1971 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА Том VII, в. 8
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ АН УССР

УДК 539.4:517.7

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Е. Кац, Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Теория пластин, некоторые задачи теории оболочек и гидродинамики идеальной вязкой жидкости сводятся к решению полигармонического уравнения. Для задач с регулярными границами необходимо уметь строить решение этого уравнения, удовлетворяющее определенным условиям периодичности или двоякой периодичности.

Для бигармонического уравнения решения такого рода содержатся, например, в работах [2, 4, 6]. Для некоторого частного случая полигармонического уравнения аналогичное решение дано в работе [5].

В данной статье строится двоякопериодическое решение полигармонического уравнения произвольного порядка.

§ 1. Полигармоническое уравнение порядка n имеет вид [1]

$$\nabla_n^{(2n)} F^*(x, y) = 0; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{1.1}$$

Общее решение уравнения (1.1), выраженное через $2n$ произвольных аналитических функций, можно записать в форме

$$F(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} [\zeta^k \varphi_k(z) + z^k \psi_k(\zeta)], \tag{1.2}$$

где

$$z = x + iy; \quad \zeta = x - iy.$$

Для вещественных полигармонических функций представление (1.2) дает

$$F(z, \zeta) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \varphi_k(z). \tag{1.3}$$

Таким образом, построение двоякопериодической полигармонической функции сводится к отысканию $2n$ аналитических функций $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(\zeta)$, удовлетворяющих условиям периодичности функции (1.2).

§ 2. Введем систему мероморфных функций

$$\wp_0(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(z-P)^2} - \frac{1}{P^2}\right];$$

$$\wp_i(z) = \sum_{m,n}{}' \left[\frac{\overline{P}^i}{(z-P)^2} - \sum_{k=0}^{i} (k+1) \frac{\overline{P}^i}{P^{k+2}} z^k\right] \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Здесь $P = m\omega_1 + n\omega_2$; ω_1 и ω_2 — основные периоды; $\operatorname{Im}\omega_1 = 0$; $\operatorname{Im}\omega_2 > 0$; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\wp_0(z) = \wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса [3].

Для системы (2.1) установим соотношения, аналогичные условиям периодичности в теории эллиптических функций. Тогда [3]

$$\wp_0^{(k)}(z + \omega_\nu) - \wp_0^{(k)}(z) = 0 \quad (\nu = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

где

$$\wp_0^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k}\wp_0(z).$$

Из равенств (2.1) имеем

$$\wp_i^{(k)}(z) = (-1)^k (k+1)! \sum_{m,n} \frac{\overline{P}^i}{(z-P)^{k+2}} \quad (k \geqslant i+1). \tag{2.3}$$

Функцию $\wp_i^{(k)}(z+\omega_\nu)$ при $k \geqslant i+1$, $\nu = 1, 2$ можем записать так:

$$\wp_i^{(k)}(z+\omega_\nu) = (-1)^k (k+1)! \sum_{m,n} \frac{\overline{P}^i}{[(z+\omega_\nu) - P]^{k+2}} =$$

$$= (-1)^k (k+1)! \sum_{m,n} \frac{(\overline{P} + \overline{\omega}_\nu)^i}{(z-P)^{k+2}} =$$

$$= (-1)^k (k+1)! \sum_{j=0}^{i} C_i^j \overline{\omega}_\nu^j \sum_{m,n} \frac{\overline{P}^{i-j}}{(z-P)^{k+2}} = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \overline{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(k)}(z).$$

Отсюда

$$\wp_i^{(k)}(z+\omega_\nu) - \wp_i^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{i} C_i^j \overline{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(k)}(z), \tag{2.4}$$

где

$$C_i^j = \frac{i!}{j!\,(i-j)!} \quad (i = 1, 2, \ldots; \; k \geqslant i+1).$$

Полагая в формуле (2.4) $z = -\dfrac{\omega_\nu}{2}$ и учитывая условия симметрии

$$\wp_i^{(k)}(-z) = (-1)^{i+k} \wp_i^{(k)}(z) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots; \quad i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

между значениями функций в полупериодах получаем выражения

$$[1 - (-1)^{k+i}]\, \wp_i^{(k)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) - \sum_{j=1}^{i} (-1)^{k+i+j} C_i^j \overline{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(k)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) = 0, \tag{2.6}$$

эквивалентные следующим соотношениям:

$$2\wp_i^{(2k+i+1)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j C_i^j \overline{\omega}_\nu^j \wp_{i-j}^{(2k+i+1)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) = 0 \tag{2.7}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots).$$

При помощи формул (2.7) можно показать, что равенства (2.4) остаются справедливыми и для случая $k = i$. Полагая в (2.4) $k = i$ и последовательно интегрируя их s раз, находим

$$\wp_i^{(i-s)}(z+\omega_\nu) - \wp_i^{(i-s)}(z) - \sum_{j=1}^{i} C_i^j \omega_\nu^{-j} \wp_{i-j}^{(i-s)}(z) = \Omega_{i,s-i}^\nu(z). \tag{2.8}$$

Здесь

$$\Omega_{i,s-i}^\nu(z) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\gamma_{i,j-1}^\nu}{(s-j)!}\left(z + \frac{\omega_\nu}{2}\right)^{s-j} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots);$$

$\wp_i^{(-k)}(z)$ — k-кратный интеграл от функции $\wp_i(z)$.

