

УДК [537.624]
КП
N госрегистрации 0109U001379
Инв. N

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Сумский государственный университет
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
д.ф.-м.н., профессор

_____ А.Н. Черноус

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**ВЫНУЖДЕННАЯ И СПОНТАННАЯ МАГНИТНАЯ ДИНАМИКА
СИСТЕМ ОДНОСНЫХ НАНОЧАСТИЦ**
(заключительный)

Начальник НДЧ

к.ф.-м.н.

Д.И. Курбатов

Руководитель НИР

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Денисов

2011

Рукопись закончена 26.12.2011

Результаты работы рассмотрены научным советом СумГУ
от 8.12.2011, протокол № 4

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР, главный научный сотрудник, д.ф.-м.н., профессор	26.12.2011	С.И. Денисов (реферат, введение, разделы 1- 3, выводы)
Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	26.12.2011	Е.С. Денисова (раздел 3)
Заведующий лабораторией, к.ф.-м.н., доцент	26.12.2011	Т.В. Лютый (реферат, введение, разделы 1, 2, выводы)
Младший научный сотруд- ник	26.12.2011	А.Ю. Поляков (раздел 1, 2)
Студент	26.12.2011	Ю.С. Быстрик (раздел 3)

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР. 95 с., 27 рис., 89 источников.

Объектом исследования данной работы являются ансамбли однодоменных ферромагнитных частиц сферической формы, которые возбуждаются вращающимся магнитным полем, поляризованным в плоскости, перпендикулярной осям легкого намагничивания частиц, и находятся в термостате. Намагниченность (магнитный момент) каждой такой частицы постоянна по модулю, и под действием внешнего поля изменяет лишь ориентацию в пространстве.

Целью исследования является, во-первых, описание комплекса динамических и термических эффектов в рассматриваемой системе, в частности нахождение зависимостей времени переключения намагниченности и времени жизни прецессионных режимов от внешних и внутренних параметров системы. И, во-вторых, построение теории сверхмедленной диффузии.

Метод исследования. Исследования проводились путем аналитического и численного решения уравнения Ландау-Лифшица, численного решения стохастического уравнения Ландау-Лифшица для магнитного момента наночастицы во внешнем поле, и аналитического решения соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Кроме того, использованы методы теории непрерывных во времени случайных блужданий.

Актуальность темы исследования обусловлена значительными перспективами применения ферромагнитных наночастиц в современных технологиях записи, хранения и обработки информации.

Ключевые слова: ФЕРРОМАГНИТНАЯ НАНОЧАСТИЦА, ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА, ПРЕЦЕССИОННАЯ ДИНАМИКА, УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА, ТЕРМИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ, ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ НАМАГНИЧЕННОСТИ, СФЕРХМЕДЛЕННАЯ ДИФФУЗИЯ.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МАГНИТНОГО МОМЕНТА НАНОЧАСТИЦЫ В ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ	9
1.1 Модель и основные соотношения	10
1.2 Типы прецессионной динамики магнитного момента	13
1.3 Фазовые диаграммы прецессионной динамики магнитного момента.....	17
1.4 Характеристики переключения намагниченности	21
1.4.1 Время переключения	21
1.4.2 Время переключения под воздействием импульсного поля.....	26
1.5 Выводы к разделу 1	31
2 СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ НАНОЧАСТИЦЫ В ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ	33
2.1 Время переключения намагниченности	34
2.1.1 Описание модели	34
2.1.2 Анализ результатов.....	36
2.1.2.1 Режимы прецессии и тепловые флуктуации	36
2.1.2.2 Среднее время переключения	36
2.1.2.3 Распределение времен переключения	40
2.2 Время жизни прецессионных режимов.....	42
2.2.1 Определение и основные уравнения.....	42
2.2.2 Аналитическое выражение для времени жизни	50
2.2.2.1 Трехрежимная аппроксимация	50
2.2.2.2 Высокий барьер анизотропии	52
2.2.2.3 Частотная зависимость времени жизни.....	57
2.2.2.4 Время жизни при нулевой частоте	59
2.2.3 Численный анализ времени жизни	61

2.2.3.1	Прецессионные моды магнитного момента.....	61
2.2.3.2	Моделирование времен жизни и их свойств.....	67
2.3	Выводы к разделу 2.....	73
3	ТЕОРИЯ СВЕРХМЕДЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ: ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ.....	76
3.1	Актуальность задачи.....	76
3.2	Описание модели.....	77
3.3	Законы сверхмедленной диффузии.....	79
3.4	Примеры.....	83
3.5	Выводы к разделу 2.....	85
	ВЫВОДЫ.....	86

ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств нанообъектов является одной из приоритетных задач современной физики. Прежде всего, это связано с бурным развитием нанотехнологий, внедрение которых способно совершить революцию во многих отраслях общественного производства. Среди наиболее перспективных направлений использования нанотехнологий необходимо отметить следующие: создание новых сверхпрочных и легких конструкционных материалов, которые во много раз повысят эффективность и надежность транспортных средств и коммуникаций, создание новых материалов микроэлектроники, позволяющих создавать сверхбыстрые и малогабаритные ЭВМ; создание новых инструментальных средств медицины и принципиально новых фармацевтических препаратов, способных расширить физические возможности человека [1-3].

Возможность создания объектов с характерными размерами в пределах 1-100 нм не следует рассматривать как простое развитие субмикронных технологий или очередной шаг к миниатюризации устройств. В таком масштабе число структурных элементов находится в пределах нескольких тысяч, что вызывает ряд новых электрических, магнитных и оптических свойств, необычных для макроскопических образцов [2, 4]. Большинство современных теорий твердого тела имеют ограничения по минимально допустимыми размерами объектов и не в состоянии адекватно описать многообразие новых свойств. Поэтому изучение нанообъектов носит не только прикладной, но и фундаментальный характер.

С другой стороны, именно наноразмерные объекты и их ансамбли могут служить великолепным примером возбужденных систем, ключевую роль в динамике которых играют случайные воздействия. Именно такие воздействия среды на систему способны приводить к качественным изменениям в поведении систем. Примерами таких изменений могут служить, например, индуцированные внешним шумом фазовые переходы [5], стохастический резонанс [6],

резонансная активация [7], направленный транспорт [8]. Поэтому основной идеей, положенной в основу данной НИР является разработка теоретических методов описания ключевых моделей физики, а также исследование основных свойств изучаемых систем при различных внешних воздействиях с учетом флуктуаций среды.

Одним из наиболее ярких и интересных с практической точки зрения примером сложных систем, возбуждаемых как детерминистическими силами, так и подверженных случайным воздействиям, обусловленным термостатом, есть ансамбли магнитных наночастиц, возбуждаемых циркулярно поляризованным магнитным полем, плоскость поляризации которого перпендикулярна осям легкого намагничивания частиц.

Для ферромагнетиков определяющим свойством, связанным с малыми размерами образца, является однодоменность или однодоменное состояние [9]. Это означает, что частица ферромагнитного материала не имеет доменного строения, которое характерно для массивных магнитов. Причиной этого является то, что при уменьшении размеров частицы удельный вес поверхностной энергии граничных слоев между доменами растет, и она становится больше, чем объемная энергия собственного магнитного поля образца [9, 10]. Таким образом, наступает такой момент, когда весь объем образца занимает один домен, то есть частица превращается в миниатюрный постоянный магнит.

Именно однодоменные частицы сегодня является объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. Значительным стимулом в их изучении стало совершенствование существующих и появление новых технологий производства объектов столь малых масштабов. Так, в последние двадцать лет значительный прогресс таких методов как литография, электронно-лучевая литография, интерференционная литография, а также развитие новых методов, таких как туннельно-зондовая литография, формирование самоподобных регулярных структур [11], дали возможность создавать однодоменные частицы с воспроизведенными характеристиками. Также следует отметить стремительное развитие измерительной инструментальной базы, в частности,

развития таких методов, как СКВИД-магнитометрия [10], магнитно-силовая и атомно-силовая микроскопия [12, 13].

Вторая часть НИР посвящена развитию аппарата описания широкого класса случайных процессов, которые пригодны для описания явлений в физических, биологических, социальных, экономических и других системах. Часто в таких системах наблюдается аномальное поведение диффузии в том смысле, что при больших временах дисперсия возрастает нелинейно со временем и тогда говорят об аномальной диффузии. Различают два типа диффузии такого вида: субдиффузия и супердиффузия. Класс систем с таким поведением дисперсии является достаточно широким и перманентно возрастающим. Субдиффузия наблюдалась, например, в аморфных твердых телах [14], перколяционных кластерах [15] и живых клетках [16-17], а супердиффузия в турбулентных потоках [18-19], оптических решетках [20] и животных, ищущих пищу [21-22]. В общем случае зависимость дисперсии от времени не ограничивается степенной функцией. В данной НИР, используя модель непрерывных во времени случайных блужданий, показано, что если распределение времен ожидания имеет сверхтяжелые хвосты, тогда диффузия является сверхмедленной и описывается медленно изменяющимися на бесконечности функциями.

1 ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МАГНИТНОГО МОМЕНТА НАНОЧАСТИЦЫ В ЦИРКУЛЯРНО- ПОЛЯРИЗОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ферромагнитные наночастицы демонстрируют ряд интересных с фундаментальной точки зрения явлений, таких как гигантское магнитосопротивление [23], размерные и поверхностные эффекты [24], квантовое туннелирование намагниченности. Однако, в первую очередь, актуальность изучения ферромагнитных наночастиц, а также их ансамблей, диктуется перспективами использования таких объектов как носителей информации в современных магнитных накопителях [25-27]. Бит информации в таких устройствах определяется тем, в каком из двух равновесных состояний, связанных с сильной одноосной анизотропией, находится магнитный момент \mathbf{m} наночастицы. Поэтому с точки зрения процесса записи данных важен вопрос об управляемом переключении его состояния. Эта проблема напрямую связана с быстродействием накопителей и ограничивается временем перемагничивания наночастиц в процессе записи. Таким образом, поиск способов быстрой и малоэнергоемких изменения направления магнитного момента является важной прикладной задачей, вызывает значительный интерес исследователей [28-32].

Простейшим типом внешнего поля, с помощью которого можно переключить магнитный момент наночастицы, является внешнее поле \mathbf{H} , которое направлено вдоль легкой оси. Описание динамики магнитного момента под действием этого поля было дано в [33]. Позже будет показано, что переключение может происходить и для других типов полей. Например, в [30, 34, 35] рассматривался переключения, которое осуществляется с помощью импульса \mathbf{H}_\perp , что перпендикулярное к легкой оси. А именно, было показано, что для перемагничивания частицы таким образом требует намного меньше времени, чем для случая поля \mathbf{H} . Комбинированное действие постоянного поля \mathbf{H} , приложенного вдоль легкой оси, а также поля $\mathbf{h}(t)$, которое является циркулярно поляри-

зованным в плоскости, перпендикулярной к легкой оси, была изучена в [36]. В этом случае значение \mathbf{H}_{cr} является меньшим по сравнению с только приложенным H . Это было подтверждено экспериментами с перемагничивания наночастиц в присутствии поля радиочастоты, которое вращается [37].

Последовательное развитие идеи переключения намагниченности циркулярно поляризованным полем $\mathbf{h}(t)$ был представлен в [38 - 39]. Основываясь на критерии стабильности, было аналитически показано [39], что переключение может происходить под действием одного только поля $\mathbf{h}(t)$, если прецессия намагниченности станет нестабильной для $|\mathbf{h}(t)| = h_{cr}$. Однако потеря устойчивости в некоторых случаях приводит к переходу от однородной прецессии к неоднородной без переключения [39].

Оригинальный подход был предложен в работе [38]. Основная идея заключается в зависимости формы внешнего поля от позиции намагниченности наночастицы. В рамках этой работы были получены теоретическая граница минимальной амплитуды переключающего поля и минимальное время переключения. Но из-за сложной формы внешнего поля, что означает и сложное строение источника поля, очень трудно реализовать эту идею.

Т.о. существует много причин сконцентрировать усилия на изучении параметров переключения под действием внешних полей максимально простого вида. Как было показано в вышеупомянутых исследованиях, и как следует из наших результатов, применение циркулярно поляризованного поля $\mathbf{h}(t)$ является очень многообещающим для перемагничивания наночастицы.

1.1 Модель и основные соотношения

Будем рассматривать сферическую ферромагнитную одноосные наночастицу. Пусть ее ось легкого намагничивания совпадает с осью oz декартовой системы координат. Считаем, что обменное взаимодействие спинов частицы достаточно велико, и поведение суммарного магнитного момента определяется

моделью когерентного вращения, то есть модуль магнитного момента является постоянной величиной. В таком случае намагниченность частицы будет характеризоваться классическим магнитным моментом \mathbf{m} ($|\mathbf{m}| = const$), динамика которого описывается уравнением Ландау-Лифшица

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\lambda \gamma}{m} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}), \quad (1.1)$$

где $\gamma (> 0)$ – гиромагнитное отношение, $\lambda (> 0)$ – безразмерный параметр затухания, \mathbf{H}_{eff} – эффективное магнитное поле, которое действует на магнитный момент. При наличии только поля анизотропии \mathbf{H}_a уравнение (1.1) будет описывать затухающую прецессию магнитного момента безотносительно к начальному положению \mathbf{m} (см. рисунок 1.1 а). В присутствии циркулярно-циркулярно-поляризованного поля $\mathbf{h}(t)$ динамика магнитного момента будет иметь более сложный характер. Рассмотрим ее детально.

Пусть на магнитный момент наночастицы действует поле вида

$$\mathbf{h}(t) = h \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \rho h \sin(\omega t) \mathbf{e}_y \quad (1.2)$$

(h – амплитуда поля, ω – его частота, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – орты декартовой системы координат, $\rho = \pm 1$ для левой и правой поляризации соответственно), а также внешнее постоянное поле \mathbf{H} , приложенное вдоль оси z . Магнитная энергия частицы в этом случае будет иметь вид

$$W = -\frac{1}{2} m H_a \cos^2 \theta - m h \sin \theta \cos(\varphi - \rho \omega t) - m H \cos \theta, \quad (1.3)$$

где θ и φ , соответственно, полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{m} . Используя сферическую симметрию, а также выражения (1.2) и (1.3), уравнения (1.1) можно преобразовать в систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\gamma h \sin(\varphi - \rho \omega t) - \gamma \lambda (H_a \sin \theta \cos \theta - H \sin \theta - h \cos \theta \cos(\varphi - \rho \omega t)), \\ \dot{\varphi} = \gamma (H_a \cos \theta + H - h \operatorname{ctg} \theta \cos(\varphi - \rho \omega t)) - \frac{\gamma \lambda}{\sin \theta} h \sin(\varphi - \rho \omega t). \end{cases} \quad (1.4)$$

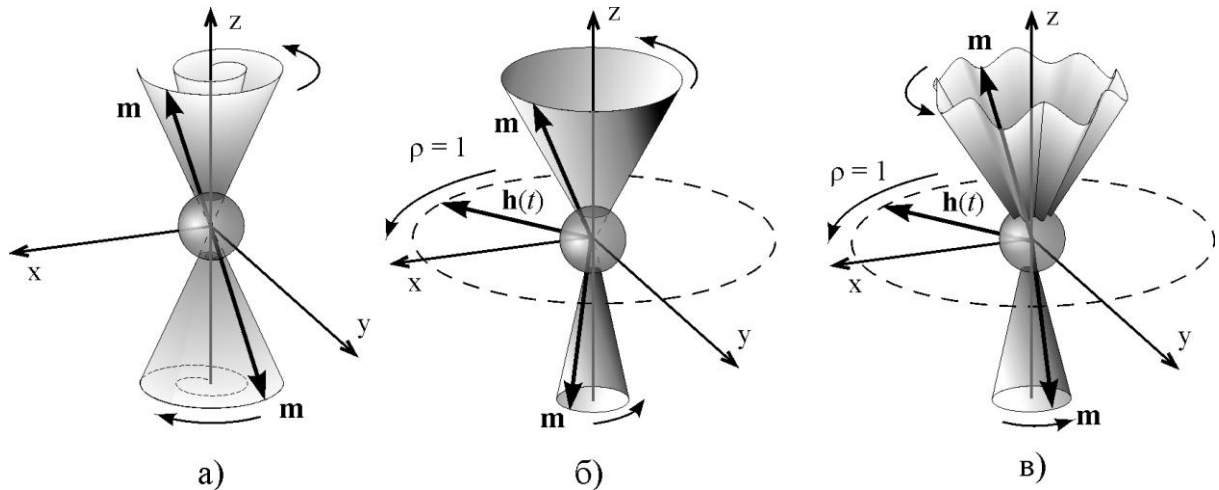


Рисунок 1.1 – Схематическое изображение прецессии магнитного момента: а) затухающая прецессия без внешнего поля, б) прецессия с постоянным углом в циркулярно-циркулярно-поляризованном поле, в) колебания угла прецессии.

Данная система имеет два типа решений и, соответственно, описывает два режима движения магнитного момента. Первый представляет собой прецессию вектора \mathbf{m} с некоторым постоянным углом (см. рисунок 1.1 б).

Согласно терминологии, введенной в [40], будем говорить, что в таком случае имеет место Р-режим. Как было показано в [41] [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], для Р-режима из системы (1.4) можно получить алгебраическое уравнение

$$\tilde{h}^2 = \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1} \left[\left(\cos \theta_1 + \tilde{H} - \frac{\rho \tilde{\omega}}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{\lambda \tilde{\omega} \cos \theta_1}{1 + \lambda^2} \right)^2 \right], \quad (1.5)$$

где $\tilde{h} = h/H_a$, $\tilde{H} = H/H_a$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_r$, $\omega_r = \gamma H_a$ – резонансная частота, θ_1 – угол постоянной прецессии магнитного момента. Решив уравнение (1.5), можно найти величину угла θ_1 . В общем случае (1.5) имеет 4 корня, из которых устойчивыми могут быть 1, 2 или 3. Условие устойчивости задается выражением

$$\chi = \lambda(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4) - \operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2(\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_1)^2 - 4\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3} > 0, \quad (1.6)$$

где

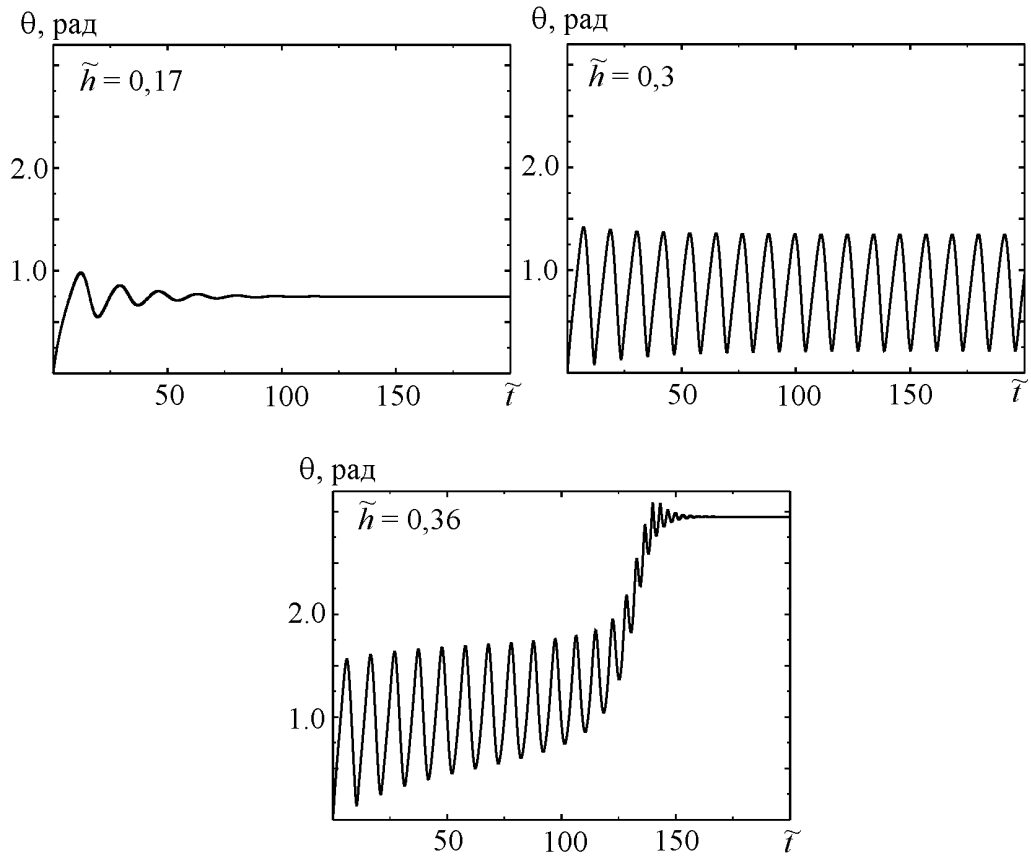
$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= \cos^2 \theta_1 + \frac{\tilde{H}}{\cos \theta_1} - \frac{\rho \tilde{\omega}(1 - \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}, & \tilde{\omega}_2 &= 1 + \frac{\tilde{H}}{\cos \theta_1} - \frac{\rho \tilde{\omega}(1 + \lambda^2 \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}, \\ \tilde{\omega}_3 &= \cos^2 \theta + \frac{\tilde{H}}{\cos \theta_1} - \frac{\rho \tilde{\omega}(1 + \lambda^2 \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}, & \tilde{\omega}_4 &= 1 + \frac{\tilde{H}}{\cos \theta_1} - \frac{\rho \tilde{\omega}(1 - \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Второй режим движения вектора \mathbf{m} , так называемый Q-режим, характеризующийся периодическим отклонением угла прецессии магнитного момента от легкой оси (см. рисунок 1.1 в) не имеет аналитического описания.

1.2 Типы прецессионной динамики магнитного момента

С помощью разработанной программы была осуществлена серия численных экспериментов [42]. На рис. 1.2 показаны варианты численного решения (1.4) с нулевыми начальными условиями для таких значений параметров: $\lambda = 0.2$; $\tilde{\omega} = 0.9$; $\rho = 1$. Очевидно, что первый график соответствует P-режиму, второй – Q-режиму, а с третьего получается, что для данной амплитуды циркулярно-циркулярно-поляризованного поля равновесные состояния в области $z > 0$ отсутствуют. Таким образом, поле $\mathbf{h}(t)$ может радикально влиять на намагниченность наночастицы вдоль оси z , несмотря на то, что само не имеет отличного от нуля проекции на эту ось.

В частности, его действие может вызвать перемагничивание наночастицы. Для количественного описания данного явления система (1.4) решалась при квазистатическом изменении амплитуды поля h . Как видно из рис. 1.2, определенных частот магнитный момент наночастицы может скачкообразно менять свое направление, в то время как для других частот непосредственное инвертирование магнитного момента происходит через изменение характера его движения. Потеря устойчивости, или несоблюдение условия (1.6), здесь означает появление нутационных движений вектора \mathbf{m} , которые, в свою очередь, также



становятся неустойчивыми с ростом амплитуды h , и магнитный момент

Рисунок 1.2 – Решение системы уравнений (1.4) для различных амплитуд циркулярно-поляризованного поля.

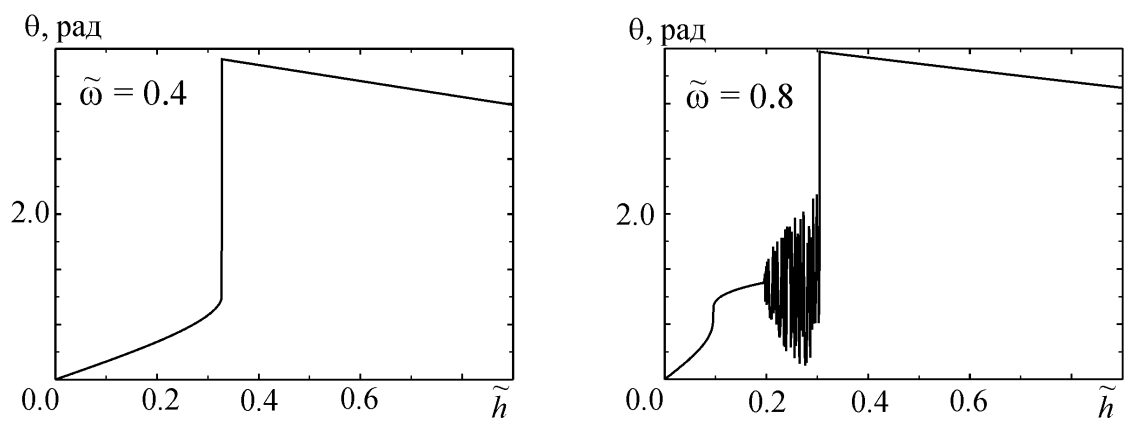


Рисунок 1.3 – Решение системы уравнений (1.4) при квазистатическом изменении амплитуды \tilde{h} циркулярно-поляризованного поля.

возвращается к обычной прецессии, но уже в области отрицательных значений координаты z . Отметим, что такой переход носит необратимый характер, и любая последующая смена амплитуды h вращающегося поля будет иметь следствием лишь коррекцию угла прецессии.

Поскольку **P**-прецессия вектора \mathbf{m} описывается уравнением (1.5), целесообразно сравнить результаты, полученные с его помощью, с результатами численного решения (1.4). В частности, это позволит дать однозначный ответ на вопрос о том, при каких параметрах внешнего поля происходит перемагничивание наночастицы. На рисунке 1.4 изображены наиболее типичные ситуации, которые показывают искомые различия, для следующих значений параметров: $\lambda = 0.2$; $\rho = 1$. Нижний график каждой пары определяет области устойчивых решений (1.5) согласно критерию (1.6). Первая пара графиков характерна для небольших частот. Совпадение теоретического и численного значений величин $\cos\theta_1$ в области положительных χ свидетельствует о наличии **P**-режима движения магнитного момента. Потеря устойчивости решения (1.5) приводит к перемагничиванию наночастицы.

Вторая пара наглядно демонстрирует сложный характер движения \mathbf{m} . В данном случае имеется три области, где $\chi > 0$, а потеря устойчивости не во всех случаях приводит к изменению знака m_z . С ростом h сначала имеет место скачкообразный переход в так называемый промежуточный **P**-режим в области положительных значений координаты z без возбуждения колебаний оси прецессии. Затем, при дальнейшем росте h , прецессионное движение вновь теряет устойчивость, что сопровождается возбуждением нутационных движений, или переходом в **Q**-режим, из которого впоследствии и происходит его переориентация. На третьей паре графиков описанный ранее промежуточный **P**-режим отсутствует. Потеря устойчивости приводит к переходу магнитного момента в **Q**-режим с последующим инвертированием направления.

