Ж. нано- і електрон. фіз./
J. Nano-Electron. Phys.
2009.– Т.1, №4. – С. 7-11

PACS numbers: 02.50.Ey, 05.40. – a, 82.40.Bj

ПОДАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ШУМАМИ ЛЕВИ

***А.И. Олемской*[1,2]*, И.А. Шуда*[1]*, С.С. Борисов*[1]*, Т.А. Давиденко*[1]**

[1] Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакого, 2, 40007, Сумы, Украина
E-mail: alex@ufn.ru

[2] Институт прикладной физики НАН Украины
ул. Петропавловская, 58, 40030, Сумы, Украина

Исследовано влияние стохастических источников Леви на процесс самоорганизации, связанный с образованием предельного цикла. Показано, что шумы Леви подавляют стохастические осцилляции в неравновесном стационарном режиме.

Ключевые слова: *ШУМ ЛЕВИ, СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, САМООРГАНИЗАЦИЯ.*

(Получено 23.11.2009, в отредактированной форме – 06.12.2009)

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, действие стохастических источников (шумов) в нелинейных системах может играть не только деструктивную, но и конструктивную роль, которая наиболее ярко проявляется в критической перестройке поведения системы [1]. Простейший пример такой перестройки представляют фазовые переходы, течение которых приводит к появлению особых точек на фазовой плоскости. Предлагаемая работа посвящена исследованию более сложного случая, когда перестройка стохастической системы приводит к колебательному поведению, которому отвечает предельный цикл, появляющийся в результате бифуркации Хопфа [2]. При этом мы не ограничиваемся исследованием гауссовских шумов, а рассматриваем более общий случай стохастических источников Леви [3].

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ КАРТИНА ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ЛЕВИ

Согласно теореме о центральном многообразии [2], полное описание предельного цикла достигается использованием двух степеней свободы, отвечающих стохастическим переменным X_i, $i = 1, 2$. В результате эволюция системы определяется уравнениями Ланжевена [4]

$$X_i = f_i dt + g_i dL_i, i = 1, 2 \tag{1}$$

с произвольными силами $f_i = f_i(x_1, x_2)$ и амплитудами шумов $g_i = g_i(x_1, x_2)$ являющимися функциями обеих переменных x_i, $i = 1,2$; стохастические слагаемые соответствуют процессам Леви $L_i = L_i(t)$, которые определяются характеристической функцией

$$\left\langle e^{ik_i dX_i} \right\rangle := e^{\Lambda_i dt} \tag{2}$$

с инкрементами $\Lambda_i = \Lambda_i(k_1, k_2;\ x_1, x_2)$ вида [5]

$$\Lambda_i = ik_i(f_i + \gamma_i g_i) - \left|m_i g_i k_i\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_i\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{j=1}^{2} \left|m_j g_j k_j\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_j\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \tag{3}$$

Здесь и далее углы асимметрии φ_i и модули m_i определены равенствами

$$\begin{aligned} &\mathrm{tg}\left[\phi_i\left(\alpha\right)\right] = \beta_i \,\mathrm{sgn}\left(g_i k_i\right) \mathrm{tg}\left(\pi\alpha/2\right), \\ &m_i^{\alpha} = \sqrt{1 + \beta_i^2 \,\mathrm{tg}^2\left(\pi\alpha/2\right)}; \end{aligned} \tag{4}$$

показатель Леви $\alpha \in (0,\ 2)$ определяет степенную асимптотику $x_i^{-(\alpha+1)}$ с $1 \neq \alpha < 2$ (случай $\alpha = 2$ отвечает распределению Гаусса), параметры $\beta_i = [-1,\ +1]$ задают асимметрию процесса Леви, параметры $-\infty < \gamma_i < +\infty$ представляют средние значения стохастических переменных X_i при $\alpha > 1$, $D \in [0,\ +\infty)$ – скейлинговый параметр типа коэффициента диффузии, угловые скобки означают усреднение по шумам Леви.