Для коэффициентов $\gamma_{i,j-1}^\nu$ имеем

$$\gamma_{i,j-1}^\nu = \Omega_{i,j-i}^\nu\left(-\frac{\omega_\nu}{2}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.9}$$

На основании формул (2.8) с учетом условий (2.5), которые остаются справедливыми для $k = -1, -2, -3, \ldots$ и $i = 1, 2, 3, \ldots$, запишем

$$\Omega_{i,j}^\nu\left(-\frac{\omega_\nu}{2}\right) = [1 - (-1)^{i+j}]\wp_i^{(-j)}\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) - \sum_{q=1}^{i} C_i^q \omega_\nu^{-q} \wp_{i-q}^{(-j)}\left(-\frac{\omega_\nu}{2}\right). \tag{2.10}$$

Равенства (2.9) и (2.10) определяют константы решетки $\gamma_{i,j}^\nu$.

Используя формулы (2.8) и (2.9) и вычисляя интеграл по контуру параллелограмма периодов

$$\oint \wp_i^{(i-s)}(z)\,dz \quad (i = 0, 1, 2, \ldots; \quad s = 1, 2, 3, \ldots),$$

устанавливаем связи между константами $\gamma_{i,j}^1$ и $\gamma_{i,j}^2$, являющиеся обобщением известного соотношения Лежандра в теории эллиптических функций [3]. Приведем некоторые из этих связей

$$\begin{gathered} \gamma_{0,0}^2\omega_1 - \gamma_{0,0}^1\omega_2 = 2\pi i; \\ \gamma_{j,0}^2\omega_1 - \gamma_{j,0}^1\omega_2 = j(\gamma_{j-1,0}^2\bar{\omega}_1 - \gamma_{j-1,0}^1\bar{\omega}_2) \quad (j = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{2.11}$$

При решении краевых задач необходимо иметь представления рассматриваемых функций в виде степенных рядов. Выпишем соответствующие разложения

$$\begin{gathered} \frac{\wp_0^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \frac{(-1)^k}{z^{k+2}} + \sum_{j=0}^{\infty} r_{k,j}^0 z^j; \\ \frac{\wp_i^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} r_{k,j}^i z^j \quad (i = 1, 2, \ldots; \ k = 0, 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь

$$r_{k,j}^i = [1 + (-1)^{j+k+i}]\,\frac{(j+k+1)!\,g_{j+k+2}^i}{j!\,(k+1)!\,2^{j+k-i+3}} \quad (j + k - i \geqslant 1);$$

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(m\omega_1 + n\omega_2); \quad g_s^i = \sum_{m,n}{}' \frac{\bar{T}^i}{T^s} \quad (s - i \geqslant 3).$$

§ **3.** Определенный интерес в смысле приложений представляют правильные решетки. Рассмотрим правильную треугольную решетку $\left(\omega_1 = 2, \omega_2 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$. Введем преобразование основных периодов

$$T_1 = Te^{-\frac{\pi i}{3}}. \tag{3.1}$$

Ввиду того, что системы точек $T = m + ne^{\frac{\pi i}{3}}$ и $T_1 = me^{-\frac{\pi i}{3}} + n\,(m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ совпадают, имеет место равенство

$$g_s^k = \sum_{m,n}{}' \frac{\overline{T}^k}{T^s} = \sum_{m,n}{}' \frac{\overline{T}_1^k}{T_1^s} \quad (s - k \geqslant 3). \tag{3.2}$$

Из формулы (3.2) с учетом (3.1) получаем

$$g_s^k \left[1 - \exp\left(\frac{k+s}{3}\pi i\right)\right] = 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, отличными от нуля могут быть только те величины g_s^k, для которых сумма индексов кратна шести. Отсюда легко установить структуру разложений функций (2.1) для рассматриваемого типа решетки.

Из разложений (2.12) находим

$$\begin{gathered}
\frac{\wp_0^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \frac{(-1)^k}{z^{k+2}} + \sum_{j=0}^{\infty} r^0_{k,6j-k+4} z^{6j-k+4}; \\
\frac{\wp_i^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} r^i_{k,6j-i-k+4} z^{6j-i-k+4}
\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$(6j - 2i + 3 \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Используя представления (3.4), в случае правильной треугольной решетки получаем соотношения симметрии для функций $\wp_i^{(k)}(z)$

$$\wp_q^{(k)}\left(ze^{\frac{\pi i}{3}}\right) = \wp_q^{(k)}(z) \exp\left(-\frac{q+k+2}{3}\pi i\right) \quad (k, q = 0, 1, \ldots). \tag{3.5}$$

