного турбулентного тертя, $i, j = 1, 2, 3$, а підсумовування виконується по індексу, що повторюється.

Після оцінки членів рівнянь (1), з системи рівнянь Рейнольдса випадає перше рівняння, а в третьому залишається лише одна складова конвективного прискорення:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' w'}. \quad (2)$$

Зміни параметрів потоку по колу обумовлені тільки змінними по координаті x граничними значеннями тиску і швидкостей.

Оскільки рідина повністю заповнює кільцевий зазор, то систему рівнянь (2) треба доповнити рівнянням нерозривності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Для виводу граничних умов, яким повинні задовольняти розв'язки рівнянь (2) і (3), розглянемо схему шпаринного ущільнення як кільцевого каналу (рис. 2). Вісь втулки нерухома, а вісь валу обертається навколо осі втулки з частотою прецесії Ω , скоюючи одночасно малі радіальні ($e_0 = e_m \cos vt$) і кутові ($\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_{x0} \cos vt$, $\mathcal{G}_y = \mathcal{G}_{y0} \cos vt$) гармонійні коливання у взаємно перпендикулярних площинах yOx і xOz (на рисунку показані позитивні напрями кутів конусності і перекосу). У розрахунковій схемі окрім власного обертання валу з частотою ω_1 також враховуватимемо обертання зовнішньої стінки ущільнення навколо осі валу або нерухомої осі втулки з частотою ω_2 . Тоді масштаб окружної швидкості, обумовленої

відносним обертанням стінок, буде $U \sim \omega r$, де $\omega = \omega_1 - \omega_2$.

Граничні умови визначимо в рухомій системі координат x_0z_0 , вісь O_2y_0 якої направлена по лінії центрів OO_1 в серединному перетині каналу і обертається разом з лінією центрів з постійною частотою прецесії Ω .

У рухомій системі координат зміна зазору по колу, з урахуванням малості кута $\sin \gamma = e_0/r$ (рис. 2):

$$h_0 = R - r - e_0 \cos \varphi = H - e_0 \cos \varphi = H(1 - \varepsilon \cos \varphi).$$

Унаслідок перекосу валу величина ексцентриситету змінюється по довжині каналу. На рис. 3 показаний приріст ексцентриситету в перетині $z = l/2 - (\Delta e)$ і в проміжному перетині, що відповідає координаті $z - (\Delta e_z)$ для випадку, коли осі валу і втулки схрещуються.

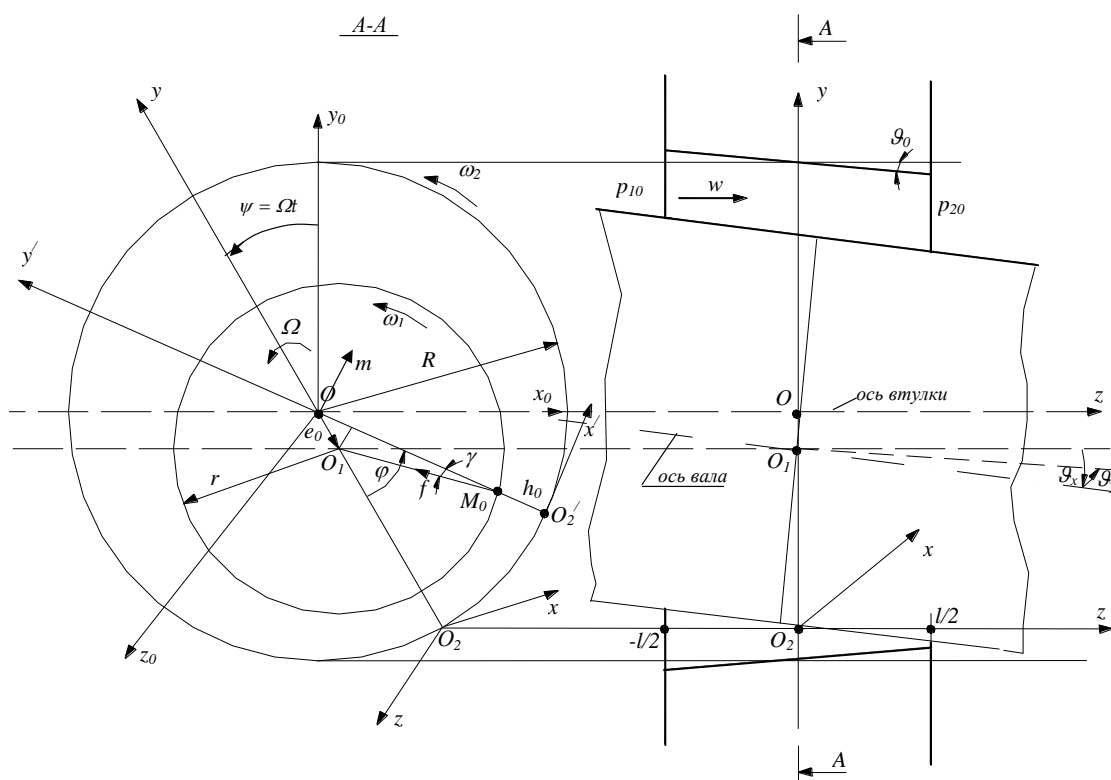


Рисунок 2 – Схема кільцевого каналу шпаринного ущільнення

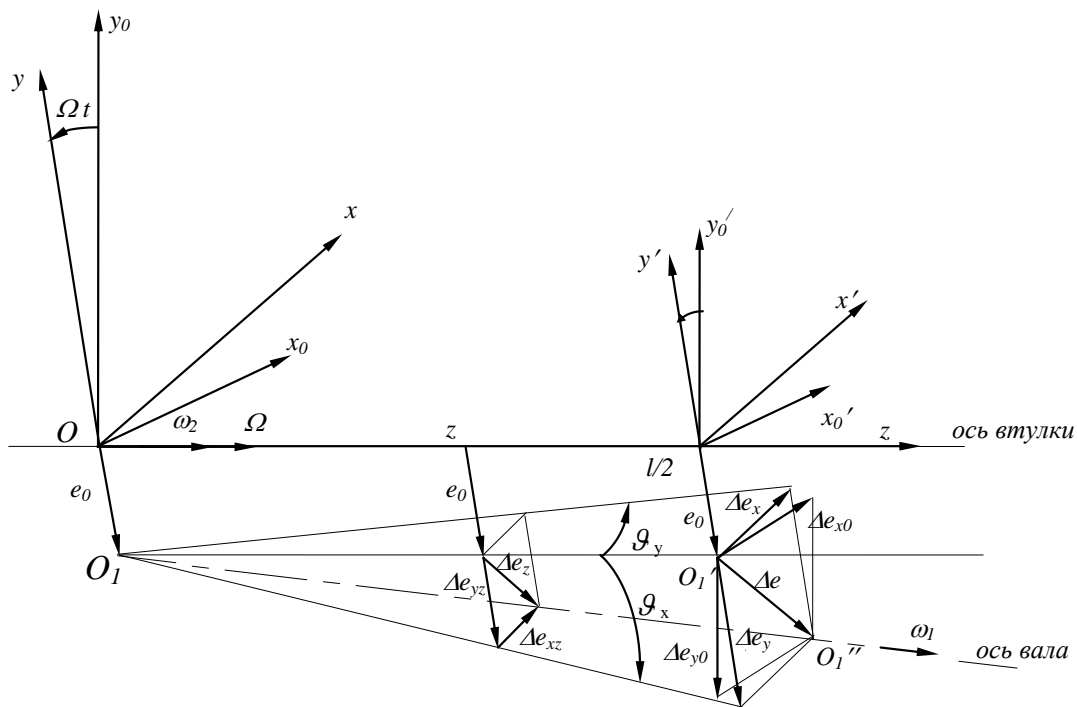


Рисунок 3 – Зміна ексцентриситету по довжині каналу

Зазор у довільному перетині виражається формулою:

$$h = H - (e_0 + \Delta e_{yz}) \cos \varphi - \Delta e_{xz} \sin \varphi - \mathcal{G}_0 z,$$

де \mathcal{G}_0 - величина конусності втулки кільцевого каналу.

Оскільки прирости ексцентриситету $\Delta e_{yz} = \mathcal{G}_x z$, $\Delta e_{xz} = \mathcal{G}_y z$ (рис. 3), то радіальний зазор можна записати у вигляді:

$$h = H(1 - \varepsilon \cos \varphi - [\theta_0 + \theta_x \cos \varphi + \theta_y \sin \varphi] \bar{z})$$

або в безрозмірній формі $\bar{h} = \frac{h}{H} = y_*(1 - \alpha \bar{z})$,

тоді

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} = -\alpha y_*, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varphi} = \frac{1}{R} [\varepsilon \sin \varphi + (\theta_x \sin \varphi - \theta_y \cos \varphi) \bar{z}],$$

де $H = R - r$, $\varepsilon = \frac{e_0}{H}$, $\theta_0 = \frac{\mathcal{G}l}{2H}$, $\theta_{x,y} = \frac{\mathcal{G}_{x,y}l}{2H}$, $\bar{z} = \frac{2z}{l}$, $y_* = 1 - \varepsilon \cos \varphi$,

$\alpha = \frac{\theta}{y_*} = \theta_0 \frac{\mathcal{G}}{y_*}$, $\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_x \cos \varphi + \mathcal{G}_y \sin \varphi}{\mathcal{G}_0}$ - безрозмірні величини.

