ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ АН УССР

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский

(Москва)

В статье обобщается решение задачи об упругом равновесии изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий, на случай, когда в отверстия впаяны упругие шайбы из инородного материала. Полученные результаты используются для решения задачи приведения системы «двоякопериодическая решетка — шайбы» к эквивалентной сплошной плоскости. Помимо точных соотношений, определяющих приведенные упругие параметры эквивалентной сплошной плоскости, получены также компактные приближенные соотношения.

§ 1. Пусть $\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2le^{i\alpha}$ ($l > 0$, $0 < \alpha \leqslant \pi/2$) — основные периоды двоякопериодической решетки; λ — радиус упругой шайбы; L_{mn} — контур спая решетки с шайбой, центр которой совмещен с точкой $P = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \ldots$); D и $D^- = \cup D_{mn}^-$ — области, занятые собственно решеткой и шайбами соответственно; $L = \cup L_{mn}$ — граница области D (рис. 1).

Обозначим модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона и модуль сдвига ма-

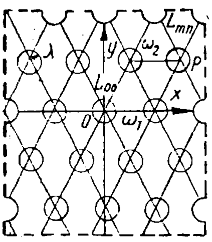

Рис. 1.

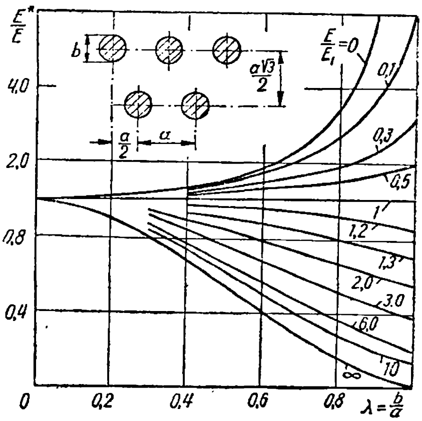

Рис. 2.

териала решетки через E, μ, G, а такие же величины для шайбы через E_1, μ_1, G_1. Наша задача заключается в определении упругого равновесия системы «решетка — шайбы» при средних напряжениях в решетке

$$\sigma_x^0 = \sigma_1; \qquad \sigma_y^0 = \sigma_2; \qquad \tau_{xy}^0 = \tau_{12} = 0. \tag{1.1}$$

При действии растягивающих напряжений (1.1) за счет различия в упругих свойствах материала решетки и шайбы, на последнюю со стороны решетки действует некоторая самоуравновешенная система сил

$N-iT$. Предположим для простоты, что решетка симметрична относительно осей x и y. Рассматривая, вследствие периодичности задачи, шайбу с центром в начале координат и полагая, что нагрузка $N-iT$, действующая на контуре L_{00} со стороны решетки, может быть разложена в ряд Фурье

$$N-iT=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}e^{2ki\theta};\qquad \operatorname{Im} A_{2k}=0, \tag{1.2}$$

найдем [2]

$$\begin{gathered}\Phi^*(z)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=0}^{\infty}A_{-2k}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k};\\ \Psi^*(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left[(2k+1)A_{-2k-2}+A_{2k+2}\right]\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ — регулярные в $D_{\overline{00}}$ функции Колосова, соответствующие шайбе с контуром L_{00}.

Используя (1.3) и формулы работы [2]

$$2G(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\Phi(z)}-\overline{\psi(z)};\qquad \varphi'(z)=\Phi(z);\qquad \psi'(z)=\Psi(z), \tag{1.4}$$

выразим на L_{00} касательную производную от смещений через нагрузку

$$-2G_1ie^{i\theta}\frac{d}{ds}(u^*-iv^*)=A_0\frac{1-\varkappa_1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}e^{2ki\theta}-\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_1A_{-2k}e^{-2ki\theta}, \tag{1.5}$$

где u^*, v^* — смещения точек контура шайбы; $\varkappa_1=(3-\mu_1)/(1+\mu_1)$; $G_1=E_1/2(1+\mu_1)$.

На решетку со стороны шайбы действует та же система сил $N-iT$. Кроме того, в решетке имеют место средние напряжения (1.1). Функции Колосова — Мусхелишвили, соответствующие решетке, с учетом (1.1) можно представить в виде [4]

$$\Phi_s(z)=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}+\Phi(z);\qquad \Psi_s(z)=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}+\Psi(z);$$

$$\Phi(z)=\alpha_0+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)!};\qquad \operatorname{Im}\alpha_{2k}=\operatorname{Im}\beta_{2k}=0; \tag{1.6}$$

$$\Psi(z)=\beta_0+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Здесь

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+{\sum_{m,n}}'\left[\frac{1}{(z-P)^2}-\frac{1}{P^2}\right];$$

$$Q(z)={\sum_{m,n}}'\left[\frac{\overline{P}}{(z-P)^2}-2z\frac{\overline{P}}{P^3}-\frac{\overline{P}}{P^2}\right];$$

$\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса [1]; $Q(z)$ — специальная мероморфная функция [3, 4].