Аналогично для квадратной решетки $(\omega_1 = 2, \ \omega_2 = 2i)$, вводя преобразование основных периодов по формуле

$$T_1 = Te^{-\frac{\pi i}{2}}. \tag{3.6}$$

находим, что отличны от нуля лишь те из констант g_s^k, для которых сумма индексов кратна четырем. Следовательно,

$$\begin{gathered}
\frac{\wp_0^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \frac{(-1)^k}{z^{k+2}} + \sum_{j=0}^{\infty} r^0_{k,4j-k+2} z^{4j-k+2}; \\
\frac{\wp_i^{(k)}(z)}{(k+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} r^i_{k,4j-k-i+2} z^{4j-k-i+2}
\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$(4j - 2i + 1 \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Соотношения симметрии для функций $\wp_q^{(k)}(z)$ в случае квадратной решетки принимают вид

$$\wp_q^{(k)}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)=\wp_q^{(k)}(z)\exp\left(-\frac{k+q+2}{2}\pi i\right). \tag{3.8}$$

§ 4. Перейдем к решению основной задачи о построении двоякопериодической полигармонической функции, заданной представлением (1.2). С этой целью рассмотрим систему

$$f_n(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k\zeta^{n-k-1}\wp_k^{(n-1)}(z), \tag{4.1}$$

где

$$C_i^j=\frac{i!}{j!\,(i-j)!}\quad (n=1,2,3,\ldots);$$

$f_n(z,\zeta)$ — двоякопериодическая функция.

На основании формулы (4.1) имеем

$$f_n(z+\omega_\nu,\zeta+\overline{\omega}_\nu)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k(\zeta+\overline{\omega}_\nu)^{n-k-1}\wp_k^{(n-1)}(z+\omega_\nu). \tag{4.2}$$

Выражение (4.2) с учетом (2.4) можно представить в виде

$$f_n(z+\omega_\nu,\zeta+\overline{\omega}_\nu)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k\sum_{m=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^m\zeta^m\overline{\omega}_\nu^{n-k-m-1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k}C_k^j\overline{\omega}_\nu^j\wp_{k-j}^{(n-1)}(z)\quad (n=2,3,\ldots). \tag{4.3}$$

Меняя порядок суммирования, находим

$$f_n(z+\omega_\nu,\zeta+\overline{\omega}_\nu)=f_n(z,\zeta)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\wp_k^{(n-1)}(z)\sum_{m=k+1}^{n-1}\zeta^{n-m-1}\overline{\omega}_\nu^{m-k}\sum_{s=k}^{m}(-1)^s C_{n-1}^s C_{n-s-1}^{m-s}C_s^k. \tag{4.4}$$

Наконец, учитывая соотношение

$$\sum_{s=k}^{m}(-1)^s C_{n-1}^s C_{n-s-1}^{m-s}C_s^k=0$$

$$(n=2,3,\ldots;\quad 0\leqslant k\leqslant n-2;\quad k+1\leqslant m\leqslant n-1),$$

приходим к равенствам

$$f_n(z+\omega_\nu,\zeta+\overline{\omega}_\nu)=f_n(z,\zeta)\quad (\nu=1,2;\quad n=1,2,\ldots). \tag{4.5}$$

Таким образом, функцию $f_n(z,\zeta)$, определенную формулой (4.1), можно трактовать как двоякопериодическую гармонику. Дифференцируя выражение (4.1) последовательно по z, образуем систему высших гармоник

$$f_n^{(m)}(z,\zeta)=\frac{\partial^m}{\partial z^m}f_n(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k\zeta^{n-k-1}\wp_k^{(n+m-1)}(z). \tag{4.6}$$

Общее представление для вещественной двоякопериодической полигармонической функции можно записать так:

$$F(z,\zeta)=\sum_{s=1}^{n}F_s(z,\zeta)=\operatorname{Re}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{s-1}\zeta^k\varphi_{k,s}(z). \tag{4.7}$$

Здесь

$$\varphi_{k,s}(z)=(-1)^{s-k-1}C_{s-1}^{k}\sum_{m=0}^{\infty}A_{ms}\wp_{s-k-1}^{(s+m-1)}(z).$$

Для бигармонической функции ($n=2$) формула (4.7) дает

$$F(z,\zeta)=\operatorname{Re}\sum_{m=0}^{\infty}\{A_m\wp_0^{(m)}(z)+B_m[\wp_1^{(m+1)}(z)-\zeta\wp_0^{(m+1)}(z)]\}. \tag{4.8}$$

В заключение отметим, что представление (4.7) справедливо и для случая периодической полигармонической функции, если перейти к пределу при $\omega_2\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М., Гостехиздат, 1948.
2. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А., Изгиб упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круговых отверстий, Прикладная механика, т. IV, в. 6, 1968.
3. Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, М., Изд-во «Наука», 1968.
4. Натанзон В. Я., О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке, Математический сборник, т. 42, № 5, 1935.
5. Фильштинский Л. А., Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий, Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», в. 4, К., Изд-во «Наукова думка», 1964.
6. Фильштинский Л. А., Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий, Прикл. матем. и мех., т. XXVIII, в. 3, 1964.

Поступила
27.III 1970 г.