Значення окружної і радіальної швидкостей на стінках каналу [1]:

$$\begin{aligned}
u(0) &= -(\omega_2 + \Omega)R, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0; \quad w(h) = 0. \\
u(h) &= u_1 + u'_0 = (\omega_1 - \Omega)r + H[\Omega\varepsilon + (\dot{\theta}_y + \Omega\theta_x)\bar{z}]\cos\varphi - \\
&\quad - H[\dot{\varepsilon} + (\dot{\theta}_x - \Omega\theta_y)\bar{z}]\sin\varphi, \\
v(h) &= v_1 + v'_0 = H\{(\omega_1 - \Omega)\varepsilon - [\dot{\theta}_y - (\omega_1 - \Omega)\theta_x]\bar{z}\}\sin\varphi - \\
&\quad - H\{\dot{\varepsilon} + [\dot{\theta}_x + (\omega_1 - \Omega)\theta_y]\bar{z}\}\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Граничними умовами для розв'язання рівнянь (1) і (2) також є тиск на вході в шпаринне ущільнення і на виході з нього:

$$\bar{z} = -1, \quad p = p_1, \quad \bar{z} = 1, \quad p = p_2. \quad (4)$$

Приведені граничні значення для тиску справедливі поза каналом. Вхід рідини в канал супроводжується місцевими гідравлічними втратами і різкою зміною осьової швидкості. Падіння тиску на вході Δp_{11} і відновлення Δp_{12} на виході з ущільнення виразимо через швидкісні напори і коефіцієнти місцевих гідравлічних втрат:

$$\Delta p_{11} = \zeta_{11} \frac{\rho w_1^2}{2}, \quad \Delta p_{12} = \zeta_{12} \frac{\rho w_2^2}{2},$$

тоді граничні значення для тиску приймають такі значення:

$$p_1 = p_{10} - \Delta p_{11} = p_{10} - \zeta_{11} \frac{\rho w_1^2}{2}; \quad p_2 = p_{20} - \Delta p_{12} = p_{20} - \zeta_{12} \frac{\rho w_2^2}{2},$$

де p_{10}, p_{20} - значення тиску перед ущільненням і за ним;

w_1, w_2 - середні осьові швидкості відповідно у вхідному і вихідному перетинах ущільнення;

ζ_{11}, ζ_{12} - коефіцієнти місцевих гідравлічних втрат на вході і на виході.

Експериментально встановлено, що коефіцієнти місцевих втрат практично не залежать від числа Рейнольдса [5], а визначаються формою вхідної і вихідної кромки ущільнення і в більшості випадків можуть бути прийняті постійними. Для каналу з гострими кромками: $\zeta_{11} = 1,1$, $\zeta_{12} = 0,05$

2. РОЗПОДІЛ ТИСКУ В ЗАЗОРІ

Виразимо сили тертя через коефіцієнт опору тертя і сумарну середню по поперечному перетину каналу швидкість w , обумовлену заданим перепадом тиску [8]:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\lambda l}{4h} \rho \frac{w^2}{2}.$$

Тоді
$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} = -\frac{\lambda}{2h} \rho \frac{w^2}{2} = -k \frac{\mu}{h^2} w,$$

де $k = \frac{\lambda \text{Re}}{8}$, $\text{Re} = \frac{\rho 2hw}{\mu}$, $\lambda = \frac{C}{\text{Re}^n}$; для гідравлічно гладких каналів $n=1$, $C=64$ - при ламінарному режимі течії, $n=0.25$, $C=0.316$ - при турбулентній течії, $n=0$, $C=0.04$ - в автомодельній області турбулентної течії. Згідно експериментальним даним, шорсткість необхідно враховувати лише при турбулентних режимах течії. Вплив шорсткості можна визначати за формулами Альтшуля [1].

Усереднимо по товщині зазору сили інерції, що входять у рівняння (2):

$$g = \frac{\rho}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy. \quad (5)$$

Тоді рівняння руху приймуть вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + g = -k \frac{\mu}{h^2} \bar{w}.$$

З останнього рівняння середня швидкість осьової течії:

$$w = -\frac{h^2}{k\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g \right). \quad (6)$$

Щоб перейти до рівняння для визначення розподілу тиску, усереднимо по зазору рівняння нерозривності (3), використовуючи правило Лейбніца диференціювання інтеграла по параметру:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}h) - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) - v(0) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}h) - w(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] = 0.$$

Середні по товщині зазору швидкості:

$$\bar{u} = \bar{u}_p + \bar{u}_c = \frac{1}{h} \int_0^h u dy, \quad \bar{w} = \frac{1}{h} \int_0^h w dy.,$$

де $\bar{u}_c = 0.5\kappa(u(0) + u(h)) = \kappa u_a = \kappa \omega_a r$, $\omega_a = 0.5(\omega_1 + \omega_2)$ - середня частота власного обертання стінок ущільнення, κ - коефіцієнт, що враховує початкове закручування потоку на вході в зазор (за відсутності закручування на вході $\kappa = 1$, якщо рідина входить в зазор з початковою окружною швидкістю, що співпадає за напрямом з середньою окружною швидкістю, то $\kappa > 1$, інакше - $\kappa < 1$).

Як показано в [7] вхідне закручування істотно впливає на середню швидкість обертання потоку в зазорі.

Враховуючи відсутність швидкостей ущільнюючих поверхонь в осьовому напрямі, усереднене рівняння нерозривності прийме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_p h) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} h) = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_c h) + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(h) + v(0).$$

Оскільки розглядається переважаюча осьова течія в короткому ущільненні, то першим доданком в лівій частині можна знехтувати в порівнянні зі зміною витрати в осьовому напрямі. Підставляючи в цю рівність середню швидкість (6), отримаємо рівняння Рейнольдса, що описує розподіл тиску в короткому кільцевому зазорі:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{\mu \kappa} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_c h) - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h).$$

Перейдемо до безрозмірної осьової координати $\bar{z} = 2z/l$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{h^3}{k\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} + \frac{l}{2} g \right) \right] = \frac{l^2}{4} \left[(\bar{u}_c - u(h)) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) - v(0) \right]. \quad (7)$$

Визначимо усереднену по товщині зазору силу інерції рідини. У виразі (5) зробимо заміну $w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (w^2)$.

Результуючий рух рідини в зазорі є спіральною течією, обумовленою перепадом тиску, що дроселюється, і швидкостями руху ущільнюючих поверхонь. Осьова компонента швидкості визначається сумою швидкостей напірного, потоку витіснення і інерційного потоку. У першому наближенні

інерційною складовою осьової швидкості будемо нехтувати.

Ґрунтуючись на експериментальному дослідженні спіральних течій в кільцевих каналах можна записати, що для автотельної області

$$w = w_{\max} = \bar{w}; \quad \overline{w^2} = \bar{w}^2.$$

Після інтегрування з урахуванням відсутності осьових складових швидкості на стінках каналу, отримаємо:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\rho}{h} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{w}h) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}^2 h) + \kappa \omega_a \frac{\partial (\bar{w}h)}{\partial \varphi} \right] = \frac{\rho}{h} \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{w}q) + \kappa \omega_a \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] = \\ &= \frac{\rho}{h} \left[\dot{q} + \frac{2}{l} \left(\bar{w} \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} + q \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + \kappa \omega_a \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Праву частину в рівнянні (7) отримаємо з урахуванням того, що проекція u'_0 на порядок менше зсувної і відносної швидкостей. Крім того:

$$\begin{aligned} v(h) &= v_l + v'_0 = (\omega_l - \Omega)r \frac{\partial h}{\partial x} + v'_0; \\ \left(\bar{u}_c - u_l - u'_0 \right) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) &\approx \left[\bar{u}_c - u_l + (\omega_l - \Omega)r \right] \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) = \kappa \omega_a r \frac{\partial h}{\partial x} + v'_0 = \\ &= H \left\{ -\Delta \omega \varepsilon \sin \varphi - \dot{\varepsilon} \cos \varphi + \left[-(\dot{\theta}_y + \Delta \omega \theta_x) \sin \varphi - (\dot{\theta}_x - \Delta \omega \theta_y) \cos \varphi \right] \bar{z} \right\}. \end{aligned}$$

Рівняння Рейнольдса прийме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{\bar{h}^3}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} + \frac{\rho l}{2h} \left[\dot{q} + \kappa \omega_a \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{2}{l} \left(\bar{w} \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} + q \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right] \right) \right] = \frac{\mu l^2 k_0}{4H^3} (Q_e + Q_g \bar{z}), \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} Q_e &= -(\Delta \omega \varepsilon \sin \varphi + \dot{\varepsilon} \cos \varphi) = \frac{1}{H} (\Delta \omega y \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi), \quad \left(\varepsilon = \frac{e_0}{H}, e_0 = -y \right) \\ Q_g &= -\left[(\dot{\theta}_y + \Delta \omega \theta_x) \sin \varphi + (\dot{\theta}_x - \Delta \omega \theta_y) \cos \varphi \right] \end{aligned}$$

Тут Q_e, Q_g - віднесені до середнього зазору H проекції на вісь $O'_2 y'$ приведеної швидкості поверхні валу в точці з окружною координатою φ , обумовлені радіальними і кутовими коливаннями валу, а також кутовими швидкостями прецесії осі валу і власного обертання стінок каналу. Сумарна швидкість $Q = Q_e + Q_g \bar{z}$ направлена проти осі $O'_2 y'$.

