

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Э. И. Григолюк, Л. М. Куршин, Л. А. Фильштинский  
(Новосибирск)

Описаны основные соотношения метода решения двоякопериодической задачи теории упругости для случая, когда область представляет собой внешность конгруэнтной системы одинаковых круглых отверстий. Даны представления комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  для однородной и неоднородной бигармонических задач. Рассмотрены однородные бигармонические задачи плоской теории упругости и изгиба, а также одна неоднородная бигармоническая задача изгиба.

Приведено замкнутое решение задачи об изгибе плоскости, опертой на правильную треугольную систему точечных опор, равномерной поперечной нагрузкой. Выписаны основные соотношения задачи приведения двоякопериодической решетки к сплошной пластине, и в качестве иллюстрации даны формулы для определения приведенных упругих параметров правильных решеток в случае растяжения и изгиба. Представлены графики коэффициентов концентрации напряжений и кривые приведенных модулей упругости для правильных решеток.

В работе изложен метод, позволяющий с единой точки зрения строить решения различных двоякопериодических задач для неограниченной упругой плоскости, ослабленной конгруэнтной системой одинаковых круглых отверстий (двоякопериодической решетки).

**§ 1. Некоторые предшествующие результаты.** По-видимому, первым общим исследованием двоякопериодической задачи явилась работа Койтера [15], который рассмотрел первую основную задачу для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых отверстий произвольного очертания и свел ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Некоторые случаи растяжения двоякопериодических решеток с правильным расположением отверстий были изучены в работах [10, 13]. Различные приближенные приемы приведения некоторых типов двоякопериодических решеток к сплошной пластине рассмотрены в работах [2—4, 12—14].

Задача термоупругости для некоторых типов двоякопериодических решеток исследована в работе [8].

**§ 2. Плоская задача для решетки.** Обозначим через  $\lambda$  радиус отверстий и через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — основные периоды решетки, причем, как показано на рис. 1,

$$\omega_1 = 2; \quad \omega_2 = 2le^{i\alpha}; \quad l > 0; \quad \text{Im } \omega_2 > 0.$$

Выразим напряжения через две аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  по формулам Колосова—Мусхелишвили [6]. Из условия двоякой периодичности правых частей выражений

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re } \Phi(z), \tag{2.1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\}$$

получаем

$$\Phi(z + \omega_1) = \Phi(z); \quad \Phi(z + \omega_2) = \Phi(z), \quad (2.2)$$

$$\Psi(z + \omega_1) = \Psi(z) - \bar{\omega}_1 \Phi'(z); \quad \Psi(z + \omega_2) = \Psi(z) - \bar{\omega}_2 \Phi'(z).$$

Условия (2.2) будут выполнены, если функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  представить в виде\* [5, 9]

$$\Phi(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} p^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (2.3)$$

$$\Psi(z) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} p^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\text{Im } \alpha_{2k} = \text{Im } \beta_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Здесь  $p^{(2k)}(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса и ее последовательные четные производные;  $Q(z)$ ,  $Q^{(2k+1)}(z)$  — мероморфная функция  $Q(z)$  и ее последовательные нечетные производные. Функции  $p(z)$  и  $Q(z)$  имеют вид

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{P^2}; \quad Q(z) = \sum'_{m,n} \left\{ \frac{\bar{P}}{(z-P)^2} - 2z \frac{\bar{P}}{P^3} - \frac{\bar{P}}{P^2} \right\}. \quad (2.4)$$

Можно показать, что имеют место соотношения [9]

$$Q^{(k)}(z + \omega_1) = Q^{(k)}(z) + \bar{\omega}_1 p^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$Q^{(k)}(z + \omega_2) = Q^{(k)}(z) + \bar{\omega}_2 p^{(k)}(z); \quad (2.5)$$

$$Q(z + \omega_1) = Q(z) + \bar{\omega}_1 p(z) + \gamma_1; \quad 2Q^{(2k)}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \bar{\omega}_1 p^{(2k)}\left(\frac{\omega_1}{2}\right);$$

$$Q(z + \omega_2) = Q(z) + \bar{\omega}_2 p(z) + \gamma_2; \quad 2Q^{(2k)}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \bar{\omega}_2 p^{(2k)}\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

С учетом равенств (2.5) нетрудно показать, что условия (2.2) представлениями (2.3) удовлетворяются автоматически.

