Ж. нано- електрон. фіз./
J. Nano- Electron. Phys.
2009.– Т.1, №2. – С. 69-75

PACS numbers: 05.60.Cd, 05.10.Gg

ДИСПЕРСИЯ КООРДИНАТ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЧАСТИЦ В СЛУЧАЙНОМ ПИЛООБРАЗНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Е.С. Денисова

Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы, Украина
E-mail: ES_Denisova@mail.ru

В данной работе изучается особый режим транспорта частиц, возникающий в случайном пилообразном потенциале под воздействием периодической внешней силы, который характеризуется нулевой средней скоростью частиц и конечным их перемещением в выделенном направлении. Вычисляется дисперсия координат локализации частиц и анализируется ее зависимость от статистических характеристик случайного потенциала, а также амплитуды и периода внешней силы.

Ключевые слова: *РЭТЧЕТ-СИСТЕМЫ, СЛУЧАЙНЫЙ АССИМЕТРИЧНЫЙ ПИЛООБРАЗНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА, ТРАНСПОРТ ЧАСТИЦ, ДИСПЕРСИЯ.*

(Получено 21.10.2009, в отредактированной форме – 18.11.2009)

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение рэтчет-систем, т.е. систем, в которых частицы или другие объекты приобретают направленное движение под воздействием ненаправленных (случайных или периодических) сил, представляет значительный интерес. В частности, рэтчет-эффект лежит в основе работы так называемых молекулярных моторов – наноустройств, преобразующих тепловую, химическую или какую-либо другую энергию в механическую [1-3].

Обычно влияние рэтчет-систем на помещенные в них частицы моделируется пространственно асимметричными, периодическими потенциалами, а динамика этих частиц описывается уравнением Ланжевена. Предположение о пространственной периодичности рэтчет-потенциалов значительно облегчает анализ решений этого уравнения, однако на практике оно невыполнимо даже в масштабе самих рэтчет-систем. Дело в том, что в наноустройствах в той или иной степени присутствуют неустранимые неоднородности, нарушающие строгую периодичность модельных потенциалов. Очевидно, чтобы исследовать транспортные свойства частиц в данных рэтчет-системах, должен быть учтен случайный характер рэтчет-потенциалов. В рамках этого подхода было, в частности, установлено, что неоднородности понижают среднюю скорость дрейфа частиц [4,5] и приводят к диффузионному характеру их движения [6-8].

Недавно на примере случайного пилообразного потенциала было показано [9], что в неупорядоченных рэтчет-системах может существовать новый режим транспорта частиц. В отличие от обычного режима, который характеризуется ненулевой средней скоростью частиц и возможностью их перемещения на сколь угодно большие расстояния, обнаруженный нами режим транспорта характеризуется нулевой средней скоростью частиц и конечным средним расстоянием, на которое они могут быть перемещены в выделенном направлении. В частности, были рассчитаны среднее расстояние до первого звена пилообразного потенциала, которое частицы не могут преодолеть за время полупериода внешней силы. В данной работе вычисляем еще одну важную характеристику нового транспортного режима – дисперсию этого расстояния и анализируем ее зависимость от параметров задачи.

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Как и в [9], используем следующее безразмерное уравнение движения частиц:

$$\dot{X}_t = g(X_t) + f(t) \qquad (X_0 = 0). \tag{1}$$

Здесь X_t – координата частицы в момент времени t; $g(x) = -dU(x)/dx = \pm g_\pm$ – случайная дихотомическая сила, которая генерируется случайным пилообразным потенциалом $U(x)$ (см. рис. 1); $f(t)$ – периодическая внешняя сила периода $2T$. Предполагается, что случайный потенциал $U(x)$, описывающий влияние рэтчет-системы, характеризуется (а) статистически независимыми случайными интервалами s_j, распределенными с плотностями вероятности $p_+(s)$ и $p_-(s)$ соответственно для четных ($j = 2n$, $n = 0, \pm 1, ...$) и нечетных ($j = 2n + 1$) интервалов; (б) двумя тангенсами углов наклона, $-g_+$ и g_- ($g_+ > g_- > 0$); и (в) условием $g_+ s_+ = g_- s_-$, где $s_\pm = \int_0^\infty ds s p_\pm(s)$ – средние длины четных (s_+) и нечетных (s_-) интервалов. В соответствии с последним условием средняя сила $\lim\limits_{L\to\infty}(1/2L)\int_{-L}^{L} dx g(x)$, действующая на частицу со стороны этого потенциала, равна нулю.