Тоді рівняння нерозривності (3) для короткої шпарини з переважаючим

осьовим потоком приймає вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{w}h) = -\frac{l}{2} H (Q_e + Q_g \bar{z}). \quad (10)$$

Надалі для спрощення викладень використовуватимемо такі співвідношення:

$$k = k_0 K, \quad k_0 = \frac{C}{8} \text{Re}_0^{1-n}, \quad \text{Re}_0 = \frac{2\rho q_0}{\mu}, \quad K = \left(\frac{q}{q_0}\right)^{1-n},$$

$$q_0 = w_0 H = \frac{\Delta p H^3}{\mu l k_0} = \left(\frac{2\Delta p H^2}{\rho \zeta_{20}}\right)^{0.5} = \left(\frac{4\Delta p H^3}{\rho l C} \left(\frac{2\rho}{\mu}\right)^n\right)^{\frac{1}{2-n}}, \quad (11)$$

$$\zeta_{20} = \frac{\lambda_0 l}{2H}, \quad \lambda_0 = \frac{C}{\text{Re}_0^n} = \frac{8k_0}{\text{Re}_0}, \quad \Delta\omega = \Omega - \kappa\omega_a.$$

де q_0 - елементарна витрата через концентричний кільцевий канал з постійним зазором H , ζ_{20} - коефіцієнт гідравлічних втрат на тертя по довжині такого каналу.

Для визначення тиску достатньо проінтегрувати рівняння Рейнольдса (9) з урахуванням граничних умов (4). Проінтегрувавши двічі по довжині каналу отримаємо розподіл тиску в кільцевому каналі:

$$p = \frac{\mu l^2 H k_0}{4h_*^3} \left[Q_e (i_{03} + i_{13}) + \frac{1}{2} Q_g (i_{23} - i_{03}) \right] - \frac{l}{2} j_0 + C_1 \frac{i_{03}}{y_*^3} + C_2,$$

де

$$i_{mn} = \int_{-1}^{\bar{z}} \frac{K \bar{z}^m d\bar{z}}{(1 - \alpha \bar{z})^n}, \quad j_0 = \int_{-1}^{\bar{z}} g d\bar{z}.$$

Використовуючи граничні умови для тиску, визначимо постійні інтегрування:

$$\bar{z} = -1: C_2 = p_1;$$

$$\bar{z} = 1: C_1 = -\frac{\Delta p y_*^3}{i_{031}} - \frac{\mu l^2 H k_0}{4h_*^3} y_*^3 \left[Q_e \left(1 + \frac{i_{131}}{i_{031}} \right) + \frac{1}{2} Q_g \left(\frac{i_{231}}{i_{031}} - 1 \right) \right] + \frac{l y_*^3}{2} \frac{j_{01}}{i_{031}}.$$

Підставляючи значення постійних інтеграції, отримаємо розподіл тиску по довжині кільцевого каналу:

$$p = p_p + p_d + p_g,$$

де

$$\left. \begin{aligned} p_p &= p_1 - \Delta p \frac{i_{03}}{i_{031}}, \\ p_d &= \frac{\mu l^2 k_0}{4H^2 y_*^3} \left[Q_e \left(i_{13} - i_{03} \frac{i_{131}}{i_{031}} \right) + \frac{1}{2} Q_g \left(i_{23} - i_{03} \frac{i_{231}}{i_{031}} \right) \right], \\ p_g &= -\frac{l}{2} \left(j_0 - i_{03} \frac{j_{01}}{i_{031}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

є компонентами тиску напірної течії p_p , потоку витиснення p_d і тиску p_g , обумовленого інерцією рідини [8].

Сила тиску df на елементарну площадку $rd\varphi dr$ поверхні каналу: $df = 0.5lprd\bar{z} \cos\varphi d\varphi$. Проекції елементарної сили та моменти цих проекцій відносно осей $O_2 x, O_2 y$ (рис. 2.1):

$$\begin{aligned} df_x &= -df \sin \varphi = -0,5lpd\bar{z}r \sin \varphi d\varphi, & df_y &= df \cos \varphi = 0,5lpd\bar{z}r \cos \varphi d\varphi, \\ dm_x &= -df_y z = -\frac{l^2}{4} p\bar{z}d\bar{z}r \sin \varphi d\varphi, & dm_y &= df_x z = -\frac{l^2}{4} p\bar{z}d\bar{z}r \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

$$\text{Введемо позначення: } f = \frac{l}{2} \int_{-l}^l p d\bar{z}, \quad m = \frac{l^2}{4} \int_{-l}^l p \bar{z} d\bar{z}, \quad (13)$$

тоді проекції результуючих сил та моментів приймуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -r \int_0^{2\pi} f \sin \varphi d\varphi, & F_y &= r \int_0^{2\pi} f \cos \varphi d\varphi, \\ M_x &= -r \int_0^{2\pi} m \cos \varphi d\varphi, & M_y &= -r \int_0^{2\pi} m \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. ОБЧИСЛЕННЯ СИЛ І МОМЕНТІВ, ЩО ДІЮТЬ НА СТІНКИ УЩІЛЬНЕННЯ

Кінцевою метою аналізу гідродинаміки кільцевих дроселів є визначення радіальних сил та моментів, що діють на вал та втулку з боку потоку рідини у зазорі. У подальшому гідродинамічні сили та моменти використовують для аналізу вібраційного стану ротора, що є однією з складових, що характеризують надійність роторної машини у цілому.

Амплітуди вимушених коливань ротора залежать від віддаленості робочих швидкостей обертання від резонансних (власних) частот, а в околі резонансів - від величини коефіцієнтів демпфірування. Власні частоти визначаються, головним чином, коефіцієнтами радіальної та кутової жорсткості. Коректній роботі машини відповідають малі коливання, тому силові коефіцієнти (жорсткості, демпфірування, інерційних сил) будемо лінеаризувати в околі початкового положення. Вплив нелінійності проявляється лише у випадку, коли ротор є у околі резонансу, і зазнає вимушених коливань з великими значеннями амплітуди коливань. Такі самі коливання виникають і у випадку, коли ротор втрачає динамічну стійкість. Режими підвищених вібрацій відносять до аварійних режимів, тому їх аналіз, як правило, має суто теоретичний інтерес. У випадку підвищених значень амплітуд коливань відбувається аварійна зупинка машини за даними сигналів датчиків. Саме тому а роботі задача буде розв'язана у лінійній постановці, а відповідні нелінійні складові будуть лінеарізовуватись.

Після підстановки інтегралів в (12) і інтегрування по довжині каналу за формулами (13), отримаємо відповідні елементарні сили тиску на полосу внутрішньої стінки каналу одиничної ширини і моменти цих сил відносно осі Ox . Напірна складова сили і моменту:

$$f_p = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 p_p d\bar{z} = \frac{l(p_1 + p_2)}{2} + \frac{\Delta p_2 l}{2} \alpha - \frac{\Delta p_2 l^2 H}{12 q_0 k_1} Q_e - \frac{\Delta p_2 l^2 H}{30 q_0 k_1} Q_g \alpha,$$

$$m_p = \frac{l^2}{4} \int_{-1}^1 p_p \bar{z} d\bar{z} = -\frac{\Delta p_2 l^2}{12} - \frac{\Delta p_2 l^3 H}{60 q_0 k_1} Q_e \alpha - \frac{\Delta p_2 l^3 H}{360 q_0 k_1} Q_g.$$

Перші дві складові у виразі сили представляють собою гідростатичну силу, яка не залежить від руху стінок, а визначається перепадом тиску, що дроселюється на ущільненні, радіальними і кутовими статичними зміщеннями вала і геометричними параметрами каналу. Останні дві складові характерні лише для турбулентних режимів течії і дорівнюють нулю для ламінарних режимів течії. Поява цих складових обумовлена тим, що параметр K , що характеризує режим течії, пропорційний сумарній середній швидкості потоку по перетину каналу, яка в загальному випадку залежить від узагальнених швидкостей $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\theta}_{x,y}$

Перепад тиску по довжині каналу визначається величинами швидкості потоку на вході і на виході:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \Delta p_0 - \zeta_{11} \frac{\rho w_1^2}{2} + \zeta_{12} \frac{\rho w_2^2}{2}.$$

Швидкості w_1, w_2 залежать не тільки від перепаду тиску, але й від характеру руху стінок. З урахуванням постійності по довжині витрат напірної та інерційної течій, отримаємо вираз для швидкості на вході й на виході з ущільнення:

$$w_1 = \frac{q_1}{h_1} = \frac{q_p + q_{d1} + q_g}{Hy_*(1 + \alpha)} = \frac{1}{Hy_*(1 + \alpha)} \left(q_p + q_g + \frac{lH}{2} \left(Q_e(1 + \alpha) - \frac{Q_g}{3} \right) \right);$$

$$w_2 = \frac{q_2}{h_2} = \frac{q_p + q_{d2} + q_g}{Hy_*(1 - \alpha)} = \frac{1}{Hy_*(1 - \alpha)} \left(q_p + q_g + \frac{lH}{2} \left(Q_e(\alpha - 1) - \frac{Q_g}{3} \right) \right).$$