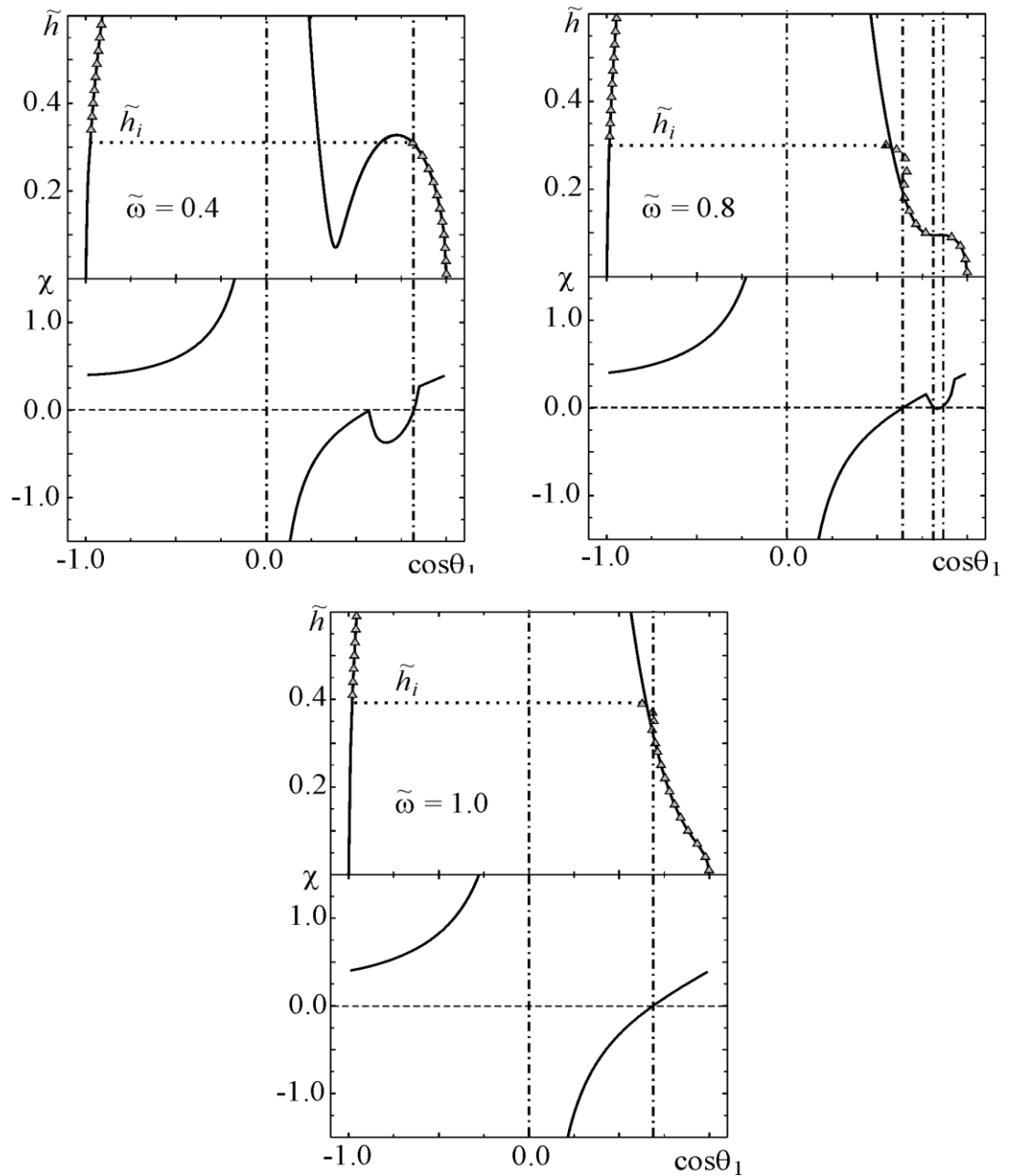


Рисунок 1.4 – Сравнение теоретических и численных результатов для различных значений частоты циркулярно-циркулярно-поляризованного поля. Нижние графики – поведение критерия устойчивости (1.6).

1.3 Фазовые диаграммы прецессионной динамики магнитного момента

С практической точки зрения необходимо изучить целый диапазон параметров полей переключения, чтобы выбрать оптимальный. И началом поиска решения этой проблемы является определение границ неоднородной и однородной прецессии магнитного момента наночастицы. Рассмотрим алгебраическое уравнение $\chi = 0$, где χ дано (1.6). Это уравнение может иметь четыре или меньше, реальных корней, и наибольший из них определяет максимальное значение угла прецессии для однородной прецессии. В свою очередь, использование уравнения (1.5), соответствующий данной частоте поля. Определение \tilde{h}_{cr} следующее: когда амплитуда поля \tilde{h} увеличивается квазистатическим способом и достигает критического значения \tilde{h}_{cr} , происходит изменение режима динамики намагниченности.

На рис. 1.5 показаны результаты численного решения уравнения (1.4) и алгебраического уравнения $\chi = 0$. Здесь и дали значение параметра затухания – $\lambda = 0.2$. Сравнение этих результатов позволяет нам оценить адекватность аналитического подхода, который базируется на критерии устойчивости. Также очень полезно получить полное представление о типах движения и переходах между ними. Как следует из рис. 1.5 а), для достаточно маленьких частот поля $\tilde{\omega}$ сплошная черная линия $\tilde{h}_{cr}(\tilde{\omega})$ является границей между верхним (область 1) и нижним (область 4) положениями вектора \mathbf{m} . Переход между областями 1 и 4, когда $\tilde{h} = \tilde{h}_{cr}$ является переходом между двумя Р-режимами, при которых магнитный момент расположен в верхнем и нижнем положении. В этом случае \tilde{h}_{cr} – минимальная амплитуда переключющего поля, которое соответствует данной частоте $\tilde{\omega}$.

Когда частота поля приближается к резонансному значению, \tilde{h}_{cr} обозначает начало неоднородного или Q-режима. На рис. 1.5 а) такой переход изображен круглыми маркерами, а Q-режим представлен областью 3. Особенного

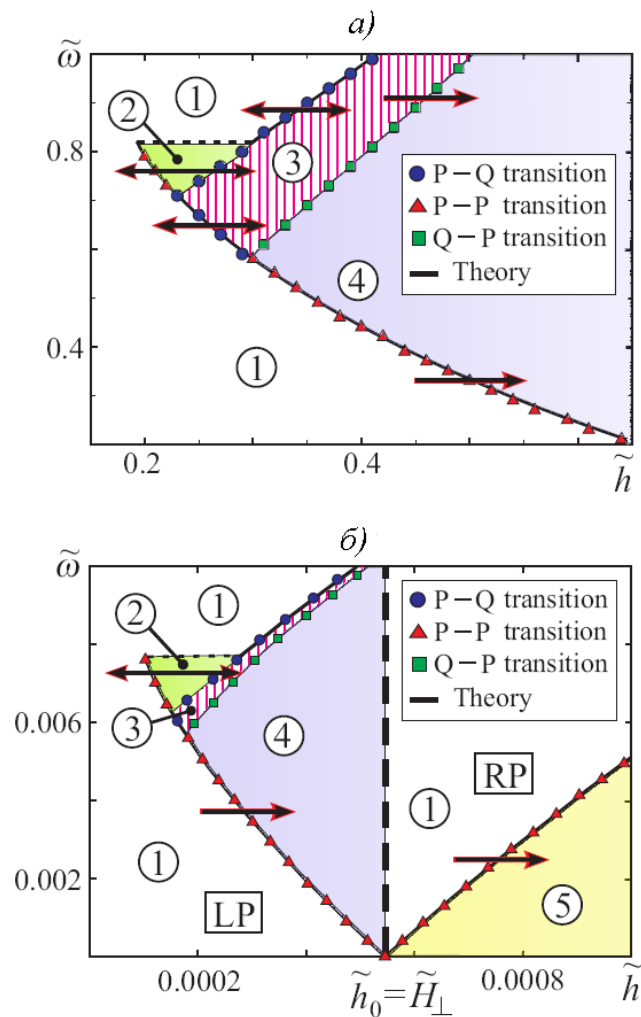


Рисунок 1.5 – Режимы прецессии \mathbf{m} , которые реализуются при увеличении \tilde{h} квазистатическим способом. а) – случай $\tilde{H} = 0$ только для правой поляризации; б) – случай $\tilde{H} = -0.99$ для правой (RP) и левой (LP) поляризации вращающегося поля

внимания заслуживает область 2, так называемый промежуточный P-режим. Здесь линия $\tilde{h}_{cr} = \tilde{h}_{cr}(\tilde{\omega})$ отражает скачок между двумя P-режимами, для которых характерно верхнее расположение магнитного момента. Численное решение (1.4) для амплитуд поля $\tilde{h}_{cr} < \tilde{h}$ показывает, что Q-режим может быть неустойчивым, и \mathbf{m} переключается в P-режим, расположенный в области отрицательных проекция на ось oz (см. рис. 1.5 а). Переходы между областями 3 и 4 изображены квадратными маркерами. Здесь наблюдается переключение через неоднородный режим.

Главное неудобство переключения намагниченности с помощью циркулярно-поляризованного поля являются большие значения для частоты поля ($\tilde{\omega} \sim 1$) и амплитуды ($\tilde{h} \sim 0.1$). Так, имеет смысл комбинировать циркулярно-поляризованное поле $\tilde{h}(t)$ и статическое поле \tilde{H} , приложенное антипараллельно к оси z . Результаты моделирования, для случая $\tilde{H} = -0.99$, показаны на рис. 1.5 б). В принципе, намагниченность наночастицы демонстрирует ту же динамику, но амплитуда и частота поля переключения существенно меньшие, по сравнению с предыдущим случаем, когда $\tilde{H} = 0$. Однако, есть три важные особенности. Во-первых, переключение магнитного момента возможно для левой ($\sigma = +1$) и для правой ($\sigma = -1$) поляризации поля. Но, как следует из рис. 1.5 б), левая поляризация в силу меньшей амплитуды более приемлема для целей переключения магнитного момента. Во-вторых, область для Q-режима более узкая, чем в случае $\tilde{H} = 0$ (см. рис. 1.5). И последняя особенность процесса переключения при совместном действии $\tilde{h}(t)$ и \tilde{H} , состоит в том, что направление прецессии магнитного момента не совпадает с направлением натуральной прецессии. Данный факт имеет следующее объяснение. Циркулярно-поляризованное поле может переключить магнитный момент наночастицы, только если вращение поля совпадает с естественной прецессией \mathbf{m} . В отличие от этого, дополнительное действие поля \tilde{H} , приводит к прецессии \mathbf{m} в противоположном направлении. Поскольку условие $\tilde{H} \gg \tilde{h}$ выполняется, \mathbf{m} вращается по часовой стрелке во время процесса переключения.

Когда внешнее циркулярно-поляризованное поле включается и его амплитуда поля растет очень быстро, благодаря переходным процессам переключения намагниченности наночастицы может произойти для амплитуд, меньших чем \tilde{h}_{cr} . На рис. 1.6 изображена зависимость для $\tilde{h}_{cr}(\tilde{\omega})$ и $\tilde{h}_{min}(\tilde{\omega})$, полученная численно для случая включения внешнего поля. Как мы можем видеть, когда Q-режим отсутствует, переключающая амплитуда поля \tilde{h}_{min} является меньшей, чем теоретическая. Но в другом случае, когда Q-режим присутствует, переключения намагничивания возможно только для амплитуд поля, соответствующие

переходу между областями 3 и 4 (см. рис. 1.5). Так, фактическая амплитуда поля переключения больше, чем \tilde{h}_{cr} . Эти результаты вновь показывают важность того, что для выбора оптимальных параметров поля переключения необходимо учитывать неоднородный режим. Результаты моделирования, для случая $\tilde{H} = -0.99$, показаны на рис. 1.6 б). Главное отличие от случая $\tilde{H} = 0$ состоит в следующем. В силу маленькой ширины области Q-режима, переходные процессы могут позволить магнитному моменту преодолеть пройти эту область при достаточно больших частотах поля. Т.о., переключения намагниченности происходит для меньших амплитуд поля, где Q-режим отсутствует.

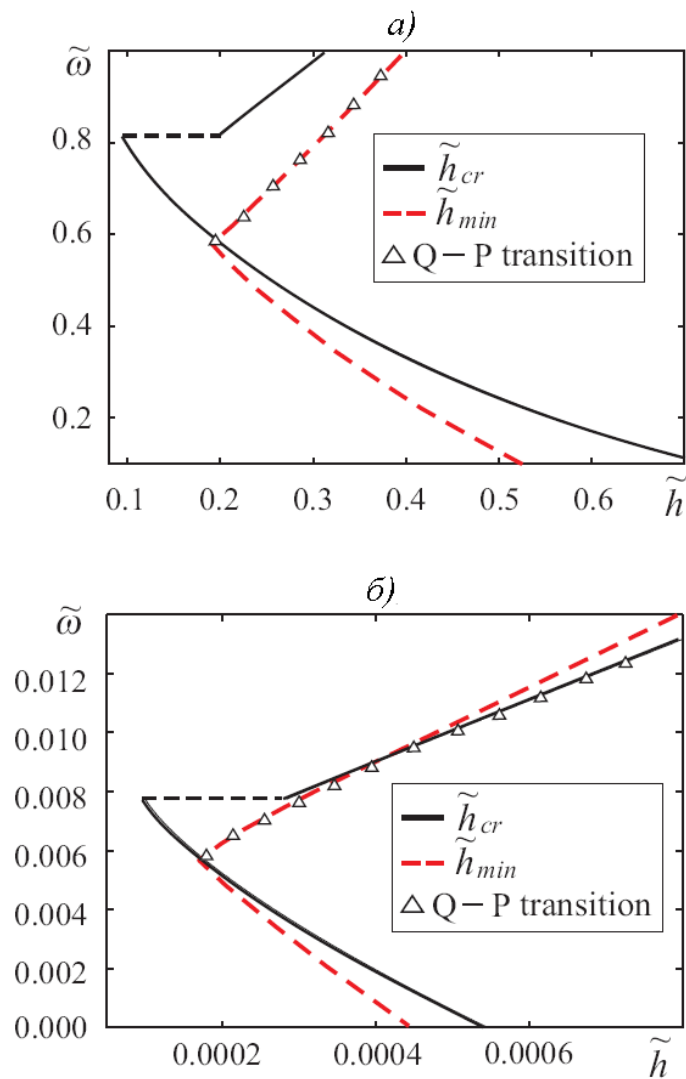


Рисунок 1.6 – Минимальные амплитуды поля переключения. а) – случай $\tilde{H} = 0$;
б) – случай $\tilde{H} = -0.99$.

1.4 Характеристики переключения намагниченности

1.4.1 Время переключения

Время переключения – параметр, определяющий качество работы медиа устройств. И выбирая амплитуду и частоту поля переключения необходимо принять во внимание, как быстро произойдет перемагничивания наночастицы.

Формальное определение времени переключения было дано в [38]

$$T_{sw} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \quad (1.8)$$

В зависимости от значения константы θ_0 , существует несколько интерпретаций определения времени переключения. В [38] было принято, что $\theta_0 = \pi$. В этом случае T_{sw} – время достижения нижнего положения. Отметим, что во-первых, такое определение приводит к сильной зависимости T_{sw} от точности вычислений угла θ . А, во-вторых, основное состояние \mathbf{m} при действии вращающегося поля, не совпадает с легкой осью (див. рис. (1.1)). В [37], T_{sw} – время первого достижения углом θ значения $\pi/2$, т.е. $\theta_0 = \pi/2$. Но такой подход игнорирует возможность возвращения вектора \mathbf{m} назад, что является особенно вероятным для случая неоднородной прецессии \mathbf{m} . В наших исследованиях мы принимаем, что T_{sw} – время перед последним пересечением плоскости xu вектором \mathbf{m} во время перемагничивания. В силу сложностей прямого интегрирования (1.8), мы определяем T_{sw} численно.

Понятно, что время переключения будет расти с уменьшением \tilde{h} . Поскольку минимальная амплитуда переключающего поля уменьшается с частотой при отсутствии неоднородного режима (см. рис. 1.6), значения времени \tilde{T}_{sw} , которые соответствуют \tilde{h}_{\min} , растут с $\tilde{\omega}$ (см. рис. 1.7 а). \tilde{h}_{\min} – минимальное значение амплитуды вращающегося поля, при котором происходит переключение намагниченности при его включении. Здесь и далее мы используем приведенные значения времени $\tilde{T}_{sw} = 2\pi T_{sw}/\omega_r$. Процесс переключения при неоднородном режиме характеризуется очень большими значениями \tilde{T}_{sw} , а, также,

высокой чувствительностью к точности определения \tilde{h} . При $\tilde{h} \rightarrow \tilde{h}_{\min}$, $\tilde{T}_{sw} \rightarrow \infty$, что находит подтверждение в следующем: время переключения \tilde{T}_{sw} определяется временем ожидания \tilde{T}_w (см. рис. 1.7 а). Здесь время ожидания \tilde{T}_w является временем, на протяжении которого проводится моделирование динамики \mathbf{m} для выбранного значения параметров. Значение \tilde{T}_w содержит себе время релаксации к основному состоянию после переключения. Это объясняет тот факт, что $\tilde{T}_{sw} < \tilde{T}_w$.

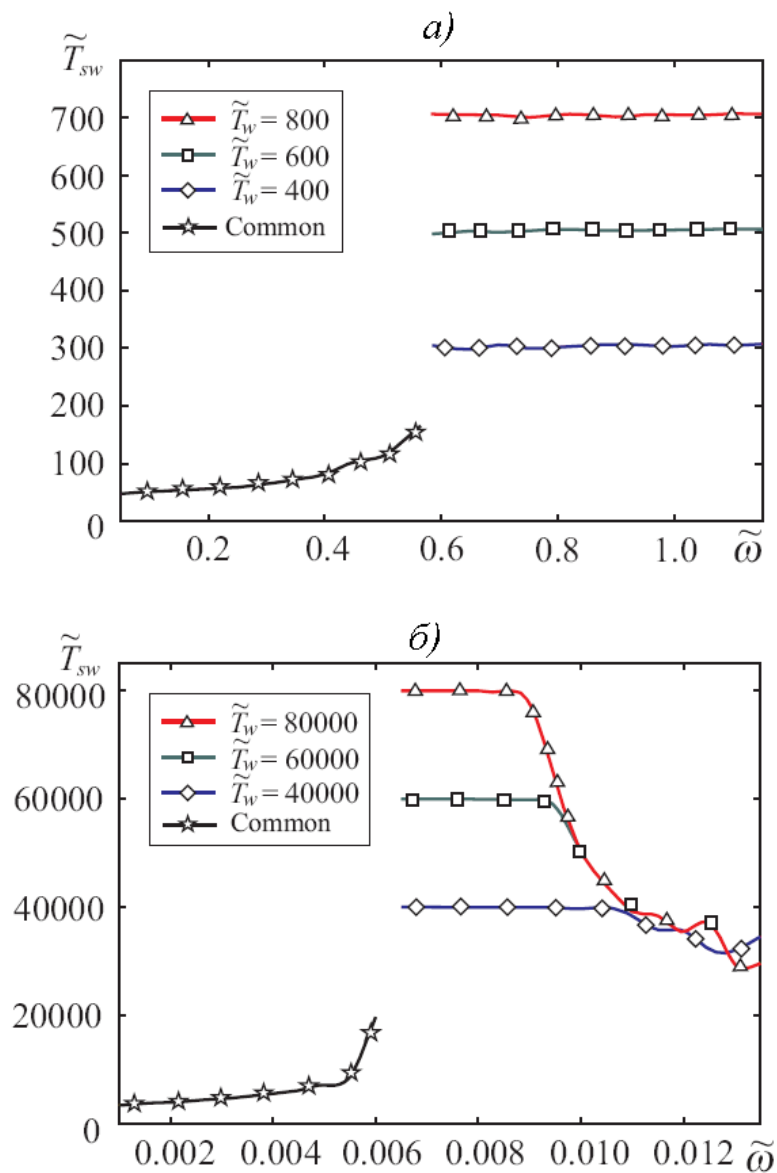


Рисунок 1.7 – Время переключения, измеренный в резонансных периодах для различных времен ожидания. а) – случай $\tilde{N} = 0$; б) – случай $\tilde{N} = -0.99$.

Как уже было показано, действие постоянного магнитного поля вдоль легкой оси приведет к уменьшению $\tilde{\omega}$ и \tilde{h} . Но как следует из [30], переключение при воздействии такого поля, или так называемое переключение демпфирования, характеризуется очень большим временем переключения. Поэтому цель в данном случае – для относительно меньшей амплитуды поля вращения и частоты (через статическое поле \tilde{H}) компенсировать задержку перемагничивания (см. рис. 1.7 б). В остальном, поведение $\tilde{T}_{sw}(\tilde{\omega})$ которое соответствует \tilde{h}_{\min} , подобно случаю $\tilde{H} = 0$. Разница состоит в уменьшении времени переключения для больших частот, что объясняется преодолением неоднородного режима во время переходного процесса. Расхождение кривых для больших частот объясняется высокой чувствительностью \tilde{T}_{sw} к точности \tilde{h} и разницей во времени ожидания.

Вращения поля с правой поляризацией также может обеспечить эффект переключения в присутствии \tilde{H} , но минимальная амплитуда поля должна быть больше, чем для поля с левой поляризацией (см. рис. 1.5). Последнее обстоятельство приводит к уменьшению времени переключения по сравнению с полем с левой поляризацией, (см. рис. 1.8). Но мы хотим подчеркнуть, что такая ситуация вызвана разными амплитудами поля, и, как будет показано позже, для одинаковых амплитуд поле с левой поляризацией обеспечивает более быстрое переключение по сравнению с полем с правой поляризацией.

Если выполняется условие $\tilde{h} > \tilde{h}_{\min}$ для амплитуды вращающегося поля, разумно ожидать существенное уменьшение \tilde{T}_{sw} . Фактически, при некоторых обстоятельствах, время переключения может принять значение бесконечности (см. рис. 1.9). Это объясняется следующим образом. Магнитный момент \mathbf{m} наночастицы при действии внешнего поля находится в потенциале, который характеризуется двумя минимумами, разделенными максимумом. Обозначим указанные два минимума как локальный с энергией W_l и глобальный с энергией W_g . Допустим, при $t = 0$ выполняется условие $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z |\mathbf{m}|$ (или $\theta = 0$). Процесс перемагничивания – это перемещение \mathbf{m} от начального состояния к глобальному минимуму, характеризующийся углом $\theta_g (> \pi/2)$. Но во время этого процесса

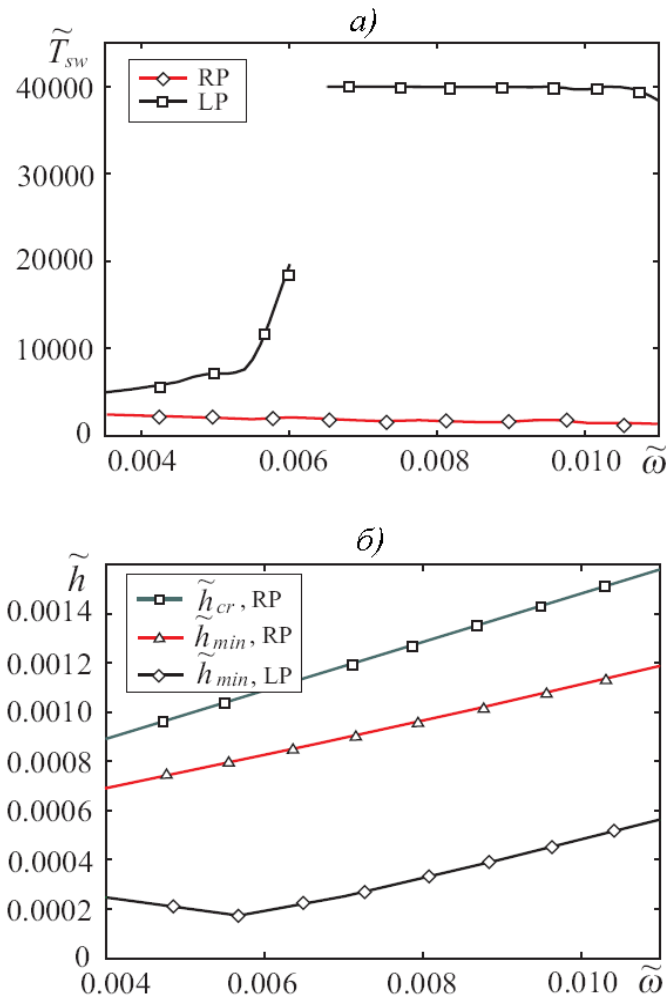


Рисунок 1.8 – а) – Время переключения, измеренный в резонансных периодах для различных времен ожидания для при $\tilde{H} = -0.99$; б) – значения минимальных амплитуд поля для $\tilde{H} = -0.99$.

магнитный момент может попасть в локальный минимум, который характеризуется углом $\theta_l (< \pi/2)$ Если значения энергии W_l и W_g очень близки, то переход из локального минимума может быть сколь угодно долгим. Таким образом, время переключения может достичь огромных значений. Подчеркнем, что это – чисто динамический эффект, вызванный включением внешнего поля, и он не обнаруживается при изменении амплитуды поля квазистатическим способом. Для случая $\tilde{H} = 0$ этот эффект имеет место при малых $\tilde{\omega}$ и больших \tilde{h} , в то время как при $\tilde{H} = -0.99$ это происходит в диапазонах значений $\tilde{\omega}$ и \tilde{h} , которые пригодны к ис-

пользованию. Т.о. совместное действие вращающегося и постоянного внешних полей характеризуется чрезвычайно сильной зависимостью времени переключения от параметров полей.

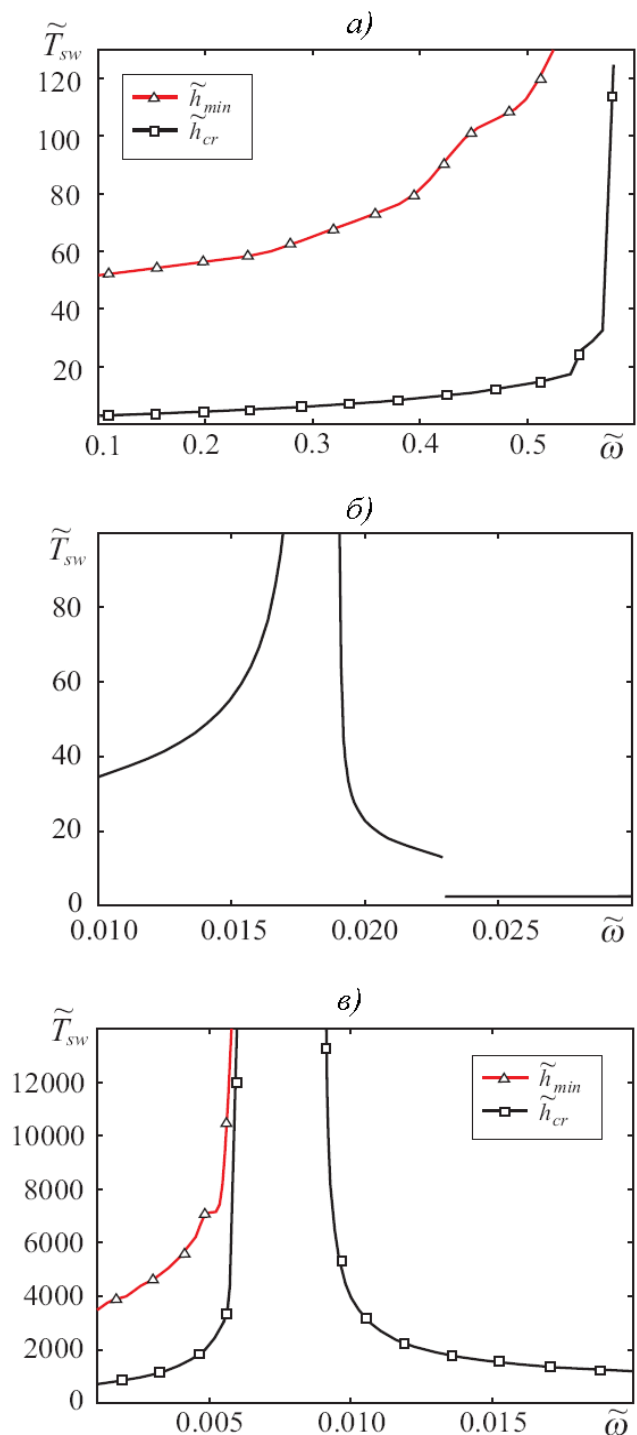


Рисунок 1.9 – Время переключения, измеренное в резонансных периодах в случае включения вращающегося поля с амплитудой $\tilde{h} = \tilde{h}_{cr}$. а) – случай $\tilde{H} = 0$; б) – случай $\tilde{H} = 0$ и малые частоты; в) – случай $\tilde{H} = -0.99$.

