

УДК 539.3 : 534.1

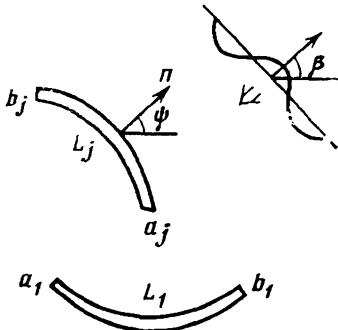
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН СМЕЩЕНИЙ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л.

Рассматривается антиплоская динамическая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с туннельными трещинами-разрезами. Соответствующая краевая задача сводится к сингулярному интегродифференциальному уравнению относительно скачков перемещений на разрезах. Строится асимптотика связанных механических и электромагнитных полей в окрестности особых точек. Приводятся результаты численной реализации алгоритма и некоторые качественные выводы.

Динамическая антиплоская задача для пьезоэлектрической среды с прямолинейным туннельным разрезом методом рядов рассмотрена в [1].

1. Рассмотрим отнесенную к кристаллофизическим осям x, y, z поперечно-изотропную пьезоэлектрическую среду (кристалл гексагональной системы $6mm$, поляризованная пьезокерамика), ослабленную туннельными вдоль оси z разрезами L_j ($j = 1, 2, \dots, k$).



Фиг. 1

Пусть на поверхностях полостей-разрезов задан постоянный вдоль оси z , гармонически изменяющийся во времени вектор напряжения $X_n^\pm = 0, Y_n^\pm = 0, Z_n^\pm = \text{Re} [Z^\pm e^{-i\omega t}]$, а из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига (фиг. 1)

$$(1.1) \quad w_0 = \text{Re} [W_0(x, y) e^{-i\omega t}]$$

Предполагаем, что L_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — простые разомкнутые дуги с кривизнами, удовлетворяющими условию H , а $Z^+ = -Z^- = Z$ — функции класса H на $L = \bigcup L_j$ [2].

В указанной постановке в среде возникают связанные механические и электромагнитные поля, соответствующие состоянию антиплоской деформации.

Полная система уравнений имеет вид [3]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \tau_{xz} &= c_{44}\partial_1 w - e_{15}E_x, & D_x &= e_{15}\partial_1 w + \epsilon_{11}E_x \\ \tau_{yz} &= c_{44}\partial_2 w - e_{15}E_y, & D_y &= e_{15}\partial_2 w + \epsilon_{11}E_y \\ \partial_1 &= \partial/\partial x, & \partial_2 &= \partial/\partial y \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \partial_1 \tau_{xz} + \partial_2 \tau_{yz} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$(1.4) \quad \partial_1 E_y - \partial_2 E_x + \frac{\mu_0 \mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad \partial_1 D_x + \partial_2 D_y = 0$$

$$\partial_2 H_z = \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \partial_1 H_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

Здесь (1.2) — уравнения состояния, (1.3) — уравнения движения, (1.4) уравнения Максвелла; τ_{xz}, τ_{yz} и w — касательные напряжения и перемещение вдоль оси z ; E_x, E_y, H_z и D_x, D_y — соответствующие компоненты напряженности электрического и магнитного полей, а также вектора

электрической индукции, c_{44} — модуль сдвига, e_{15} — пьезоэлектрическая постоянная, ϵ_{11} и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Предполагается, что внешние заряды отсутствуют и удельная проводимость среды равна нулю.

Электрические и магнитные краевые условия на берегах разрезов возьмем в виде

$$(1.5) \quad E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^-, \quad H_s^+ = H_s^-, \quad B_n^+ = B_n^-, \quad V = \mu_0 H$$

Здесь E_s и H_s — касательные компоненты векторов электрической и магнитной напряженности, D_n и B_n — нормальные компоненты векторов электрической и магнитной индукции.

В дальнейшем все вычисления проводим в электромагнитной системе единиц.

Вводя функцию Φ по формулам [1]

$$(1.6) \quad E_x = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \partial_1 w + \partial_2 \Phi, \quad E_y = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \partial_2 w - \partial_1 \Phi, \quad H_z = \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

приходим к уравнениям

$$(1.7) \quad \nabla^2 w - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$a = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho} (1 + \kappa_0^2)}, \quad \kappa_0^2 = \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11} c_{44}}, \quad c_\alpha^2 = \frac{1}{\epsilon_{11} \mu_0 \mu}$$

Например, для пьезокерамики *PZT-4* величина $c_\alpha \approx 1,11 \cdot 10^7$ м/с. Поэтому для не очень больших разрезов можно принять, что $\nabla^2 \Phi = 0$.