Квадрати швидкостей, з урахуванням малості квадратів витрат потоку витискання й інерційної течії, відповідно дорівнюють:

$$w_1^2 = \frac{1}{H^2 y_*^2 (1 + \alpha)^2} \left[q_p^2 + 2q_p \left(q_g + \frac{lH}{2} \left(Q_e(1 + \alpha) - \frac{Q_g}{3} \right) \right) \right];$$

$$w_2^2 = \frac{1}{H^2 y_*^2 (1 - \alpha)^2} \left[q_p^2 + 2q_p \left(q_g + \frac{lH}{2} \left(Q_e(\alpha - 1) - \frac{Q_g}{3} \right) \right) \right].$$

Використовуючи останні вирази знайдемо різницю та суму граничних значень тиску з урахуванням місцевих гідравлічних опорів і руху ущільнюючих поверхонь, тоді вираз гідростатичної складової сили перетворимо до такого:

$$f_p = \frac{p_1 + p_2}{2} l + \frac{\Delta p_2 l}{2} \alpha = \frac{p_{10} + p_{20}}{2} l + \frac{\Delta p_0 l}{2} \alpha - \frac{\rho l}{4h_*^2(1-\theta^2)^2} \left[q_p^2 + 2q_p \left(q_g - \frac{lH}{6} Q_g \right) \right] (\zeta_m - \alpha \Delta \zeta) - \frac{\rho l^2}{4Hy_*^2(1-\theta^2)} q_p \Delta \zeta Q_e. \quad (15)$$

Гідростатична складова моменту:

$$m_p = -\frac{\Delta p_0 l^2}{12} \frac{\rho l^2}{24h_*^2(1-\theta^2)^2} \left[q_p^2 + 2q_p \left(q_g - \frac{lH}{6} Q_g \right) \right] (\Delta \zeta - 2\alpha \zeta_m) + \frac{\rho l^3}{24Hy_*^2(1-\theta^2)} q_p Q_e (\zeta_m - \alpha \Delta \zeta). \quad (16)$$

Лінеаризовані вирази елементарних сил і моментів потоку витискання мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} f_{de} &\approx -\frac{\mu l^3 k_0}{12H^3} \sqrt{\frac{\zeta_{00}}{\zeta_0}} [(\Omega - \kappa \omega_a) y \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi], & m_{de} &\approx \frac{l\theta_0}{5} f_{de}, \\ f_{d\theta} &\approx \frac{\mu l^3 k_0}{30H^2} \theta_0 \sqrt{\frac{\zeta_{00}}{\zeta_0}} [\dot{\theta}_y + (\Omega - \kappa \omega_a) \theta_x] \sin \varphi + [\dot{\theta}_x - (\Omega - \kappa \omega_a) \theta_y] \cos \varphi, \\ m_{d\theta} &\approx \frac{l}{12\theta_0} f_{d\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Сили і моменти потоку витискання характеризують демпфіруючі та циркуляційні сили в шпаринних ущільненнях, що зв'язані між собою.

Лінеаризовані вирази сили інерційного тиску мають вигляд:

$$f_g = -\frac{\rho l^3}{12y_*} \dot{Q}_e - \frac{\rho l^3}{90y_*} \dot{Q}_g \alpha - \frac{\rho l^2}{3Hy_*^2} q_p Q_g - \frac{\rho l^2}{3Hy_*} \dot{q}_p \alpha = f_{g1} + f_{g2} + f_{g3} + f_{g4},$$

де $f_{g1} = -\frac{\rho l^3}{12H} [(\Omega + \Delta\omega)\dot{y} \sin \varphi + (\ddot{y} - \Omega\Delta\omega y) \cos \varphi]$;

$$f_{g2} = -\frac{\rho l^4}{360H} \theta_0 \left\{ \left[\ddot{\vartheta}_y - \Omega^2 \vartheta_y + (2\Omega - \kappa\omega_a)\dot{\vartheta}_x + \kappa\omega_a \Omega \vartheta_y \right] \sin \varphi + \right. \\ \left. + \left[\ddot{\vartheta}_x - \Omega^2 \vartheta_x - (2\Omega - \kappa\omega_a)\dot{\vartheta}_y + \kappa\omega_a \Omega \vartheta_x \right] \cos \varphi \right\};$$

$$f_{g3} = \frac{\rho l^3 q_{po}}{6H^2} \left[(\dot{\vartheta}_y + \Delta\omega \vartheta_x) \sin \varphi + (\dot{\vartheta}_x - \Delta\omega \vartheta_y) \cos \varphi \right];$$

$$f_{g4} = -\frac{\rho l^2}{3H^2} q_{po} \theta_0 \dot{y} \cos \varphi \quad \text{- для ламінарних режимів}; \quad (18)$$

$$f_{g4} = -\frac{\rho l^2 q_0^2}{4H^2 K_t^2} \theta_0 \left(1.71 - \frac{1}{2\zeta} \left(1.43\Delta\zeta - 0.86\zeta_m \theta_0 + \frac{\lambda_{00}(\Delta\zeta - 2\theta_0 \zeta_m)}{0.28} \right) \right) \dot{y} \cos \varphi - \\ - \frac{\rho l^2 q_0^2}{2H^2 K_t^2} \theta_0 \zeta_m (\dot{\vartheta}_x \cos \varphi + \dot{\vartheta}_y \sin \varphi) \quad \text{- для турбулентних режимів};$$

$$f_{g4} = -\frac{\rho l^2 q_{po}^2}{3H^2} \theta_0 \left[\left(1.5 - 0.5 \frac{\Delta\zeta}{\zeta_0} \right) \dot{y} \cos \varphi + \frac{\zeta_m l}{\zeta_0} \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}_x \cos \varphi + \dot{\vartheta}_y \sin \varphi) \right] \quad \text{- для}$$

автомоделних режимів;

$$f_{g5} = -\frac{\kappa\omega_a \rho l \Delta p H}{(2-n)\mu k_0} \theta_0 \sin \varphi - \frac{\kappa\omega_a \rho l^3}{12} \theta_0 (\Delta\omega y \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi) (4 - \theta_0)$$

Інерційна складова моменту:

$$m_g = -\frac{\rho l^4}{180H} \dot{Q}_e - \frac{\rho l^4}{360} \dot{Q}_g - \frac{\rho l^3}{45H} q_p Q_g \alpha;$$

$$m_g = \frac{\rho l^5}{720H} \left\{ \left[\ddot{\vartheta}_y - \Omega^2 \vartheta_y + (2\Omega - \kappa\omega_a)\dot{\vartheta}_x + \kappa\omega_a \Omega \vartheta_y \right] \sin \varphi + \right. \\ \left. + \left[\ddot{\vartheta}_x - \Omega^2 \vartheta_x - (2\Omega - \kappa\omega_a)\dot{\vartheta}_y + \kappa\omega_a \Omega \vartheta_x \right] \cos \varphi \right\} + \\ + \frac{\rho l^4 q_{po}}{90H^2} \theta_0 \left[(\dot{\vartheta}_y + \Delta\omega \vartheta_x) \sin \varphi + (\dot{\vartheta}_x - \Delta\omega \vartheta_y) \cos \varphi \right] - \\ - \frac{\rho l^4}{180H} [(\Omega + \Delta\omega)\dot{y} \sin \varphi + (\ddot{y} - \Omega\Delta\omega y) \cos \varphi]. \quad (19)$$

Інерційна сила, як і гіроскопічна, обумовлена інерційними ефектами рідини. Перша сила направлена в сторону збільшення ексцентриситету, а друга співпадає за напрямом з циркуляційною. Впливом цих сил на динаміку

роторів відцентрових машин зазвичай нехтують [2, 3, 9, 10], вважаючи, що ці сили на порядок менші від інших, але, як буде доведено далі, таке нехтування є необґрунтованим.

Визначимо проекції результуючих сил і моментів. Від елементарних сил тиску напірної течії, отримаємо такі вирази проекцій радіальної сили на осі рухомої системи координат:

$$F_{px} = -k_{s\vartheta} \vartheta_y + k_{px} \Delta \omega y - k_{py} \theta_0 (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) (\Omega + \Delta \omega) \dot{y} - k_{p\dot{\vartheta}} (\dot{\vartheta}_y + \Delta \omega \vartheta_x);$$

$$F_{py} = k_{s\vartheta} \vartheta_x - k_{sy} y + k_{p\vartheta} (\dot{\vartheta}_x + \Delta \omega \vartheta_y) + k_{py} \theta_0 (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) (y - \Omega \Delta \omega y) - k_{py} \dot{y},$$

де для автотодельної області турбулентної течії:

$$k_{s\vartheta} = k_s \frac{l}{2} \frac{1}{\zeta_0^2} \left[\zeta_0^2 - 2(\zeta_m^2 - 0.5 \Delta \zeta (\zeta_0 + 2\zeta_m \theta_0)) \right],$$

$$k_s = \frac{\Delta p l \pi r}{2H},$$

$$k_{px} = \frac{\rho^2 l \pi r}{\mu k_0 H} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) + \frac{\rho l^2 \pi r}{4H^2} q_{po} \left(\Delta \zeta + \frac{2\theta_0}{3} \left(2 - \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} \right) \right),$$

$$k_{py} = \frac{\rho^2 l^2 \pi r}{6 \mu k_0} q_{oo}, \quad (20)$$

$$k_{p\vartheta} = \left(\frac{\rho^2 l^2 \pi r}{12 \mu k_0 H} \frac{q_{oo}^2}{\zeta_0} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (3\zeta_m + 4\theta_0 \zeta_0) - \frac{\rho l^3 \pi r}{24H^2} q_{oo} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} \right) (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta),$$

$$k_{sy} = k_s \left[\theta_0 + \frac{1}{\zeta_0^2} (\zeta_m \zeta_0 - \Delta \zeta \zeta_m + \theta_0 \Delta \zeta^2) \right],$$

$$k_{p\dot{\vartheta}} = \frac{\rho^2 l \pi r}{4 \mu k_0 H \zeta_0} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\zeta_0 + \Delta \zeta) (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) + \frac{\rho l^2 \pi r}{4H^2} q_{po} \Delta \zeta.$$

З отриманих формул випливає, що проекція гідростатичної складової радіальної сили F_{px} , що обумовлена перепадом тиску, що дроселюється на ущільненні, не залежить від ексцентриситету, а пропорційна лише куту перекосу вала.