Для определения коэффициентов в представлениях (2.3) необходимо привлечь граничные условия на краях отверстий и статические условия в пределах параллелограмма периодов, являющиеся аналогом условий на бесконечности для плоскости с конечным числом отверстий.

Пусть

$$g(z) = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}; \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz; \quad \psi(z) = \int \Psi(z) dz. \quad (2.6)$$

\* Для простоты мы рассматриваем симметричные относительно координатных осей  $x$  и  $y$  двойкопериодические задачи.

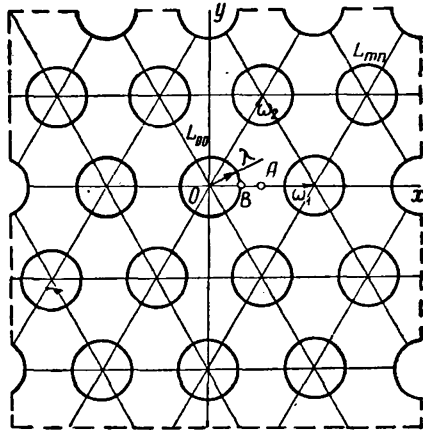


Рис. 1.

Учитывая представления (2.3) и формулы (2.5), получим

$$g(z + \omega_1) - g(z) = \delta_1^*; \quad g(z + \omega_2) - g(z) = \delta_2^*, \quad (2.7)$$

где

$$\delta_1^* = 2\alpha_0\omega_1 + \beta_0\bar{\omega}_1 - \alpha_2\lambda^2(\delta_1 + \bar{\gamma}_1) - \beta_2\lambda^2\bar{\delta}_1,$$

$$\delta_2^* = 2\alpha_0\omega_2 + \beta_0\bar{\omega}_2 - \alpha_2\lambda^2(\delta_2 + \bar{\gamma}_2) - \beta_2\lambda^2\bar{\delta}_2.$$

Полагая средние напряжения в решетке равными нулю\*, получим, используя известное выражение главного вектора всех сил, действующих вдоль дуги  $AB$ , через функцию  $g(z)$

$$\delta_1^* = 0; \quad \delta_2^* = 0. \quad (2.8)$$

Система (2.8) позволяет выразить постоянные  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  через постоянные  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ .

§ 3. Постановка основных граничных задач для решетки. В случае первой основной задачи на кромках отверстий задается одинаковая для всех отверстий самоуравновешенная нагрузка.

В случае второй основной задачи на заданные смещения должны быть наложены определенные условия. Пусть [6]

$$h(z) = 2G(u + iv) = \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} \quad (3.1)$$

— смещения в решетке. Учитывая представления (2.3) и соотношения (2.5), получим

$$h(z + \omega_1) - h(z) = h_1; \quad h(z + \omega_2) - h(z) = h_2, \quad (3.2)$$

где

$$h_1 = (\kappa - 1)\alpha_0\omega_1 - \beta_0\bar{\omega}_1 + \alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_1 - \kappa\delta_1) + \lambda^2\beta_2\bar{\delta}_1,$$

$$h_2 = (\kappa - 1)\alpha_0\omega_2 - \beta_0\bar{\omega}_2 + \alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_2 - \kappa\delta_2) + \lambda^2\beta_2\bar{\delta}_2,$$

т. е. смещения в решетке — квазипериодические функции.

Таким образом, смещения, заданные на системе контуров  $L_{mn}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$ ), должны иметь вид

$$2G(u + iv) = h(\tau) + mh_1 + nh_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots), \quad (3.3)$$

где  $h(\tau)$  — смещения, заданные на контуре  $L_{0,0}$ .

Функция  $h(\tau)$  должна быть подчинена также условиям симметрии вида

$$h(-\theta) = \overline{h(\theta)}; \quad h(\theta + \pi) = -h(\theta), \quad (3.4)$$

где  $\theta$  — полярный угол произвольной точки  $\tau \in L_{0,0}$ ;  $\overline{h(\theta)}$  — величина, комплексно сопряженная к  $h(\theta)$ .