Краевое условие первой основной задачи для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на L_{00} запишется так:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_{2k}e^{2ki\theta}, \qquad \tau \in L_{00}, \qquad (1.7)$$

причем

$$A'_0 = A_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad A'_2 = A_2 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad A_{2k} = A'_{2k}$$

$$(k = -1, \pm 2, \pm, \ldots).$$

Составляя условия сопряжения решетки и шайбы по смещениям с учетом соотношений (1.5), приходим ко второй основной задаче для решетки

$$-\varkappa\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^*_{2k}e^{2ki\theta}, \quad \tau \in L_{00}, \qquad (1.8)$$

где

$$A^*_0 = (\varkappa - 1)\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} - A_0\frac{\varkappa_1 - 1}{2}\frac{G}{G_1}; \qquad A^*_{-2k} = -\varkappa_1\frac{G}{G_1}A_{-2k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots);$$

$$A^*_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{G}{G_1}A_2; \qquad A^*_{2k} = \frac{G}{G_1}A_{2k} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Из условий совместности краевых задач (1.7) и (1.8), решенных в работе [4], определяются параметры нагрузки A_{2k} ($k = 0, \pm 1, \pm \ldots$). Таким образом, решая бесконечные системы, соответствующие (1.7) и (1.8), и приравнивая затем эти решения друг к другу, можно получить систему алгебраических уравнений относительно величин A_{2k}($k = 0, \pm 1, \pm \ldots$). Однако этот путь весьма трудоемок и приводит к бесконечной системе уравнений, содержащих как величины A_{2k}, так и величины A_{-2k}.

Для того чтобы получить бесконечную систему, вполне идентичную системе, соответствующей первой краевой задаче для решетки, приведем условие (1.8) к виду (1.7)

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^*_{2k}e^{2ki\theta} + (1 + \varkappa)\overline{\Phi(\tau)}. \qquad (1.9)$$

Приравняв левые части (1.7) и (1.9), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_{2k}e^{2ki\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^*_{2k}e^{2ki\theta} + (1 + \varkappa)\overline{\Phi(\tau)}. \qquad (1.10)$$

Теперь необходимо использовать разложение $\Phi(z)$ в ряд Лорана в окрестности начала координат

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k}z^{2j}, \qquad (1.11)$$

где

$$r_{j,k} = \frac{(2j + 2k + 1)!\, g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k + 1)!\, 2^{2j+2k+2}}; \qquad g_j = {\sum_{m,n}}' \frac{1}{T^{2j}};$$

$$T = 0{,}5P = m + nle^{i\alpha}; \; g_1 = 0.$$

Полагая $z = \tau = \lambda e^{i\theta}$ и подставляя (1.11) в (1.10), получаем после обычных преобразований соотношения

$$A_{2j+2} = \frac{1+\varkappa}{1-G/G_1}\alpha_{2j+2}; \qquad A_{-2j} = \frac{1+\varkappa}{1+\varkappa_1 G/G_1}\sum_{k=0}^{\infty} r_{j,k}\lambda^{2j+2k+2}\alpha_{2k+2};$$

$$A_0\left(1-\frac{\varkappa_1-1}{2}\frac{G}{G_1}\right) = (1+\varkappa)\left(\alpha_0+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}+\sum_{k=1}^{\infty} r_{0,k}\lambda^{2k+2}\alpha_{2k+2}\right), \qquad (1.12)$$

где постоянная α_0 имеет вид [4]

$$\alpha_0 = K_0\alpha_2\lambda^2 + K_1\beta_2\lambda^2; \qquad (1.13)$$

$$K_0 = \frac{\delta_1}{\omega_1} - 2K_1; \qquad K_2 = \frac{\overline{\gamma_1}}{\omega_1} + 2K_1; \qquad K_3 = K_0;$$

$$K_1 = \frac{\pi i}{\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1}; \qquad \delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right); \qquad \gamma_1 = 2Q\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \overline{\omega}_1\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right); \qquad (1.14)$$

$\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса.