1.4.2 Время переключения под воздействием импульсного поля

В процессе реальной записи информации действия внешних полей имеют ограниченную продолжительность, и формы импульса поля могут быть разными. Поведение переключения \mathbf{m} определяется длиной импульса, а также формой импульса (см. [28]). Так как фактор длительности импульса является определяющим, мы рассматриваем простейшую форму импульса поля – квадратную. Для хорошей работы медиа устройств, длина импульса должна быть определена временем переключения. Но, в свою очередь, меняя длительность импульса, мы можем непосредственно влиять на время переключения. Во время переходного процесса знак проекции \mathbf{m} на ось z может измениться несколько раз. И если внешнее поле будет выключено после первого пересечения плоскости xu вектором \mathbf{m} , благодаря наличию одноосной анизотропии, магнитный момент наночастицы останется в нижнем положении. Определим значение амплитуды вращающегося поля, что соответствует минимальному, для случая импульсного воздействия поля, как \tilde{h}_{\min}^p . Для некоторых частот справедливо условие $\tilde{h}_{\min} > \tilde{h}_{\min}^p$ (см. рис. 1.10 а), что говорит о преимуществе импульсного воздействия по сравнению с обычным включением поля. Как следует из рис. 1.10 а), это актуально для интервалов частот и амплитуд поля, в которых наблюдается неоднородная прецессия, когда амплитуда нутаций достаточно велика и знак проекции \mathbf{m} на ось z изменяется периодически. Это дает нам возможность переключить намагниченность наночастицы несмотря на присутствии Q-режима. Подобная идея была предложена в [35] у рамках незатухающего приближения при действии поля \tilde{H}_{\perp} , перпендикулярного к легкой оси частицы. С другой стороны, если внешнее вращающееся поле будет включено в момент, когда проекция \mathbf{m} на ось oz будет положительна, вектор \mathbf{m} останется в первоначальном, или верхнем, состоянии. И для того, чтобы обеспечить достаточный уровень надежности медиа устройства, необходимо быть очень осторожным использованием этого эффекта для записи.

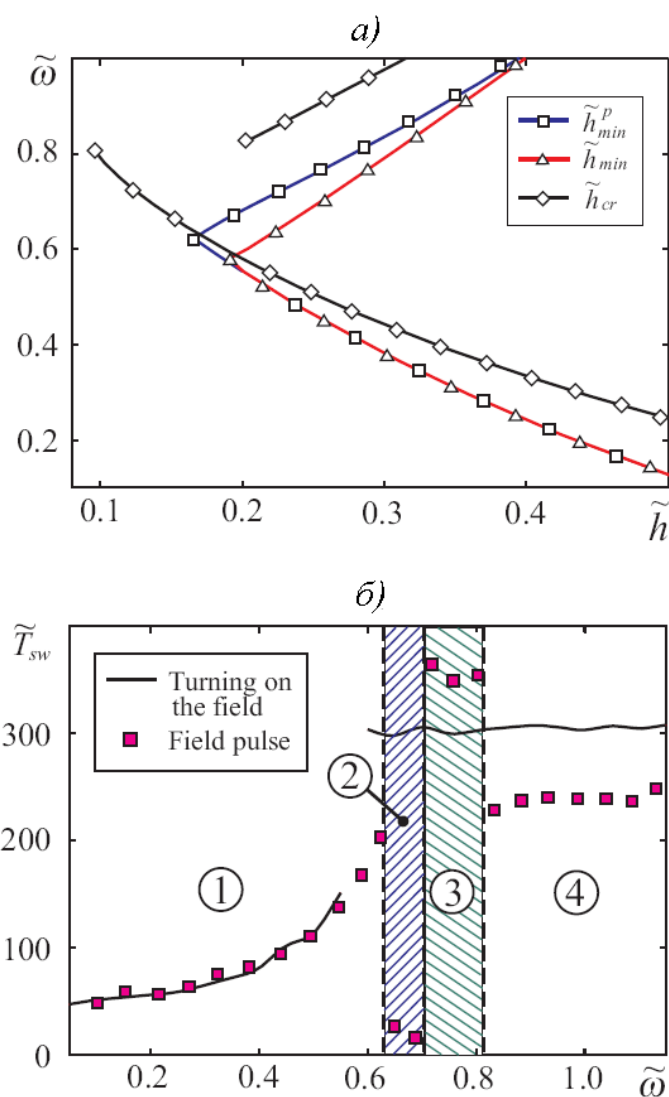


Рисунок 1.10 – Случай выключения поля, когда \mathbf{m} пересекают плоскость xu . а) – Зависимость минимальной амплитуды поля от частоты, б) – зависимость времени переключения от частоты.

Зависимость времени переключения от приведенной частоты для случая выключения поля, когда \mathbf{m} пересекает плоскость xu , изображенная на рис. 1.10 б). Здесь изображены четыре области, которые отличают разные пути протекания переходных процессов. Область 2 заслуживает особого внимания, так как она соответствует минимальному времени переключения и минимальной амплитуде поля.

Естественно, если амплитуда поля больше минимальной ($\tilde{h} > \tilde{h}_{\min}^p$) Длительность импульса может быть значительно меньше. На рис. 1.11 а) изображены зависимости времени переключения от амплитуды поля для постоянной частоты и длины импульса \tilde{T}_p . Здесь мы можем видеть, что переключения намагниченности наночастицы происходит для длины импульса в только несколько

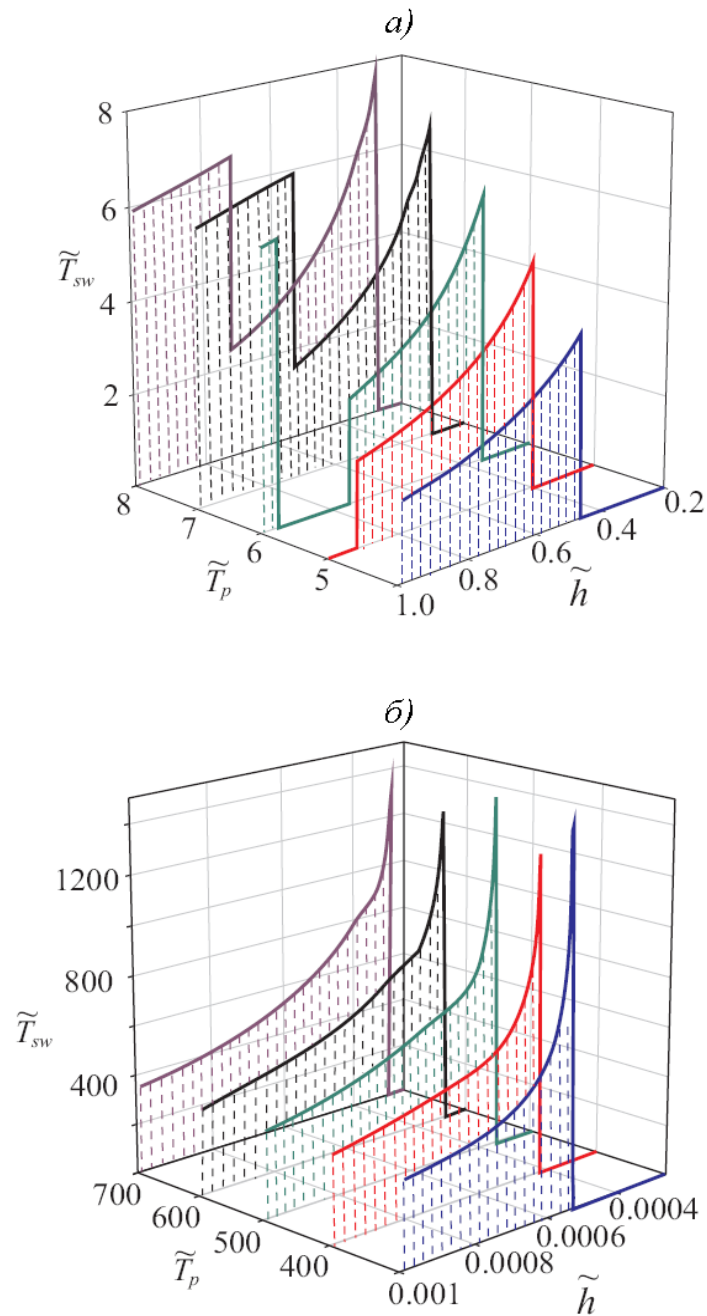


Рисунок 1.11 – Время переключения для различных длин импульса и амплитуд. а) – случай $\tilde{H} = 0$; б) – случай $\tilde{H} = -0.99$.

резонансных периодов. Из этого рисунка ясно также влияние длины импульса на величину \tilde{T}_{sw} . Как и ожидалось, время переключения уменьшается с увеличением амплитуды поля. Но кроме того, на представленных зависимостях наблюдаются разрывы и пустые промежутки. Присутствие разрывов связано с пересечением вектором \mathbf{m} нечетного числа раз плоскости xu во время действия импульса поля. В свою очередь, пустые промежутки имеют место, когда \mathbf{m} пересекает четное число раз плоскость xu .

Такие же зависимости для случая $\tilde{H} = -0.99$ изображены на рис. 1.11 б). Как ожидалось в связи с предыдущими результатами, время переключения в этом случае больше на два порядка, чем для $\tilde{H} = 0$. Следующая особенность процесса переключения – неравенство $\tilde{T}_{sw} < \tilde{T}_p$ для малых значений \tilde{h} . Это означает, что вращающееся поле работает как небольшое возмущение, что перемещает \mathbf{m} от состояния равновесия (верхнее положение), и затем, вспомогательное поле \tilde{H} приводит \mathbf{m} в другое состояние равновесия (нижнее положение). Рост \tilde{T}_p ведет только к уменьшению минимальной амплитуды \tilde{h} переключающего циркулярно-поляризованного поля. Отсутствие разрывов и промежутков, как в предыдущем случае, объяснено однократным пересечением плоскости xu магнитным моментом \mathbf{m} во время переходного процесса.

Преимущества циркулярно-циркулярно-поляризованного поля относительно постоянного \mathbf{H}_\perp , перпендикулярного к легкой оси частицы были показаны для случая изменения амплитуды поля квазистатическим способом (см. рис. 1.5 б). Там было показано, что в присутствии статического поля, направленного вдоль легкой оси, вращение против часовой стрелки обеспечивает переключение намагничивания наночастицы при меньших амплитудах по сравнению с полем, вращающимся по часовой стрелке. Поле \mathbf{H}_\perp соответствует вращающемуся с нулевой частотой, и, как следует из рис. 1.5 б), такое постоянное поле переключения имеет большую величину, чем поле с левой поляризацией. На рис. 1.12 представлены результаты численного моделирования импульсного действия полей \mathbf{H}_\perp и $\mathbf{h}(t)$. Здесь частота и длительность импульса \tilde{T}_p фиксирован-

ные, и время переключения представлено как зависимость от величины амплитуды поля. Когда условие $\tilde{H} = 0$ выполняется, импульсная действие вращающегося поля обеспечивает меньшие времена переключения для большого \tilde{h} по сравнению со случаем простого включения поля. Это происходит потому, что завершение импульса не позволяет вектору \mathbf{m} пересечь плоскость xu во второй раз. И последнее: исходя из полученных результатов, параметры для импульсного циркулярно-поляризованного поля являются более приемлемыми, чем для импульса статического поля \mathbf{H}_\perp .

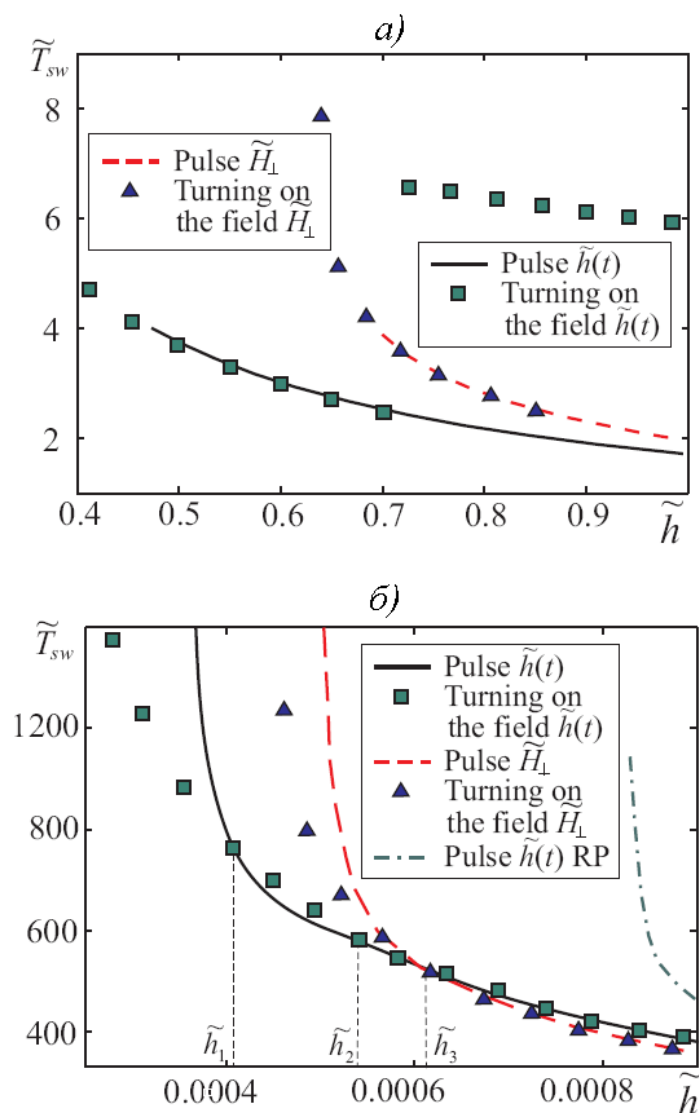


Рисунок 1.12 – Время переключения для импульсного воздействия вращающегося поля и постоянного поля, перпендикулярного к легкой оси. а) – случай $\tilde{H} = 0$; б) – случай $\tilde{H} = -0.99$.

Случай импульсного действия поля $\mathbf{h}(t)$, которому ассистирует статическое поле $\tilde{H} = -0.99$, более сложный (см. рис. 1.12 б). Здесь преимущества импульсного действия имеют место только для определенного интервала амплитуд поля $\tilde{h}_1 < \tilde{h} < \tilde{h}_2$ (см. рис. 1.12 б). И, наконец, циркулярно-циркулярно-поляризованный поле характеризуется меньшими временами переключения и величинами амплитуд по сравнению с действием статического поля \tilde{H}_\perp , если выполняется условие $\tilde{h} \leq \tilde{h}_3$. Если же $\tilde{h}_3 > \tilde{h}$, время переключения для вращающегося поля превышает \tilde{T}_{sw} для поля \tilde{H}_\perp , но разница между ними не слишком велика. Для сравнения, на рис. 1.12 б) изображены подобные зависимости для поля с правой поляризацией. Как мы можем видеть, его характеристики относительно переключения менее оптимальны. Таким образом, можно заключить, что циркулярно-поляризованное поле с левой поляризацией более всего подходит для переключения намагниченности [43].

1.5 Выводы к разделу 1

Переключение намагниченности ферромагнитной одноосной наночастицы, находящейся под действием циркулярно-поляризованного поля и постоянного, направленного вдоль легкой оси, было изучено в приближении когерентного вращения. В рамках этого приближения путем численного анализа уравнения Ландау-Лифшица было показано, что переключение или генерация неоднородного режима происходят, когда однородная прецессия магнитного момента наночастицы становится нестабильной. Были показаны условия для однородной и неоднородной прецессии магнитного момента наночастицы. Наблюдалось переключение через неоднородный режим прецессии, но время переключения в этом случае может быть очень большим, в том числе, бесконечно большим.

Было показано, что добавление внешнего статического поля вдоль легкой оси частицы приводит к уменьшению значений частоты вращения и амплитуды поля для переключения, но, в тоже время, время переключения существенно увеличивается. Было также продемонстрировано, что с помощью такого статического поля можно также перемагничивать наночастицу полем, поляризованным в противоположном направлении к естественной прецессии, но параметры переключения в этом случае далеки от оптимальных по сравнению со случаем действия поля, вращающегося в направлении естественной прецессии.

Было подтверждено, что переходные процессы, происходящие при включении вращающегося поля, могут уменьшить амплитуду поля переключения по сравнению с предсказанной аналитически. Для случая присутствия вспомогательного статического поля, приложенного вдоль легкой оси, такие переходные процессы позволяют преодолевать неоднородный режим для определенных значений частот. Также было изучено время переключения при импульсном воздействии поля. Было показано, что импульсное поле может уменьшить время переключения и амплитуду поля в сравнении с непрерывно действующим внешним полем. В зависимости от длительности импульса магнитный момент наночастицы может пересечь плоскость xy четное или нечетное число раз, но эффект переключения имеет место только для последнего случая. Поэтому, существуют жесткие требования к длине импульса для обеспечения удовлетворительного уровня надежности записи.

Наконец, было показано, что амплитуда поля, вращающегося в направлении естественной прецессии, и время переключения, меньше относительно случая статического поля, перпендикулярного к легкой оси частицы. Это подтверждает, что поле, циркулярно-поляризованное в плоскости, перпендикулярной к легкой оси, больше подходит для переключения намагниченности, чем постоянное.

2 СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ НАНОЧАСТИЦЫ В ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В случае ферромагнитных наночастиц, динамика колебания магнитного момента наночастиц может быть описана стохастическим уравнением Ландау-Лифшица. Если слагаемое с шумом в этом уравнении аппроксимируется гауссовским белым шумом, то плотность вероятности магнитного момента удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка, свойства которого хорошо известны [44]. Такой подход, введенный Брауном [45] почти пять десятилетий назад, стал важным инструментом в изучении стохастической магнитной динамики (см. [46] и ссылки в ней). Для того, чтобы охарактеризовать термическую стабильность в случае одноосных наночастиц, обычно достаточно определить время жизни магнитного момента наночастиц в «верхнем» и «нижнем» состояниях. В приведенном выше подходе, время жизни в данном состоянии обычно интерпретируется как время релаксации. Однако, с теоретической точки зрения, время жизни разумно ассоциировать со средним временем достижения случайным процессом заданного уровня первого пересечения (СВДСПЗУ), т.е. средним временем пребывания случайного процесса в некотором состоянии. Дополнительными выгодными особенностями такого определения времени жизни является то, что метод СВДСПЗУ математически хорошо развит [47-48]. Этот подход был впервые применен для изучения магнитной релаксации в системах не взаимодействующих друг с другом наночастиц, [49] и наночастиц с дипольным взаимодействием [51], подвергнутых воздействию постоянного магнитного поля.

В общем случае, время жизни зависит как от внутренних свойств наночастиц, так и внешних магнитных полей. Случай, когда внешние поля содержат вращающееся магнитное поле, приложенное перпендикулярно к легкой оси наночастицы, представляет собой особый интерес. Причина этому, с одной стороны, заключается в том, что вращающееся поле играет ключевую роль в переключении

с помощью микроволн [53-58], и, с другой стороны, поскольку соответствующие динамические уравнения (без учета тепловых флуктуаций) часто могут быть решены аналитически [59-62]. В частности, было показано [59] (см. также [63]), что вращающееся поле может обусловить два вида режимов стабильной прецессии магнитного момента, а именно, периодический (P) и квази-периодический (Q) режимы. При определенных условиях [64, 43] один режим может существовать в верхнем состоянии магнитного момента, а другой в нижнем состоянии. Тепловые флуктуации делают возможными случайные переходы между этими режимами, и таким образом появляется проблема жизни P и Q режимов. Некоторые аспекты этой проблемы уже рассматривались ранее в контексте магнитной релаксации и индуцированной намагниченности [39, 65, 66]. Но зависимость времени жизни от параметров вращающегося поля не изучалась систематически. В то же время, эффект сильной зависимости времени жизни от частоты вращающегося поля, которая, как ожидается, находится в окрестностях ларморовой частоты, может иметь важное значение для практического применения. Поэтому в этой статье мы представляем подробный аналитический и численный анализ вышеперечисленных проблем.

2.1 Время переключения намагниченности

2.1.1 Описание модели

Здесь модель предполагается аналогичной описанной в подразделе 1.1 Однако для случая взаимодействия с термостатом динамика магнитного момента ферромагнитной наночастицы (ФНЧ) подчиняется стохастическому уравнению Ландау-Лифшица

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times (\mathbf{H}_{eff} + \mathbf{n}) - \frac{\lambda \gamma}{m} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}), \quad (2.1)$$

где $\gamma (> 0)$ – гиромагнитное отношение; $\lambda (> 0)$ – безразмерный параметр затуха-

ния; $\mathbf{H}_{eff} = \partial W / \partial \mathbf{m}$ – эффективное магнитное поле, действующее на \mathbf{m} , W – магнитная энергия частицы, \mathbf{n} – случайное магнитное поле, которое моделирует действие термостата.

При условии, что $|\mathbf{m}| = \text{const}$, и с учетом замены $\psi = \varphi - \rho\omega t$ уравнение (2.1) преобразуется в систему двух уравнений [17]

$$\begin{cases} \dot{\theta} = u(\theta, \psi) - \frac{\lambda}{2a} \text{ctg } \theta + \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \eta_{\theta}(\tilde{t}), \\ \dot{\psi} = v(\theta, \psi) - \rho\tilde{\omega} + \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \frac{1}{\sin \theta} \eta_{\psi}(\tilde{t}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Где

$$\begin{aligned} u(\theta, \psi) &= -\lambda \sin \theta \cos \theta + \tilde{h}(\lambda \cos \theta \cos \psi - \sin \psi), \\ v(\theta, \psi) &= \cos \theta - \tilde{h} \frac{\cos \theta \cos \psi + \lambda \sin \psi}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В приведенных выше уравнениях $\tilde{t} = \omega t$ – безразмерное время. Параметры $\eta_{\theta}(\tilde{t})$ и $\eta_{\psi}(\tilde{t})$ обозначают два независимых гауссовских белых шума с нулевым средним значением и корреляционной функцией, пропорциональной δ -функции Дирака: $\langle \eta_i(\tilde{t}) \eta_j(\tilde{t}') \rangle = 2\Delta \delta_{ij} \delta(\tilde{t} - \tilde{t}')$, где $i, j = \theta, \psi$, $\Delta = \lambda k_B T / \gamma m$ – интенсивность шума k_B – постоянная Больцмана, T – температура.

Тепловые эффекты в магнитной динамике наночастицы целесообразно анализировать с помощью отношения величины потенциального барьера переориентации магнитного момента к тепловой энергии

$$a = mH_a / 2k_B T. \quad (2.4)$$

Поскольку аналитическое решение системы уравнений (2.2) получить крайне сложно, то для её решения необходимо воспользоваться численными методами. Проведенный анализ показал, что из существующих методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений [52], для числен-

ного решения системы (2.2) оптимальным является метод Эйлера.

2.1.2 Анализ результатов

2.1.2.1 Режимы прецессии и тепловые флуктуации

Детерминистическая магнитная динамика одноосной ФНЧ под действием циркулярно-поляризованного поля характеризуется наличием двух режимов прецессии – однородного и неоднородного (см., например [43]). Однородный режим характеризуется постоянством угла конуса прецессии (см. рис. 1.1а), в то время как для неоднородного этот угол периодически меняется (см. рис. 1.1б). При наличии тепловых флуктуаций переориентация \mathbf{m} возможна даже без наличия внешнего поля. Поэтому о режимах прецессии под воздействием поля вида (1.2) можно говорить лишь на ограниченных временных интервалах.

Кроме того, неочевидным есть наличие неоднородного режима как такового в присутствии термостата. И если тепловые флуктуации сделают невозможным генерирование неоднородной прецессии, то все особенности процесса перемагничивания ФНЧ в этом случае [43] становятся не более, чем особенностями математической модели без шума безотносительно к реальной физической системе. Как показывают результаты численного моделирования, периодический тренд присутствует на временной зависимости косинуса угла прецессии (см. рис. 2.1), что позволяет говорить об актуальности неоднородного режима для реальной ситуации с учетом взаимодействия с термостатом.

2.1.2.2 Среднее время переключения

Время переключения магнитного момента из одного состояния в другое является важной с практической точки зрения величиной, поэтому поиск внешних воздействий, при которых эта величина минимальная представляет существенный интерес. Задача о времени переключения, по сути, является разновидностью зада-

чи о достижении случайным процессом заданного уровня.

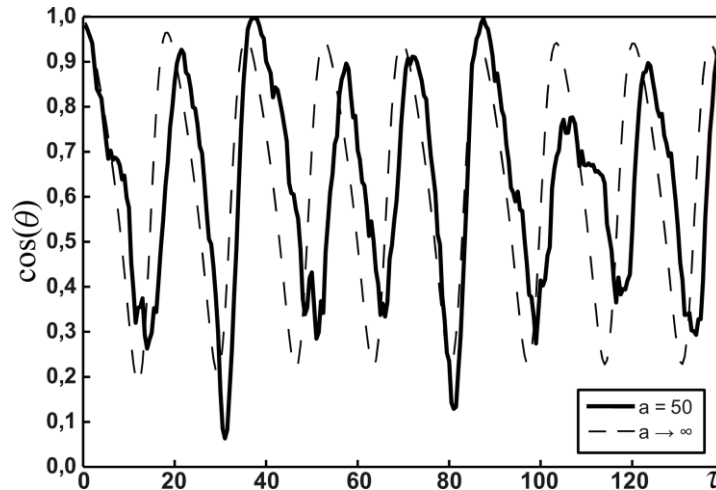


Рисунок 2.1 – Реализация неоднородного режима для модели с тепловым шумом ($a = 50$) и без него ($a \rightarrow \infty$) ($\tilde{\omega} = 0,75$, $\lambda = 0,2$, $\tilde{h} = 0,2$) (в).