При указанных условиях, обе основные задачи можно объединить в одну задачу о разыскании в области двух регулярных функций заданного вида (2.3) по одному функциональному соотношению на контуре  $L_\infty$

$$\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - \{\tau\overline{\Phi'(\tau)} + \Psi(\tau)\} e^{2i\theta} = f_1 + if_2; \quad \tau = \lambda e^{i\theta}. \quad (3.5)$$

Здесь величина  $\varepsilon$  и правая часть имеют различные значения для той или иной основной задачи.

Решение указанной задачи можно легко провести методом рядов [11], предварительно разложив представления (2.3) в ряды Лорана в окрестности

\* Если средние напряжения в решетке отличны от нуля, то достаточно воспользоваться принципом наложения, чтобы прийти к задаче с нулевыми средними напряжениями в решетке.

нуля. В результате, задача сводится к бесконечной алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов (2.3).

Вопросы сходимости бесконечной алгебраической системы и представлений (2.3) были рассмотрены в работе [9], где установлено, что при некоторых предположениях относительно нагрузки и при условии, что отверстия в решетке не соприкасаются и не пересекаются, представления (2.3) всегда сходятся к решению задачи.

**§ 4. Изгиб решеток.** Здесь можно различать два случая: задачи с двоякопериодическим распределением напряжений и задачи с двоякопериодическим распределением как напряжений, так и смещений. К первому кругу задач относятся задачи изгиба решетки самоуравновешенной системой контурных усилий, приложенных на кромках отверстий. Ко второму кругу задач относятся задачи изгиба заземленной или свободно опертой по кромкам отверстий решетки двоякопериодической поперечной нагрузкой.

Первая из указанных групп задач изгиба решетки ничем, по существу, не отличается от рассмотренной выше плоской задачи. Представления типа (2.3) остаются в силе, функциональное соотношение на контуре  $L_{00}$  для потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  имеет вид (3.5).

Некоторое отличие имеется в статических условиях на бесконечности. Эти условия сводятся к соотношениям

$$\operatorname{Im} \Phi(z + \omega_1) - \operatorname{Im} \Phi(z) = 0; \quad \operatorname{Im} \Phi(z + \omega_2) - \operatorname{Im} \Phi(z) = 0; \quad (4.1)$$

$$[z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} - n\varphi(z)]_z^{z+\omega_1} = 0; \quad [z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} - n\varphi(z)]_z^{z+\omega_2} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь  $n$  — известная постоянная.

Первые два условия выполняются автоматически в силу периодичности  $\Phi(z)$ . Из двух последних условий получим два уравнения, выражающие постоянные  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  в представлениях (2.3) через постоянные  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ . Система уравнений для определения коэффициентов  $\alpha_{2k+2}$  и  $\beta_{2k+2}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) имеет тот же вид, что и в плоской задаче.

Метод решения задачи об изгибе решетки с двоякопериодическим распределением смещений проиллюстрируем на задаче об изгибе решетки, заземленной по кромкам отверстий, равномерным поперечным давлением.

Задача состоит в определении функции  $w(x, y)$  по уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{q}{D} \quad (4.3)$$

и граничным условиям

$$w(\tau) = 0; \quad \frac{\partial w(\tau)}{\partial n} = 0, \quad (4.4)$$

где  $q/D$  — известная константа;  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$ ;  $\lambda$  — радиус отверстий в решетке;  $\theta$  — аргумент точки  $\tau \in L_{00}$ .

Функция  $w(x, y)$  может быть выражена через две произвольные аналитические в области, занятой решеткой, функции  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$  так:

$$w(x, y) = \frac{qz^2\bar{z}^2}{64D} + \frac{2q}{D} \operatorname{Re} \{z\overline{\varphi(z)} + \chi(z)\}. \quad (4.5)$$

Граничные условия задачи представим в виде

$$\frac{\bar{\tau}\tau}{32} + \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - \{\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)\} e^{2i\theta} = 0, \quad (4.6)$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z); \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \chi'(z), \quad \tau \in L_{m,n}.$$

Моменты и поперечные силы в решетке могут быть выражены через функции  $\Phi$  и  $\Psi$  следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= -q(1 + \mu) \left\{ \frac{z\bar{z}}{4} + 8\operatorname{Re} \Phi(z) \right\}; \\ M_y - M_x + 2iH_{xy} &= q(1 - \mu) \left\{ \frac{z^2}{8} + 4z\bar{\Phi}'(z) + 4\Psi(z) \right\}; \\ N_x - iN_y &= -\frac{qz}{2} - 2q\Phi'(z). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь  $M_x$ ,  $M_y$  — соответствующие моменты;  $N_x$ ,  $N_y$  — поперечные силы;  $\mu$  — коэффициент Пуассона материала решетки.