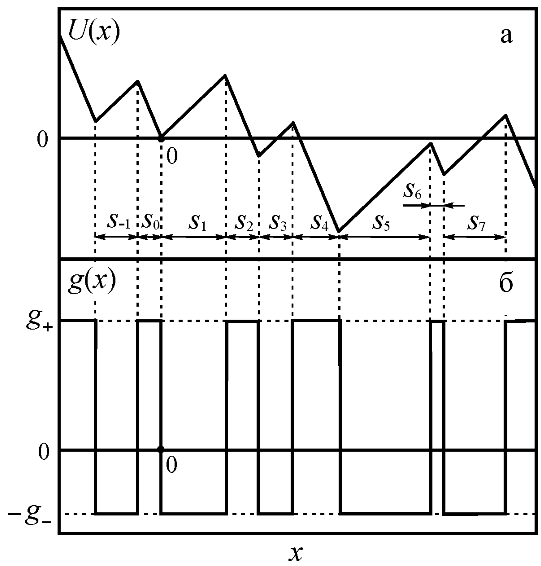

Рис. 1 *– Схематическое изображение одной реализации случайного пилообразного потенциала (а) и соответствующей реализации случайной дихотомической силы (б)*

Периодическая сила $f(t)$ предполагается знакопеременной: $f(t) = (-1)^{k+1} f$, где $f(>0)$ – амплитуда силы; $k = [t/T] + 1$; $[t/T]$ – целая часть отношения t/T. Как и в случае случайной дихотомической силы $g(x)$, среднее значение силы $f(t)$ также равно нулю: $\lim_{\tau \to \infty}(1/\tau)\int_0^{\tau} dt f(t) = 0$. Несмотря на это обстоятельство, т.е. равенство нулю всех средних сил, в данной системе может осуществляться транспорт частиц как с ненулевой, так и с нулевой средней скоростью [9].

3. ТРАНСПОРТ С НУЛЕВОЙ СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ

Средняя скорость частиц в рассматриваемых рэтчет-системах определяется следующим образом:

$$v_T = \lim_{t \to \infty} \frac{\langle X_t \rangle}{t}, \tag{2}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по всем реализациям случайного пилообразного потенциала. Согласно этому определению, необходимым условием существования ненулевой скорости частиц является неограниченный рост $\langle X_t \rangle$ ($\langle X_t \rangle > 0$ если $g_+ > g_-$) при $t \to \infty$. Интересующий же нас режим транспорта частиц характеризуется конечным значением $\langle X_\infty \rangle$ и, как следствие, нулевой средней скоростью $v_T = 0$. Как было показано в [9], этот режим имеет место в тех случаях, когда вероятность $\int_{\Delta}^{\infty} ds\, p_-(s)$ того, что длина интервалов s_{2n+1} превышает расстояние $\Delta = (f - g\_)T$, отлична от нуля. Другими словами, средняя скорость равна нулю, если реализации случайной дихотомической силы $g(x)$ содержат настолько длинные интервалы s_{2n+1}, что частицы не могут их пересечь в положительном направлении оси x за время полупериода T.

Как ясно из предыдущего изложения, расстояние

$$l_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} s_j, \tag{3}$$

от начала координат до первого "непроходимого" интервала s_{2n+1} ($n = 0, 1, \ldots$), расположенного в положительном направлении оси x, представляет значительный интерес с точки зрения описания свойств этого транспортного режима. Если $f \in (g_-, g_+)$, тогда частица, первоначально помещенная в начало координат, по истечении некоторого времени наверняка попадет в окрестность точки $x = l_{2n}$, где будет совершать осциллирующее движение. Если же $f > g_+$, тогда частица может попасть в окрестность этой точки лишь с некоторой вероятностью, поскольку с конечной вероятностью она может переместится в отрицательную область оси x.