Однако вопрос о том, что считать таковым в случае стохастической динамики магнитного момента одноосной наночастицы, как правило, остается открытым. В то же время очевидно, что вектор \mathbf{m} достаточно долго достигает состояния с максимальной энергией, а затем, преодолев потенциальный барьер, достаточно быстро стремится к новому положению равновесия. Следовательно, в качестве такого заданного уровня можно выбрать положение магнитного момента, которое заведомо существенно отстоит от положения с максимальной энергией. Оказавшись в таком новом состоянии, магнитный момент в дальнейшем будет сравнительно долго флуктуировать в окрестности нового равновесного положения, следовательно, можно считать, что процедура перемагничивания наночастицы завершена. В данной работе мы принимаем значение заданного уровня для азимутального угла θ равным $0,8\pi$. При моделировании полагалось, что в начальный момент времени внешнее поле скачкообразно изменялось от нуля до заданного значения.

Очевидно, что тепловые флуктуации могут различным образом влиять на процесс переключения магнитного момента из одного устойчивого состояния в другое в зависимости от соотношения между тепловой и магнитной энергиями, см. выражение (2.4). Для малых амплитуд вращающегося поля (рис. 2.2а) с ростом температуры (или с уменьшением значения a) время переключения уменьшается.

Это связано с тем, что при малом регулярном воздействии, переключение происходит в первую очередь благодаря тепловым флуктуациям. При увеличении амплитуды вращающегося поля наличие тепловых флуктуаций будет как препятствовать так и способствовать процессу перемагничивания (см. рис. 2.2б, в) на фоне существенно снижения времени переориентации по сравнению с предыдущим случаем. Здесь переключение происходит благодаря действию вращающегося поля, а тепловой шум лишь сравнительно незначительно модифицирует время переключения. В конечном итоге, для достаточно больших амплитуд вращающегося поля увеличение температуры незначительно замедляет перемагничивание ФНЧ (рис. 2.2г). Все численные результаты получены для частоты $\tilde{\omega} = 1,0$, и параметра затухания $\lambda = 0,2$. Усреднение проводилось по $5 \cdot 10^5$ независимым реализациям.

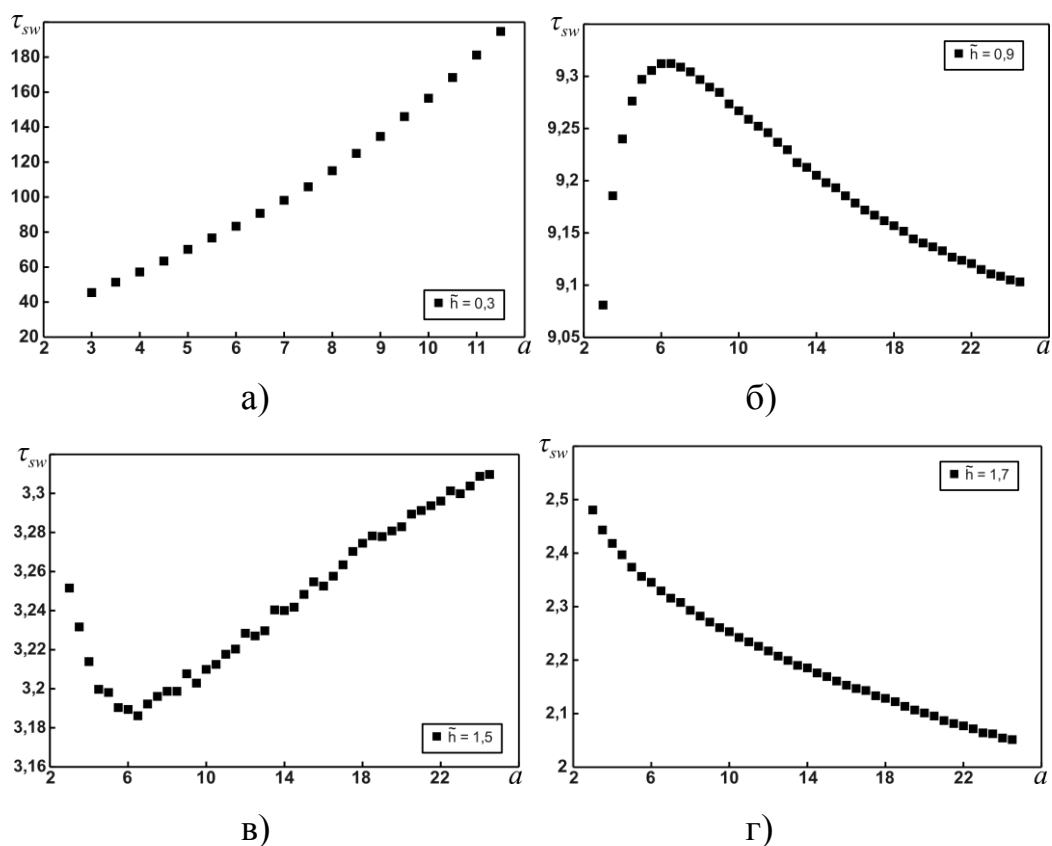


Рисунок 2.2 – Зависимость времени переключения от параметра a для различных амплитуд вращающегося поля: а) $\tilde{h} = 0,3$; б) $\tilde{h} = 0,9$; в) $\tilde{h} = 1,5$; г) $\tilde{h} = 1,7$.

Соответственно, зависимости времени переключения от амплитуды враща-

ющего поля (рис. 2.3) можно условно классифицировать на 2 вида. Если амплитуда вращающегося поля достаточно мала (для выбранных условий моделирования $\tilde{h} = 0 \div 0,29$), величина времени переключения будет сравнительно большой и очень чувствительной как изменению \tilde{h} , так и к изменению температуры (рис. 2.3а). Из рисунка 2.3 (см. кривую $\tilde{h} = 0,25$) очевидно, что в этом случае вращающееся поле самостоятельно не в состоянии перемагнитить наночастицу и наличие флуктуаций играет принципиальную роль. Если же величина амплитуды поля достаточно велика для того, чтобы переключить магнитный момент, тепловые шумы оказывают лишь незначительное влияние на зависимость $\tau_{sw}(\tilde{h})$, см. рис. 2.3б. При этом время

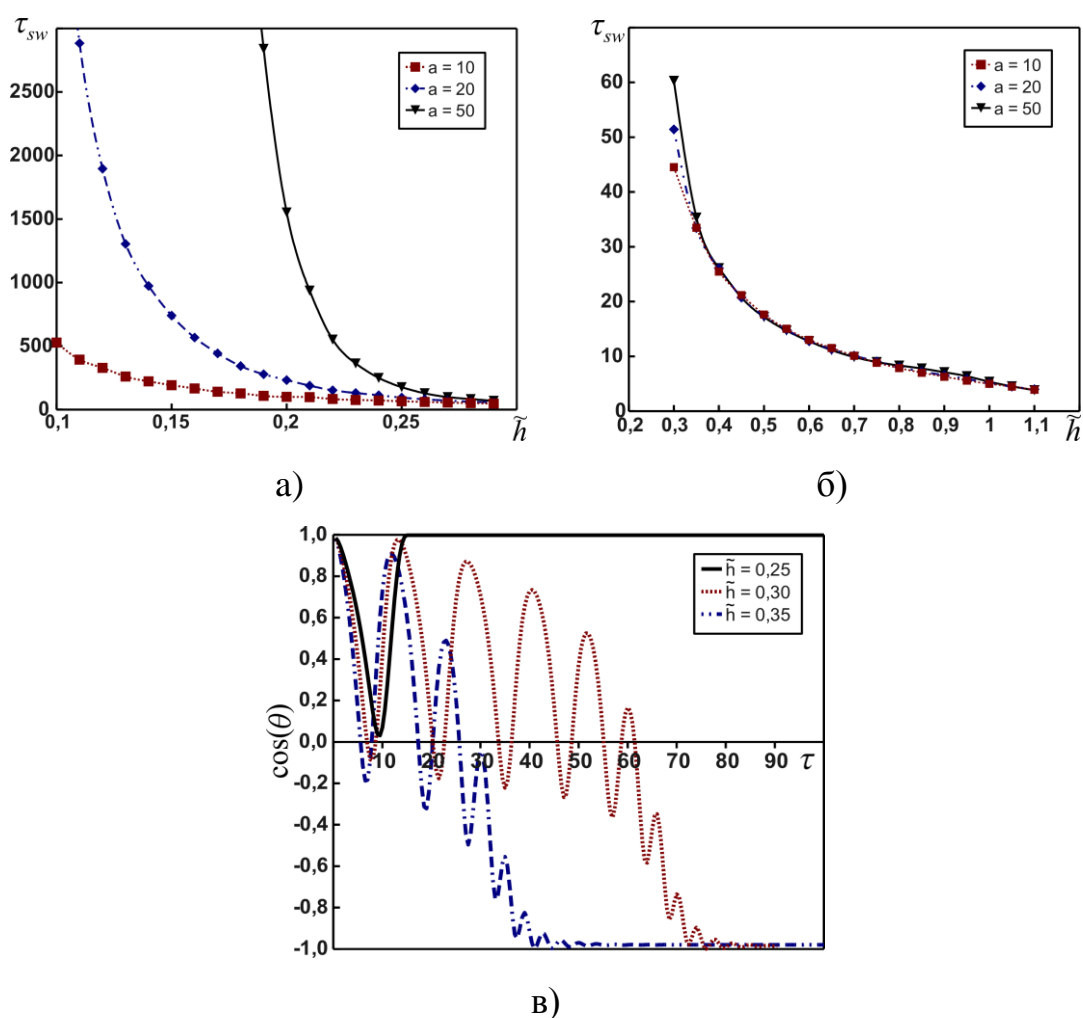


Рисунок 2.3 – Зависимость времени переключения от амплитуды вращающегося поля для различных параметров a : а) случай малых амплитуд вращающегося поля; б) случай больших амплитуд вращающегося поля; в) временные зависимости $\cos\theta$ магнитного момента для детерминистического случая при различных амплитудах

вращающегося поля.

переключения существенно меньше, чем в предыдущем случае. Моделирование проводилось для следующих параметров: $\tilde{\omega} = 0,75$, $\lambda = 0,2$. Усреднение производилось для 2000 независимых реализаций.

2.1.2.3 Распределение времен переключения

Поскольку процесс перемагничивания ФНЧ носит случайный характер, среднее время переключения магнитного момента не является самодостаточной характеристикой, поскольку сами времена переключения могут быть распределены различным образом. Проведенное численное исследование показали, что в случае, когда амплитуда вращающегося поля достаточно велика, и переориентация вектора \mathbf{m} осуществляется благодаря внешнему полю, функция распределения представляет собой неунимодальную кривую с несколькими минимумами и максимумами (рис. 2.4а). Это связано с тем, что при включении внешнего детерминистического поля за счет динамических процессов в различные моменты времени магнитный момент ФНЧ в различной степени отстоит от положения с максимальной энергией (рис. 2.4 б). И в те промежутки времени, когда \mathbf{m} имеет наибольшую энергию, вероятность его переориентации в новое состояние достигает максимальных значений.

При этом относительная разница между минимумами и максимумами распределения тем меньше, чем большей есть температура. Таким образом, реальные времена перемагничивания могут с практически одинаковой вероятностью принимать отличающиеся в несколько раз значения.

В случае же малых амплитуд поля, когда переключение возможно лишь в присутствии тепловых шумов, функция распределения приобретает вид ассиметричной унимодальной кривой, которая достаточно слабо убывает, что особенно выражено для больших температур (см. рис. 6а). Т.е., как и следовало ожидать, распределение есть более «размытым». Наличие максимума распределения связано с максимальным отклонением \mathbf{m} от положения равновесия, как и в предыду-

щем случае.

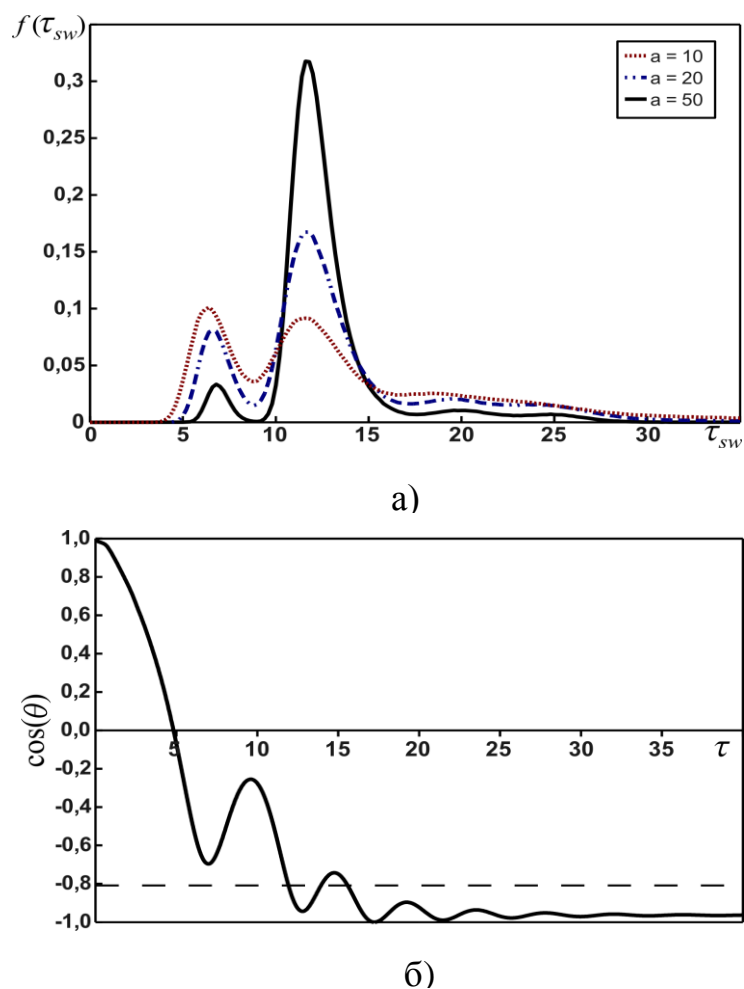
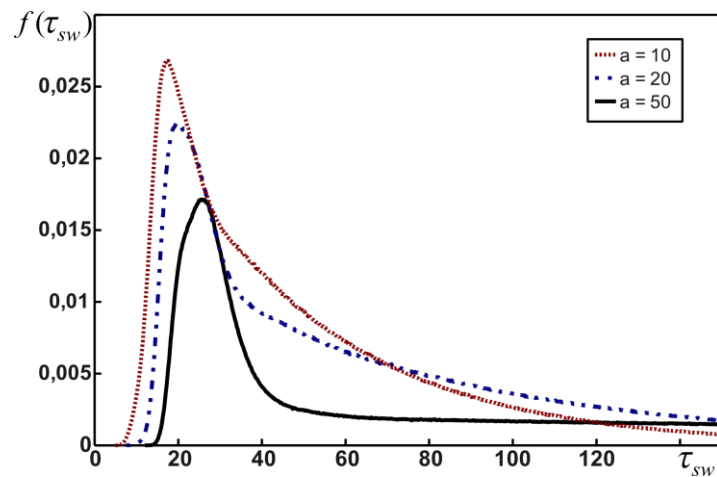
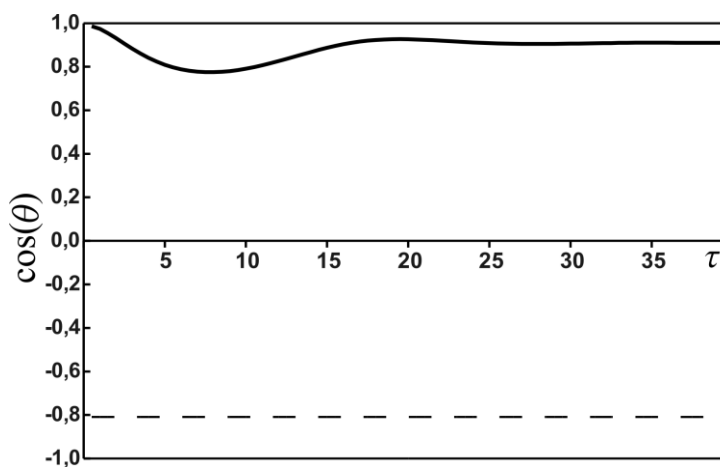


Рисунок 2.4 – Распределение времени переключения ($\tilde{h} = 0,4$): а) функция распределения; б) временная зависимость косинуса полярного угла магнитного момента для детерминистического случая.

Моделирование проводилось для следующих параметров: $\tilde{\omega} = 0,5$, $\lambda = 0,2$. Для построения каждой кривой распределения было осуществлено $2,5 \cdot 10^7$ независимых реализаций.



а)



б)

Рисунок 2.5 – Распределение времени переключения ($\tilde{h} = 0,2$): а) функция распределения; б) временная зависимость косинуса полярного угла магнитного момента для детерминистического случая.

2.2 Время жизни прецессионных режимов

2.2.1 Определение и основные уравнения

Поскольку уравнение (2.1) сохраняет величину магнитного момента $\mathbf{m}(t)$, то удобно записать уравнение Фоккера-Планка, которое соответствует формуле (2.1), в сферических координатах. Введем полярный и азимутальный углы магнитного момента $\mathbf{m}(t)$ как $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно. Тогда прямое и обратное уравнения

Фоккера-Планка для условной плотности вероятности $P = P(\theta, \psi, \tilde{t} | \theta', \psi', \tilde{t}')$ ($\tilde{t} \geq \tilde{t}'$) могут быть записаны в виде [65-67]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cot \theta + \frac{2a}{\lambda} u(\theta, \psi) \right) P \\ - \frac{2a}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \psi} [v(\theta, \psi) - \rho \tilde{\omega}] P = \frac{2a}{\lambda} \frac{\partial P}{\partial \tilde{t}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta'^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial^2 P}{\partial \psi'^2} + \left(\cot \theta' + \frac{2a}{\lambda} u(\theta', \psi') \right) \frac{\partial P}{\partial \theta'} \\ + \frac{2a}{\lambda} [v(\theta', \psi') - \rho \tilde{\omega}] \frac{\partial P}{\partial \psi'} = - \frac{2a}{\lambda} \frac{\partial P}{\partial \tilde{t}'}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

соответственно. Здесь переменные θ и ψ связаны с $\theta(\tilde{t})$ и $\psi(\tilde{t}) = \varphi(\tilde{t}) - \rho \tilde{\omega} \tilde{t}$, соответственно, и функции $u(\theta, \psi)$ и $v(\theta, \psi)$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(\theta, \psi) &= - \frac{1}{\sin \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \tilde{W} \\ &= - \lambda \sin \theta \cos \theta - \tilde{h} \sin \psi + \lambda \tilde{h} \cos \theta \cos \psi, \\ v(\theta, \psi) &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \tilde{W} \\ &= \cos \theta - \tilde{h} \cot \theta \cos \psi - \lambda \tilde{h} \frac{\sin \psi}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Предполагается, что плотность вероятности P удовлетворяет начальному условию $P|_{\tilde{t}=\tilde{t}'} = \delta(\theta - \theta') \delta(\psi - \psi')$. Более того, если не накладываются поглощающие граничные условия, то P нормирован должным образом: $\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta P = 1$.

Система двух стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tilde{t}}\theta(\tilde{t}) &= u(\theta(\tilde{t}),\psi(\tilde{t})) + \frac{\lambda}{2a}\cot\theta(\tilde{t}) + \sqrt{\frac{\lambda}{a}}\eta_1(\tilde{t}), \\ \frac{d}{d\tilde{t}}\psi(\tilde{t}) &= v(\theta(\tilde{t}),\psi(\tilde{t})) - \rho\tilde{\omega} + \sqrt{\frac{\lambda}{a}}\frac{1}{\sin\theta(\tilde{t})}\eta_2(\tilde{t}),\end{aligned}\tag{2.8}$$

где $\eta_j(\tilde{t})$ ($j = 1, 2$) обозначает независимый гауссовский белый шум с нулевым средним и корреляционной функции $\langle \eta_j(\tilde{t}_2)\eta_j(\tilde{t}_1) \rangle = \delta(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)$, приводит к тем же уравнением Фоккера-Планка (2.5) [66]. Это означает, что указанная система стохастически эквивалентна стохастическому уравнению Ландау-Лифшица (2.1). В дальнейшем мы будем использовать формулу (2.8) для численного исследования термической стабильности прецессионных режимов магнитного момента $\mathbf{m}(t)$.

При нулевой интенсивности шума, вращающееся магнитное поле может вызвать стабильные прецессионные режимы $\mathbf{m}(t)$ двух типов [59, 63]. В первом, P-режиме, угол прецессии $\Theta(t)$ является постоянным и $\mathbf{m}(t)$ в лабораторной системе координат является периодической функцией времени. Во втором, Q-режиме, угол прецессии периодически изменяется и $\mathbf{m}(t)$ становится квази-периодической функцией времени (поскольку периоды $\Theta(t)$ и $\mathbf{h}(t)$ в общем случае не соизмеримы). Некоторые свойства этих режимов, связанные со стационарным состоянием, будут рассмотрены далее. Здесь мы учитываем только тот факт, что в зависимости от параметров $\tilde{h}, \tilde{\omega}, \rho$, и λ один или два прецессионных режима могут существовать в устойчивом состоянии. В последнем случае, один режим реализуется в верхнем состоянии ($\sigma = +1$), а другой в нижнем состоянии ($\sigma = -1$) магнитного момента. Мы считаем, что для данного набора указанных параметров магнитный момент $\mathbf{m}(t)$ находится в состоянии σ если $m_z(t)$ стремится к σm при медленном уменьшении \tilde{h} до нуля. Следует отметить, что последнее условие очень важно, поскольку резкое снижение \tilde{h} может переключить $\mathbf{m}(t)$ в другое состояние.

В стационарных состояниях, соответствующие режимы устойчивы и переходы между ними невозможны. Однако эти переходы могут иметь место при наличии тепловых флуктуаций. В этом случае прецессионные режимы становятся

метастабильными и магнитный момент остается в данном состоянии σ некоторое (безразмерное) случайное время \tilde{t}_σ . Среднее значение этого времени, т.е. времени жизни метастабильного состояния T_σ , можно определить, используя метод среднего времени достижения случайным процессом заданного уровня (СВДСПЗУ) [44, 50]. В основе этого метода лежит обратное уравнение Фоккера-Планка (2.6), которое должно быть записано для данного состояния σ . Для этого мы добавляем индекс σ на все угловые переменные, заменяя условную плотность вероятности P на $P_\sigma = P_\sigma(\theta_\sigma, \psi_\sigma, \tilde{t} | \theta'_\sigma, \psi'_\sigma, \tilde{t}')$, предполагая что $\theta_{+1}, \theta'_{+1} \in (0, \theta_0)$, $\theta_{-1}, \theta'_{-1} \in (\pi - \theta_0, \pi)$ и $\psi_\sigma, \psi'_\sigma \in (0, 2\pi)$. Здесь угол θ_σ ($\pi/2 < \theta_\sigma < \pi$) должен быть выбран так, что усредненный по времени угол прецессии $\Theta_\sigma(t)$ (напомним, что $\Theta_\sigma(t)$ для Р режима не зависит от t) был относительно близко к θ_0 и $\pi - \theta_0$ для $\sigma = -1$ и $+1$, соответственно. Для выполнения этих требований, на наш численного моделирования мы предполагаем, что $\theta_0 = 0.8\pi$.

В соответствии с подходом СВДСПЗУ, мы считаем, конус с углом $\pi(1 - \sigma)/2 + \sigma\theta_0$ поглощающей границей магнитного момента в состоянии σ , т.е. $P_\sigma |_{\theta'_\sigma = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma\theta_0} = 0$ в этом случае, учитывая, что $P_\sigma = P_\sigma(\theta_\sigma, \psi_\sigma, u | \theta'_\sigma, \psi'_\sigma, 0)$ ($u = \tilde{t} - \tilde{t}'$), время жизни может быть определено как $T_\sigma = \int_0^\infty du Q_\sigma$, где

$$Q_\sigma = \int_0^{2\pi} d\psi_\sigma \int_{(\pi-\theta_0)(1-\sigma)/2}^{\pi(1-\sigma)/2 + \theta_0(1+\sigma)/2} d\theta_\sigma P_\sigma \quad (2.9)$$

есть вероятностью того, что магнитный момент находится в состоянии σ вплоть до заданного значения разницы во времени u . Наконец, используя соотношения $Q_\sigma |_{u=0} = 1$ и $Q_\sigma |_{u=\infty} = 0$, можно убедиться, что время жизни $T_\sigma = T_\sigma(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma)$ описывается уравнением в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_\sigma}{\partial \theta'^2_\sigma} + \frac{1}{\sin^2 \theta'_\sigma} \frac{\partial^2 T_\sigma}{\partial \psi'^2_\sigma} + (\cot \theta'_\sigma + \frac{2a}{\lambda} u(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma)) \frac{\partial T_\sigma}{\partial \theta'_\sigma} \\ + \frac{2a}{\lambda} [v(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma) - \rho \tilde{\omega}] \frac{\partial T_\sigma}{\partial \psi'_\sigma} = -\frac{2a}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Около поглощающей границы решение этого уравнения должно удовлетворять условию

$$\mathbb{T}_\sigma |_{\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma\theta_0} = 0. \quad (2.11)$$

Еще одним важным свойством времени жизни является то, что это конечная функция θ_σ' и ψ_σ' . Для того чтобы доказать это утверждение, сначала аппроксимируем стохастическую динамику магнитного момента случайным блужданием по сфере характеризуемую безразмерным дискретным временем $\tilde{t} = n\tau$, где $n = 0, 1 \dots$ и τ является временным шагом. Тогда, обозначая $r_{\sigma n}$ как вероятность того, что магнитный момент находится в состоянии σ после n -го шага, мы можем написать $Q_\sigma = \prod_{n=1}^{u/\tau} r_{\sigma n}$. Если максимальный элемент множества $\{r_{\sigma n}\}$ равен R_σ , то $Q_\sigma < R_\sigma^{u/\tau}$ и, как следствие, $\mathbb{T}_\sigma < \int_0^\infty du R_\sigma^{u/\tau} = \tau |\ln R_\sigma|$. Наконец, принимая во внимание, что условие $\theta_0 < \pi$ подразумевает, что $R_\sigma < 1$, получаем желаемый результат: $\mathbb{T}_\sigma < \infty$. Следует также отметить, что поскольку максимальное угловое расстояние до поглощающей границы наблюдается при $\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2$, т.е. $\max \mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\sigma |_{\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2}$, то условие конечности времени жизни может быть записано в виде

$$\mathbb{T}_\sigma |_{\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2} < \infty. \quad (2.12)$$

Полученный результат показывает, как важно знать решение уравнения (2.10) в малой окрестности точки $\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2$. Если предположить, что $\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma\xi_\sigma$ ($\xi_\sigma > 0$), то уравнение при $\xi_\sigma \rightarrow 0$ сводится к

$$\frac{\partial^2 \mathbb{T}_\sigma}{\partial \xi_\sigma^2} + \frac{1}{\xi_\sigma^2} \frac{\partial^2 \mathbb{T}_\sigma}{\partial \psi_\sigma'^2} + \frac{1}{\xi_\sigma} \frac{\partial \mathbb{T}_\sigma}{\partial \xi_\sigma} - \frac{2a\hbar}{\lambda \xi_\sigma} (\sigma \cos \psi_\sigma' + \lambda \sin \psi_\sigma') \frac{\partial \mathbb{T}_\sigma}{\partial \psi_\sigma'} = -\frac{2a}{\lambda} \quad (2.13)$$

Его решение можно представить в виде

$$T_\sigma = c \ln \xi_\sigma + f_0 + \sum_{l=1}^{\infty} f_l(\psi'_\sigma) \xi_\sigma^l, \quad (2.14)$$

где c и f_0 являются постоянными параметрами, а функциями $f_l = f_l(\psi'_\sigma)$ удовлетворяет обыкновенным дифференциальным уравнениям $d^2 f_l / d\psi_\sigma'^2 + f_l = 0$ и

$$\frac{d^2 f_l}{d\psi_\sigma'^2} + l^2 f_l - \frac{2a\tilde{h}}{\lambda} (\sigma \cos \psi'_\sigma + \lambda \sin \psi'_\sigma) \frac{df_{l-1}}{d\psi'_\sigma} = -\frac{2a}{\lambda} \delta_{l2} \quad (2.15)$$

при $l \geq 2$ и δ_m – символом Кронекера. Согласно формуле (2.14), условие конечности (2.12) примет вид $c = 0$, который, в свою очередь, равнозначен $\lim_{\xi_\sigma \rightarrow 0} \xi_\sigma \partial T_\sigma / \partial \xi_\sigma = 0$. Отметим, что при $c = 0$ производная $\partial T_\sigma / \partial \theta'_\sigma$ в точке $\theta'_\sigma = \pi(1-\sigma)/2$, в общем случае, не обращается в нуль: $\partial T_\sigma / \partial \theta'_\sigma |_{\theta'_\sigma = \pi(1-\sigma)/2} = \mathcal{J}'_1$. Однако, если $\tilde{h} = 0$, то $f_1 = 0$ (это так, потому что в этом случае T_σ не зависит от ψ'_σ), и условие конечности (2.12) сводится к отражающему граничному условию

$$\frac{\partial T_\sigma}{\partial \theta'_\sigma} \Big|_{\theta'_\sigma = \pi(1-\sigma)/2} = 0. \quad (2.16)$$

Следует также отметить, что при $\tilde{h} \neq 0$ такое же условие отражающей границы выполняется для среднего времени жизни $\bar{T}_\sigma = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} d\psi'_\sigma T_\sigma$, так как $\bar{f}_1 = 0$.