По смыслу задачи функция (4.5) должна быть двоякопериодической. Для ее построения рассмотрим несколько первых интегралов от функции (2.4)

$$\begin{aligned} v'(z) = \zeta(z) &= -\int p(z) dz; \quad \xi(z) = \int v(z) dz; \\ \zeta_*(z) &= -\int Q(z) dz; \quad v_*(z) = \int \zeta_*(z) dz; \quad \xi_*(z) = \int v_*(z) dz. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Вводя сигма-функцию Вейерштрасса и используя известные соотношения

$$\{\ln \sigma(z)\}' = \zeta(z); \quad \sigma(z + \omega_j) = -\sigma(z) e^{\delta_j \left( z + \frac{\omega_j}{2} \right)} \quad (j = 1, 2), \quad (4.9)$$

получим

$$\begin{aligned} v(z + \omega_1) - v(z) &= \delta_1 z + \frac{\delta_1 \omega_1}{2} - \pi i; \\ v(z + \omega_2) - v(z) &= \delta_2 z + \frac{\delta_2 \omega_2}{2} - \pi i. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Далее, интегрируя соотношения (2.5), найдем

$$\begin{aligned} \zeta_*(z + \omega_1) - \zeta_*(z) &= \bar{\omega}_1 \zeta(z) - \gamma_1 z - \gamma_1^*; \\ \zeta_*(z + \omega_2) - \zeta_*(z) &= \bar{\omega}_2 \zeta(z) - \gamma_2 z - \gamma_2^*, \end{aligned} \quad (4.11)$$

причем, в силу четности  $\zeta_*(z)$ , будем иметь соотношения

$$\gamma_1^* = \frac{1}{2}(\gamma_1 \omega_1 - \delta_1 \bar{\omega}_1); \quad \gamma_2^* = \frac{1}{2}(\gamma_2 \omega_2 - \delta_2 \bar{\omega}_2). \quad (4.12)$$

Аналогичные соотношения можно получить и для других функций (4.8).

Положим теперь

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0(z) + \Phi_1(z); \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z); \\ \Phi_0(z) &= A_1 + 3A_2 z^2 + A_0 v(z); \quad \Psi_0(z) = 2B_1 + 12B_2 z^2 - A_0 \zeta_*(z); \end{aligned}$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} p^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (4.13)$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} p^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Можно показать, что представления (4.13) при определенном образом подобранных постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_0$ ,  $B_1$  и  $B_2$  действительно дают двоякопериодическую функцию (4.5). При этом система граничных условий (4.6) вырождается в одно функциональное соотношение на контуре произвольного отверстия  $L_{mn}$ , например, на контуре  $L_{00}$ .

Дальнейшее решение задачи ничем не отличается от решения плоской задачи для двоякопериодической решетки.

Интересно отметить, что для случая, когда радиус отверстий в решетке равен нулю (плоскость опирается на двоякопериодическую систему точечных опор) мы получим точное решение задачи в замкнутом виде. Это решение, например, для правильной треугольной решетки имеет вид

$$\omega(x, y) = \frac{qz^2 \bar{z}^2}{64D} + \frac{2q}{D} \operatorname{Re} \{ A_1 z \bar{z} + A_0 z \bar{\xi}(z) - A_0 \bar{\xi}_*(z) \}. \quad (4.14)$$

Здесь  $A_1$  и  $A_0$  — известные постоянные; функции  $\xi(z)$  и  $\xi_*(z)$  заданы формулами (4.8).

Функция (4.14) дифференцируема сколько угодно раз и, следовательно, может дать ответ на вопрос о концентрации напряжений вблизи опор. Это обстоятельство дает известные преимущества решению типа (4.14) по сравнению с существующими решениями этой задачи в двойных тригонометрических рядах [1].

Из приведенных выше соображений следует, что указанный метод может быть применен для решения как однородных, так и неоднородных бигармонических двоякопериодических задач. При этом, в случае однородной задачи, решения представляются в рядах по функциям (2.4); в случае неоднородной задачи к системе функций (2.4) необходимо присоединить несколько первых интегралов от функций  $p(z)$  и  $Q(z)$ .