Так как функция $g(x)$ является случайной, расстояния l_{2n} также случайны. Поэтому основной величиной, характеризующей эти расстояния, является их плотность вероятности $P(l)$, которая может быть представлена в виде [9]:

$$P(l) = (1-w)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\Delta}\ldots\int_0^{\Delta}\left(\prod_{j=1}^{n} ds_{2j-1}p_-(s_{2j-1})\right)\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} ds_{2k}p_+(s_{2k})\right)\delta(l-l_{2n}) + \\ + (1-w)\,\delta(l)\,, \tag{4}$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; $w = \int_0^{\Delta} ds\,p_-(s)$ – вероятность того, что длина нечетных интервалов не превышает Δ. Одними из наиболее важных характеристик случайной величины l_{2n} являются ее среднее значение $\langle l\rangle$ и дисперсия σ^2. Для среднего значения, определяемого как $\langle l\rangle = \int_0^{\infty} dl\,l P(l)$, в общем случае произвольных плотностей вероятности $p_+(s)$ и $p_-(s)$ нами была получена простая формула

$$\langle l\rangle = \frac{\tilde{s}_- + s_+ w}{1-w}\,, \tag{5}$$

где

$$\tilde{s}_- = \int_0^{\Delta} ds s p_-(s), \qquad s_+ = \int_0^{\infty} ds s p_+(s)\,. \tag{6}$$

Ее анализ показал, в частности, что при определенных условиях возможен переход из одного транспортного режима в другой. Что же касается дисперсии, которая служит мерой разброса координат локализации частиц, то ранее она не вычислялась.

4. ДИСПЕРСИЯ КООРДИНАТ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЧАСТИЦ

Согласно определению, дисперсия равна $\sigma^2 = \langle l^2\rangle - \langle l\rangle^2$, где

$$\langle l^2\rangle = \int_0^{\infty} dl\, l^2 P(l)\,. \tag{7}$$

Подставив в (7) плотность вероятности (4) и воспользовавшись свойствами дельта-функции, получаем:

$$\langle l^2\rangle = (1-w)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\Delta}\ldots\int_0^{\Delta}\left(\prod_{j=1}^{n} ds_{2j-1}p_-(s_{2j-1})\right)\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} ds_{2k}p_+(s_{2k})\right) l_{2n}^2\,. \tag{8}$$

Для упрощения последующих вычислений воспользуемся формулой

$$l_{2n}^2 = \sum_{m=1}^{n} s_{2m-1}^2 + \sum_{m=1}^{n} s_{2m-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} s_{2k-1} + \sum_{m=1}^{n} s_{2m}^2 + \sum_{m=1}^{n} s_{2m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} s_{2k} + 2\sum_{m=1}^{n} s_{2m-1}\sum_{k=1}^{n} s_{2k}\,, \tag{9}$$

которая следует из определения (3). Интегрирование каждого из этих слагаемых дает:

$$\int_0^{\Delta}\ldots\int_0^{\Delta}\left(\prod_{j=1}^{n} ds_{2j-1}p_-(s_{2j-1})\right)\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} ds_{2k}p_+(s_{2k})\right)\sum_{m=1}^{n} s_{2m-1}^2 = n\tilde{q}_- w^{n-1}\,,$$

$$\int_0^{\Delta}\ldots\int_0^{\Delta}\left(\prod_{j=1}^{n} ds_{2j-1}p_-(s_{2j-1})\right)\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} ds_{2k}p_+(s_{2k})\right)\sum_{m=1}^{n} s_{2m-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} s_{2k-1} = n(n-1)\tilde{s}_-^2 w^{n-2}\,,$$

$$\int_0^\Delta \ldots \int_0^\Delta \left(\prod_{j=1}^n ds_{2j-1} p_-(s_{2j-1}) \right) \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n ds_{2k} p_+(s_{2k}) \right) \sum_{m=1}^n s_{2m}^2 = n q_+ w^n , \tag{10}$$

$$\int_0^\Delta \ldots \int_0^\Delta \left(\prod_{j=1}^n ds_{2j-1} p_-(s_{2j-1}) \right) \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n ds_{2k} p_+(s_{2k}) \right) \sum_{m=1}^n s_{2m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n s_{2k} = n(n-1) s_+^2 w^n ,$$

$$\int_0^\Delta \ldots \int_0^\Delta \left(\prod_{j=1}^n ds_{2j-1} p_-(s_{2j-1}) \right) \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n ds_{2k} p_+(s_{2k}) \right) \sum_{m=1}^n s_{2m-1} \sum_{k=1}^n s_{2k} = n^2 \tilde{s}_- s_+ w^{n-1} ,$$