Эволюция фурье-образа функции распределения вероятности

$$\tilde{P}(k_1, k_2; t) = \iint dx_1 dx_2 P(x_1, x_2; t) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \tag{5}$$

описывается уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2}\left[i(f_i + \gamma_i g_i)k_i - \left|m_i g_i k_i\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_i\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{j=1}^{2}\left|m_j g_j k_j\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_j\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right]\tilde{P}. \tag{6}$$

Будучи результатом Фурье-преобразования, правая часть этого уравнения содержит компоненты волнового вектора k_i, $i = 1{,}2$, тогда как силы $f_i = f_i(x_1,\ x_2)$ и амплитуды мультипликативных шумов $g_i = g_i(x_1,\ x_2)$ определяются координатами x_1 и x_2.

Согласно уравнению (6), записанному в x-представлении, компоненты стационарного потока вероятности удовлетворяют условию $\sum_i \partial J_i / \partial x_i = 0$, которое означает, что первая из них $J_1 = J_1(x_2)$ является функцией единственной переменной x_2, и наоборот – для второй $J_2 = J_2(x_1)$. В результате поведение системы определятся выражениями

$$\begin{aligned} &\left\{\left(f_1 + \gamma_1 g_1\right) + i\left|m_1 g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left|k_1\right|^{\frac{\alpha}{2}-2} k_1 \right. \\ &\left.\left[\left|m_1 g_1 k_1\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \left|m_2 g_2 k_2\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]\right\} \tilde{P} = 2\pi J_1\left(k_2\right)\delta\left(k_2\right), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\left\{\left(f_2 + \gamma_2 g_2\right) + i\left|m_2 g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left|k_2\right|^{\frac{\alpha}{2}-2} k_2 \right. \\ &\left.\left[\left|m_1 g_1 k_1\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \left|m_2 g_2 k_2\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]\right\} \tilde{P} = 2\pi J_2\left(k_1\right)\delta\left(k_1\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Так как пара этих уравнений определяет единственную функцию распределения $\tilde{P}\left(k_1,k_2\right)$, то должно выполняться условие согласования

$$\begin{gathered}\left[\left(f_1+\gamma_1 g_1\right)+ie^{-i\varphi_1(\alpha)}\left|m_1 g_1\right|^{\alpha}\left|k_1\right|^{\alpha-2}k_1\right]\delta\left(k_2\right)J_2\left(k_1\right)\\=\left[\left(f_2+\gamma_2 g_2\right)+ie^{-i\varphi_2(\alpha)}\left|m_2 g_2\right|^{\alpha}\left|k_2\right|^{\alpha-2}k_2\right]\delta\left(k_1\right)J_1\left(k_2\right),\end{gathered}\tag{9}$$

которое ограничивает выбор компонент потока вероятностей $J_1(k_2)$ и $J_2(k_1)$.

Умножая уравнение (7) на $\left|m_2 g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, а (8) – на $\left|m_1 g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ и затем вычитая почленно полученные результаты, получаем

$$\begin{gathered}\left\{F+i\left|m_1 m_2 g_1 g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\left[\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}\right.\\\left.\times\left[\left|m_1 g_1 k_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\left|m_2 g_2 k_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]\left(\left|k_1\right|^{\frac{\alpha}{2}-2}k_1-\left|k_2\right|^{\frac{\alpha}{2}-2}k_2\right)\right\}\tilde{P}\\=2\pi\left[J_1\left(k_2\right)\delta\left(k_1\right)\left|m_2 g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-J_2\left(k_1\right)\delta\left(k_2\right)\left|m_1 g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right],\end{gathered}\tag{10}$$

где введено обозначение

$$F\equiv\left(f_1+\gamma_1 g_1\right)\left|m_2 g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\left(f_2+\gamma_2 g_2\right)\left|m_1 g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.\tag{11}$$

Согласно (10), функция распределения вероятности выражается равенством

$$\begin{aligned}P\left(x_1,x_2\right)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_2}{2\pi}\frac{J_1\left(k_2\right)\left|m_2 g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\left[k_2x_2+\varphi_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}}{F_2-i\left|g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}\left|m_2 g_2\right|^{\alpha}e^{-i\varphi_2(\alpha)}\left|k_2\right|^{\alpha-2}k_2}\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_1}{2\pi}\frac{J_2\left(k_1\right)\left|m_1 g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\left[k_1x_1+\varphi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}}{F_1-i\left|g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}\left|m_1 g_1\right|^{\alpha}e^{-i\varphi_1(\alpha)}\left|k_1\right|^{\alpha-2}k_1}.\end{aligned}\tag{12}$$