С помощью указанного метода было решено и доведено до чисел большое количество задач растяжения и изгиба решеток.

**§ 5. Приведение к сплошной пластине.** Результаты решения двоякопериодических задач для решетки могут быть использованы при постановке и решении технической важной задачи приведения решетки к эквивалентной ей, в смысле жесткости, сплошной плоскости.

Пусть в решетке имеют место средние напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\tau_{12} = 0$ . Комплексные потенциалы имеют, очевидно, вид [7]

$$\Phi_s(z) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} + \Phi(z); \quad \Psi(z) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \Psi(z), \quad (5.1)$$

где  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  определены рядами (2.3) и описывают двоякопериодическую задачу с нулевыми средними напряжениями.

Смещения в решетке даются формулой [6]

$$h_s(z) = 2G(u + iv) = \kappa \Phi_s(z) - \overline{z \Phi_s(z)} - \overline{\Psi_s(z)}, \quad (5.2)$$

где

$$\Phi_s(z) = \int \Phi_s(z) dz; \quad \Psi_s(z) = \int \Psi_s(z) dz.$$

Учитывая соотношения (3.2), (5.1) и (5.2), находим

$$2G\Omega_j = h_s(z + \omega_j) - h_s(z) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} \omega_j (\kappa - 1) - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \bar{\omega}_j +$$

$$+ \lambda^2 \alpha_2 (\bar{\nu}_j - \kappa \delta_j) + \lambda^2 \beta_2 \bar{\delta}_j + (\kappa - 1) \alpha_0 \omega_j - \beta_0 \bar{\omega}_j. \quad (j = 1, 2). \quad (5.3)$$

Соотношения (5.3) устанавливают квазипериодичность смещений (5.2). Это обстоятельство делает принципиально возможной постановку задачи приведения в чистом виде.

Действительно, из приведенных выражений видно, что смещения в сплошной плоскости в условиях однородного равномерного поля напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  представляют собой квазипериодические функции. Таким образом, появляется возможность привести в соответствие смещения в решетке, с одной стороны, и в сплошной плоскости, с другой.

Смещения в сплошной плоскости с учетом закона Гука для ортотропной среды имеют вид

$$R(z) = u + iv = \frac{z}{2} \left( \frac{1 - \mu_1^*}{E_1^*} \sigma_1 + \frac{1 - \mu_2^*}{E_2^*} \sigma_2 \right) + \frac{\bar{z}}{2} \left( \frac{1 + \mu_1^*}{E_1^*} \sigma_1 - \frac{1 + \mu_2^*}{E_2^*} \sigma_2 \right). \quad (5.4)$$

Здесь  $E_1^*$ ,  $E_2^*$  — соответственно модули упругости первого рода в направлении главных осей  $x$  и  $y$ ;  $\mu_1^*$  и  $\mu_2^*$  — соответствующие коэффициенты Пуассона;  $E_1^* \mu_2^* = E_2^* \mu_1^*$ .

Из (5.4) получим

$$\Omega_j^* = R(z + \omega_j) - R(z) = \frac{\omega_j}{2} \left( \frac{1 - \mu_1^*}{E_1^*} \sigma_1 + \frac{1 - \mu_2^*}{E_2^*} \sigma_2 \right) + \frac{\bar{\omega}_j}{2} \left( \frac{1 + \mu_1^*}{E_1^*} \sigma_1 - \frac{1 + \mu_2^*}{E_2^*} \sigma_2 \right) \quad (j = 1, 2). \quad (5.5)$$

Назовем двоякопериодическую решетку и сплошную плоскость эквивалентными, если имеют место равенства

$$\Omega_1 = \Omega_1^*; \quad \Omega_2 = \Omega_2^*. \quad (5.6)$$

Равенства (5.6) физически означают, что смещения произвольной точки  $z$  относительно конгруэнтной ей точки  $z + m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ ) в решетке и в сплошной плоскости одинаковы.

Подставив в равенства (5.6) выражения (5.3) и (5.5), получим полную систему уравнений для определения трех независимых упругих параметров эквивалентной сплошной плоскости  $E_1^*$ ,  $E_2^*$  и  $\mu_1^*$ .