В силу (1.1), (1.2), (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= c_{44} (1 + \kappa_0^2) \partial_1 w - e_{15} \partial_2 \Phi \\ \tau_{yz} &= c_{44} (1 + \kappa_0^2) \partial_2 w + e_{15} \partial_1 \Phi, \quad w = w_0 + w_1 \\ D_x &= \epsilon_{11} \partial_2 \Phi, \quad D_y = -\epsilon_{11} \partial_1 \Phi, \quad D_z = 0 \end{aligned}$$

Здесь w_1 характеризует возмущения поля перемещений, обусловленные наличием разрезов.

Полагая (β — угол между нормалью к фронту волны и осью Ox)

$$\begin{aligned} w &= \text{Re} [W(x, y) e^{-i\omega t}], \quad \Phi = \text{Re} [F(x, y) e^{-i\omega t}] \\ W &= W_0 + W_1, \quad W_0 = \tau e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} \\ \alpha_1 &= \gamma_2 \cos \beta, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \sin \beta, \quad \gamma_2 = \omega/a \end{aligned}$$

представим краевые условия на берегах L_j в виде

$$(1.8) \quad \begin{aligned} c_{44} (1 + \kappa_0^2) \left\{ e^{i\psi} \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)^\pm + e^{-i\psi} \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} \right)^\pm \right\} - \\ - i e_{15} \left\{ e^{i\psi} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^\pm - e^{-i\psi} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right)^\pm \right\} = \pm Z^\pm \\ i \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \left\{ e^{i\psi} \left[\frac{\partial W}{\partial \zeta} \right] - e^{-i\psi} \left[\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} \right] \right\} + e^{-i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] + e^{i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right] = 0 \\ e^{i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] - e^{-i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right] = 0 \\ \zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta, \quad \zeta \in L_j, [f] = f^+ - f^- \quad (j = 1, 2, \dots \\ \dots, k) \end{aligned}$$

Верхний знак относится к левому берегу L_j (при движении от его начала a_j к концу b_j), ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу и осью Ox ; условия непрерывной продолжимости через L_j магнитных величин выполняются автоматически.

2. Для вывода интегрального уравнения поставленной краевой задачи необходимо построить интегральные представления функций W и F . Это

легко делается при помощи стандартных приемов теории потенциала. Однако здесь приходится применять процедуру регуляризации расходящихся интегралов [4]. Для избежания этого построим интегральные представления не самих функций, а первых производных от них.

Наряду с основным состоянием системы введем вспомогательное состояние, характеризуемое наличием в некоторой внутренней точке области (x_0, y_0) сосредоточенного функционала $Q\delta(x - x_0, y - y_0)$, где Q — погонная интенсивность сосредоточенных на линии $x = x_0, y = y_0, -\infty < z < \infty$ усилий.

Вычислив суммы произведений уравнения Гельмгольца для i -го состояния на соответствующую производную от амплитуды перемещений j -го состояния ($i \neq j; i, j = 1, 2$), получим выражение типа дивергенции. Производя интегрирование по области, занятой телом, с последующим применением формулы Грина, находим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial z} &= \frac{c_{41}}{Q} \int_L \left\{ \frac{\gamma_2^2}{2} e^{-i\psi} E g + i p e^{i\psi} \frac{\partial E}{\partial \bar{\zeta}} \right\} ds \\ \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{c_{41}}{Q} \int_L \left\{ \frac{\gamma_2^2}{2} e^{i\psi} E g - i p_1 e^{-i\psi} \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right\} ds \\ p &= p(\zeta) = -2i \left[\frac{\partial W_1}{\partial \bar{\zeta}} \right], \quad p_1 = p_1(\zeta) = 2i \left[\frac{\partial W_1}{\partial \zeta} \right] \\ g &= g(\zeta) = [W_1], \quad E = E(x - \xi, y - \eta) = -\frac{iQ}{4c_{14}} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) \\ r &= |z - \zeta|, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L \end{aligned}$$

Здесь $[\partial W_1 / \partial \zeta]$, $[\partial W_1 / \partial \bar{\zeta}]$ и $[W_1]$ — скачки соответствующих величин на L , ds — элемент дуги контура L , $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода n -го порядка; производные от искомой функции определяются во внутренней точке области (x, y) .