Напірна складова моменту для автотодельної області турбулентної течії:

$$\begin{aligned}
M_{px} &= -k_s \frac{l}{12} \frac{\Delta\zeta}{\zeta_0^2} (\zeta_0 - \Delta\zeta + 2\zeta_m \theta_0) y - k_s \frac{l^2}{6} \frac{\zeta_m}{\zeta_0^2} (\Delta\zeta - \zeta_0 - 2\theta_0 \zeta_m) \vartheta_x + \\
&\quad + k_{py} \frac{l}{6} \theta_0 (\Delta\zeta - 2\theta_0 \zeta_m) (\ddot{y} - \Omega \Delta\omega y) - \\
&\quad - (k_{pm\dot{y}1} (\zeta_m - 2\theta_0 \Delta\zeta) + k_{pm\dot{y}2} (\zeta_0 + \Delta\zeta) (\Delta\zeta - 2\theta_0 \zeta_m)) \dot{y} + k_{pm\dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}_x, \\
M_{py} &= -k_s \frac{l^2}{6} \frac{\zeta_m}{\zeta_0^2} (\Delta\zeta - \zeta_0 + 2\theta_0 \zeta_m) \dot{\vartheta}_y - k_{pm\dot{y}} \Delta\omega y + k_{py} \frac{l}{6} \theta_0 (\Delta\zeta - 2\theta_0 \zeta_m) (\Omega + \Delta\omega) \dot{y}, \\
k_{pm\dot{\vartheta}} &= \frac{\rho^2 l^3 \pi r}{6 \mu k_0 H \zeta_0} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} \left(\frac{\zeta_m}{4} + \frac{\zeta_0}{3} \right) (\Delta\zeta - 2\theta_0 \zeta_m) - \frac{\rho l^4 \pi r}{144 H^2} q_{oo} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\Delta\zeta - 2\theta_0 \zeta_m); \\
k_{pm\dot{y}1} &= \frac{\rho l^3 \pi r}{24 H^2} q_{po}; \quad k_{pm\dot{y}2} = \frac{\rho^2 l^2 \pi r}{24 \mu k_0 H \zeta_0} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}}.
\end{aligned}$$

Проекції радіальних сил і моментів, обумовлених власним і переносним рухом стінок каналу для різних режимів течії мають вигляд:

$$\begin{aligned}
F_{dex} &= k_d (\Omega - \kappa \omega_a) y, \quad F_{dey} = -k_d \dot{y}; \quad k_d = \frac{\mu l^3 k_0 \pi r}{12 H^3 K}; \\
M_{dex} &= k_d \frac{l}{5} \theta_0 \dot{y}, \quad M_{dey} = k_d \frac{l}{5} \theta_0 (\Omega - \kappa \omega_a) y; \\
M_{dex} &= -\frac{l}{5} \theta_0 F_{dey}, \quad M_{dey} = \frac{l}{5} \theta_0 F_{dex}, \\
F_{d\vartheta x} &= -k_d \frac{l}{5} \theta_0 [\dot{\vartheta}_y + (\Omega - \kappa \omega_a) \vartheta_x], \quad F_{d\vartheta y} = k_d \frac{l}{5} \theta_0 [\dot{\vartheta}_x - (\Omega - \kappa \omega_a) \vartheta_y]; \\
M_{d\vartheta x} &= -k_d \frac{l^2}{60} [\dot{\vartheta}_x - (\Omega - \kappa \omega_a) \vartheta_y], \quad M_{d\vartheta y} = -k_d \frac{l^2}{60} [\dot{\vartheta}_y + (\Omega - \kappa \omega_a) \vartheta_x]; \quad (21) \\
M_{d\vartheta x} &= -\frac{l}{12} \theta_0 F_{d\vartheta y}, \quad M_{d\vartheta y} = \frac{l}{12} \theta_0 F_{d\vartheta x};
\end{aligned}$$

Циркуляційні сили, як і гідростатичні, пропорційні ексцентриситету ротора, але напрям їх дії перпендикулярний ексцентриситету, внаслідок чого коефіцієнт при циркуляційній силі іноді називають «перехресною» жорсткістю. Не дивлячись на загальну подібність до гідростатичних сил, що є консервативними, циркуляційні сили неконсервативні.

У конфузторних каналах лінії дії розглянутих сил зміщуються від початку координат у додатному напрямку вздовж осі Oz і породжують відповідні моменти. В дифузторних каналах лінії дії сил зміщуються в

протилежну сторону ($z < 0$) і моменти змінюють знак.

Після інтегрування за формулами (14, 18) елементарної сили, обумовленої інерцією рідини, отримуємо проекції інерційної сили і її моменту:

$$F_{gx} = k_g (\Omega + \Delta\omega) \dot{y} - k_g \frac{l}{30} \theta_0 (\ddot{y}_y - \Omega \Delta\omega \vartheta_y + (\Omega + \Delta\omega) \dot{\vartheta}_x) - k_{g2} \frac{2l}{3} \left(1 - \theta_0 \frac{\zeta_m}{\zeta_0} \right) (\dot{\vartheta}_y + \Delta\omega \vartheta_x),$$

$$F_{gy} = -k_g (y - \Omega \Delta\omega y) + k_g \frac{l}{15} \theta_0 (\ddot{y}_x - \Omega \Delta\omega \vartheta_x - (\Omega + \Delta\omega) \dot{\vartheta}_y) +$$

$$+ k_{g2} \frac{2l}{3} (\dot{\vartheta}_x - \Delta\omega \vartheta_y) - k_{g2} \frac{2l}{3} \left(2 - \frac{\Delta\zeta}{\zeta_0} \right) \dot{y};$$

$$M_{gx} = -k_g \frac{l^2}{60} [\ddot{y}_x - \Omega \Delta\omega \vartheta_x - (\Omega + \Delta\omega) \dot{\vartheta}_y] + k_g \frac{l}{15} (y - \Omega \Delta\omega y) - k_{g2} \frac{2l^2}{45\zeta_0} \theta_0 (\dot{\vartheta}_x - \Delta\omega \vartheta_y),$$

$$M_{gy} = -k_g \frac{l^2}{60} [\ddot{y}_y - \Omega \Delta\omega \vartheta_y + (\Omega + \Delta\omega) \dot{\vartheta}_x] + k_g \frac{l}{15} (\Omega + \Delta\omega) \dot{y} - k_{g2} \frac{2l^2}{45\zeta_0} \theta_0 (\dot{\vartheta}_y + \Delta\omega \vartheta_x)$$

$$k_g = \frac{\rho l^3 \pi r}{12H}, \quad k_{g2} = \frac{\rho l^2 \pi r}{6H^2 \zeta_0} q_{p0},$$

де коефіцієнт k_g , що має розмірність маси, можна розглядати як приєднану масу рідини для поперечних коливань вала, яка не залежить від частоти обертання.

Інерційна сила, що характеризується приєднаною масою рідини, складається з силою інерції ротора, яка в більшості випадків перевищує її на порядок. Виключення в цьому випадку можуть представляти лише відносно довгі шпаринні ущільнення розвантажувальних барабанів відцентрових насосів [7, 10].

Таким чином, на ротор у шпаринному ущільненні в загальному випадку діє пружна, демпфіруюча та циркуляційна сили. Врахування не тільки локальних, але і конвективних членів у рівнянні Рейнольдса привело до того, що коефіцієнти пропорційності напірної складової радіальної сили залежать не тільки від геометричних розмірів ущільнень, а також від частот обертання і прецесії вала.

За допомогою формул, наведених в [8] були отримані вирази для проекцій сил та їх моментів у нерухомій системі координат.

4. РІВНЯННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ РАДІАЛЬНО-КУТОВИХ КОЛИВАНЬ ОДНОМАСОВОЇ МОДЕЛІ РОТОРА В ШПАРИННИХ УЩІЛЬНЕННЯХ

Вплив сил та моментів у шпаринних ущільнення на вібраційні характеристики ротора визначимо на прикладі моделі консольного ротора, маса якого зосереджена в центрі мас C (рис. 4), а вал являє собою невагоме пружне тіло і обертається в жорстких опорах. Така модель ротора має такі ступені вільності: центр мас ротора може переміщуватися вздовж трьох координатних осей, а диск робочого колеса скоювати повороти навколо осі обертання і двох осей, що перпендикулярні осі обертання. Хоча така спрощена модель, за винятком окремих випадків, не відповідає реальній роторній системі відцентрової машини, та вона зберігає її найважливіші динамічні властивості й дає можливість оцінити вплив ущільнень на динаміку ротора. Як показано в [2], ускладнення конструкції не призводить до принципово нових результатів. Крім того, на основі розкладання коливань ротора за власними формами, висновки, що стосуються одномасової моделі, можна безпосередньо застосувати і при дослідженні більш складних роторних систем.