Используя (1.11), (1.12) и (1.14), легко определяем

$$A_0 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}e_0 + \sum_{k=0}^{\infty} e_{0,k}\lambda^{2k+2}A_{2k+2};$$

$$A_{-2j} = \frac{1-G/G_1}{1+\varkappa_1 G/G_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+1)!\,g_{j+k+1}\lambda^{2j+2k+2}}{(2j)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+2}}A_{2k+2}. \qquad (1.15)$$

Здесь

$$e_0 = \frac{1+\varkappa}{(1-2K_1\lambda^2)e}; \qquad e_{00} = K_0\frac{1-G/G_1}{(1-2K_1\lambda^2)e};$$

$$e_{0,k} = r_{0,k}\frac{1-G/G_1}{(1-2K_1\lambda^2)e}; \qquad e = \frac{1+\varkappa}{2(1-2K_1\lambda^2)} + \frac{\varkappa_1-1}{2}\frac{G}{G_1} - \frac{\varkappa-1}{2}.$$

Выпишем бесконечные системы уравнений, соответствующие краевым задачам (1.7) и (1.8), в виде

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\alpha_{2k+2} + b_j'; \qquad (1.16) \qquad \alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}^{*}\alpha_{2k+2} + b_j^{*}. \qquad (1.17)$$

Значения величин $a_{j,k}$, $a_{j,k}^*$, b_j' и b_j^* даны в работе [4]. Для определения $a_{j,k}$ и b_j' необходимо положить $\varepsilon = 1$, для величин $a_{j,k}^*$ и b_j^* величина $\varepsilon = -\varkappa$. Кроме этого, вместо A_{2k} ($k = 0, \pm 1, \pm \ldots$) следует в выражение для b_j' подставить величины A_{2k}' из (1.7), а в выражение для b_j^* — величины A_{2k}^*, определенные в (1.8).

Умножив почленно систему (1.17) на множитель $G_1\varkappa/G\varkappa_1$ и сложив с (1.16), получим

$$\alpha_{2j+2}\left(1-\frac{\varkappa G_1}{\varkappa_1 G}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{j,k}-\frac{\varkappa G_1}{\varkappa_1 G}a_{j,k}^{*}\right)\alpha_{2k+2} + b_j' - \frac{\varkappa G_1}{\varkappa_1 G}b_j^{*}. \qquad (1.18)$$

Бесконечная система (1.18) уже не содержит величин A_{-2k} $(k = 1, 2 \ldots)$.

Подставив вместо b_j' и b_j^* их выражения и заменив везде α_{2k} на A_{2k} по соотношениям (1.12), приходим к разрешающей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно параметров нагрузки A_{2k}

$$A_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} S_{j,k} A_{2k+2} + T_j \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.19}$$

Здесь

$$S_{j,k} = (2j+1)\lambda^{2j+2k+2}\frac{s_{j,k}}{\gamma}; \qquad T_j = \frac{t_j}{\gamma};$$

$$s_{j,k} = \frac{1 - G/G_1}{1+\varkappa}\left(\gamma_{j,k} + \frac{G_1}{\varkappa_1 G}\gamma_{j,k}^* + d_{j,k}\right); \qquad \gamma_{j,k} = \gamma_{j,k}(1); \quad \gamma_{j,k}^* = \gamma_{j,k}(-\varkappa);$$

$$d_{00} = \lambda^2 K_0^2 \eta\left(\frac{G}{G_1}\right); \qquad d_{0,k} = \lambda^2 K_0 \frac{g_{k+1}}{2^{2k+2}}\eta\left(\frac{G}{G_1}\right); \; d_{j,k} = \lambda^2\frac{g_{j+1}g_{k+1}}{2^{2j+2k+4}}\eta\left(\frac{G}{G_1}\right);$$

$$t_0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\left(1 + \frac{G_1}{\varkappa_1 G}\right) + \lambda^2 K_0\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}\eta_1\left(\frac{G}{G_1}\right);$$

$$t_j = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}\frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}}\eta_1\left(\frac{G}{G_1}\right);$$

$$\eta\left(\frac{G}{G_1}\right) = \left[\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1}\frac{1}{1+(\varkappa-1)K_1\lambda^2} - \frac{2}{1-2K_1\lambda^2}\right]\times$$

$$\times\left[1 + (1-2K_1\lambda^2)\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} - \frac{\varkappa_1-1}{\varkappa+1}\frac{G}{G_1}\right)\right]^{-1};$$

$$\eta_1\left(\frac{G}{G_1}\right) = \left(1 + \frac{G_1}{\varkappa_1 G}\right)\left[(\varkappa_1 - 1)\frac{G}{G_1} - (\varkappa - 1)\right]\times$$

$$\times\left[1 + (\varkappa-1)\lambda^2 K_1 + (\varkappa_1 - 1)(1 - 2K_1\lambda^2)\frac{G}{2G_1}\right]^{-1};$$

$$\gamma = \frac{(1 - G/C_1)(1 - \varkappa G_1/\varkappa_1 G)}{1+\varkappa} - \frac{1+\varkappa_1}{\varkappa_1};$$