Представления (2.1) удовлетворяют условию излучения [5] и согласованы с интегральным представлением для W_1 вида

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= c_{44} (1 + \kappa_0^2) \int_L \left\{ g \left(e^{i\psi} \frac{\partial E}{\partial \bar{\zeta}} + e^{-i\psi} \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{i}{2} (p e^{i\psi} - p_1 e^{-i\psi}) E \right\} ds \end{aligned}$$

Функцию F представим следующим образом:

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\zeta) \ln(\zeta - z) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{f_1(\bar{\zeta})} \ln(\bar{\zeta} - \bar{z}) d\bar{\zeta}$$

Смысл функций f и f_1 выяснен ниже.

Подставляя предельные значения функций (2.1) и производных $\partial F / \partial z$ и $\partial F / \partial \bar{z}$ при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ в краевые условия (1.8), находим

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p(\zeta) &= -e^{-i\psi} \left[\frac{\partial W_1}{\partial s} \right], \quad p_1(\zeta) = -e^{i\psi} \left[\frac{\partial W_1}{\partial s} \right] \\ f(\zeta) &= -\frac{e_{15}}{2\epsilon_{11}} p(\zeta), \quad \overline{f_1(\bar{\zeta})} = -\frac{e_{15}}{2\epsilon_{11}} p_1(\zeta) \end{aligned}$$

Механическое краевое условие в (1.8) при учете (2.2) приводит к сингулярному интегродифференциальному уравнению

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \int_L \left[\frac{\partial W_1}{\partial s} \right] g(\zeta, \zeta_0) ds + \int_L [W_1] G(\zeta, \zeta_0) ds &= N(\zeta_0) \\ g(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \left(\frac{i \exp(i\psi_0)}{\zeta - \zeta_0} \right) + \frac{\gamma_2}{2} (1 + \kappa_0^2) H_1(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \psi_0) \end{aligned}$$

$$G(\xi, \zeta_0) = \frac{\gamma_2^2}{2} (1 + \kappa_0^2) H_0^{(1)}(\gamma_2 r_0) \cos(\psi - \psi_0)$$

$$N(\zeta_0) = \frac{2i}{c_{44}} Z(\zeta_0) - 2\tau(1 + \kappa_0^2) \gamma_2 \exp[-i(\alpha_1 \xi_0 + \alpha_2 \eta_0)] \cos(\psi_0 - \beta)$$

$$H_1(\gamma_2 r) = \frac{2i}{\pi \gamma_2 r} + H_1^{(1)}(\gamma_2 r), \quad r_0 = |\xi - \zeta_0|$$

$$\alpha_0 = \arg(\xi - \zeta_0), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Для однозначного определения решения уравнения (2.3) в классе h_0 [2] необходимо добавить условия

$$(2.4) \quad \int_{L_j} \left[\frac{\partial W_1}{\partial s} \right] ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

3. Пусть в среде имеется один разрез L , параметрическое уравнение которого $\xi = \xi(\delta)$, $\eta = \eta(\delta)$ ($-1 \leq \delta \leq 1$). В соответствии с этим решение уравнений (2.3), (2.4) представим так:

$$(3.1) \quad \left[\frac{\partial W_1}{\partial s} \right] = \frac{\Omega_0(\delta)}{s'(\delta) \sqrt{1 - \delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta}, \quad \Omega_0(\delta) \in H[-1, 1]$$

Асимптотический анализ представлений (2.1) при учете соотношений (1.2), (3.1) дает следующее выражение для напряжений на продолжении за вершину разреза:

$$(3.2) \quad \tau_{xz} + i\tau_{yz} = -c_{44} e^{i\psi(\mp 1)} \frac{\operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\mp 1) \}}{2 \sqrt{2rs'(\mp 1)}}$$

Здесь r — расстояние до вершины; верхний знак относится к началу разреза, нижний — к концу.