Соответствующие результаты приведены в работе [9]. Здесь же в качестве примера дадим формулы для упругих параметров правильной треугольной решетки\*:

$$\frac{E_1^*/(1 - \mu_1^*)}{E/(1 - \mu)} = \left\{ 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\lambda^2 \beta_2}{1 - \mu} \right\}^{-1}; \quad \frac{E_1^*/(1 + \mu_1^*)}{E/(1 + \mu)} = \left\{ 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\lambda^2 \alpha_2}{1 + \mu} \right\}^{-1}; \quad (5.7)$$

$$E_1^* = E_2^*; \quad \mu_1^* = \mu_2^*.$$

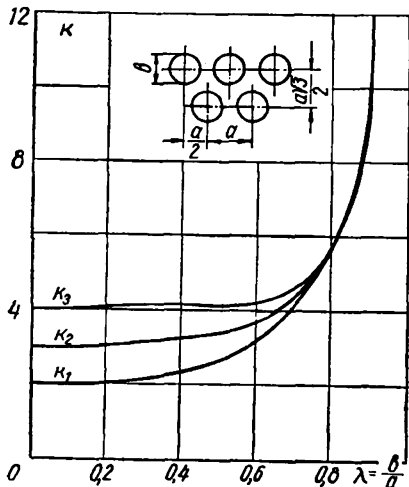
В (5.7)  $E$  и  $\mu$  — модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона

\* Отметим, что правильная треугольная решетка может быть приведена к изотропной эквивалентной сплошной плоскости, т. е. она изотропна в смысле приведенных упругих параметров. Квадратная решетка в этом смысле ортотропна.

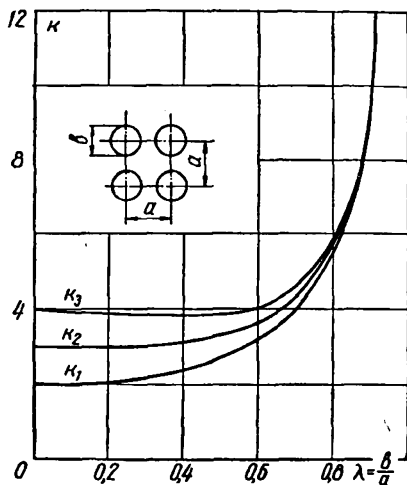
материала решетки;  $\lambda$  — отношение диаметра отверстия к шагу; постоянные  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  — коэффициенты при функциях  $p(z)$  и  $Q(z)$  в представлениях (2.3).

Все предыдущие рассуждения почти полностью можно перенести на задачу приведения для двоякопериодической решетки в условиях изгиба.

Здесь легко показать, что квазипериодической функцией является комбинация  $\partial\omega/\partial x + i\partial\omega/\partial y$ , где  $\omega(x, y)$  — прогиб решетки. Приравнявая соответствующие приращения указанной функции при переходе от точки  $z$



Р и с. 2.



Р и с. 3.

к конгруэнтной ей точке в решетке и в сплошной плоскости, получим, как и выше, необходимую систему уравнений для определения приведенных упругих параметров эквивалентной сплошной плоскости.

В качестве иллюстрации запишем формулы для определения приведенных упругих параметров правильной треугольной решетки

$$\frac{E_1^*/(1 - \mu_1^*)}{E/(1 - \mu)} = \left\{ 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \beta_2 \lambda^2 \right\}^{-1}; \quad \frac{E_1^*/(1 + \mu_1^*)}{E/(1 + \mu)} = \left\{ 1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \alpha_2 \lambda^2 \right\}^{-1};$$

$$E_1^* = E_2^*; \quad \mu_1^* = \mu_2^*. \tag{5.8}$$

Здесь постоянные  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  должны быть определены из решения соответствующей двоякопериодической задачи изгиба решетки.

Отметим весьма важное обстоятельство. Приведенные упругие параметры зависят только от двух первых коэффициентов в представлениях потенциалов (2.3). Разрешающая же система уравнений относительно коэффициентов (2.3) имеет такую структуру, что в основном диапазоне изменения относительного размера решетки  $\lambda$  для определения первого коэффициента  $\alpha_2$  достаточно урезать систему до одного уравнения, для определения двух первых коэффициентов  $\alpha_2$  и  $\alpha_4$  — до двух уравнений и т. д.