Враховуючи те, що осьові переміщення ротора на робочих режимах незначні й не впливають на гідродинамічні характеристики шпаринних ущільнень, осьовою рухливістю робочого колеса нехтували. При розрахунку використовувалися такі системи координат: нерухома система $Ox_0y_0z_0$ з початком в геометричному центрі колеса при недеформованому стані вала; рухома, жорстко зв'язана з валом, що обертається, система координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, осі $O_1\xi_1$ і $O_1\eta_1$ якої направлені по головним осям інерції поперечного перетину вала, а вісь $O_1\zeta_1$ - по дотичній до вигнутої осі вала в точці O_1 центра вала в місці посадки колеса; рухома система координат $C\xi\eta\zeta$ з початком в центрі мас ротора, осі якої співпадають з головними центральними осями інерції колеса. Кути повороту навколо осей Ox_0 , Oy_0 - ϑ_x , ϑ_y . Осьовий момент інерції колеса - J_o , а моменти інерції відносно осей

$C\xi$ та $C\eta$ (екваторіальні моменти інерції), що рівні між собою - J . При концентричному положенні ротора і статора точки початку координат систем O і O_1 співпадають.

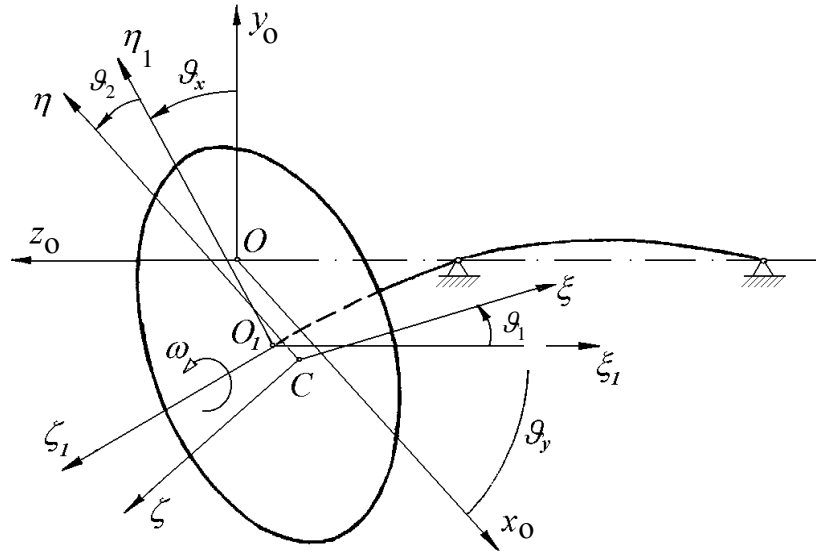


Рисунок 4 – Розрахункова схема одномасової моделі ротора в шпаринних ущільненнях

Використовуючи теореми про зміну кількості і моменту кількості руху системи рівняння радіальних і кутових коливань ротора в ущільненнях у проєкціях на нерухомі осі $Ox_0y_0z_0$ мають вигляд:

$$m\ddot{x}_c = F_{ox}, \quad m\ddot{y}_c = F_{oy}, \quad (23)$$

$$J\ddot{\vartheta}_{\xi_1} + (J_o - J)\omega\dot{\vartheta}_{\eta_1} = M_{ox}, \quad J\ddot{\vartheta}_{\eta_1} + (J_o - J)\omega\dot{\vartheta}_{\xi_1} = M_{oy}.$$

Для малих параметрів невірноваженості робочого колеса, малих лінійних і кутових переміщень, зв'язок між переміщеннями осей $C\xi\eta\zeta$ і $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ в нерухомій системі координат має вигляд:

$$x_c = x + e_{c\xi_1} \cos \vartheta_z - e_{c\eta_1} \sin \vartheta_z, \quad y_c = y + e_{c\xi_1} \sin \vartheta_z + e_{c\eta_1} \cos \vartheta_z,$$

$$\vartheta_{\xi_1} = \vartheta_x + \vartheta_1 \cos \vartheta_z - \vartheta_2 \sin \vartheta_z, \quad \vartheta_{\eta_1} = \vartheta_y + \vartheta_1 \sin \vartheta_z + \vartheta_2 \cos \vartheta_z,$$

де ϑ_1, ϑ_2 – характеризують параметри невірноваженості робочого колеса, так званий динамічний дисбаланс.

Оскільки $\vartheta_z = \omega t$, отримаємо:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= \ddot{x} - \omega^2 (e_{c\xi_1} \cos \omega t - e_{c\eta_1} \sin \omega t), & \ddot{y}_0 &= \ddot{y} - \omega^2 (e_{c\xi_1} \sin \omega t + e_{c\eta_1} \cos \omega t), \\ \ddot{\mathcal{G}}_{\xi_1} &= \ddot{\mathcal{G}}_x - \omega^2 (\mathcal{G}_1 \cos \omega t - \mathcal{G}_2 \sin \omega t), & \ddot{\mathcal{G}}_{\eta_1} &= \ddot{\mathcal{G}}_y - \omega^2 (\mathcal{G}_1 \sin \omega t + \mathcal{G}_2 \cos \omega t).\end{aligned}$$

Використовуючи отримані вирази в рівняннях (2.4), матимемо систему рівнянь руху робочого колеса відносно нерухомої системи координат з урахуванням згинальної жорсткості вала:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + k_{11}x - k_{12}\mathcal{G}_y &= \sum F_{x_0} + F_{dx_0}, \\ m\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\mathcal{G}_x &= \sum F_{y_0} + F_{dy_0}, \\ J\ddot{\mathcal{G}}_x + k_{22}\mathcal{G}_x + (J_o - J)\omega\dot{\mathcal{G}}_y + k_{12}y &= \sum M_{x_0} + M_{dx_0}, \\ J\ddot{\mathcal{G}}_y + k_{22}\mathcal{G}_y - (J_o - J)\omega\dot{\mathcal{G}}_x - k_{12}x &= \sum M_{y_0} + M_{dy_0},\end{aligned}$$

де $\sum F_{x_0, y_0}$, $\sum M_{x_0, y_0}$ - проекції сил та моментів у двох шпаринних ущільненнях на осі Ox_0 , Oy_0 ;

$F_{dx_0} = m\omega^2 (e_{c\xi_1} \cos \omega t - e_{c\eta_1} \sin \omega t)$, $F_{dy_0} = m\omega^2 (e_{c\xi_1} \sin \omega t + e_{c\eta_1} \cos \omega t)$ - проекції статичного дисбалансу;

$M_{dx_0} = \omega^2 (2J - J_o)(\mathcal{G}_1 \cos \omega t - \mathcal{G}_2 \sin \omega t)$, $M_{dy_0} = \omega^2 (2J - J_o)(\mathcal{G}_1 \sin \omega t + \mathcal{G}_2 \cos \omega t)$ - проекції динамічного дисбалансу на осі нерухомої системи координат.

У випадку лінійності силових факторів, що входять до складу коливальної системи «ротор-ущільнення» параметри невривноваженості відіграють роль зовнішнього змушуючого впливу, визначаючи закон вимушених коливань робочого колеса.

Отримані рівняння можна використовувати для розрахунку як моделі симетричного, так і консольного одномасового ротора, що має крім гідродинамічних шпаринних опор-ущільнень ще й зовнішні жорсткі опори.

У випадку, коли ротор має осьову симетрію, вирази для статичного дисбалансу спрощуються:

$$F_{dx_0} = m\omega^2 e_c \cos \omega t, \quad F_{dy_0} = m\omega^2 e_c \sin \omega t.$$

Для консольної схеми рівняння зв'язаних радіально-кутових коливань набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)\ddot{x} + a_2\dot{x} + \omega_1^2 x + a_3\dot{y} + a_4 y + \alpha_2\dot{\theta}_y + a_c\theta_y - \alpha_4\dot{\theta}_x - \alpha_5\theta_x &= \frac{F_{dx_0}}{m}; \\
(1 + a_1)\ddot{y} + a_2\dot{y} + \omega_1^2 y - a_3\dot{x} - a_4 x - \alpha_2\dot{\theta}_x - a_c\theta_x - \alpha_4\dot{\theta}_y - \alpha_5\theta_y &= \frac{F_{dy_0}}{m}; \\
(1 + \beta_1)\ddot{\theta}_x + \beta_2\dot{\theta}_x + \omega_2^2\theta_x + \beta_3\dot{\theta}_y + \beta_4\theta_y - b_2\dot{y} + b_c y + b_3\dot{x} + b_4 x &= \frac{M_{dx_0}}{J}; \\
(1 + \beta_1)\ddot{\theta}_y + \beta_2\dot{\theta}_y + \omega_2^2\theta_y - \beta_3\dot{\theta}_x - \beta_4\theta_x + b_2\dot{x} - b_c x + b_3\dot{y} + b_4 y &= \frac{M_{dy_0}}{J}.
\end{aligned}$$