Теперь, используя общее уравнение (2.10), мы можем установить трансформационные свойства его решения $T_\sigma = T_\sigma(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma; \rho)$ (для ясности, зависимость T_σ от ρ показано в явном виде), которое должно удовлетворять условиям (2.11) и (2.12). С этой целью введем замену переменных

$$\theta'_\sigma = \pi - \theta'_{-\sigma}, \quad \psi'_\sigma = 2\pi - \psi'_{-\sigma}. \quad (2.17)$$

Учитывая, что $u(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma) = -u(\theta'_{-\sigma}, \psi'_{-\sigma})$ и $u(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma) = -u(\theta'_{-\sigma}, \psi'_{-\sigma})$, можно убедиться, что уравнение (9) в новых переменных $\theta'_{-\sigma}$ и $\psi'_{-\sigma}$ принимает форму

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathbf{H}_\sigma}{\partial \theta'^2_{-\sigma}} + \frac{1}{\sin^2 \theta'_{-\sigma}} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_\sigma}{\partial \psi'^2_{-\sigma}} + (\cot \theta'_{-\sigma} + \frac{2a}{\lambda} u(\theta'_{-\sigma}, \psi'_{-\sigma})) \\ & \times \frac{\partial \mathbf{H}_\sigma}{\partial \theta'_{-\sigma}} + \frac{2a}{\lambda} [v(\theta'_{-\sigma}, \psi'_{-\sigma}) + \rho \tilde{\omega}] \frac{\partial \mathbf{H}_\sigma}{\partial \psi'_{-\sigma}} = -\frac{2a}{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\mathbf{H}_\sigma = \mathbf{T}_\sigma(\pi - \theta'_{-\sigma}, 2\pi - \psi'_{-\sigma}; \rho)$. В соответствии с преобразованиями (2.17), условия (2.11) и (2.12) для \mathbf{H}_σ принимают форму $\mathbf{H}_\sigma|_{\theta'_{-\sigma} = \pi(1+\sigma)/2 - \sigma\theta_0} = 0$ и $\mathbf{H}_\sigma|_{\theta'_{-\sigma} = \pi(1+\sigma)/2} < \infty$, соответственно. Поэтому, сравнивая формулы (2.10) и (2.18) и соответствующие условия поглощения и конечности, можно сделать вывод, что \mathbf{H}_σ равно $\mathbf{T}_{-\sigma}(\theta'_{-\sigma}, \psi'_{-\sigma}; -\rho)$, т.е.

$$\mathbf{T}_\sigma(\theta'_\sigma, \psi'_\sigma; \rho) = \mathbf{T}_{-\sigma}(\pi - \theta'_\sigma, 2\pi - \psi'_\sigma; -\rho). \quad (2.19)$$

Для среднего времени жизни $\bar{\mathbf{T}}_\sigma$ эта трансформационная особенность означает $\bar{\mathbf{T}}_\sigma(\theta'_\sigma; \rho) = \bar{\mathbf{T}}_{-\sigma}(\pi - \theta'_\sigma; -\rho)$.

В общем случае, аргументы θ'_σ и ψ'_σ из \mathbf{T}_σ произвольны и могут быть подобраны для лучшим образом для соответствия проблеме. В этой статье мы заинтересованы в жизни прецессионных режимов *достижения* устойчивого состояния. Таким образом, углы θ'_σ и ψ'_σ должны быть связана с решением детерминистического (когда $a = \infty$) уравнения Ландау-Лифшица (2.8) для некоторого времени $\tilde{t} = \tilde{t}_{st}$, т.е. $\theta'_\sigma = \theta_\sigma(\tilde{t}_{st})$ и $\psi'_\sigma = \psi_\sigma(\tilde{t}_{st})$. Чтобы убедиться, что магнитный момент находится возле стационарного состояния, мы предполагаем, что $\tilde{t}_{st} > \tilde{t}_0 + \tilde{t}_{rel}$, где \tilde{t}_0 время увеличения вращающегося поля от амплитуды 0 до заданного значения \tilde{h} , а $\tilde{t}_{rel} = 2/\lambda$ время релаксации. Следует подчеркнуть, что время t_0 должно быть выбрано достаточно большим, чтобы предотвратить переход от динамического состояния σ к состоянию $-\sigma$. В режиме P, углы $\theta_\sigma(\tilde{t}_{st})$ и $\psi_\sigma(\tilde{t}_{st})$ обуславливают

предельный угол прецессии $\Theta_\sigma = \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \Theta_\sigma(\tilde{t})$ и предельную разность фаз $\Psi_\sigma = \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \Psi_\sigma(\tilde{t})$, соответственно. Как следствие, время жизни этого режима

$$\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\Theta_\sigma, \Psi_\sigma; \rho) \quad (2.20)$$

не зависит от точного выбора \tilde{t}_{st} . В противоположность этому, в Q режиме угол прецессии $\Theta_\sigma(\tilde{t})$ есть периодическая функция времени \tilde{t} с периодом \tilde{T}_Q и разностью фаз $\Psi_\sigma(\tilde{t}) = -\nu\tilde{t} + \Phi_\sigma(\tilde{t})$, где $\nu \geq 0$ и $\Phi_\sigma(\tilde{t})$ также периодической функцией с тем же периодом \tilde{T}_Q . Таким образом, время жизни в Q режиме, в целом, зависит от \tilde{t}_{st} :

$$\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\Theta_\sigma(\tilde{t}_{st}), \Psi_\sigma(\tilde{t}_{st}); \rho). \quad (2.21)$$

Однако, при $a \gg 1$ эта зависимость очень слаба и ей можно.

В случае P режима, предельные углы Θ_σ и Ψ_σ зависит также от параметров \tilde{h} , $\tilde{\omega}$, λ и ρ . Тем не менее, для краткости, мы оставим только параметр ρ , т.е. $\Theta_\sigma = \Theta_\sigma[\rho]$ и $\Psi_\sigma = \Psi_\sigma[\rho]$, который вместе с параметром состояния σ описывает свойства преобразования из этих углов. Чтобы найти их, мы используем формулу (2.7) для представления стационарных уравнений Ландау-Лифшица $u(\Theta_\sigma[\rho], \Psi_\sigma[\rho]) = 0$ и $v(\Theta_\sigma[\rho], \Psi_\sigma[\rho]) = \rho\tilde{\omega}$ как

$$\begin{aligned} \cos \Psi_\sigma(\rho) &= \frac{1}{\tilde{h}} (\sin \Theta_\sigma[\rho] - \rho\kappa \tan \Theta_\sigma[\rho]), \\ \sin \Psi_\sigma[\rho] &= -\frac{\rho\lambda\kappa}{\tilde{h}} \sin \Theta_\sigma[\rho], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\kappa = \tilde{\omega}/(1 + \lambda^2)$. Из этих уравнений просто получить желаемый результат:

$$\Theta_\sigma[\rho] = \pi - \Theta_{-\sigma}[-\rho], \quad \Psi_\sigma[\rho] = 2\pi - \Psi_{-\sigma}[-\rho]. \quad (2.23)$$

Так как трансформационные свойства (2.23) аналогичны тем, которые в формуле (2.17), из уравнения (2.19) получаем преобразование свойства времени жизни в Р режиме

$$T_{\sigma}(\Theta_{\sigma}[\rho], \Psi_{\sigma}[\rho]; \rho) = T_{-\sigma}(\pi - \Theta_{\sigma}[\rho], 2\pi - \Psi_{\sigma}[\rho]; -\rho). \quad (2.24)$$

Это показывает, что времена жизни, характеризуемые парами $\{\sigma, \rho\}$ и $\{-\sigma, -\rho\}$, идентичны.

2.2.2 Аналитическое выражение для времени жизни

2.2.2.1 Трехрежимная аппроксимация

Аналитическое определение времени жизни прецессионных режимов предполагает решение уравнения (2.10) с поглощающими условиями и условиями конечности (2.11) и (2.12). Так как время жизни T_{σ} является периодической функцией ψ'_{σ} с периодом 2π , то она может быть выражена с помощью ряда Фурье

$$T_{\sigma} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{\sigma n}(\theta'_{\sigma}) e^{in\psi'_{\sigma}}. \quad (2.25)$$

Чтобы обеспечить реальность T_{σ} мы предполагаем, что коэффициенты $T_{\sigma n} = T_{\sigma n}(\theta'_{\sigma})$ из ряда удовлетворяют условию $T_{\sigma -n} = T_{\sigma n}^*$ (звездочка означает комплексное сопряжение). Подставляя этот ряд в уравнение (2.10) и вводя дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \hat{L}_n &= \frac{d^2}{d\theta'^2_{\sigma}} + (\cot\theta'_{\sigma} - a \sin 2\theta'_{\sigma}) \frac{d}{d\theta'_{\sigma}} - \frac{n^2}{\sin^2\theta'_{\sigma}} + i \frac{2an}{\lambda} (\cos\theta'_{\sigma} - \rho\tilde{\omega}), \\ \hat{N}_n &= (\lambda \cos\theta'_{\sigma} - i) \frac{d}{d\theta'_{\sigma}} + \frac{\lambda n}{\sin\theta'_{\sigma}} - in \cot\theta'_{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для $T_{\sigma n}$ можно получить бесконечное множество связанных уравнений

$$\hat{L}_n T_{\sigma n} + \frac{a\tilde{\hbar}}{\lambda} (\hat{N}_{n+1} T_{\sigma n+1} + \hat{N}_{-n+1}^* T_{\sigma n-1}) = -\frac{2a}{\lambda} \delta_{n0}. \quad (2.27)$$

Подобно T_σ , коэффициенты $T_{\sigma n}$ должны удовлетворять как поглощающему граничному условию $T_{\sigma n} |_{\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma\theta_0} = 0$, так и условию конечности $T_{\sigma n} |_{\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2} < \infty$.

В трехрежимном приближении, когда $T_{\sigma n} = 0$ для всех $|n| \geq 2$, бесконечное множество уравнений (2.27) сводится к системе трех уравнений для $T_{\sigma 0}$, $T_{\sigma 1}$ и $T_{\sigma 1}^*$. Поскольку T_σ действительна, то удобно рассматривать вместо $T_{\sigma 1}$ и $T_{\sigma 1}^*$, действительную и мнимую части $T_{\sigma 1}$, т.е. $T_{\sigma 1}^+ = \text{Re} T_{\sigma 1}$ и $T_{\sigma 1}^- = \text{Im} T_{\sigma 1}$. Тогда, в этом приближении время жизни (2.25) имеет вид

$$T_\sigma = T_{\sigma 0} + 2T_{\sigma 1}^+ \cos \psi'_\sigma - 2T_{\sigma 1}^- \sin \psi'_\sigma \quad (2.28)$$

и, обозначив реальные и мнимые части оператора \hat{O} как \hat{O}^+ и \hat{O}^- соответственно, по формулам (2.27) и (2.26) получаем набор из трех связанных уравнений для $T_{\sigma 0}$, $T_{\sigma 1}^+$ и $T_{\sigma 1}^-$:

$$\hat{L}_0 T_{\sigma 0} + \frac{2a}{\lambda} (1 + \tilde{\hbar} \hat{N}_1^+ T_{\sigma 1}^+ - \tilde{\hbar} \hat{N}_1^- T_{\sigma 1}^-) = 0, \quad (2.29)$$

$$\hat{L}_1^+ T_{\sigma 1}^+ - \hat{L}_1^- T_{\sigma 1}^- = -\frac{a\tilde{\hbar}}{\lambda} \hat{N}_0^+ T_{\sigma 0}, \quad (2.30)$$

$$\hat{L}_1^+ T_{\sigma 1}^- + \hat{L}_1^- T_{\sigma 1}^+ = \frac{a\tilde{\hbar}}{\lambda} \hat{N}_0^- T_{\sigma 0}. \quad (2.31)$$

Используя формулу (2.29), функция $T_{\sigma_0}(\theta'_\sigma)$ может быть выражена через $T_{\sigma_1}^+(\theta'_\sigma)$ и $T_{\sigma_1}^-(\theta'_\sigma)$. Действительно, учитывая

$$F_\sigma(\theta'_\sigma) = \tilde{h}\hat{N}_1^+T_{\sigma_1}^+ - \tilde{h}\hat{N}_1^-T_{\sigma_1}^- \quad (2.32)$$

как заданную функцию θ'_σ , можно записать формальное решение уравнения (2.29) [68]. С помощью этого решения, удовлетворяя поглощающим и отражающим граничным условиям $T_{\sigma_0}|_{\theta'_\sigma=\pi(1-\sigma)/2+\sigma\theta_0}=0$ и $dT_{\sigma_0}/d\theta'_\sigma|_{\theta'_\sigma=\pi(1-\sigma)/2}=0$ (так как T_{σ_0} не зависит от θ'_σ , последнее условие эквивалентно условию конечности $T_{\sigma_0}|_{\theta'_\sigma=\pi(1-\sigma)/2}<\infty$), получаем

$$T_{\sigma_0} = \frac{2a}{\lambda} \int_{\cos\theta_0}^{\sigma\cos\theta'_\sigma} dx \frac{e^{-ax^2}}{1-x^2} \int_x^1 dy [1 + F_\sigma(\arccos\sigma y)] e^{ay^2}. \quad (2.33)$$

Подставляя этот результат в уравнения (2.30) и (2.31), нетрудно получить связанные интегрально-дифференциальные уравнения для $T_{\sigma_1}^+$ и $T_{\sigma_1}^-$, которые, однако, слишком сложны, чтобы их решить в общем случае. Более того, эти уравнения не являются закрытыми, поскольку в соответствии с формулами (2.32), (2.30) и (2.31), функция $F_\sigma(\arccos\sigma y)$ зависит от T_{σ_0} . К счастью можно детально изучить, важный случай высокого барьера анизотропии.

2.2.2.2 Высокий барьер анизотропии

В случае высокого барьера анизотропии (или низких температур), когда выполняется условие $a \gg 1$, основной вклад в первый интеграл в формуле (2.33) поступает либо из малой окрестности точки $x = 0$ (если θ'_σ не слишком близко к $\pi/2$ и $\sigma\cos\theta'_\sigma > 0$) или из окрестности точки $x = \sigma\cos\theta'_\sigma$ (если $\sigma\cos\theta'_\sigma < 0$). Следует отметить, что последняя ситуация может быть реализована только в случае Q ре-

жима с $\max \Theta_{+1}(\tilde{t}) > \pi/2$ или $\min \Theta_{-1}(\tilde{t}) < \pi/2$. Здесь мы ограничим наш теоретический анализ рассмотрением малых амплитуд вращающегося поля, которые не превышают порог амплитуды Q режима. Такие вращающегося поля могут вызывать только P режим, и, как следствие, эта ситуация всегда реализуется. Поэтому, принимая во внимание, что в этом случае интегралы $\int_{\cos\theta_0}^{\sigma \cos\theta_\sigma} dx e^{-ax^2}$ и $\int_0^1 dy e^{ay^2}$ при $a \gg 1$ могут быть аппроксимированы как $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$ и $e^a/2a$, соответственно, уравнение (2.33) сводится к

$$T_{\sigma 0} = \frac{e^a}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(1 + 2ae^{-a} \int_0^1 dy F_\sigma(\arccos \sigma y) e^{ay^2} \right) \quad (2.34)$$

Для оценки интеграла в формуле (2.34), отметим, что малые окрестности пределов интегрирования определяют асимптотику этого интеграла при $a \rightarrow \infty$. Точнее, нижний предел отвечает за высокочастотное поведение этого интеграла, а верхний – за его поведение в резонансном случае. В дальнейшем мы называем вращающееся поле резонансным, если $\tilde{\omega} \sim 1$ и направление его вращения совпадает с направлением естественной прецессии магнитного момента, т. е. если $\sigma\rho = +1$. Для изучения этих случаев в едином порядке, удобно записать интеграл в формуле (2.34) в виде суммы двух слагаемых, $F_\sigma(\arccos \sigma)e^a/2a$ и $F_\sigma(\arccos 0)$, что соответствует резонансным и высоким частотам соответственно. Таким образом, принимая во внимание, что $\arccos \sigma = \pi(1-\sigma)/2$ и $\arccos 0 = \pi/2$, Уравнение (2.34) дает

$$T_{\sigma 0} = \frac{e^a}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[1 + F_\sigma\left(\frac{\pi}{2}(1-\sigma)\right) + 2ae^{-a} F_\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (2.35)$$

Важно отметить, что уравнение (2.35) не является точной асимптотической формулой для $T_{\sigma 0}$ потому что условия $F_\sigma(\pi(1-\sigma)/2)$ и $2ae^{-a} F_\sigma(\pi/2)$ соответствуют различным частотам.

Окрестности точки $\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2$

Для расчета $F_\sigma(\pi(1-\sigma)/2)$, мы должны решить уравнения (2.30) и (2.31) в окрестности точки $\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2$. Если предположить, что $\theta_\sigma' = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma\eta_\sigma$ ($0 < \eta_\sigma = 1$) и, $a\tilde{h} \ll 1$, эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\hat{L}_1^+ \Gamma_{\sigma 1}^+ - \frac{2a}{\lambda} (\sigma - \rho\tilde{\omega}) \Gamma_{\sigma 1}^- &= -a\tilde{h} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\eta_\sigma}, \\ \hat{L}_1^+ \Gamma_{\sigma 1}^- + \frac{2a}{\lambda} (\sigma - \rho\tilde{\omega}) \Gamma_{\sigma 1}^+ &= -\sigma \frac{a\tilde{h}}{\lambda} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\eta_\sigma},\end{aligned}\tag{2.36}$$

где

$$\hat{L}_1^+ = \frac{d^2}{d\eta_\sigma^2} + \left(\frac{1}{\eta_\sigma} - 2a\eta_\sigma\right) \frac{d}{d\eta_\sigma} - \frac{1}{\eta_\sigma^2}.\tag{2.37}$$

Поскольку приближенная формула (2.35) не зависит от θ_σ' , она не может быть использована для определения производной $d\Gamma_{\sigma 0}/d\eta_\sigma$. Поэтому мы используем точный результат:

$$\frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\theta_\sigma'} = -\sigma \frac{2ae^{-a\cos^2\theta_\sigma'}}{\lambda \sin \theta_\sigma'} \int_{\sigma \cos \theta_\sigma'}^1 dy [1 + F_\sigma(\arccos \sigma y)] e^{ay^2},\tag{2.38}$$

который следует из уравнения (2.33), и при $\eta_\sigma \ll 1$ дает

$$\frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\eta_\sigma} = -\frac{a}{\lambda} \left[1 + F_\sigma\left(\frac{\pi}{2}(1-\sigma)\right) \right] \eta_\sigma.\tag{2.39}$$

Не трудно проверить, что точное решение уравнения (2.36), которое стремится нулю, при $\tilde{h} \rightarrow 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\sigma_1}^+ &= -\frac{(1-\lambda^2-\sigma\rho\tilde{\omega})\tilde{h}}{2[(1-\sigma\rho\tilde{\omega})^2+\lambda^2]} \frac{dT_{\sigma_0}}{d\eta_\sigma}, \\ T_{\sigma_1}^- &= \sigma \frac{\lambda(2-\sigma\rho\tilde{\omega})\tilde{h}}{2[(1-\sigma\rho\tilde{\omega})^2+\lambda^2]} \frac{dT_{\sigma_0}}{d\eta_\sigma}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $dT_{\sigma_0}/d\eta_\sigma$ дается формулой (2.39) Согласно этому уравнению, решение (2.40) содержит неизвестный параметр $F_\sigma(\pi(1-\sigma)/2)$, который может быть определен из начальных условий $F_\sigma(\pi(1-\sigma)/2) = (\tilde{h}\hat{N}_1^+T_{\sigma_1}^+ - \tilde{h}\hat{N}_1^-T_{\sigma_1}^-)|_{\eta_\sigma=0}$ [См. формулу (2.32)] Учитывая, что $\hat{N}_1^+ = \lambda d/d\eta_\sigma + \lambda/\eta_\sigma$ и $\hat{N}_1^- = -\sigma d/d\eta_\sigma - \sigma/\eta_\sigma$, это условие сводится к

$$F_\sigma\left(\frac{\pi}{2}(1-\sigma)\right) = \frac{\lambda(1+\lambda^2)\tilde{h}^2}{(1-\sigma\rho\tilde{\omega})^2+\lambda^2} \frac{d^2T_{\sigma_0}}{d\eta_\sigma^2}. \quad (2.41)$$

Наконец, подставляя (2.39) в уравнение (2.41) и введя обычно используемое условие $\lambda^2 \ll 1$, получаем

$$F_\sigma\left(\frac{\pi}{2}(1-\sigma)\right) = -\frac{a\tilde{h}^2}{(1-\sigma\rho\tilde{\omega})^2+\lambda^2+a\tilde{h}^2}. \quad (2.42)$$

Окрестности точки $\theta_\sigma' = \pi/2$

Чтобы найти $F_\sigma(\pi/2)$ мы предполагаем, что $\theta_\sigma' = \pi/2 + \xi_\sigma$ ($|\xi_\sigma| \ll 1$) и, как и прежде, $a\tilde{h} \ll 1$. Поскольку в этом случае $\hat{L}_1^- = -2a(\xi_\sigma + \rho\tilde{\omega})/\lambda$, $\hat{N}_0^+ = -\lambda\xi_\sigma d/d\xi_\sigma$ и $\hat{N}_0^- = -d/d\xi_\sigma$, уравнения (2.30) и (2.31) принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_1^+T_{\sigma_1}^+ + \frac{2a}{\lambda}(\xi_\sigma + \rho\tilde{\omega})T_{\sigma_1}^- &= a\tilde{h}\xi_\sigma \frac{dT_{\sigma_0}}{d\xi_\sigma}, \\ \hat{L}_1^+T_{\sigma_1}^- - \frac{2a}{\lambda}(\xi_\sigma + \rho\tilde{\omega})T_{\sigma_1}^+ &= -\frac{a\tilde{h}}{\lambda} \frac{dT_{\sigma_0}}{d\xi_\sigma}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где

$$\hat{L}_1^+ = \frac{d^2}{d\xi_\sigma^2} + 2a\xi_\sigma \frac{d}{d\xi_\sigma} - 1 \quad (2.44)$$

и, как следует из уравнения (2.38), производная $d\Gamma_{\sigma 0}/d\xi_\sigma$ при $\xi_\sigma \rightarrow 0$ равна

$$\frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\xi_\sigma} = -\sigma \frac{e^a}{\lambda} \left[1 + F_\sigma \left(\frac{\pi}{2} (1-\sigma) \right) + 2ae^{-a} F_\sigma \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (2.45)$$

В общем случае, решение уравнения (42) может быть представлено в виде ряда Тейлора: $\Gamma_{\sigma 1}^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\sigma 1}^\pm \xi_\sigma^n$. Однако, так как основным нашим интересом есть $F_\sigma(\pi/2) = (\tilde{h}\hat{N}_1^+ \Gamma_{\sigma 1}^+ - \tilde{h}\hat{N}_1^- \Gamma_{\sigma 1}^-) |_{\xi_\sigma=0} = \lambda \tilde{h} c_{\sigma 0}^+ + \tilde{h} c_{\sigma 1}^-$ (здесь, $\hat{N}_1^+ = \lambda$ и $\hat{N}_1^- = -d/d\xi_\sigma$), то можно ограничиться линейным приближением, т. е. $\Gamma_{\sigma 1}^\pm = c_{\sigma 0}^\pm + c_{\sigma 1}^\pm \xi_\sigma$. Если предположить, что $\tilde{\omega} \gg \lambda/2a$, то после несложных вычислений получаем

$$c_{\sigma 0}^- = \frac{\lambda \tilde{h}}{4a\tilde{\omega}^2} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\xi_\sigma}, \quad c_{\sigma 0}^+ = \rho \frac{\tilde{h}}{2\tilde{\omega}} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\xi_\sigma} \quad (2.46)$$

а также

$$c_{\sigma 1}^- = \rho \frac{\lambda(1+\tilde{\omega}^2)\tilde{h}}{2\tilde{\omega}(\lambda^2+\tilde{\omega}^2)} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\xi_\sigma}, \quad c_{\sigma 1}^+ = -\frac{\tilde{h}}{2(\lambda^2+\tilde{\omega}^2)} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\xi_\sigma}. \quad (2.47)$$

Таким образом, соответствующее $F_\sigma(\pi/2) = \lambda \tilde{h} c_{\sigma 0}^+ + \tilde{h} c_{\sigma 1}^-$ состояние можно свести к следующему:

$$F_\sigma \left(\frac{\pi}{2} \right) = \rho \frac{\lambda(1+\lambda^2+2\tilde{\omega}^2)\tilde{h}^2}{2\tilde{\omega}(\lambda^2+\tilde{\omega}^2)} \frac{d\Gamma_{\sigma 0}}{d\xi_\sigma}, \quad (2.48)$$

что вместе с формулой (2.45) при $\lambda^2 \ll 1$ дает

$$F_{\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sigma\rho \frac{e^a [1 + F_{\sigma}(\pi(1-\sigma)/2)] \tilde{h}^2}{2[g(\tilde{\omega}) + \sigma\rho a \tilde{h}^2]}, \quad (2.49)$$

где $g(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}(\lambda^2 + \tilde{\omega}^2)/(1 + 2\tilde{\omega}^2)$ и $F_{\sigma}(\pi(1-\sigma)/2)$ определено в формуле (2.42).