Динамический коэффициент интенсивности механических напряжений [6] определяется формулой

$$(3.3) \quad k_3 = \sqrt{2\pi r} \tau_n = -\frac{c_{44}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\mp 1) \}$$

Асимптотика нормальной составляющей вектора электрической индукции на продолжении за вершину разреза такова:

$$(3.4) \quad D_n = D_x \cos \psi(\mp 1) + D_y \sin \psi(\mp 1) = -e_{15} \frac{\operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\mp 1) \}}{2 \sqrt{2rs'(\mp 1)}}$$

Векторы напряженности электрического и магнитного полей ограничены. Объясняется это тем, что в статической задаче электроупругости о продольном сдвиге поперечно-изотропной пьезоэлектрической среды механические и электрические поля не связаны между собой и, следовательно, при действии внешних механических усилий электрическое поле отсутствует. Поэтому в динамической задаче при механическом нагружении сингулярная часть вектора электрической напряженности равна нулю.

4. Уравнение (2.3) в совокупности с дополнительным условием (2.4) реализовано численно по схеме типа Мультиппа [7] для случая, когда в пьезокерамике PZT-5 имеется одна параболическая трещина $\xi = p_1 \delta$, $\eta = p_2 \delta^2$, $\delta \in [-1, 1]$. Приближенные значения функции $\Omega_0(\delta)$ в чебышевских узлах интерполяции вычислялись при числе узлов $n = 15, 21$ и 31 . Дальнейшее увеличение числа разбиений практически не уточняло результатов.

Пусть $\tau = 0$ (излучение из бесконечности отсутствует), а $Z = \text{const.}$ Изменение относительной величины $\alpha^+ = c_{44} \cdot |\Omega_0(1)| / (2Z \sqrt{s'(1)})$ в зависимости от нормализованного волнового числа $\gamma_2 l$ ($2l$ — длина трещины) при $p_1 = 1$ показано на фиг. 2 сплошными линиями 1, 2, 3 для значений $p_2 = 0; 0,5; 1$ соответственно. Очевидно, $\alpha^- = \alpha^+$.

Зная величины α^\mp и $\delta^\mp = \arg[-\Omega_0(\mp 1)]$, можно определить коэффициент интенсивности k_3 по формуле

$$k_3 = Z \sqrt{\pi l} \alpha^\mp \cos(\omega t - \delta^\mp)$$

Изменение относительной величины $\alpha^+ = c_{44} |\Omega_0(1)| / (2T_{yz}^\circ \sqrt{ls'(1)})$ для случая, когда берега разреза свободны от сил ($Z = 0$), а из бесконечности вдоль оси y излучается монохроматическая волна сдвига ($\tau \neq 0$), показано на фиг. 2 штриховыми линиями 1, 2, 3 для $p_2 = 0; 0,5$ и 1 соответственно. Здесь T_{yz}° — модуль амплитуды напряжения τ_{yz} в падающей волне.

Динамический коэффициент интенсивности k_3 определяется в этом случае по формуле

$$k_3 = \sqrt{\pi l} T_{yz}^\circ \alpha^\mp \cos(\omega t - \delta^\mp)$$

Как следует из соотношений (3.2) и (3.3), величина $\sqrt{2\pi r D_n}$ в окрестности вершины трещины пропорциональна k_3 . Для определения D_n можно воспользоваться графиками на фиг. 2.

Расчеты показывают, что с увеличением кривизны трещины $\max \alpha^+$ смещается по $\gamma_2 l$ вправо, его величина увеличивается в первом расчетном случае и уменьшается во втором. В этом последнем случае локальные максимумы функции $\alpha^+(\gamma_2 l) = \alpha^-(\gamma_2 l)$ чередуются с локальными минимумами, затухая с увеличением $\gamma_2 l$.

Для оценки влияния сопряженного электромагнитного поля на механический коэффициент интенсивности напряжений приведем следующие

данные для параболической трещины ($\xi = \delta, \eta = p_2 \delta^2, -1 \leq \delta \leq 1, Z = \text{const}, \tau = 0$):

p_2	0	0,5	1	0	0,5	1
$\gamma_2 l$	0,9	1,1	1,35	0,75	0,9	1,1
$\max \alpha^+$	1,20	1,30	1,65	1,27	1,40	1,76

Результаты, приведенные слева, соответствуют изотропной среде, справа — пьезокерамике $PZT = 5$.

Обратное влияние можно считать существенным, так как внешние механические нагрузки вызывают сингулярное поле электрического смещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Динамическая антиплоская задача для пьезоэлектрической среды. — Тр. Моск. ин-та хим. машиностроения, 1974, № 56, с. 3—13.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
3. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 388 с.
4. Фильштинский Л. А. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига). — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1327—1330.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974, 640 с.
7. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.

Сумы

Поступила в редакцию
27.III.1984