Переходячи до комплексних змінних: $u = x + iy$; $v = \theta_x + i\theta_y$, рівняння руху можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)\ddot{u} + a_2\dot{u} + \omega_1^2 u - i(a_3\dot{u} + a_4 u) - i(\alpha_2\dot{v} + a_c v) - \alpha_4\dot{v} - \alpha_5 v &= a\omega^2 e^{i\omega t}, \\
(1 + \beta_1)\ddot{v} + \beta_2\dot{v} - \omega_2^2 v - i(\beta_3\dot{v} + \beta_4 v) + i(b_2\dot{u} - b_c u) + b_3\dot{u} + b_4 u &= \Gamma\omega^2 e^{i\omega t},
\end{aligned} \quad (24)$$

де для автотельної області турбулентної течії коефіцієнти гідродинамічних сил і моментів у шпаринних ущільненнях:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{k_g - k_{p\dot{y}}\theta_0(\zeta_m - \theta_0\Delta\zeta)}{m}; & a_2 &= \frac{k_d + k_{p\dot{y}} + k_{g2}\theta_0(3\zeta_0 - \Delta\zeta)}{m}; \\
a_{22} &= \frac{\rho l \Delta p H \theta_0 \pi r}{4\mu k_0(2-n)}; & a_{11} &= \frac{\rho l^3 \pi r}{72H}\theta_0(4 - \theta_0); & \omega_1^2 &= \frac{k_s}{m}\varphi_f + \frac{k_v}{m}; \\
a_3 &= \kappa\omega_a(a_1 + a_{11}); & a_4 &= \kappa\omega_a(a_{22} + a_2); & \alpha_2 &= k_d \frac{l}{5m}\theta_0 + \frac{k_{p\dot{\theta}}}{m} - \frac{k_{g2}l}{m}\theta_0\zeta_m; \\
\alpha_c &= \frac{k_{s\theta}}{m} - \frac{k_{12}}{m}; & \alpha_4 &= \alpha_1\kappa\omega_a; & \alpha_5 &= \kappa\omega_a\alpha_2; \\
\beta_1 &= k_g \frac{l^3}{60J}; & \beta_2 &= k_d \frac{l^2}{60J} - \left(\frac{k_{pm\dot{\theta}}}{J} - k_{g2} \frac{l^2}{15J}\theta_0\zeta_0 \right); \\
\beta_3 &= \kappa\omega_a\beta_1 - \frac{J_0 - J}{J}\omega; & \beta_4 &= \kappa\omega_a\beta_2; & \omega_2^2 &= \frac{k_{22}}{J} + k_s \frac{l^2}{6J}\varphi_g; \\
b_2 &= k_d \frac{l}{5J}\theta_0 + k_{pm\dot{y}1} \frac{(\zeta_m - \theta_0\Delta\zeta)}{J} + k_{pm\dot{y}2} \frac{(\zeta_0 + \Delta\zeta)}{J} (\Delta\zeta - 2\theta_0\zeta_m); \\
b_c &= \frac{k_{12}}{J} + k_s \frac{l}{6J}\varphi_{mf}; & b_3 &= \kappa\omega_a b_1; & b_4 &= \kappa\omega_a b_2 \\
a &= e_{c\zeta_1} + ie_{c\eta_1}, & \Gamma &= \left(2 - \frac{J_o}{J} \right) (\vartheta_1 + i\vartheta_2).
\end{aligned}$$

У наведених формулах ω_1^2 і ω_2^2 - парціальні частоти відповідно радіальних і кутових коливань ротора, а гідродинамічні коефіцієнти визначаються за такими формулами [8]:

$$k_{sg} = k_s \frac{l}{2} \frac{1}{\zeta_0^2} \left[\zeta_0^2 - 2 \left(\zeta_m^2 - 0.5 \Delta \zeta (\zeta_0 + 2 \zeta_m \theta_0) \right) \right],$$

$$k_s = \frac{\Delta p l \pi r}{2H}, \quad k_d = \frac{\mu l^3 k_0 \pi r}{12H^3 K}, \quad k_{p\ddot{y}} = \frac{\rho^2 l^2 \pi r}{6\mu k_0} q_{oo},$$

$$k_{px} = \frac{\rho^2 l \pi r}{\mu k_0 H} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) + \frac{\rho l^2 \pi r}{4H^2} q_{po} \left(\Delta \zeta + \frac{2\theta_0}{3} \left(2 - \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} \right) \right),$$

$$k_{p\dot{g}} = \left(\frac{\rho^2 l^2 \pi r}{12\mu k_0 H} \frac{q_{oo}^2}{\zeta_0} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (3\zeta_m + 4\theta_0 \zeta_0) - \frac{\rho l^3 \pi r}{24H^2} q_{oo} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} \right) (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta),$$

$$k_{sy} = k_s \left[\theta_0 + \frac{1}{\zeta_0^2} (\zeta_m \zeta_0 - \Delta \zeta \zeta_m + \theta_0 \Delta \zeta^2) \right],$$

$$k_g = \frac{\rho l^3 \pi r}{12H}, \quad k_{g2} = \frac{\rho l^2 \pi r}{6H^2 \zeta_0} q_{po},$$

$$k_{p\ddot{y}} = \frac{\rho^2 l \pi r}{4\mu k_0 H \zeta_0} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\zeta_0 + \Delta \zeta) (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) + \frac{\rho l^2 \pi r}{4H^2} q_{po} \Delta \zeta.$$

5. ВПЛИВ ВИПАДКОВОЇ ЗМІНИ ЗМУШУЮЧОЇ СИЛИ НА АМПЛІТУДИ КОЛИВАНЬ РОТОРА В ШПАРИННИХ УЩІЛЬНЕННЯХ

У загальному випадку дисбаланс є випадковою функцією (його параметри залежать від великої кількості факторів, що змінюються у часі). Як перше наближення розглянемо випадок, коли дисбаланс є випадковою величиною з відомим математичним очікуванням m_a , а середнє квадратичне відхилення $\sqrt{D_a}$ визначатимемо як деякий відсоток відхилення від математичного очікування. Тобто у цьому випадку розглядаємо коливання системи під дією випадкового навантаження, що має вигляд: $F(t) = a\omega^2 e^{i\omega t}$. Математичне очікування

навантаження дорівнюватиме $m_F = m_a \omega^2 e^{i\omega t}$. Центроване значення навантаження: $\overset{o}{F}(t) = (a - m_a) \omega^2 e^{i\omega t}$, $\overset{o}{F}^*(t) = (a - m_a) \omega^2 e^{-i\omega t}$, де $\overset{o}{F}(t)$ – комплексно спряжена центрована величина.

За визначенням кореляційна функція комплексної випадкової функції дорівнює:

$$K_F(t, t') = M \left[\overset{o}{F}(t) \overset{o}{F}^*(t') \right] = M \left[\omega^4 (a - m_a)^2 e^{i\omega(t-t')} \right] = \omega^4 e^{i\omega(t-t')} D_a,$$

тобто:

$$K_F(t, t') = \omega^4 D_a e^{i\omega\tau} = K_F(\tau). \quad (25)$$

Оскільки кореляційна функція зовнішнього навантаження залежить не від двох моментів часу, а від їх різниці, то маємо випадок коливань лінійної динамічної системи під дією квазістатичного випадкового навантаження.

На практиці інтерес становить поведінка системи поблизу резонансної частоти та на робочій частоті обертання. Як вище було зазначено, навколорезонансні коливання відносять до аварійних ситуацій, тому розглянемо випадок коливань системи на робочій частоті, при цьому позначимо $\omega = \omega_p$.

За формулами Вінера-Хінчина за відомою кореляційною функцією випадкового навантаження визначимо його спектральну щільність

$$S_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_F(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} \omega_p^4 D_a e^{-i\omega_p\tau} \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (26)$$

Для визначення спектральної щільності та кореляційної функції "виходу" системи знайдемо її передаточну функцію. Оскільки кутові коливання системи "ротор - шпаринні ущільнення", як правило, на порядок менші за радіальні, то у подальших розрахунках розглядатимемо чисто радіальні вимушені коливання. У цьому випадку передаточна функція, за рівняннями (24) дорівнюватиме:

$$W(i\omega) = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2(1 + a_1) + i(\omega a_2 - a_4)}.$$

Використовуючи відомий зв'язок між спектральними щільностями "входу" та "виходу" лінійної системи, отримаємо:

$$S_z(\omega) = |W|^2 S_F(\omega),$$

де квадрат модуля передаточної функції визначається за формулою

$$|W|^2 = \frac{1}{\left[\omega_1^2 - \omega^2(1+a_1)\right]^2 + (\omega a_2 - a_4)^2}.$$

На рис. 5 показані спектральні щільності сталих коливань ротора в ущільненнях для таких параметрів: тиск на ущільненні $\Delta p = 0.2$ МПа, довжина ущільнення $l = 0.2$ м, середній радіальний зазор $H = 0.25 \cdot 10^{-4}$ м, рідина - вода.