2.2.2.3 Частотная зависимость времени жизни

Теперь мы в состоянии определить время жизни (2.20) Р режима. Используя формулу (2.28) и тот факт, что $T_{\sigma 0}$ не зависит от θ_{σ}' и ψ_{σ}' , искомое время жизни может быть выражено как

$$T_{\sigma} = T_{\sigma 0} + 2(T_{\sigma 1}^{+} \cos \Psi_{\sigma}[\rho] - T_{\sigma 1}^{-} \sin \Psi_{\sigma}[\rho])|_{\theta_{\sigma}' = \Theta_{\sigma}[\rho]}. \quad (2.50)$$

Если амплитуда поля \tilde{h} достаточно мала, то $\cos \Theta_{\sigma}[\rho]$ в формуле (2.22) можно заменить на σ . Легко проверить, что в этом случае

$$\tan \Psi_{\sigma}[\rho] = -\rho \frac{\lambda \tilde{\omega}}{1 + \lambda^2 - \sigma \rho \tilde{\omega}}, \quad (2.51)$$

и угол прецессии $\Theta_{\sigma}[\rho]$ равен

$$\Theta_{\sigma}[\rho] = \frac{\pi}{2}(1-\sigma) + \sigma \tilde{h} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{(1 - \sigma \rho \tilde{\omega})^2 + \lambda^2}}. \quad (2.52)$$

Последний результат показывает, что функции $T_{\sigma 1}^{\pm}$ в формуле (2.50) должны быть взяты из уравнения (2.40) с $\eta_{\sigma} = \sigma \Theta_{\sigma}[\rho] + \pi(1-\sigma)/2$. Но, в соответствии с формулой (2.35), слагаемое $T_{\sigma 0}$ содержит дополнительный множитель e^a , и поэтому второе слагаемое в формуле (2.50), которая описывает зависимость T_{σ} от $\Psi_{\sigma}[\rho]$, можно смело быть опущено при $a \gg 1$.

Таким образом, с помощью формул (2.35), (2.42) и (2.49), получаем выражение времени жизни Р режима

$$T_{\sigma} = \frac{e^a}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{a}} R_{\sigma}(\tilde{\omega}) S_{\sigma}(\tilde{\omega}), \quad (2.53)$$

где

$$R_{\sigma}(\tilde{\omega}) = 1 - \frac{a\tilde{h}^2}{(1 - \sigma\rho\tilde{\omega})^2 + \lambda^2 + a\tilde{h}^2} \quad (2.54)$$

а также

$$S_{\sigma}(\tilde{\omega}) = 1 - \frac{\sigma\rho a\tilde{h}^2}{g(\tilde{\omega}) + \sigma\rho a\tilde{h}^2}. \quad (2.55)$$

Если $\sigma\rho = +1$, то уравнение (2.53) правильно описывает частотную зависимость времени жизни в окрестности точки $\tilde{\omega} = 1$ и при $\tilde{\omega} \gg 1$. Поскольку $a\tilde{h}^2 \ll 1$, $\lambda^2 \ll 1$ и $g(1) \approx 1/3$, в первом случае мы получаем $T_{\sigma} = (e^a/\lambda)\sqrt{\pi a}R_{+1}(\tilde{\omega})$. Иначе говоря, вращающееся магнитное поле, с направлением вращения совпадающим с направлением естественной прецессии уменьшает время жизни в резонансном образе, то есть происходит резонансное подавление термической стабильности Р режима. Учитывая, что $1 - R_{+1}(\tilde{\omega}) \propto \tilde{\omega}^{-2}$ и $1 - S_{+1}(\tilde{\omega}) \propto \tilde{\omega}^{-1}$, то в последнем случае уравнение (2.53) дает $T_{\sigma} = (e^a/\lambda)\sqrt{\pi a}S_{+1}(\tilde{\omega})$. В противоположность этому, при $\sigma\rho = -1$ уравнение (2.53) описывает только высокочастотное поведение времени жизни: $T_{\sigma} = (e^a/\lambda)\sqrt{\pi a}S_{-1}(\tilde{\omega})$. Объединяя два последних результата, мы получим выражение

$$\Gamma_{\sigma} = \frac{e^a}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(1 - \sigma \rho \frac{2a\tilde{h}^2}{\tilde{\omega}}\right) \quad (2.56)$$

($\tilde{\omega} \gg 1$), которое показывает, что в то время, как при $\sigma \rho = +1$ вращающееся поле подавляет время жизни Р режима, вращающееся поле с $\sigma \rho = -1$ его увеличивает.

2.2.2.4 Время жизни при нулевой частоте

Для оценки времени жизни для $\tilde{\omega} = 0$, удобно использовать одномерное приближение, которое состоит в замене ψ на 0 в магнитной энергии (1.3). В этом случае $u(\theta'_{\sigma}, \psi'_{\sigma}) = -(\lambda/2) \sin 2\theta'_{\sigma} + \lambda\tilde{h} \cos \theta'_{\sigma}$, время жизни Γ_{σ} не зависит от ψ'_{σ} , а уравнение в частных производных (2.10) сводится к обыкновенному:

$$\frac{d^2 \Gamma_{\sigma}}{d\theta'_{\sigma}{}^2} + (\cot \theta'_{\sigma} - a \sin 2\theta'_{\sigma} + 2a\tilde{h} \cos \theta'_{\sigma}) \frac{d\Gamma_{\sigma}}{d\theta'_{\sigma}} = -\frac{2a}{\lambda}. \quad (2.57)$$

Его точное решение, удовлетворяющее условиям (2.11) и (2.16) [заметим, что для этого уравнения условие конечности (2.12) эквивалентно условию отражающей границы (2.16)] может быть записано в виде

$$\Gamma_{\sigma} = \frac{2a}{\lambda} \int_{\cos \theta_0}^{\sigma \cos \theta'_{\sigma}} dx \frac{e^{-af(x)}}{1-x^2} \int_x^1 dy e^{af(y)}, \quad (2.58)$$

где $f(x) = x^2 + 2\tilde{h}\sqrt{1-x^2}$ ($|x| \leq 1$) является симметричной функцией с $\min f(x) = f(0) = 2\tilde{h}$, $\max f(x) = f(\sqrt{1-\tilde{h}^2}) = 1 + \tilde{h}^2$, и $f(1) = 1$.

Как и прежде, нас интересует в поведении Γ_{σ} при $a \gg 1$. В этом случае малая окрестность точки $x = 0$ дает основной вклад в первый интеграл в формуле (2.58). Этот вклад зависит не только от a но и от параметра $a\tilde{h}$. В частности, если

$a\tilde{h} \ll 1$ то, полагая $x = 0$ всюду, за исключением $e^{-af(x)}$, представляя $e^{-af(x)}$ в окрестности точки $x = 0$ как $e^{-2a\tilde{h} - a(1-\tilde{h})x^2} \approx (1 - 2a\tilde{h})e^{-ax^2}$ и расширяя пределы интегрирования до бесконечности, формула (2.58) дает

$$T_\sigma = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\pi a} (1 - 2a\tilde{h}) \int_0^1 dy e^{af(y)}. \quad (2.59)$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$\int_0^1 dy e^{af(y)} \approx e^a \int_0^\infty dz e^{-2az} (1 + 2^{3/2} a\tilde{h} \sqrt{z}) = \frac{e^a}{2a} (1 + \sqrt{\pi a} \tilde{h}) \quad (2.60)$$

($a \gg 1$, $a\tilde{h} \ll 1$) и пренебрегая членами, пропорциональными $\sqrt{\pi a} \tilde{h}$, из уравнений (2.59) и (2.60) можно найти

$$T_\sigma = \frac{e^a}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{a}} (1 - 2a\tilde{h}). \quad (2.61)$$

Сравнивая этот результат с формулой (2.56), заключаем, что $T_\sigma|_{\tilde{\omega}=0} < T_\sigma|_{\tilde{\omega}=\infty}$, и так же точно при $\sigma\rho = +1$, частотная зависимость времени жизни имеет максимальное превышение предельного значения $T_\sigma|_{\tilde{\omega}=\infty} = (e^a/\lambda) \sqrt{\pi/a}$.

Следует отметить, что время жизни $T_\sigma|_{\tilde{\omega}=\infty}$ сильно уменьшается с ростом \tilde{h} . Например, если $\tilde{h} \sim 1/\sqrt{a}$ то вместо уравнения (2.59), получаем

$$T_\sigma = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi a}{1-\tilde{h}}} e^{-2a\tilde{h}} \int_0^1 dy e^{af(y)}. \quad (2.62)$$

Для вычисления интеграла в формуле (2.62), удобно разделить интервал интегрирования $(0, 1)$ на две части, $(0, \sqrt{1-\tilde{h}^2})$ и $(\sqrt{1-\tilde{h}^2}, 1)$, а также применить метод Лапласа [69]. Таким образом, соответствующие интегралы могут быть легко оценены

$$\int_0^{\sqrt{1-\tilde{h}^2}} dy e^{af(y)} \approx \frac{\tilde{h}}{\sqrt{a}} e^{a(1+\tilde{h}^2)} \int_0^{\sqrt{a/\tilde{h}}} dz e^{-z^2} = \frac{\tilde{h}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{a(1+\tilde{h}^2)} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{a}}{\tilde{h}}\right) \quad (2.63)$$

а также

$$\int_{\sqrt{1-\tilde{h}^2}}^1 dy e^{af(y)} \approx \frac{\tilde{h}}{\sqrt{a}} e^{a(1+\tilde{h}^2)} \int_0^{\sqrt{a\tilde{h}/2}} dz e^{-z^2} = \frac{\tilde{h}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{a(1+\tilde{h}^2)} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{a\tilde{h}}}{2}\right), \quad (2.64)$$

где $\operatorname{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dx e^{-x^2}$ является функцией ошибок. Наконец, с помощью формул (2.62) – (2.64) и приближенной формуле $\operatorname{erf}(\sqrt{a/\tilde{h}}) \approx 1$ ($\sqrt{a/\tilde{h}} \sim a \gg 1$), Находим следующее выражение для времени жизни для $\tilde{\omega} = 0$:

$$T_\sigma = \frac{\pi\tilde{h}}{\lambda\sqrt{1-\tilde{h}}} e^{a(1-\tilde{h})^2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{a\tilde{h}}}{2}\right)\right], \quad (2.65)$$

которое справедливо, если $a \gg 1$ и \tilde{h} имеет порядок $1/\sqrt{a}$. Не трудно заметить, что при этих условиях строгое неравенство $T_\sigma|_{\tilde{\omega}=0} \ll T_\sigma|_{\tilde{\omega}=\infty}$ выполняется. Принимая также во внимание формулу (2.56), можно заключить, что T_σ в зависимости от $\tilde{\omega}$ при $\sigma\rho = -1$ имеет локальный максимум.

2.2.3 Численный анализ времени жизни

2.2.3.1 Прецессионные моды магнитного момента

Аналитические результаты показывают, что численный анализ времени жизни прецессионных режимов следует начинать с изучения этих режимов без тепловых флуктуаций. Точнее, нужно (i) определить условия, когда для данного вращающегося поля реализуется некий режим прецессии в верхнем и в нижнем положении магнитного момента, и (ii) изучить стационарные свойства этих режимов.

Для решения этой задачи, мы используем уравнение Ландау-Лифшица записанное в виде (2.8) с $a = \infty$. В общем, конечное состояние магнитного момента (то есть, состояние при $\tilde{t} \rightarrow \infty$) зависит не только от параметров \tilde{h} , $\tilde{\omega}$ и ρ , которые характеризуют вращающееся поле, но и от того, как это поле включается. В частности, резкое включение вращающегося поля вызывает динамические эффекты, которые могут привести к изменению начального состояния σ [43]. Хотя эти эффекты могут быть важны для практического применения, они находятся вне сферы этой работы. Поэтому, чтобы свести к минимуму роль динамических эффектов, мы считаем, что включение вращающегося поля происходит достаточно медленно.

Для того чтобы определить характер прецессионных режимов для данного вращающегося поля, используется следующая численная схема. Во-первых, амплитуда поля дискретизирована как $\tilde{h} = n\Delta\tilde{h}$, где $n = 1, 2, \dots$ и $\Delta\tilde{h}$ амплитуда вращения. Тогда, полагая что $n = 1$ и используя начальные условия $\theta(0) = \pi(1 - \sigma)/2 + \sigma 10^{-4}$ и $\psi(0) = 0$, применяем метод Рунге-Кутты четвертого порядка методом с шагом по времени $\Delta\tilde{t} = 10^{-3}$ для решения уравнения (2.8) при $a = \infty$ на интервале времени $[0, \tilde{t}_m]$ ($\tilde{t}_m \gg \tilde{t}_{rel} = 2/\lambda$). Предполагается, что при $\tilde{t} = \tilde{t}_m$ амплитуда поля скачкообразно меняется с $\Delta\tilde{h}$ до $2\Delta\tilde{h}$, т.е. становится равной двум, и уравнение (2.8) решается снова на интервале $[0, \tilde{t}_m]$. Но теперь начальными условиями есть решение, полученные для $\tilde{t} = \tilde{t}_m$ на предыдущем этапе: $\theta(0)|_{n=2} = \theta(\tilde{t}_m)|_{n=1}$ и $\psi(0)|_{n=2} = \psi(\tilde{t}_m)|_{n=1}$. Продолжая эту процедуру, уравнение (2.8) может быть решено для произвольного n . Стоит отметить, что поскольку $\tilde{t}_m \gg \tilde{t}_{rel}$ решения этого уравнения при $\tilde{t} \sim \tilde{t}_m$, как ожидается, будут весьма близки к стационарным решениям $\Theta_\sigma(\tilde{t})$ и $\Psi_\sigma(\tilde{t})$.

Используя вышеописанную процедуру с $\Delta\tilde{h} = 10^{-2}$, $\tilde{t}_m = 10^3$ и $\lambda = 0.15$ [Это значение λ принадлежит интервалу типичных значений параметра затухания (0.01, 0.22) в случае частиц кобальта [70], и используется во всех наших численных рас-

четах], мы определили характер прецессионных режимов для широкого диапазона параметров, характеризующих вращающееся поле. Установлено, что если $\sigma\rho = -1$ то только P режим реализуется для всех \tilde{h} и $\tilde{\omega}$. В отличие от этого, прецессионные режимы при $\sigma\rho = +1$ показывают гораздо более сложное поведение. Результаты, связанные с типом этих режимов приведены в диаграмме, показанной на рис. 2.6. Отметим, что разница между двумя P режимами, которые существуют в областях P_{+1} и P_{+1}^\dagger , в том, что угол прецессии Θ_σ в зависимости от \tilde{h} разрывен на границе между ними. Следует также подчеркнуть, что переходы между режимами с $\sigma\rho = +1$, которые происходят при изменении амплитуды поля \tilde{h} , обратимы. Для ясности изложения, этот факт можно проиллюстрировать с помощью горизонтальной двунаправленной стрелки. В отличие от этого, переходы в P режим с $\sigma\rho = -1$ необратимы (они изображаются горизонтальной однонаправленной стрелкой).

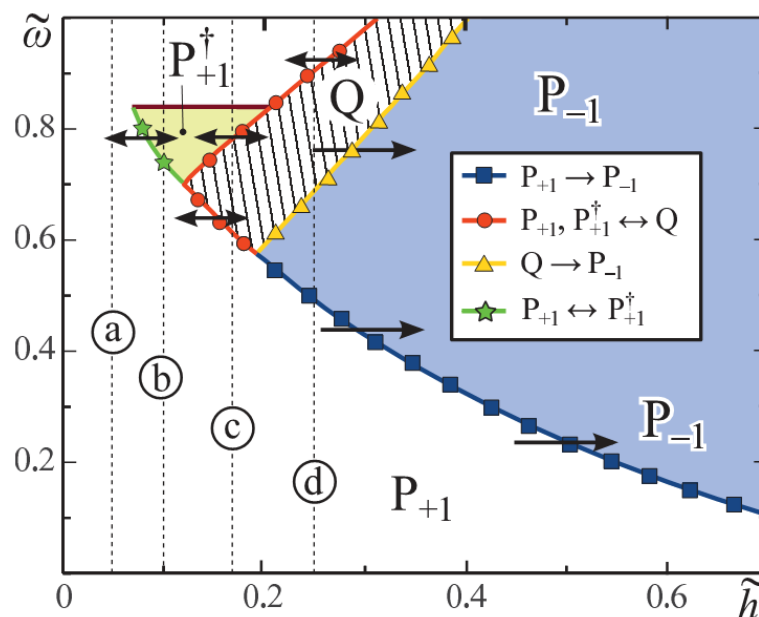


Рисунок 2.6 – Схема прецессионных режимов $\sigma\rho = +1$. Области на плоскости \tilde{h} - $\tilde{\omega}$, в которой существуют различные P режимы при $\sigma\rho = +1$ обозначаются как P_{+1} и P_{+1}^\dagger . Q режим реализуется в белой заштрихованной области. В области, обозначенной как P_{-1} стабильная прецессия режимов при $\sigma\rho = +1$ не существует. Здесь только реализуется режим P с $\sigma\rho = -1$. Вертикальной пунктирной линии (a), (b), (c) и (d) соответствуют $\tilde{h} = 0.05, 0.1, 0.18$ и 0.25 , соответственно.

Кроме того, используя формулу (2.22) и критерий устойчивости Р режима [41], независимо была подтверждена правильность этой диаграммы путем расчета линий, разделяющих области $\sigma\rho = +1$.

Так как вращающееся поле включено в течение промежутка времени длительностью $\tilde{t}_0 = (n-1)10^3$, вышеуказанная процедура занимает много времени. Однако, принимая во внимание важность диаграммы прецессионных режимов для проблемы времени жизни, использование такого метода для точного построения этой диаграммы вполне приемлемо. В то же время, применение этого метода к исследованию стационарных свойств данного режима, характер которого уже известен из диаграммы, явно избыточно. Поэтому, чтобы уменьшить время вычислений, далее мы используем измененную численную процедуру с $\tilde{t}_m = \Delta\tilde{t}$ и $\Delta\tilde{h} = \tilde{h}\Delta\tilde{t}/50$, что приводит к $\tilde{t}_0 = \Delta\tilde{t}\tilde{h}/\Delta\tilde{h} = 50$.

На рисунке 2.7 показана частотная зависимость угла прецессии Θ_{+1} для различных прецессионных режимов. Черная пунктирная и сплошная голубая линии соответствуют Р режимы с $\sigma\rho = -1$ и $\sigma\rho = +1$, соответственно. В соответствии с рис. (2.6), Q режим происходит при $\tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega} < \tilde{\omega}_3$ (напомним, что этот режим может существовать только тогда, когда $\sigma\rho = +1$). Для этого режима временная зависимость угла прецессии $\Theta_{+1}(\tilde{t})$ и временная зависимость разности фаз $\Psi_{+1}(\tilde{t}) = -\tilde{v} + \Phi_{+1}(\tilde{t})$ показаны на рис. (2.8) и (2.9).

Отметим, что для данного набора параметров $\max \Theta_{+1}(\tilde{t}) > \pi/2$, т.е. угол прецессии $\Theta_{\sigma}(\tilde{t})$ в случае Q режима может пересечь барьер анизотропии. Более того, поскольку $\sin \Theta_{\sigma}(\tilde{t})$ и $\sin \Psi_{\sigma}(\tilde{t})$ имеют одинаковый период \tilde{T}_Q , то параметр ν и период \tilde{T}_Q (его частотная зависимость иллюстрируется рис. (2.10)) связаны условием $\nu = 2k\pi\tilde{T}_Q$, где k является неотрицательным целым числом, которое зависит от \tilde{h} и $\tilde{\omega}$. В частности, если $\tilde{h} = 0.25$, то $k = 1$ при $\tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega} < \tilde{\omega}_2'$, где является решением уравнения $\min \Theta_{+1}(\tilde{t})|_{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_2'} = 0$ (см. рис. 2.7), и $k = 0$ при $\tilde{\omega}_2' < \tilde{\omega} < \tilde{\omega}_3$. Сле-

дует, также, подчеркнуть, что в последнем случае функция $\Phi_{+1}(\tilde{t})$ показывает косинусо-подобное поведение, в отличие от того, что изображено на рис. (2.9).

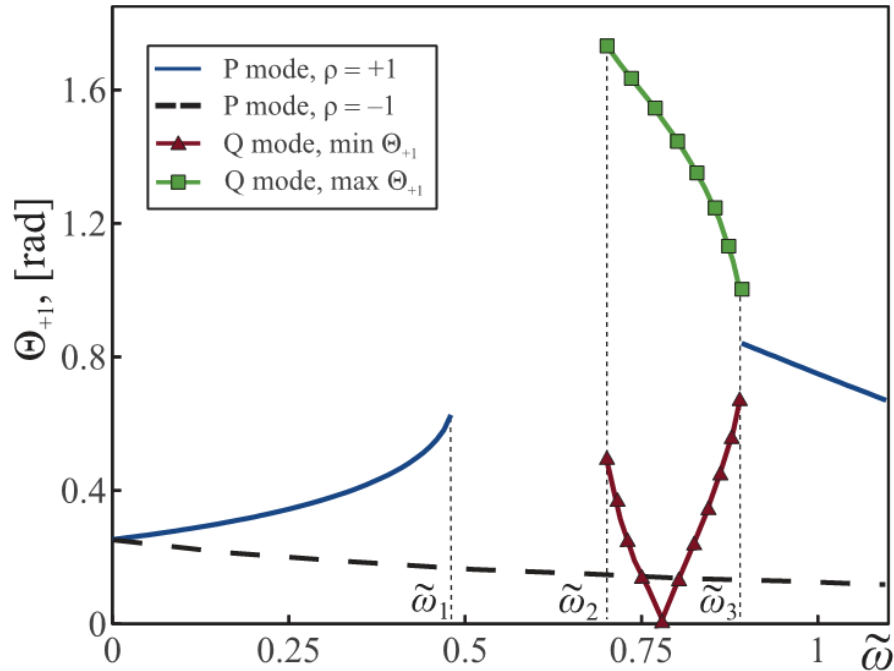


Рисунок 2.7 – Частотная зависимость угла прецессии Θ_{+1} для различных режимов, которые существуют при $\tilde{h} = 0.25$. Частоты $\tilde{\omega}_1 = 0.49$, $\tilde{\omega}_2 = 0.70$ и $\tilde{\omega}_3 = 0.89$ являются координатами точки, в которых вертикальная пунктирная линия (d), см. рис. (2.6), пересекает границы областей ($\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, и $\tilde{\omega}_3$, зависят от \tilde{h}). Зеленая линия (с квадратами) и коричневая линия (с треугольниками) показывают частотную зависимость $\max \Theta_{+1}(\tilde{t})$ и $\min \Theta_{+1}(\tilde{t})$, соответственно, в случае Q режима.

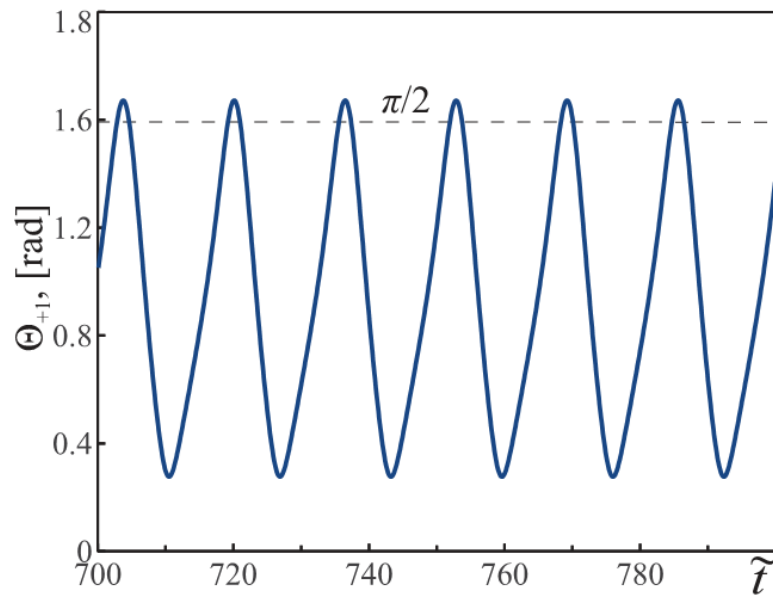


Рисунок 2.8 – Временная зависимость угла прецессии $\Theta_{+1}(\tilde{t})$ в случае Q режима.

Параметры вращающегося поля следующие: $\rho = +1$, $\tilde{\omega} = 0.725$, и $\tilde{h} = 0.25$.

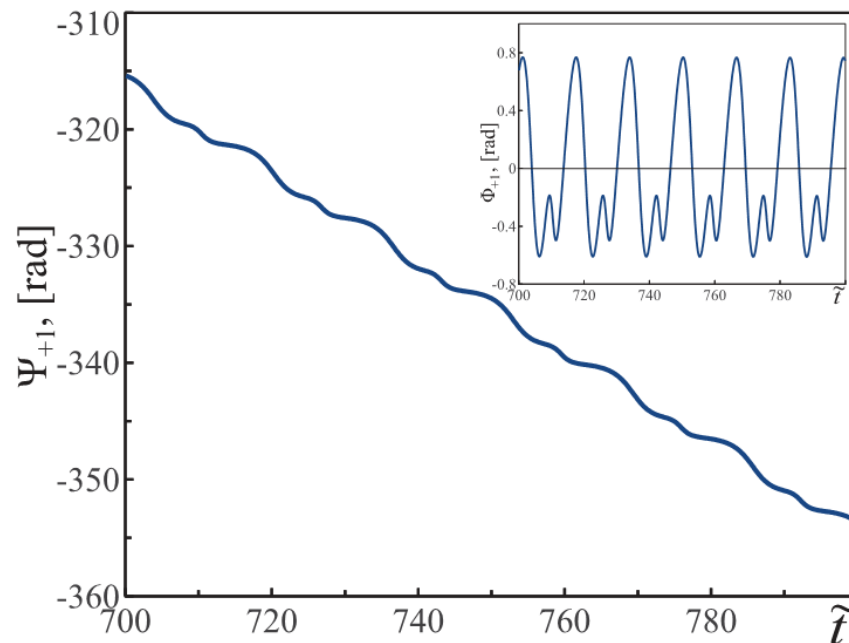


Рисунок 2.9 – Временная зависимость разности фаз $\Psi_{+1}(\tilde{t}) = -\nu\tilde{t} + \Phi_{+1}(\tilde{t})$ в случае Q режима. Вставка: зависимость от времени функции $\Phi_{+1}(\tilde{t})$. Параметры вращающегося поля такие же, как на рис. (2.8) и $\nu = 0.38$.

