

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНООПЕРТОГО СТЕРЖНЯ

Клименко В.А., ст. преподаватель,

Москаленко Д.Р., студент, СумГУ, г. Сумы

Рассмотрим свободно опертый стержень длины l под действием сосредоточенной силы в точке ξ .

Определить прогиб.

Известно, что $EIw'' = M$, $EIw''' = -Q$; $EIw^{(IV)} = q$;

Q – перерезывающая сила.

Граничные условия: $w_1(0) = 0$; $w_1''(0) = 0$; $w_2(l) = 0$; $w_2''(l) = 0$

Условия сопряженных участков

$$w_1(\xi) = w_2(\xi); \quad w_1''(\xi) = w_2''(\xi); \quad w_1'''(\xi) = w_2'''(\xi).$$

В точке ξ сила P имеет скачок равный $P=1$, то

$$w_1'''(\xi) - w_2'''(\xi) = -1/EI$$

В результате получаем функцию прогиба балки

$$G(x, \xi) = \begin{cases} w_1 = \frac{x(l-\xi)}{6EI} (x^2 - 2\xi l + \xi^2), & 0 < x < \xi \\ w_2 = \frac{\xi(l-x)}{6EI} (\xi^2 - 2xl + x^2), & \xi < x < l \end{cases}$$

Эта функция дает прогиб в точке x , под действием единичной силы в точке ξ .

Если действует непрерывно распределенная нагрузка интенсивностью $q(x)$ на l , то

$$w(x) = \int_0^l q(\xi) G(x, \xi) d\xi$$

т.е. $w(x)$ известно, требуется определить $q(x)$, таким образом приходим к интегральному уравнению (первого рода).

Рассмотрим задачу о вынужденных движениях стержня (динамическая задача).

По принципу Даламбера:

$$P(x,t) = -\rho \frac{d^2 w}{dt^2} + P_1(x,t)$$

В этом случае функция прогиба так же зависит от времени

$$w(x,t) = \int_0^l G(x,\xi) \left[-\rho \frac{d^2 w}{dt^2} + P_1(\xi,t) \right] d\xi$$

Если предположить, что вынужденная сила действует по гармоничному закону, т.е.

$$P_1(x,t) = P(x) \cos \omega t, \text{ то}$$

$$w(x,t) = U(x) \cos \omega t, \text{ тогда}$$

$$U(x) - w^2 \int_0^l G(x,\xi) U(\xi) d\xi = f(x)$$

$$f(x) = \int_0^l P(\xi) G(x,\xi) d\xi$$

где

пришли к интегральному уравнению второго рода относительно функции $U(x)$. Правая часть $f(x)$ хранит информацию о вынуждающей нагрузке, ядро $G(x,\xi)$ – информацию о граничных условиях (геометрических и механических характеристиках стержня).

Это уравнение эквивалентно краевой задаче о вынужденных поперечных колебаниях.

При $f(x) = 0$ имеем задачу о свободных или собственных колебаниях стержня.

Для численной реализации рассматриваемой математической модели была выбрана система автоматизированного проектирования Autodesk Inventor. В расчетном модуле нагрузок, для построенной 3D модели рассматриваются цилиндрические опоры и прямоугольный стержень. В рамках построенной математической модели при численной реализации материал легированная сталь.

Полученные численные результаты согласуются с тестовыми теоретическими результатами.

Список литературы

1. А.Г. Бутковский. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: наука, 1979, с. 51