В стационарном состоянии, когда компоненты потока вероятностей принимают постоянные значения в x-пространстве, соответствующие фурье-образы принимают вид $J_1\left(k_2\right)=2\pi J_1^{(0)}\delta\left(k_2\right)$ и $J_2\left(k_1\right)=2\pi J_2^{(0)}\delta\left(k_1\right)$, где $J_i^{(0)}=\mathrm{const}$. В результате условие согласования (9) записывается в виде $\left(f_1+g_1\gamma_1\right)J_2^{(0)}=\left(f_2+g_2\gamma_2\right)J_1^{(0)}$, эффективная сила (11) равна $F=\left(f_1+\gamma_1 g_1\right)\left|g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}-\left(f_2+\gamma_2 g_2\right)\left|g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}$, а плотность вероятности (12) выражается равенством $P=F^{-1}\left(J_1^{(0)}\left|g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}}-J_2^{(0)}\left|g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}\right)$. Таким образом, условие согласования и равенство $F = 0$, обеспечивающее расходимость вероятности, удовлетворяются при одновременном выполнении равенств

$$\frac{f_1 + g_1\gamma_1}{f_2 + g_2\gamma_2} = \frac{J_1^{(0)}}{J_2^{(0)}} = \left|\frac{g_1}{g_2}\right|^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

Однако при этом пропадает и числитель $J_1^{(0)}\left|g_2\right|^{\frac{\alpha}{2}} - J_2^{(0)}\left|g_1\right|^{\frac{\alpha}{2}}$, и плотность вероятности может принимать только конечные значения.

3. ВЫВОДЫ

Проведенное исследование стохастической системы, обладающей шумами Леви, указывает на невозможность колебательного поведения стационарного неравновесного состояния, которое отвечает предельно большим значениям плотности вероятности, реализующимся на предельном цикле, порожденном бифуркацией Хопфа.

STOCHASTIC OSCILLATIONS SUPPRESSION BY LEVY-NOISE

***A.I. Olemskoi*[1,2], *I.A. Shuda*[1], *S.S. Borysov*[1], *T.O. Davydenko*[1]**

[1] Sumy State University ,
2, Rimsky-Korsakov St., 40007, Sumy, Ukraine
E-mail: alex@ufn.ru

[2] Institute of applied physics of NAS of Ukraine,
58, Petropavlovskaya St., 40030, Sumy, Ukraine

We consider effect of stochastic sources self-organization process being initiated with creation of the limit cycle. It is shown that stochastic system driven by stable Levy noise can not display oscillations in non-equilibrium steady state.

Keywords: *LEVY NOISE, STOCHASTIC SYSTEM, SELF-ORGANIZATION.*

ПОДАВЛЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ ОСЦИЛЯЦІЙ ШУМАМИ ЛЕВІ

***О.І. Олємской*[1,2], *І.О. Шуда*[1], *С.С. Борисов*[1], *Т.О. Давиденко*[1]**

[1] Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакого, 2, 40007, Суми, Україна
E-mail: alex@ufn.ru

[2] Інститут прикладної фізики НАН України
ул. Петропавловская, 58, 40030, Сумы, Украина

Досліджено вплив стохастичних джерел Леві на процес самоорганізації, зв'язаний з утворенням граничного циклу. Показано, що шуми Леві подавляють стохастичні осциляції в нерівноважному стаціонарному режимі.

Ключові слова: *ШУМ ЛЕВІ, СТОХАСТИЧНА СИСТЕМА, САМООРГАНІЗАЦІЯ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Sagu'es, J.M. Sancho and J. Garcia-Ojalv, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 829 (2007).
2. B.D. Hassard, N.D. Kazarinoff and Y.-H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (Cambridge: Cambridge University Press: 1981).
3. A.A. Dubkov, B. Spagnolo, and V.V. Uchaikin, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18**, 2649 (2008).
4. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, (Berlin: Springer-Verlag: 1984).
5. D. Schertzer, M. Larcheveque, J. Duan, V.V. Yanovsky, and S. Lovejoy, *J. Math. Phys.* **41**, 200 (2001).