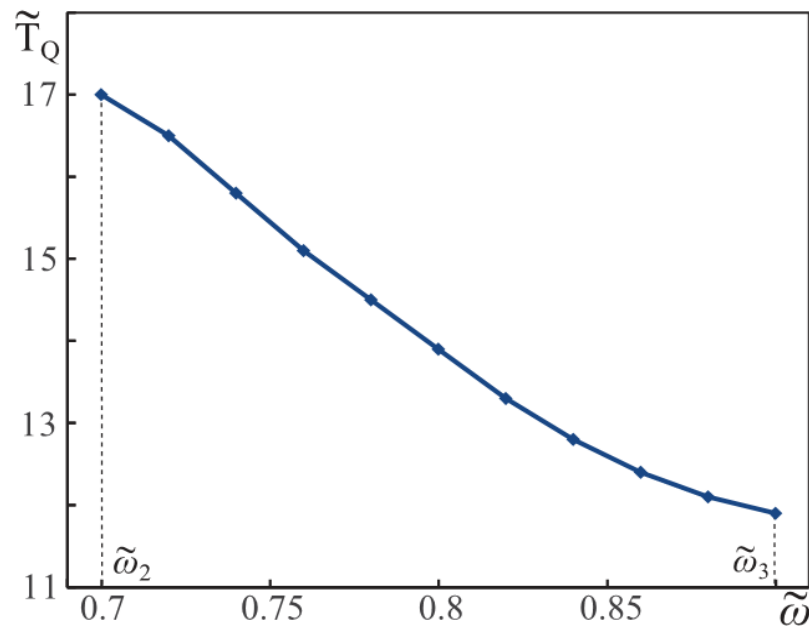


Рисунок 2.10 – Частотная зависимость периода \tilde{T}_Q угла прецессии $\Theta_{+1}(\tilde{t})$ в случае Q режима. Параметры вращающегося поля приняты $\rho = +1$ и $\tilde{h} = 0.25$.

2.2.3.2 Моделирование времен жизни и их свойств

Как уже было сказано ранее, тепловые флуктуации могут вызвать переходы между различными режимами прецессии, которые индуцированы данным вращающимся полем. По данным диаграммы на рис. 2.6, эти режимы, одни в верхнем положении магнитного момента, а другие в нижнем, существуют только если амплитуда и частота вращающегося поля принадлежат области P_{+1} , P_{+1}^\dagger или Q. В этом случае время жизни данного режима может быть вычислено путем численного решения стохастических уравнений (2.8). Наши тестовые расчеты показали, что решение этих уравнений методом Эйлера дает практически то же время жизни, как и полученное методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Но в первом случае время счета почти в четыре раза меньше. Поэтому, так как процедура определения частотной зависимости времени жизни занимает очень много времени, мы использовали метод Эйлера. Шаг по времени $\Delta\tilde{t}$ выбран 10^{-3} а начальные условия имеют вид $\theta_\sigma(0) = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma 10^{-2}$ и $\psi_\sigma(0) = 0$. Чтобы предотвратить появление

сингулярностей в уравнении (2.8) при $\theta_\sigma = \pi(1-\sigma)/2$, будем считать, что точка $\theta_\sigma = \pi(1-\sigma)/2 + \sigma 10^{-3}$ действует на процесс $\theta_\sigma(\tilde{t})$ как отражающий экран. Поскольку для нас интерес представляет время жизни прецессионных режимов до достижения стационарного состояния, тепловые флуктуации включаются в $\tilde{t} = \tilde{t}_{st}$ с $\tilde{t}_{st} = \tilde{t}_0 + \tilde{t}_{rel}$ (см. рис. (2.11)). В случае с P режимами мы выбрали $\tilde{t}_{st} = 10^2$, а для Q режима $\tilde{t}_{st} \in [10^2, 10^2 + \tilde{T}_Q]$. В последнем случае тепловые флуктуации могут быть включены в определенный момент времени, например, когда угол прецессии $\Theta_\sigma(\tilde{t})$ достигает максимума или минимума. Наконец, во всех наших численных моделированиях параметр a выбирается равным десяти.

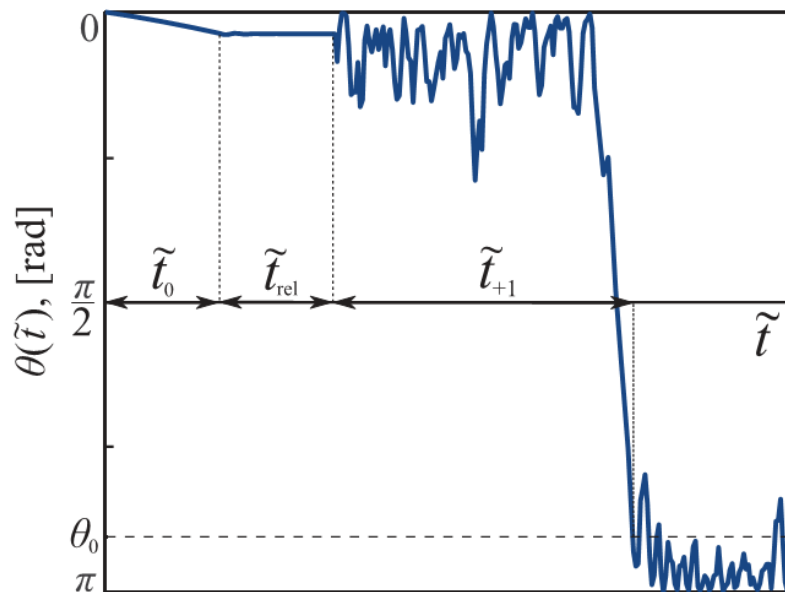


Рисунок 2.11 – Схематическая временная зависимость полярного угла $\theta(\tilde{t})$ в областях P_{+1} и P_{+1}^\dagger показанных на рис. 2.6. Изменение состояния магнитного момента σ от $+1$ к -1 происходит за время $\tilde{t} = \tilde{t}_0 + \tilde{t}_{rel} + \tilde{t}_{+1}$, когда $\theta(\tilde{t})$ впервые достигает угла $\theta_0 = 0.8\pi$ (горизонтальная пунктирная линия). Для заданной траектории $\theta(\tilde{t})$, время жизни P режима в состоянии $\sigma = +1$ равно \tilde{t}_{+1} . Для числа запусков $N \gg 1$, среднее время жизни можно оценить как $T_{+1} = (1/N) \sum_{i=1}^N \tilde{t}_{+1}^{(i)}$.

На рис. 2.12 показаны частотные зависимости времени жизни T_{+1} для вращающегося поля с амплитудами, показанными на рис. 2.6. Каждая точка из этих кривых определяется путем запуска $N = 10^4$ траекторий полярного угла $\theta(\tilde{t})$ (см. подпись к рис. 2.11). Если $\tilde{h} < 0.19$ то зависимость T_{+1} от $\tilde{\omega}$ непрерывна и демонстрирует резонансный минимум при $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{\text{res}}$. График зависимости резонансной частоты $\tilde{\omega}_{\text{res}}$ от амплитуды поля \tilde{h} показан на рис. 2.12. Однако, если $\tilde{h} > 0.19$, то T_{+1} разрывно: при $\tilde{\omega} \in (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ функция T_{+1} не существует. Этот результат является следствием того, что в области P_{-1} (см. рис. 2.6) нет устойчивых прецессионных режимов с $\sigma\rho = +1$.

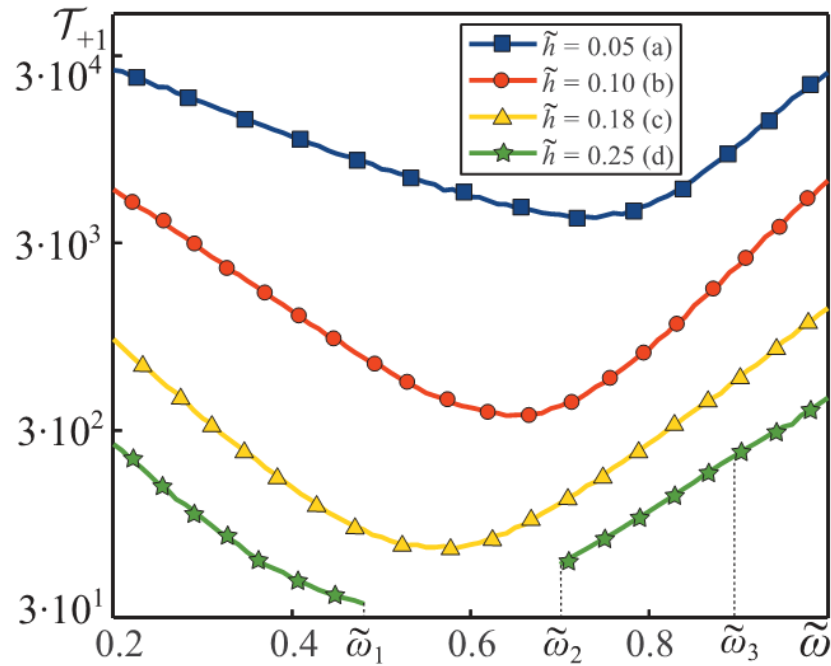


Рисунок 2.12 – Частотная зависимость времени жизни прецессионных режимов индуцированных вращающимся полем с $\rho = +1$ в верхнем состоянии ($\sigma = +1$) магнитного момента.

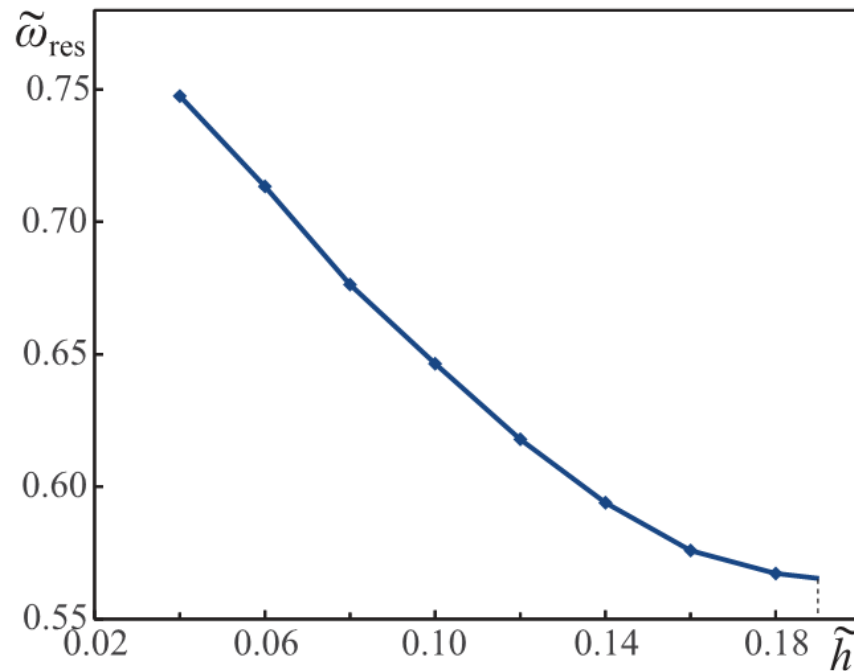


Рисунок 2.13 – Зависимость резонансной частоты времени жизни T_{+1} от амплитуды вращающегося поля.

Еще одной важной особенностью времени жизни является то, что она практически не чувствительна к изменению характера прецессионных режимов. В частности, для $\tilde{h} = 0.1$ частотная зависимость T_{+1} (см. красную линию с круглыми маркерами на рис. 2.12) непрерывна в точке $\tilde{\omega} = 0.74$ (т.е. в точке, разделяющей области P_{+1} и P_{+1}^{\dagger} при $\tilde{h} = 0.1$), а при этом угол прецессии Θ_{+1} прерывный. Это нечувствительность времени жизни к изменению прецессионных режимов с изменением частоты поля $\tilde{\omega}$ особенно удивительна, когда появляется Q режим. Например, даже при $\tilde{h} = 0.25$, когда угол прецессии может пересечь барьер анизотропии (см. рис. 2.8), характер частотной зависимости T_{+1} (см. зеленая линия со маркерами-звездами на рис. 2.12) при $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_3$ меняется настолько слабо, что этого не видно в таких масштабах. Более того, время жизни Q режима почти не зависит от $\tilde{t}_{\text{st}} \in [10^2, 10^2 + \tilde{T}_Q]$. Этот результат очень неожиданный, потому что разные \tilde{t}_{st} могут соответствовать очень разным значениям угла прецессии $\Theta_{+1}(\tilde{t}_{\text{st}})$. Поэтому, для того, чтобы получить более глубокое представление о проблеме, мы вычисли-

ли плотность вероятности $D(\tilde{t}_{+1})$ времени жизни Q режима для двух специальных значений \tilde{t}_{st} , которые соответствуют $\min \Theta_{+1}(\tilde{t})$ и $\max \Theta_{+1}(\tilde{t})$, соответственно. Как видно из рис. 2.14, функции плотности несколько отличаются друг от друга только если $\tilde{t}_{+1} \leq \tilde{t}_{rel}$. В этой области плотность вероятности $D(\tilde{t}_{+1})$ зависит от \tilde{t}_{st} и показывает локальные минимумы и максимумы, которые приходят от сложного поведения Q режима. В противоположность этому, при $\tilde{t}_{+1} \gg \tilde{t}_{rel}$ память о выбранном значении \tilde{t}_{st} и периодичность $\Theta_{+1}(\tilde{t})$ и $\Phi_{+1}(\tilde{t})$ теряются. Как следствие, в этой области разница между плотностью функции обращается в нуль и локальные минимумы и максимумы исчезают. Такое поведение $D(\tilde{t}_{+1})$ от \tilde{t}_{st} подтверждает, что время жизни $T_{+1} = \int_0^{\infty} d\tilde{t}_{+1} \tilde{t}_{+1} D(\tilde{t}_{+1})$ практически не зависит от \tilde{t}_{st} .

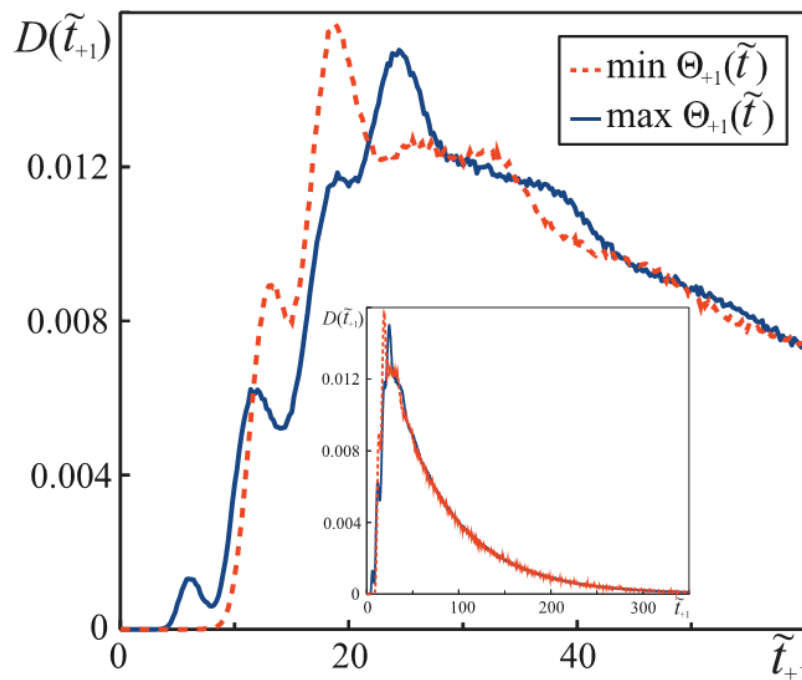


Рисунок 2.14 – Функция плотности вероятности времени жизни Q режима для двух значений \tilde{t}_{st} . Синяя сплошная и красная пунктирная линии соответствуют таким \tilde{t}_{st} что $\Theta_{+1}(\tilde{t}_{st}) = \max \Theta_{+1}(\tilde{t})$ и $\Theta_{+1}(\tilde{t}_{st}) = \min \Theta_{+1}(\tilde{t})$, соответственно. Вставка: те же функции плотности в более крупном временном масштабе. Параметры вращающегося поля следующие: $\rho = +1$, $\tilde{\omega} = 0.75$, и $\tilde{h} = 0.25$.

Наконец, влияние направления вращения поля на частотную зависимость времени жизни прецессионных режимов показано на рис. 2.15. В соответствии с нашими аналитическими результатами, вращающегося поля с $\rho = +1$ и $\rho = -1$ влияет на время жизни T_{+1} по-разному. В частности, зависимость T_{+1} от $\tilde{\omega}$ при $\rho = +1$ показывает глубокий минимум, в то же самое время при $\rho = -1$ она показывает выраженный максимум.

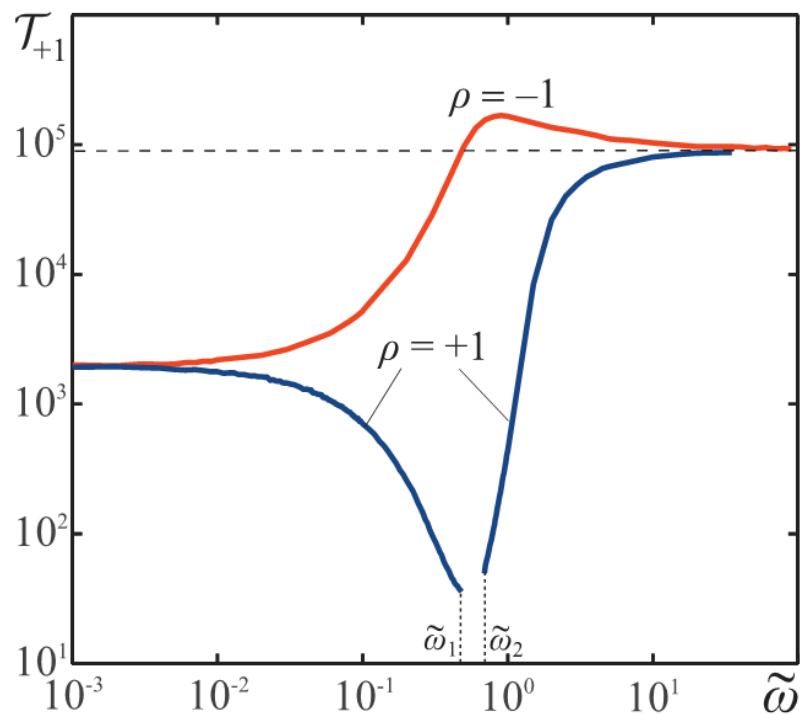


Рисунок 2.15 – Частотная зависимость времени жизни прецессионных режимов в верхнем состоянии ($\sigma = +1$) магнитного момента. Предполагается, что амплитуда вращающегося магнитного поля $\tilde{h} = 0.25$ как по часовой стрелке ($\rho = +1$), так и против часовой стрелки ($\rho = -1$).

Это различие в поведении времени жизни следует из того, что вращающиеся поля с различными ρ действуют на магнитный момент в данном состоянии σ совершенно по-разному. С физической точки зрения, причина заключается в том, что магнитный момент имеет определенное направление природной прецессии. Отметим также, что численные данные $T_{+1} |_{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} = 9.1 \times 10^4$ и $T_{+1} |_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} = 1.97 \times 10^3$ хо-

рошо коррелируют с аналитическими результатами $8.2 \cdot 10^4$ и $2.38 \cdot 10^3$ полученными из асимптотических формул (2.56) и (2.65), соответственно. Некоторое различие между ними может быть обусловлено тем, что асимптотические формулы, которые были получены при $a \rightarrow \infty$, применяются к $a = 10$.

2.3 Выводы к разделу 2

Используя стохастическое уравнение Ландау-Лифшица в данной работе численно изучалось влияние теплового шума на процесс перемагничивания ФНЧ внешним циркулярно-поляризованным полем, частота которого близка к резонансной. В частности, были найдены зависимости времени переключения от температуры, из которых следует, что флуктуации в зависимости от их интенсивности могут как ускорять, так и замедлять процесс переключения магнитного момента между двумя устойчивыми состояниями. Также установлены и проанализированы зависимости времени переключения амплитуды вращающегося поля. Показано, что для малых амплитуд поля время переключения сильно зависит от температуры, в то время как для больших амплитуд такая зависимость очень слабая.

Получены распределения времен переключения \mathbf{m} , которые в зависимости от амплитуды внешнего поля могут иметь различный характер. Показано, что в случае, когда переключение происходит за счет внешнего поля, реальные времена переключения могут принимать значения, отличающиеся в несколько раз с практически одинаковой вероятностью за счет тепловых флуктуаций. Данная информация имеет принципиальное значение для разработки новых методов магнитной записи с использованием циркулярно-поляризованного поля.

Далее мы подробно изучили термическую стабильность прецессионных режимов магнитного момента наночастицы, индуцированного вращающимся магнитным полем, плоскость вращения которого перпендикулярна легкой оси наночастицы. Если направление вращения поля и направление естественной прецессии магнитного момента противоположны, то есть если условие $\sigma\rho = -1$ выполняется,

то этим полем индуцируется только периодический (P) стабильный режим. Напротив, если вышеупомянутые направления совпадают, т.е. если $\sigma\rho = +1$, то магнитный момент демонстрирует гораздо более сложное поведение. Численное решение детерминистического уравнения Ландау-Лифшица в долговременном пределе показало, что, в зависимости от амплитуды вращающегося поля и частоты, в этом случае магнитный момент может находиться в одном из двух P режимов, в квази-периодическом (Q) режиме, или, даже, быть неустойчивым. Эти результаты получены при отсутствии тепловых флуктуаций были собраны в диаграмме, показанной на рис. (2.6).

Если амплитуды и частоты вращающегося поля выбраны так, что стабильный режим прецессионного существует в обоих верхнем ($\sigma = +1$) и нижнем ($\sigma = -1$) состоянии магнитного момента, то тепловые флуктуации могут вызвать переходы между этими режимами. Одним из наиболее важных параметров, характеризующим эти переходы, есть время жизни данного режима. Так как оно может быть ассоциировано с временем первого пересечения для магнитного момента, мы использовали уравнения формализма Фоккера-Планка чтобы определить эту величину и оценить ее свойства. В частности, мы определили, граничные условия и трансформационные свойства времени жизни и разработали аналитический метод для нахождения его частотной зависимости в случае высокого барьера анизотропии и малых амплитуд вращающегося поля. Используя этот метод, было показано, что вращающееся поле (a) немного уменьшает (если $\sigma\rho = +1$) или увеличивает (если $\sigma\rho = -1$) время жизни в P режиме при больших частотах и (b) сильно уменьшает его (если $\sigma\rho = +1$) в непосредственной близости от ларморовской частотой. Мы также установили, что при нулевой частоте жизни всегда меньше, чем в пределе больших частот.

Эти аналитические выводы для жизни в P режиме были подтверждены численным моделированием стохастического уравнения Ландау-Лифшица. Кроме того, численное моделирование этого уравнения для не слишком малых амплитуд вращающегося поля позволила решить проблему времени жизни в Q режиме. Так

как в этом случае угол прецессии периодическая функция времени, которая может пересечь барьер анизотропии, решение этой проблемы представляет особый интерес. Оказалось, что, хотя прецессионный угол зависит от времени, время жизни Q режима практически не зависит от этого времени, т.е. от угла прецессии. Мы также подтвердили результат расчетом времени жизни из распределения времен первого перенесения, для разных значений угла прецессии.

3 ТЕОРИЯ СВЕРХМЕДЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ: ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

3.1 Актуальность задачи

Случайные процессы в физических, биологических, социальных, экономических и других системах часто демонстрируют аномальное поведение диффузии в том смысле, что при больших временах дисперсия $\sigma^2(t)$ возрастает нелинейно со временем [71-73]. Обычно дисперсия подчиняется степенному закону, т.е. $\sigma^2(t) \propto t^\alpha$, и различают два типа аномальной диффузии: субдиффузия (когда $0 < \alpha < 1$) и супердиффузия (когда $\alpha > 0$). Класс систем с таким поведением дисперсии является достаточно широким и непрерывно увеличивающимся. Субдиффузия наблюдалась, например, в аморфных твердых телах [14], перколяционных кластерах [15] и живых клетках [16-17], а супердиффузия в турбулентных потоках [18-19], оптических решетках [20] и животных, находящихся в поиске пищи [21-22].

В общем случае зависимость дисперсии от времени не ограничивается степенной функцией. К примеру, при определенных условиях степенной закон может быть модифицирован логарифмической функцией времени (см. [74-76]). Но поскольку логарифмическая функция меняется намного медленнее, чем степенная, эта модификация не столько важна. Напротив, в случае свехмедленной диффузии, которая определена условием $\sigma^2(t) / t^\alpha \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$ для всех $\alpha > 0$, дисперсия не подчиняется степенному закону при больших временах. Диффузия Синая, для которой $\sigma^2(t) \propto \ln^4 t$ [77], представляет наиболее известный пример диффузии этого типа. Некоторые другие примеры свехмедленной диффузии были обнаружены в резистивных цепях [78], непрерывных во времени случайных блужданиях (НВСБ) [79], заряженных полимерах [80], аperiodических средах [81], итерационных отображениях [82], динамике Ланжевена [83], фракционной кинетике [84], и т. д. Общая особенность всех этих примеров состоит в том, что долговременная зависимость дисперсии, т. е. закон свехмедленной диффузии, представлен степенной функцией логарифма времени $\sigma^2(t) \propto \ln^v t$ ($v < 0$).

Поэтому возникает вопрос о существовании законов сверхмедленной диффузии, которые отличаются от $\sigma^2(t) \propto \ln^{\nu} t$. Поскольку определяющее условие $\sigma^2(t)/t^{\alpha} \rightarrow 0$ выполняется не только для этого частного закона, можно ожидать, что существуют и другие законы сверхмедленной диффузии. Здесь мы используем несвязанную модель НВСБ для того чтобы показать, что если распределение времени ожидания медленно меняется на бесконечности, тогда соответствующие законы сверхмедленной диффузии формируют широкий класс медленной меняющихся функций, которые растут без ограничений со временем.

3.2 Описание модели

В рамках формализма НВСБ (см., например, [71-73]), положение $X(t)$ ($X(0) = 0$) диффундирующей частицы описывается непрерывным во времени скачкообразным процессом

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} x_n, \quad (3.1)$$

где $N(t) \in (0, 1, 2, \dots)$ – случайное число скачков к моменту времени t (если $N(t) = 0$, то $X(t) = 0$), и $x_n \in (-\infty; +\infty)$ – случайная амплитуда n -го скачка. Число скачков $N(t)$ характеризуется временами ожидания $\tau_n \in [0; +\infty)$, т. е. случайными временами между скачками частицы. Эти времена и амплитуды скачков x_n считаются независимыми и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(\tau)$ и $w(x)$, соответственно. В несвязанной модели НВСБ также считается, что два набора переменных τ_n и x_n независимы друг от друга, и значит совместная плотность вероятности этих переменных дается произведением $p(\tau)w(x)$.