где

$$\tilde{q}_- = \int_0^\Delta ds s^2 p_-(s), \qquad q_+ = \int_0^\infty ds s^2 p_+(s) . \tag{11}$$

Таким образом, в соответствии с полученными выше результатами формула (8) принимает вид:

$$\langle l^2 \rangle = (1-w) \sum_{n=1}^\infty \left[n \tilde{q}_- w^{n-1} + n(n-1) \tilde{s}_-^2 w^{n-2} + n q_+ w^n + n(n-1) s_+^2 w^n + 2n^2 \tilde{s}_- s_+ w^{n-1} \right] . \tag{12}$$

Ряды в (12) могут быть легко вычислены путем дифференцирования геометрического ряда $\sum_{n=0}^\infty w^n = (1-w)^{-1}$ по параметру w, приводя к следующему результату:

$$\langle l^2 \rangle = \frac{\tilde{q}_- + q_+ w + 2 \tilde{s}_- s_+}{1-w} + 2 \left(\frac{\tilde{s}_- + s_+ w}{1-w} \right)^2 . \tag{13}$$

Далее, принимая во внимание выражение (5) для средней скорости частиц и определение дисперсии координат их локализации, $\sigma^2 = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2$, получаем:

$$\sigma^2 = \frac{\tilde{q}_- + q_+ w + 2 \tilde{s}_- s_+}{1-w} + \langle l^2 \rangle . \tag{14}$$

В качестве примера использования полученных выше результатов рассмотрим экспоненциальное распределение интервалов s_j, полагая, что $p_\pm(s) = \lambda_\pm e^{-\lambda_\pm s}$, где λ_+ и λ_- – положительные параметры распределения соответственно для четных и нечетных интервалов. Согласно определениям (6) и (11), в этом случае

$$s_\pm = \frac{1}{\lambda_\pm}, \quad q_+ = \frac{2}{\lambda_+^2}, \quad \tilde{q}_- = 2 \frac{\tilde{s}_-}{\lambda_-} - \Delta^2 e^{-\lambda_- \Delta}, \quad \tilde{s}_- = \frac{1}{\lambda_-} \left(1 - e^{-\lambda_- \Delta} - \lambda_- \Delta e^{-\lambda_- \Delta} \right), \tag{15}$$

а условие равенства нулю среднего значения случайной дихотомической силы, $g_+ s_+ = g_- s_-$, позволяет исключить из рассмотрения, например, параметр λ_+: $\lambda_+ = \lambda_+ g_+ / g_-$. Учитывая, наконец, что $w = 1 - e^{-\lambda_- \Delta}$, из формул (5) и (14) находим:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\lambda_-} \left(1 + \frac{g_-}{g_+} \right) \left(e^{\lambda_- \Delta} - 1 \right) - \Delta \tag{16}$$

и

$$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda_-^2}\left(1+\frac{g_-}{g_+}+\frac{g_-^2}{g_+^2}\right)\left(e^{\lambda_-\Delta}-1\right)-\frac{2}{\lambda_-}\left(1+\frac{g_-}{g_+}\right)\Delta-\Delta^2+\langle l^2\rangle\,. \qquad (17)$$

В частности, при $\Delta \to 0$ и $\Delta \to \infty$ эти формулы сводятся соответственно к

$$\langle l\rangle = \frac{g_-}{g_+}\Delta, \qquad \sigma^2 = \frac{2}{\lambda_-}\frac{g_-^2}{g_+^2}\Delta \qquad (18)$$

и

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\lambda_-}\left(1+\frac{g_-}{g_+}\right)e^{\lambda_-\Delta}, \qquad \sigma^2 = \langle l\rangle^2\,. \qquad (19)$$

Рассмотренный пример показывает, что в случайных рэтчет-системах дисперсия координат локализации частиц играет значительную роль, как при $\Delta << 1$ (случай малых значений амплитуды и/или периода внешней силы), так и при $\Delta >> 1$. Согласно (19), в последнем случае средне-квадратичное значение координат локализации частиц σ имеет тот же порядок, что и среднее значение $\langle l\rangle$, т.е., $\sigma \sim \langle l\rangle$. В первом же случае дисперсия играет еще более важную роль, поскольку, как следует из (18), $\sigma >> \langle l\rangle$.