Таким образом, указанное обстоятельство вносит существенное облегчение в вычисление приведенных упругих параметров.

**§ 6. Результаты расчетов.** На рис. 2—3, для правильной треугольной и квадратной решеток соответственно, представлены коэффициенты концентрации напряжений при всестороннем растяжении ( $k_1$ ), при одноосном растяжении ( $k_2$ ) и при чистом сдвиге ( $k_3$ )\*.

\* Под чистым сдвигом подразумевается случай, когда  $\sigma_1 = -\sigma_2$ ;  $\tau_{12} = 0$ .



На рис. 4—5 даны коэффициенты концентрации при изгибе решеток одинаковыми моментами в двух направлениях —  $k_1(M_1 = M_2, H_{12} = 0)$ , при изгибе в одном направлении —  $k_2(M_1 = H_{12} = 0, M_2 = M)$  и при кручении —  $k_3(M_1 = -M_2, H_{12} = 0)$ .

Во всех случаях рассматривались свободные от нагрузок кромки отверстий.

Приведенные параметры упругости показаны в виде кривых на рис. 6—7 для пластин, ослабленных отверстиями, и на рис. 8—9 для пластин с абсо-

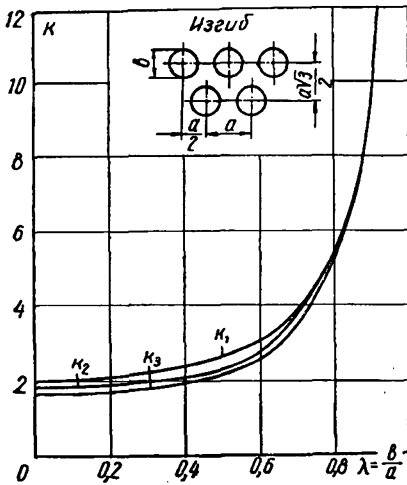


Рис. 4.

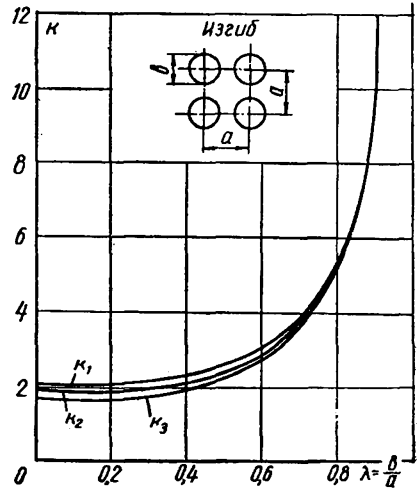


Рис. 5.

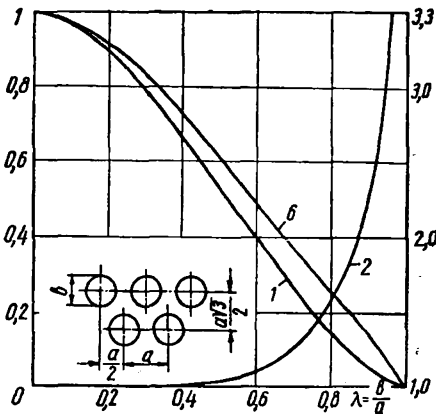


Рис. 6.

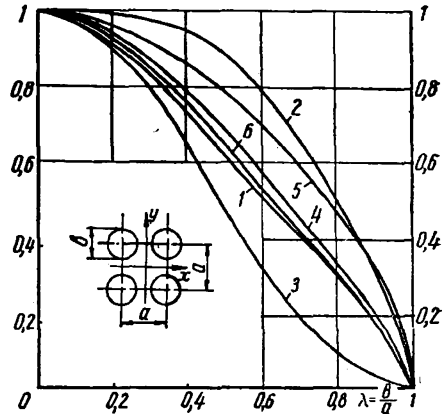


Рис. 7.

лютно жесткими шайбами. Результаты даны как для решеток при растяжении-сжатии, так и для решеток в условиях изгиба.

Цифры 1, 2 и 3 относятся к кривым, полученным для плоской задачи, цифры 4, 5 и 6 — к результатам в условиях изгиба. При этом цифрами 1, 2, 3 обозначены кривые параметров  $E^*/E$ ,  $\mu^*/\mu$ ,  $G^*/G$ , а цифрами 4, 5, 6 — кривые параметров  $E^*/E$ ,  $G^*/G$ ,  $D^*/D$  соответственно\*.