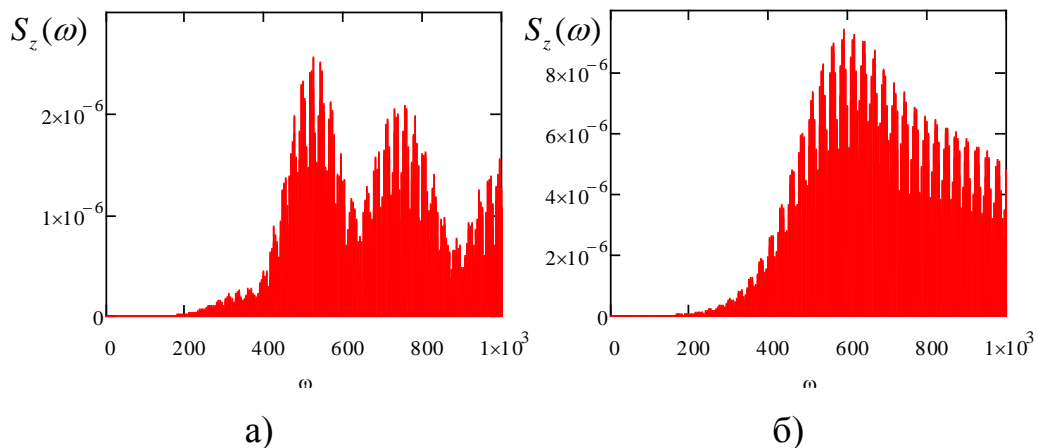


Рисунок 5 – Спектральна щільність переміщення центра мас одномасової моделі ротора у шпаринних ущільненнях:

а) $\omega_p = 300$ рад/с, б) $\omega_p = \omega_0 = 557$ рад/с

Визначимо закон розподілу переміщення центра мас ротора. Для цього розв'язок першого рівняння системи (24) візьмемо у вигляді

$$z = z_0 e^{i(\omega t + \varphi)},$$

що відповідає прямій синхронній прецесії ротора з частотою ω та фазовим зміщенням по відношенню до дисбалансу φ .

Підставивши у рівняння прийнятий розв'язок, отримаємо:

$$z_0 e^{i\varphi} = a \frac{\omega^2}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - (1+a_1)\omega^2\right]^2 + (a_2\omega - q)^2}}.$$

де

$$\varphi = -\arctg \frac{a_2\omega - q}{\omega_0^2 - \omega^2(1+a_1)}.$$

Тобто розв'язок вимушених радіальних коливань ротора у щпаринних ущільненнях можна подати у вигляді:

$$z = A(i\omega)ae^{i\omega t}, \quad (27)$$

де

$$A(i\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{[\omega_0^2 - (1 + a_1)\omega^2]^2 + (a_2\omega - q)^2}} e^{-i \arctg \frac{a_2\omega - q}{\omega_0^2 - \omega^2(1 + a_1)}}.$$

Таким чином, переміщення центра мас ротора z є комплексною випадковою функцією, математичне очікування якої дорівнює:

$$m_z = M[Z(t)] = A(\omega)m_a e^{i(\omega t + \varphi(\omega))},$$

де

$$A(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{[\omega_0^2 - (1 + a_1)\omega^2]^2 + (a_2\omega - q)^2}}.$$

Вважаючи коливання ротора в щпаринних ущільненнях сталими стаціонарними, можна покласти $m_z = A(i\omega)m_a$.

Дисперсія переміщення визначатиметься за формулою

$$D_z = M \left[\overset{o}{Z}(t) \overset{o}{Z}^*(t) \right] = |A(\omega)|^2 D_a,$$

де $\overset{o}{Z}(t) = Z(t) - m_z = A(\omega)e^{i\omega t}(a - m_a)$ - центроване значення випадкового процесу, $\overset{o}{Z}^*(t')$ - комплексно-спряжена центрована величина.

Відповідно середнє квадратичне відхилення дорівнюватиме:

$$\sigma_z = |A(\omega)|\sigma_a.$$

Визначимо кореляційну функцію:

$$K_z(t, t') = M \left[\overset{o}{Z}(t) \overset{o}{Z}^*(t') \right] = A(\omega)^2 D_a e^{i\omega(t-t')} = |A(\omega)|^2 D_a e^{i\omega t}.$$

Оскільки математичне очікування та дисперсія не залежать від часу, а кореляційна функція є функцією одного аргументу, то $Z(t)$ є стаціонарною випадковою функцією. Тоді дисперсію можна також визначити за знайденою вище спектральною щільністю (наслідок формули Вінера-Хінчина):

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega.$$

За відомими параметрами випадкового переміщення z , можна визначити ймовірність неперевищення цієї функцією деякого заданого рівня. Так, якщо прийняти нормальний закон розподілу для дисбалансу (використовуючи центральну граничну теорему Ляпунова), то переміщення z також підкорятиметься нормальному закону, параметри якого m_z, D_z були визначені вище. Тоді ймовірність неперевищення переміщенням центра мас певного рівня визначатиметься за формулою:

$$P(z < z_0) = \int_0^{z_0} f(z) dz = \int_0^{z_0} \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz = \Phi\left(\frac{(z-m_z)}{\sigma_z}\right). \quad (28)$$

Для наведених вище параметрів системи ймовірність безвідмовної роботи (ймовірність неперевищення переміщеннями ротора величини середнього радіального зазору шпаринного ущільнення) склала $P_1 = 0,971$. Зі збільшенням середнього радіального зазору область безвідмовної роботи розширюється. Так, якщо зазор в ущільненні становить $H = 3 \cdot 10^{-4}$ м при тому самому значенні перепаду тиску, то $P_2 = 0,9997$, але збільшення зазору призводить до зменшення жорсткості системи і підвищення витрат рідини, тобто не є доцільним. Зі збільшенням дросельованого на ущільненні тиску ймовірність безвідмовної роботи також підвищується: для $H = 2,5 \cdot 10^{-4}$ м і $\Delta p = 2$ МПа - $P = 0,9996$.

Якщо у якості закону розподілу дисбалансу взяти експоненціальний закон, то у цьому випадку випадкове переміщення z також підкорятиметься експоненціальному закону $f(z) = b \exp(-b(z-a))$ з такими параметрами:

$$b = \sigma_z^{-1}, \quad a = m_z - \sigma_z.$$

Тоді ймовірність неперевищення переміщеннями центра мас величини зазору становитиме

$$P(z < z_0) = F(z_0) = 1 - \exp(-b(z_0 - a)) = 1 - \exp(-\sigma_z^{-1}(z_0 - m_z + \sigma_z)). \quad (29)$$

При $H = 2 \cdot 10^{-4}$ м і $\Delta p = 0,2$ МПа ця ймовірність становитиме $P_1 = 0,945$, при $H = 3 \cdot 10^{-4}$ м і $\Delta p = 0,2$ МПа - $P_2 = 0,992$, при $H = 2,5 \cdot 10^{-4}$ м і $\Delta p = 2$ МПа - $P = 0,998$.

ВИСНОВКИ

Шляхом розв'язку задачі течії рідини в зазорі шпаринного ущільнення з внутрішньою поверхнею ущільнення, що обертається та прецесує, отримані гідродинамічні радіальні сили та їх моменти, що діють на ротор з боку шару рідини. За допомогою теореми про зміну кількості руху системи отримані рівняння зв'язаних радіально-кутових коливань ротора в шпаринних ущільненнях, що дозволило розглянути задачу визначення ймовірнісних характеристик лінійної системи, що знаходиться під дією випадкового навантаження.

Як впливає з наведених оцінок, ймовірність безвідмовної роботи за критерієм неперевищення переміщеннями центра мас ротора величини середнього радіального зазору ущільнення є чутливою як до типу закону розподілу змушувальної сили, так і до параметрів самих шпаринних ущільнень. Використовуючи отримані в роботі вирази, можна розв'язувати задачу оптимізації, тобто визначати такі параметри системи "ротор-шпаринні ущільнення", що забезпечують її роботу у заданому діапазоні амплітуд вимушених коливань з мінімальною величиною витрат рідини через шпаринне ущільнення.

Запропонована методика може бути використана і при дослідженні коливань компресорних систем, при цьому в системі (24) відповідні коефіцієнти мають визначатися з розв'язку газодинамічної задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин / В.А. Марцинковский. – М.: Машиностроение, 1980. - 200 с.
2. Беда И.Н. Разработка уточненной модели и исследование динамических характеристик системы ротор-уплотнения: дис. канд. техн. наук: 01.02.06 / И.Н. Беда. - Москва, 1992. – 192 с.
3. Гулый А.Н. Гидродинамическая жесткость бесконтактных уплотнений / А.Н. Гулый // Вестник машиностроения. - 1987. - №2. - С. 21-25.
4. Марцинковский В.А. Гидродинамика дросселирующих каналов / В.А. Марцинковский. – Сумы: Изд-во Сумского госуниверситета, 2002. – 377 с.
5. Гулый А.Н. Разработка экспериментальных и теоретических методов анализа динамических параметров бесконтактных уплотнений: дис. канд. техн. наук: 01.02.06 / А.Н. Гулый. – Сумы, 1989. – 217 с.
6. Тарасевич Ю.Я. Нестационарный поток рідини в плоскому каналі з рухомою стінкою / Ю.Я. Тарасевич // Машинознавство. – 2003. - №1. – С. 31-36.
7. Тарасевич Ю.Я. Вероятностные характеристики расхода через щелевое уплотнение / Ю.Я. Тарасевич // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2005. - №4. – С.70-73.
8. Тарасевич Ю.Я. Розробка методів розрахунку вібраційного стану роторів у шпаринних ущільненнях: дис. канд. техн. наук: 05.02.09 / Ю.Я. Тарасевич. – Харьков, 2006. -187с.
9. Марцинковская Н.И., Марцинковский В.С., Хворост В.А. Расход через кольцевой зазор со случайным эксцентриситетом / Н.И. Марцинковская // Изв. ВУЗов, Сер. Энергетика. - 1980. - №6. – С. 104-106.
10. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем / В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1976. – 216с.
11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. - М.: Наука, 1969. - 576 с.