5. ВЫВОДЫ

Изучен новый режим транспорта частиц, индуцируемый знакопере-менной внешней силой в случайном пилообразном потенциале. Для этого транспортного режима, который характеризуется нулевой средней скоростью частиц и конечным их перемещением в выделенном направлении, найдено точную формулу для дисперсии координат локализации частиц и проведен ее анализ в частном случае пилообразного потенциала. Установлено, что дисперсия является важной характеристикой данного транспортного режима. В частности, среднеквадратичное значение координат локализации частиц может существенно превышать среднее расстояние их перемещения в выделенном направлении.

VARIANCE OF THE COORDINATES OF LOCALIZATION FOR PARTICLES IN A RANDOM SAWTOOTH POTENTIAL

E.S. Denisova

Sumy State University,
2, Rimsky-Korsakov Str., 40007, Sumy, Ukraine
E-mail: ES_Denisova@mail.ru

A new regime of the directed transport of particles in a random sawtooth potential driven by an alternating external force is studied. For this transport regime, which is characterized by zero average velocity of particles and a finite transport distance, the variance of coordinates of particles localization is calculated exactly and analyzed for a particular case of the random sawtooth potential. It has been established that the variance plays an important role in this transport regime. In particular, the root-mean-square displacement of particles can essentially exceed their average displacement in the preferred direction.

Keywords: *RATCHET SYSTEMS, RANDOM SAWTOOTH POTENTIAL, DIRECTED TRANSPORT, VARIANCE OF COORDINATES, PARTICLES LOCALIZATION, ROOT-MEAN-SQUARE DISPLACEMENT.*

ДИСПЕРСІЯ КООРДИНАТ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ЧАСТИНОК У ВИПАДКОВОМУ ПИЛКОПОДІБНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

О.С. Денисова

Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна
E-mail: ES_Denisova@mail.ru

У поданій роботі вивчається особливий режим транспорту частинок, що виникає у випадковому пилкоподібному потенціалі під дією зовнішньої періодичної сили, який характеризується нульовою середньою швидкістю частинок та скінченним їх переміщенням у виділеному напрямку. Обчислюється дисперсія координат локалізації частинок та аналізується її залежність від статистичних характеристик випадкового потенціалу, а також амплітуди і періоду зовнішньої сили.

Ключові слова: *РЕТЧЕТ-СИСТЕМИ, ВИПАДКОВИЙ АСИМЕТРИЧНИЙ ПИЛКОПОДІБНИЙ ПОТЕНЦІАЛ, РІВНЯННЯ ЛАНЖЕВЕНА, ТРАНСПОРТ ЧАСТИНОК, ДИСПЕРСІЯ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Reimann, *Phys. Rep.* **361**, 57 (2002).
2. R.D. Astumian, P. Hanggi, *Phys. Today* **55** No11, 33 (2002).
3. F. Julicher, A. Ajdari, J. Prost, *Rev. Mod. Phys.* **69** No4, 1269 (1997).
4. T. Harms, R. Lipowsky, *Phys. Rev. Lett.* **79** No15, 2895 (1997).
5. F. Marchesoni, *Phys. Rev. E* **56** No3, 2492 (1997).
6. M.N. Popescu, C.M. Arizmendi, A.L. Salas-Brito, F. Family, *Phys. Rev. Lett.* **85** No15, 3321 (2000).
7. L. Gao, X. Luo, S. Zhu, B. Hu, *Phys. Rev. E* **67**, 062104 (2003).
8. D.G. Zarlenga, H.A. Larrondo, C.M. Arizmendi, F. Family, *Phys. Rev. E* **75**, 051101 (2007).
9. S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, E.S. Denisova, P. Hanggi, H. Kantz, *Phys. Rev. E* **79**, 051102 (2009).