величины $\gamma_{j,k}(\varepsilon)$ даны в работе [4].

После определения A_{2j+2} из (1.19) найдем α_{2j+2} и A_{-2j} из соотношений (1.12). Коэффициенты β_{2j+2} можно вычислять по равенству

$$(1+\varkappa)\beta_{2j+4} = (2j+3)A_{2j+2}\left(1 - \frac{G}{G_1}\right) - A_{-2j-2}\left(\varkappa - \frac{\varkappa_1 G}{G_1}\right),$$

$$j = 0, 1, \ldots \tag{1.20}$$

Формула для коэффициента β_2 имеет аналогичный вид. Таким образом, построение решения закончено.

§ 2. В качестве приложения полученных результатов, рассмотрим важную для инженерной практики задачу приведения для решетки. Задача заключается в определении приведенных упругих параметров некоторой сплошной плоскости, имеющей при прочих равных условиях ту же жесткость на растяжение, что и решетка. При этом сплошная плоскость может оказаться и не изотропной.

Строгая постановка задачи приведения и ее решение даны в работе [4]. Ниже выписаны некоторые соотношения для приведенных упругих параметров

$$\frac{E_1^*/(1-\mu_1^*)}{E/(1-\mu)} = \left[1 + \frac{4K_1\beta_2 - (\delta_1 + 4K_1)\alpha_2}{1-\mu}\lambda^2\right]^{-1}; \tag{2.1}$$

$$\frac{E_1^*/(1+\mu_1^*)}{E/(1+\mu)} = \left[1 + 4K_1\beta_2\lambda^2 - \frac{\alpha_2(\delta_1 + 4K_1)}{1+\mu}\lambda^2\right]^{-1}; \tag{2.2}$$

$$\frac{E}{E_2^*} - \frac{E}{E_1^*} = \alpha_2\lambda^2\left[\frac{16\pi i}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \omega_2\overline{\omega}_1} + 2(1+\mu)\frac{\overline{\delta}_1\omega_2 - \overline{\delta}_2\omega_1}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2}\right]. \tag{2.3}$$

Здесь E^*_1 и E^*_2— модули упругости первого рода эквивалентной в общем случае ортотропной сплошной плоскости в направлении главных осей x и y; μ^*_1 —коэффициент поперечного сжатия в направлении оси y; E и μ— соответствующие упругие константы материала решетки; величины K_1 и δ_1 определены в (1.14); δ_2 — связано с δ_1 соотношением Лежандра $\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i$; α_2 и β_2 — первые коэффициенты, фигурирующие в представлениях функций Φ и Ψ (1.6).

Заметим, что в формулы (2.1) и (2.3) необходимо подставлять величины α_2 и β_2, соответствующие решению задачи при средних напряжениях $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_{12} = 0$, а в соотношения (2.2) — величины α_2 и β_2 из решения задачи при средних напряжениях $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$, $\tau_{12} = 0$. Для правильных решеток (правильной треугольной $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$ и квадратной $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$) формулы (2.1)—(2.3) существенно упрощаются.

На рис. 2, 3, 4, 5 и 6 нанесены результаты расчетов приведенных упругих параметров для правильных решеток. На рис. 2, 3 построены кривые

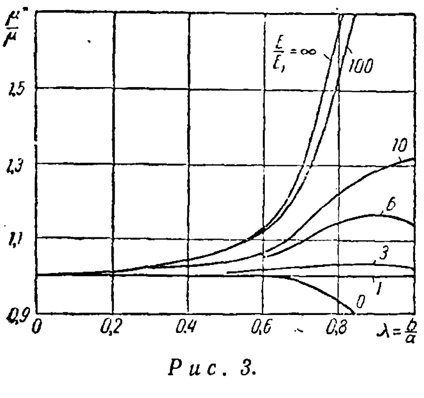

Рис. 3.