\* На рис. 6, 7, 8 и 9 масштаб справа дан для кривой 2.

Здесь через  $E^*$ ,  $\mu^*$ ,  $G^*$ ,  $D^*$  обозначены приведенные величины: модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона, модуль сдвига и цилиндрическая жесткость пластины — в главных осях  $x$  и  $y$ .

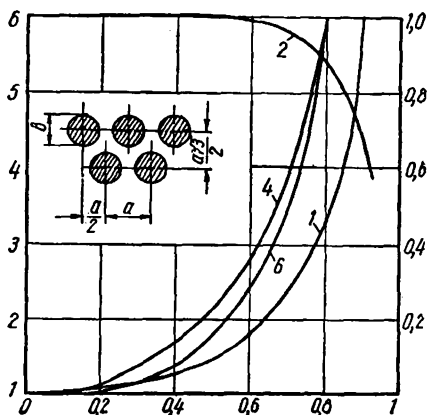


Рис. 8.

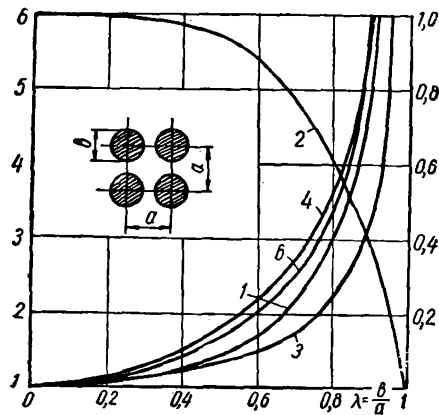


Рис. 9.

Все кривые построены в функции от аргумента  $\lambda$  — отношения диаметра отверстия к расстоянию между центрами двух ближайших отверстий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б л о х В. И., Изгиб неограниченной упругой пластины двоякопериодической нагрузкой, ДАН СССР, т. 73, № 1, 1950.
2. Д о н н е л Л. Х., Л а н г е р Б. Ф., Расчет перфорированных пластин, Тр. Америк. об-ва инженеров-механиков, серия В, 84, № 33, 1962.
3. Ж и с л и н а Л. С., Расчет на жесткость перфорированных пластин, нагружаемых в своей плоскости, Науч. тр., МТИЛП, № 21, 1961.
4. И в а н о в О. Н., И в а н о в И. Н., Жесткость круглых густоперфорированных пластинок с разбивкой отверстий по вершинам квадратов, Химическое машиностроение, № 1, 1960.
5. К у р ш и н Л. М., Ф и л ь ш т и н с к и й Л. А., Определение приведенного модуля упругости изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1961.
6. М у с х е л и ш в и л и Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, 1954.
7. С а в и н Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, ГИТТЛ, 1951.
8. С о б о л е в С. Л., М у х и н а Г. В., Определение термических напряжений в среде с пустотами, Атомная энергия, № 5, в. 2, 1958.
9. Ф и л ь ш т и н с к и й Л. А., Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий, ПММ, т. 28, № 3, 1964.
10. Ч ж о у Ч е н - т и, Расчет напряжений в упругой плоскости, ослабленной бесчисленными рядами круглых отверстий, Тр. Дальнинского политехн. ин-та, № 1, 1960.
11. Ш е р м а н Д. И., Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой формы, ч. 1, Инж. сб. АН СССР, т. 31, 1961.
12. Я к о в л е в Ю. В., Исследование жесткости густо перфорированных плит, Тр. Харьковского авиац. ин-та, № 15, 1954.
13. B a i l e y R., H i c k s R., Behaviour of Perforated Plates Under Plane Stress, J. Mech. Engng. Sci., v. 2, No 2, 1960.
14. D u n c a n T. P., U p f o l d R. W., Equivalent Elastic Properties of Perforated Bars, J. Mech. Engng. Sci., v. 5, No 1, 1963.
15. К о i t e r W. T., Stress Distribution in an Infinite Elastic Sheet a Doubly-Periodic Set of Equal Holes, Boundary Problems Different. Equat., Madison. Univ. Wisconsin Press., 1960.

Поступила  
21.II 1964 г.

Сибирский  
научно-исслед. институт