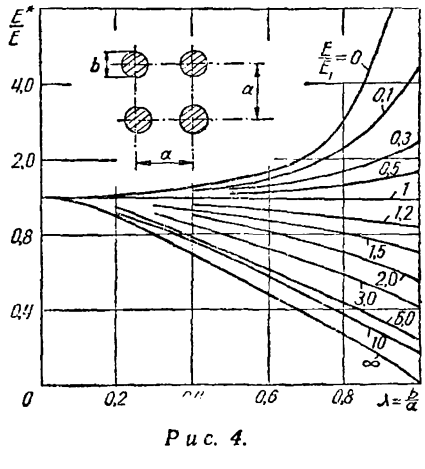

Рис. 4.

E^*/E и μ^*/μ для правильной треугольной решетки, на рис. 4, 5 и 6 — кривые E^*/E, μ^*/μ и G^*/G для квадратной решетки в функции от относительного размера области λ (отношение диаметра отверстия b к шагу a) при различных значениях параметра E/E_1, где E — модуль упругости материала решетки, а E_1 — модуль упругости материала шайбы.

В расчетах принималось, что коэффициенты Пуассона материала шайбы и решетки одинаковы. В двух предельных случаях $E/E_1 \to 0$ (абсолютно жесткие шайбы) и $E/E_1 \to \infty$ (свободные от сил отверстия) получаем кривые, известные из работы [4].

§ 3. Из формул (2.1) — (2.3) следует, что при решении задачи приведения необходимо предварительно рассмотреть соответствующую двоякопериодическую задачу для решетки. Последнее не всегда легко сделать, так как приходится решать громоздкую систему уравнений.

С целью упрощения вычислений была предпринята попытка построения некоторой приближенной схемы вычисления приведенных упругих параметров.

Основная идея заключалась в подстановке в точные соотношения (2.1)—(2.3) приближенных значений величин α_2 и β_2. Структура бесконечной системы (1.19) такова, что в рабочем диапазоне изменения $0 < \lambda \leqslant = 0{,}8$ для

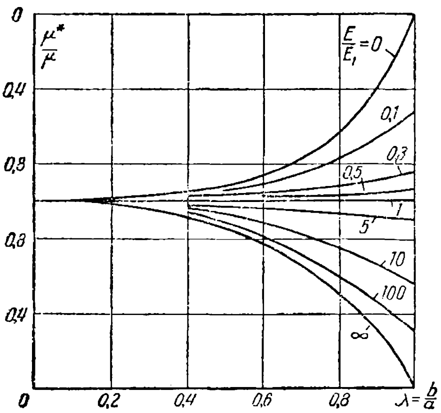

Рис. 5.

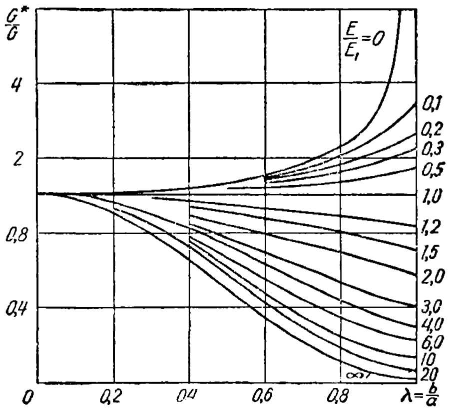

Рис 6.

определения коэффициента α_2 достаточно урезать ее до двух, а иногда и до одного уравнения. Учет последующих уравнений системы с поправками в последующих коэффициентах не изменяет величины α_2 и β_2. Таким путем удалось получить простые формулы, определяющие искомые величины с достаточной точностью. В качестве примера запишем формулу, определяющую приведенный модуль упругости при всестороннем растяжении E_l для случая правильной решетки

$$\frac{E_l^*}{E_l} = \frac{E^*/(1-\mu^*)}{E/(1-\mu)} = \frac{1-0{,}5\,(1-\mu)(1-2K_1\lambda^2)(1-G/G_1)}{1-0{,}5\,(1+\mu)(1-2K_1\lambda^2)(1-G_1/G)}\,\frac{G_1}{G},$$

где для треугольной решетки $K_1 = \pi/4\sqrt{3}$, а для квадратной решетки $K_1 = \pi/8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, ГИТТЛ, 1948.
2. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, 1954.
3. Натанзон В. Я., О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке, Матем сб. 42, № 5, 1935.
4. Фильштинский Л. А., Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий, ПММ, 28, № 3, 1964.

Поступила
11.IX 1965 г.