В пространстве Фурье-Лапласа плотность вероятности $P(x, t)$ процесса $X(t)$ удовлетворяет, в несвязанном случае, уравнению Монролла-Вейса [85]

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}, \quad (3.2)$$

где преобразования Фурье и Лапласа представлены как $u_k = F\{u(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} u(x)$ и $v_s = L\{v(t)\} = \int_0^{\infty} dt e^{-st} v(t)$ ($\text{Re } s > 0$) соответственно. Используя уравнение (3.2), преобразование Лапласа m -го момента ($m=1, 2, \dots$) $X(t)$ может быть записано в форме

$$\langle X^m(t) \rangle_s = (-i)^m \frac{1 - p_s}{s} \frac{d^m}{dk^m} \frac{1}{1 - p_s w_k} \Big|_{k=0}, \quad (3.3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по реализациям случайного процесса $X(t)$. Применяя к уравнению (3.3) обратное преобразование Лапласа $v(t) = L^{-1}\{v_s\} = (1/2\pi i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} v_s$, (считается, что действительный параметр c превышает действительные части всех сингулярностей v_s), можно получить $\langle X^m(t) \rangle = L^{-1}\{\langle X^m(t) \rangle_s\}$.

В этой работе мы рассматриваем долговременное поведение дисперсии положения частицы, определенной как

$$\sigma^2(t) = \langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2, \quad (3.4)$$

при дополнительном условии, что все дробные моменты распределения времени ожидания бесконечны, т. е. $T_\rho = \int_0^{\infty} d\tau \tau^\rho p(\tau) = \infty$ при $\rho > 0$. По аналогии с [86] мы называем плотности $p(\tau)$, удовлетворяющие этому условию, плотностями со сверхтяжелыми хвостами. Следует заметить, что особый класс этих плотностей с $p(\tau) \sim a / (\tau \ln^{1+\nu} \tau)$ ($a > 0$, $\tau \rightarrow \infty$) уже был рассмотрен Хавлиным и Вейссом [79]. Однако здесь мы рассматриваем намного более широкий класс плотностей вероятности со сверхтяжелыми хвостами, которые характеризуются асимптотическим поведением

$$p(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{\tau} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (3.5)$$

где положительная функция $h(\tau)$ медленно изменяется на бесконечности в том смысле, что условие $h(\mu\tau) \sim h(\tau)$ выполняется для всех $\mu > 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Так как распределения времени ожидания считаются нормированными, $T_0 = \int_0^\infty d\tau p(\tau) = 1$, допустимые функции $h(\tau)$ образуют подкласс медленно изменяющихся функций, которые при $\tau \rightarrow \infty$ достаточно быстро стремятся к нулю.

3.3 Законы сверхмедленной диффузии

Для обеспечения конечности дисперсии $\sigma^2(t)$ мы примем, что существуют первые два момента $w(x)$, $l_1 = \int_{-\infty}^\infty dx x w(x)$ и $l_2 = \int_{-\infty}^\infty dx x^2 w(x)$. В этом случае, используя определение преобразования Фурье для $w(x)$, можно получить

$$w_k = 1 + il_1 k - \frac{1}{2} l_2 k^2 + o(k^2) \quad (k \rightarrow 0), \quad (3.6)$$

и, таким образом, уравнение (3.3) для $m = 1$ и $m = 2$ дают

$$\langle X(t) \rangle_s = \frac{l_1 p_s}{s(1-p_s)}, \quad \langle X^2(t) \rangle_s = \frac{2l_1^2 p_s^2}{s(1-p_s)^2} + \frac{l_2 p_s}{s(1-p_s)}. \quad (3.7)$$

Наш следующий шаг – поиск асимптотических выражений для $\langle X(t) \rangle_s$ и $\langle X^2(t) \rangle_s$ при положительном параметре s , стремящемся к нулю. Причина в том, что если эти выражения удовлетворяют определенным условиям, то поведение $\langle X(t) \rangle$ и $\langle X^2(t) \rangle$ при больших временах может быть найдено непосредственно из теоремы Таубера для преобразования Лапласа.

Представим преобразование Лапласа $p(\tau)$ как

$$p_s = 1 - \int_0^\infty d\tau (1 - e^{-s\tau}) p(\tau). \quad (3.8)$$

Тогда, вводя вероятность

$$V(t) = \int_t^{\infty} d\tau p(\tau) \quad (3.9)$$

того, что время ожидания превышает t , и используя новую переменную интегрирования $q = s\tau$, мы можем упростить уравнение (3.8) к виду

$$p_s = 1 - \int_0^{\infty} d\tau (1 - e^{-s\tau}) p(\tau). \quad (3.10)$$

Функция $V(t)$, известная как дополнительная функция распределения времени ожидания (или вероятность превышения), удовлетворяет начальному условию $V(0) = 1$ и стремится к нулю медленно изменяющимся способом при $t \rightarrow \infty$. Последнее свойство $V(t)$, которое является важным в нашем подходе, может быть проверено с использованием асимптотической формулы (3.5) и условия $h(\mu\tau) \sim h(\tau)$ ($\tau \rightarrow \infty$):

$$V(\mu t) \sim \int_{\mu t}^{\infty} d\tau \frac{h(\tau)}{\tau} \sim \int_t^{\infty} dz \frac{h(z)}{z} \sim V(t) \quad (3.11)$$

($\tau \rightarrow \infty$). В этой связи нужно отметить, что дополнительная функция распределения времени ожидания $F(t) = \int_0^t d\tau p(\tau) = 1 - V(t)$ также медленно изменяется на бесконечности.

Поскольку $V(t) \sim V(\mu t)$ при $t \rightarrow \infty$, функция $V(q/s)$ в уравнении (3.10) при $s \rightarrow \infty$ может быть заменена на $V(1/s)$, что дает

$$p_s \sim 1 - V\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s \rightarrow 0). \quad (3.12)$$

Используя этот результат в уравнении (3.7), мы находим, в пределе малых s , что

$$\langle X(t) \rangle_s \sim \frac{l_1}{sV(1/s)}, \quad \langle X^2(t) \rangle_s \sim \frac{2l_1^2}{sV^2(1/s)} \quad (3.13)$$

если $l_1 \neq 0$ и

$$\langle X(t) \rangle_s = 0, \quad \langle X^2(t) \rangle_s \sim \frac{l_2}{sV(1/s)} \quad (3.14)$$

если $l_1 = 0$. Далее, для поиска асимптотического поведения моментов $\langle X(t) \rangle_s$ и $\langle X^2(t) \rangle_s$, мы применяем теорему Таубера для преобразования Лапласа, которая гласит (см., например, [87]), что если с некоторого момента времени функция $v(t)$ монотонна и $v_s \sim s^{-\gamma}L(1/s)$ при $s \rightarrow 0$, тогда $v(t) \sim t^{\gamma-1}L(t)/\Gamma(\gamma)$ при $t \rightarrow \infty$. Здесь $L(t)$ – слабо изменяющаяся на бесконечности функция, $\Gamma(\gamma)$ — гамма функция, и $0 < \gamma < \infty$. В соответствии с этой теоремой, из уравнений (3.13) и (3.14) получается

$$\langle X(t) \rangle \sim \frac{l_1}{V(t)}, \quad \langle X^2(t) \rangle \sim \frac{2l_1^2}{V^2(t)} \quad (3.15)$$

и

$$\langle X(t) \rangle = 0, \quad \langle X^2(t) \rangle \sim \frac{l_2}{V(t)}, \quad (3.16)$$

соответственно. Мы подчеркиваем, что в несимметричном случае, когда $l_1 \neq 0$, главные члены асимптотического разложения $\langle X(t) \rangle^2$ и $\langle X^2(t) \rangle$ различны, см. уравнения (3.15). Такая же ситуация наблюдается и для несимметричной субдиффузии, в то время, как $\langle X^2(t) \rangle \sim \langle X(t) \rangle^2$ и $\langle X^2(t) \rangle \sim \langle X(t) \rangle^2 \propto t$ [74, 88]. Эти особенности моментов являются следствием того, что, поскольку в несимметричном случае $P_{ks} \neq P_{ks}$, левый и правый хвосты плотности вероятности $P(x, t)$ разные.

Таким образом, используя уравнения (3.4), (3.15) и (3.16), при больших временах для дисперсии можно получить

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} l_1^2 / V^2(t), & l_1 \neq 0 \\ l_2 / V(t), & l_1 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

с

$$V(t) \sim \int_t^\infty d\tau \frac{1}{\tau} h(\tau). \quad (3.18)$$

Асимптотическая формула (3.17), которая описывает как несимметричную ($l_1 \neq 0$) так и симметричную ($l_1 = 0$) диффузию в системах, характеризуемых

сверхтяжелыми хвостами распределений времен ожидания, является основным результатом этого раздела. Наиболее важным является тот факт, что вероятность превышения $V(t)$ изменяется медленно на бесконечности. Именно эта особенность $V(t)$ отвечает за сверхмедленный характер диффузии в таких системах. Действительно, хорошо известно [89], что если некая функция, скажем $V(t)$, медленно изменяется, то так ведет себя и любая степень этой функции. Отсюда следует, что функция $\sigma^2(t)$ также медленно изменяется и, значит, условие $\sigma^2(t)/t^\alpha \rightarrow 0$ выполняется для всех $\alpha > 0$ при $t \rightarrow \infty$ [89]. Другими словами, дисперсия $\sigma^2(t)$ растет до бесконечности ($\sigma^2(t) \rightarrow \infty$ поскольку $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) медленнее, чем любая положительная степень времени, т. е., наблюдается сверхмедленная диффузия. Следует отметить, что чем медленнее уменьшается вероятность превышения, тем медленнее диффузия. В то же время, поскольку $\sigma^2(t)|_{l_1 \neq 0} / \sigma^2(t)|_{l_1=0} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, сверхмедленная несимметричная диффузия протекает намного быстрее симметричной.

Поскольку вероятность превышения $V(t)$ медленно изменяется, то, согласно теореме Карамата [89], $V(t)$ при $t \rightarrow \infty$ может быть записана в виде

$$V(t) \sim \nu \exp\left(-\int_{\kappa}^t d\tau \frac{1}{\tau} \Gamma(\tau)\right) \quad (3.19)$$

Здесь ν – это положительный параметр, а κ – неотрицательный параметр, который, без потери обобщенности можно принять равным нулю. В общем случае для произвольной медленно меняющейся функции $V(t)$ требуется, чтобы функция $\epsilon(\tau)$ стремилась к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Но в нашем случае $V(t) \rightarrow 0$ в пределе больших времен. Поэтому функция $\epsilon(\tau)$ должна быть положительной и удовлетворять условиям $\epsilon(\tau) \rightarrow 0$ и $\int_{\kappa}^{\tau} d\tau' \Gamma(\tau') / \tau' \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Асимптотическая формула (3.17) с таким образом определенной вероятностью превышения $V(t)$ представляет наиболее общую форму законов диффузии в данной модели. Если асимптотическое поведение функции $h(\tau)$ известно, то асимптотическое поведение функции $\epsilon(\tau)$ и величина параметра ν могут быть определены как

$$\tau(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{V(\tau)} \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (3.20)$$

и

$$v = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp\left(\int_k^\tau d\tau' \frac{1}{\tau'} \tau(\tau')\right) V(\tau) \quad (3.21)$$

с функцией $V(\tau)$, взятой из уравнения (3.18). Следует подчеркнуть, что поскольку функции $h(\tau)$ и $V(\tau)$ слабо меняются, их отношение, т. е. функция $\epsilon(\tau)$, также медленно меняется. Это свойство сохраняется для всех плотностей вероятности времен ожидания, которые характеризуются асимптотическим поведением (3.5).

Мы завершаем этот раздел замечанием, что законы сверхмедленной диффузии (3.17) были получены для простейшей модели НВСБ. То, что эти законы включают закон диффузии $\sigma^2(t) \propto \ln^v t$ как частный случай, не означает, конечно, что эта модель детально описывает системы, упомянутые во вводной части. В этом контексте мы отметим, что наша цель состоит не в применении несвязанной модели НВСБ для описания тех систем, а в ее использовании для демонстрации того, что законы сверхмедленной диффузии образуют широкий класс медленно изменяющихся функций.

3.4 Примеры

В качестве первого примера распределений времен ожидания с супертяжелыми хвостами, чье асимптотическое поведение описывается уравнением (3.5), рассмотрим двухпараметрический класс таких распределений, характеризующихся плотностью вероятности

$$p(\tau) = \frac{(r-1) \ln^{r-1} \eta}{(\eta + \tau) \ln^r(\eta + \tau)} \quad (3.22)$$

с параметрами $r > 1$ и $\eta > 1$ (эти условия гарантируют, что $p(\tau)$ положительно и

нормализовано). В этом случае вероятность превышения (3.9) рассчитывается точно

$$V(t) = \left(\frac{\ln \eta}{\ln(\eta + t)} \right)^{r-1}, \quad (3.23)$$

и, т.о., $V(t) \sim (\ln \eta / \ln t)^{r-1}$ при $t \rightarrow \infty$. Подстановка последнего асимптотического результата в уравнение (3.17) приводит к следующей асимптотической формуле:

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} (l_1 / \ln^{r-1} \eta)^2 \ln^{2(r-1)} t, & l_1 \neq 0 \\ (l_2 / \ln^{r-1} \eta) \ln^{r-1} t, & l_1 = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

которая для $l_1 = 0$ была впервые получена в [79]. Наконец, поскольку согласно уравнению (3.22) $h(\tau) \sim (r-1) \ln^{r-1} \eta / \ln^r \tau$ при $\tau \rightarrow \infty$, из уравнений (3.20) и (3.21) мы находим $\epsilon(\tau) \sim (r-1) / \ln \tau$ и $v = \ln^{r-1} \eta$.

Второй пример характеризуется следующей плотностью вероятности времен ожидания:

$$p(\tau) = \frac{(r-1)(\ln \ln \eta)^{r-1}}{(\eta + \tau) \ln(\eta + \tau) [\ln \ln(\eta + \tau)]^r} \quad (3.25)$$

($r > 1$, $\eta > e$). Основная особенность этой плотности состоит в том, что его правый хвост тяжелее, чем в предыдущем случае, т. е. $p(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к нулю медленнее, чем плотность вероятности в уравнении (3.22). Отсюда следует, что вероятность превышения

$$V(t) = \left(\frac{\ln \ln \eta}{\ln \ln(\eta + t)} \right)^{r-1}, \quad (3.26)$$

которая соответствует плотности вероятности (3.25), уменьшается медленнее, чем $V(t)$ из уравнения (3.23), и, как следствие, дисперсия (3.17) возрастает со временем медленнее, чем в предыдущем случае:

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} [l_1 / (\ln \ln \eta)^{r-1}]^2 (\ln \ln t)^{2(r-1)}, & l_1 \neq 0 \\ [l_2 / (\ln \ln \eta)^{r-1}] (\ln \ln t)^{r-1}, & l_1 = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Принимая во внимание, что, согласно уравнению (3.25) $h(\tau) \sim (r-1)(\ln \ln \eta)^{r-1} / [\ln \tau (\ln \ln \tau)^r]$ при $\tau \rightarrow \infty$, для этого случая получим $\epsilon(\tau) \sim (r-1) / (\ln \tau \ln \ln \tau)$ и $v = (\ln \ln \eta)^{r-1}$.

3.5 Выводы к разделу 2

Используя несвязанную модель непрерывных во времени случайных блужданий, характеризующихся функцией распределения времен ожидания, которая медленно изменяется на бесконечности, мы определили широкий класс законов сверхмедленной диффузии. Этот класс состоит из медленно изменяющихся функций, описывающих дисперсию положения частицы, которая стремится к бесконечности медленнее, чем любая степень времени. Мы нашли связь между поведением дисперсии при больших временах и асимптотическим поведением вероятности превышения. А именно, в случаях несимметричной и симметричной сверхмедленной диффузии дисперсия обратно пропорциональна второй и первой степени вероятности превышения, соответственно. Благодаря этому отличию несимметричная сверхмедленная диффузия при больших временах является более быстрой, чем симметричная. Наконец, мы применили теорему Карамата и нашли наиболее общую форму законов сверхмедленной диффузии в данной модели. Ожидается, что развитый в этом разделе подход может быть обобщен для описания сверхмедленной магнитной релаксации в системах наночастиц.

ВЫВОДЫ

В данной НИР была всесторонне изучена регулярная и стохастическая динамика магнитного момента ферромагнитной наночастицы, находящейся под воздействием циркулярно-поляризованного магнитного поля.

В частности, путем аналитического и численного решения соответствующего детерминистического уравнения Ландау-Лифшица была исследована важная с практической точки зрения проблема перемагничивания наночастицы, т.е. проблема инвертирования направления магнитного момента перманентным и импульсным действием вращающегося поля, поляризованного в плоскости, перпендикулярной легкой оси частицы.

Показано, что действие внешнего статического поля, приложенного вдоль легкой оси частицы, приводит к уменьшению значений частоты вращения и амплитуды поля для переключения, но, в тоже время, время переключения существенно увеличивается. Подтверждено, что переходные процессы, происходящие при включении вращающегося поля, могут уменьшить амплитуду поля переключения по сравнению с предсказанной аналитически. Для случая присутствия вспомогательного статического поля, приложенного вдоль легкой оси, такие переходные процессы позволяют преодолевать неоднородный режим для определенных значений частот. Показано, что импульсный характер действия поля может уменьшить время переключения и амплитуду поля в сравнении с непрерывным действием поля. Наконец, продемонстрировано, что амплитуда поля, вращающегося в направлении естественной прецессии, и время переключения меньше по сравнению со случаем статического поля, перпендикулярного легкой оси частицы. Это подтверждает, что поле, циркулярно-поляризованное в плоскости, перпендикулярной легкой оси, является более подходящим для переключения намагниченности, чем постоянное.

Используя стохастическое уравнение Ландау-Лифшица, а также соответствующее ему уравнение Фоккера-Планка, аналитически и численно изучено вли-

яние теплового шума на процесс перемагничивания ФНЧ внешним циркулярно-поляризованным полем, частота которого близка к резонансной. В частности, были найдены зависимости времени переключения от температуры, из которых следует, что флуктуации в зависимости от их интенсивности могут как ускорять, так и замедлять процесс переключения магнитного момента между двумя устойчивыми состояниями. Показано, что для малых амплитуд поля время переключения сильно зависит от температуры, в то время как для больших амплитуд такая зависимость очень слабая.

Подробно изучена термическая стабильность прецессионных режимов магнитного момента наночастицы, индуцированных вращающимся магнитным полем. Если стабильный прецессионный режим существует в обоих равновесных состояниях, то тепловые флуктуации могут вызвать переходы между этими режимами. Одним из наиболее важных параметров, характеризующим эти переходы, является время жизни данного режима, которое анализировалось в рамках задачи о первом пересечении случайным процессом заданного уровня, которая, в свою очередь, базируется на решении обратного уравнения Фоккера-Планка. В частности, определены граничные условия и трансформационные свойства времени жизни и разработан аналитический метод для нахождения его частотной зависимости в случае высокого барьера анизотропии и малых амплитуд вращающегося поля. Используя этот метод, было показано, что вращающееся поле может как уменьшать, так и увеличивать время жизни в однородном режиме при больших частотах и сильно уменьшать его в непосредственной близости от ларморовской частоты. Также установлено, что при нулевой частоте время жизни всегда меньше, чем в пределе больших частот. Аналитические результаты подтверждены численным решением стохастического уравнения Ландау-Лифшица. Кроме того, численное моделирование этого уравнения для не слишком малых амплитуд вращающегося поля позволило решить проблему времени жизни в неоднородном режиме. Так как в этом случае угол прецессии есть периодическая функция времени, которая может пересечь барьер анизотропии, решение этой проблемы представляет особый интерес. Оказалось, что, хотя прецессионный угол зависит от

времени, время жизни неоднородного режима практически не зависит от этого времени, т.е. от угла прецессии.

В рамках следующей части данной НИР на базе несвязанной модели непрерывных во времени случайных блужданий, характеризующихся функцией распределения времен ожидания, которая медленно изменяется на бесконечности, определен широкий класс законов сверхмедленной диффузии. Этот класс состоит из медленно изменяющихся функций, описывающих дисперсию положения частицы, которая стремится к бесконечности медленнее, чем любая степень времени. Мы нашли связь между поведением дисперсии при больших временах и асимптотическим поведением вероятности превышения. А именно, в случаях несимметричной и симметричной сверхмедленной диффузии дисперсия обратно пропорциональна второй и первой степени вероятности превышения, соответственно. Благодаря этому отличию несимметричная сверхмедленная диффузия при больших временах является более быстрой, чем симметричная. Наконец, мы применили теорему Карамата и нашли наиболее общую форму законов сверхмедленной диффузии в данной модели.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Nanotechnology and Environment. Report of the National Nanotechnology Initiative Workshop – Arlington. – May, 2003.
2. Societal implications of nanoscience and nanotechnology. NSET workshop report. Edited by M.C. Roco and W.S. Bainbridge. – Arlington. – March, 2001.
3. National nanotechnology initiative. Strategic Plan. – Washington. – July, 2007.
4. Ph. Moriarty, Nanostructured materials // *Rep. Prog. Phys.* – 2001. – Vol.64. – P.297–381.
5. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1990.
6. R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, The mechanism of stochastic resonance // *J. Phys. A* – 1981 – Vol. 14 – P. L 453.
7. C.R. Doering, J.C. Gadoua, Resonant activation over a fluctuating barrier // *Phys. Rev. Lett.* – 1992 – Vol. 69 – P. 2318-2321.
8. M.O. Magnasco, Forced thermal ratchets // *Phys. Rev. Lett.* – 1993 – Vol. 71 – P. 1477-1481.
9. С.В. Вонсовский, Магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 1032с.
10. W. Wernsdorfer, Classical and quantum reversal magnetization studied in nanometer-sized particles and clusters // *Adv. Chem. Phys.* – 2001. – Vol.118. – P.99-190.
11. J.I. Martin, J. Nogues, Kai Liu, J.L. Vicent, I.K. Schuller, Ordered magnetic nanostructures: fabrication and properties // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2003. – Vol. 256. – P.449-501.
12. I.K. Kominis, T.W. Kornack, J.C. Allred, M.V. Romalis, A Subfemtotesla Multi-channel Atomic Magnetometer // *Nature.* – 2003 . – Vol. 422. – P.596-599.
13. А.А. Бухараев, Д.В. Овчинников, Н.И. Нургазизов и др., Исследование микромагнетизма и перемагничивания наночастиц Ni с помощью магнитного силового микроскопа. // *ФТТ.* – 1998. – Т.40, №7. – С.1277-1283.
14. H. Scher, E.W. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids // *Phys. Rev. B.* – 1975. – Vol.12, №6. – P.2455-2477

15. A. Klemm, R. Metzler, R. Kimmich, Diffusion on random-site percolation clusters: Theory and NMR microscopy experiments with model objects // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol.65, 021112.
16. I. Golding, E.C. Cox, Physical Nature of Bacterial Cytoplasm // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96, 098102.
17. J. Szymanski, M. Weiss, Elucidating the Origin of Anomalous Diffusion in Crowded Fluids // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol. 103, 038102.
18. L.F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1926, Vol.110, P. 709-737.
19. T.H. Solomon, E.R. Weeks, H.L. Swinney, Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol.71, P. 3975-3978.
20. H. Katori, S. Schlipf, H. Walther, Anomalous Dynamics of a Single Ion in an Optical Lattice // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol.79, P. 2221-2224.
21. D.W. Sims, E.J. Southall, N.E. Humphries, et. al, Scaling laws of marine predator search behavior // *Nature.* – 2008. – Vol. 451, P. 1098-1102.
22. N.E. Humphries, N. Queiroz, J.R.M. Dyer, et. al, Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators // *Nature.* – 2010. – Vol.465, P.1066-1069.
23. A.E. Berkowitz, J. Mitchell, M. Carey et. al, Giant Magnetoresistance in Heterogeneous Cu-Co Alloys // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol.68, №25. – P.3745-3749.
24. J. Nogués J. Sort, V. Langlais, Exchange bias in nanostructures // *Phys. Rep.* – 2005. – Vol.422. – P.65-117.
25. M. Albrecht, C. T. Rettner, A. Moser, Recording performance of high-density patterned perpendicular magnetic media // *Appl. Phys. Lett.* – 2002. – Vol.81, №15. – P.2875-2877.
26. A. Moser, K. Takano, D.T. Margulies, M. Albrecht, Y. Sonobe, Y. Ikeda, S. Sun, E.E. Fullerton, Magnetic recording: advancing into the future // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2002. – Vol.35. – P. R157-R167.
27. *The Physics of Ultra-High-Density Magnetic Recording*, edited by M.L. Plumer,

- J. Van Ek, D. Weller, – Springer-Verlag, Berlin, 2001.
28. M. Bauer, J. Fassbender, B. Hillebrands, Switching behavior of a Stoner particle beyond the relaxation time limit // *Phys. Rev. B.* – 2000. – Vol.61. – P.3410-3416.
 29. S. Kaka, S.E. Russek, Precessional switching of submicrometer spin valves // *J. Appl. Phys.* – 2002. – Vol.80, №12. – P.2958–2960.
 30. C. Serpico, I.D. Mayergoyz, G. Bertotti, Analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for precessional switching // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol.93, №10. – P.6909-6911.
 31. E.B. Myers, F.J. Albert, J.C. Sankey, E. Bonet, R.A. Buhrman, D C. Ralph, Thermally Activated Magnetic Reversal Induced by a Spin-Polarized Current // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol.89, №19. – P.196801(4).
 32. H.W. Schumacher, C. Chappert, R.C. Sousa, P.P. Freitas, J. Miltat, Quasiballistic Magnetization Reversal // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol.90, №1. – P.017204(4).
 33. E.C. Stoner, E.P. Wolfarth // *Phil. Roy. Soc.* 240 599 (1948).
 34. R.L. Stamp, B. Hillebrands, Biased switching of small magnetic particles Biased switching of small magnetic particles // *Appl. Phys. Lett.* – Vol.75, No8 – 1999 P. 1143-1145.
 35. C. Serpico, I.D. Mayergoyz, G. Bertotti, Analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for precessional switching // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol.93, №10. – P.6909-6911.
 36. А.Ф. Хапиков, Динамика перемагничивания цилиндра в присутствии переменного магнитного поля // *Письма в ЖЭТФ.* – 1992. – Т.55, №6. – С. 349-352.
 37. C. Thirion, W. Wernsdorfer, D. Mailly, Switching of magnetization by nonlinear resonance studied in single nanoparticles // *Nature Mat.* – 2003. – Vol.2. – P.524-527.
 38. Z.Z. Sun, X.R. Wang, Magnetization reversal through synchronization with a microwave // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.74. – 132401.
 39. S.I. Denisov, T.V. Lyutyuy, P. Hänggi, Magnetization of Nanoparticle Systems in

- a Rotating Magnetic Field // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol.97. – 227202.
40. G. Bertotti, C. Serpico, I.D. Mayergoyz. Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol.86, №4. – P.724-727.
 41. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, P. Hänggi, K.N. Trohidou, Dynamical and thermal effects in nanoparticle systems driven by a rotating magnetic field // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.76. – P.104406.
 42. Т.В. Лютый, А.Ю. Поляков. Перемагничивание наночастицы циркулярно-поляризованным магнитным полем. // *Металлофиз. и новейш. технол.* – Т. 28, №4. – 2008. – С. 429-438.
 43. T.V. Lyutyu, A.Yu. Polyakov, A.V. Rot-Serov, C. Binns Switching properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a circularly polarized magnetic field // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2009. – Vol.21. – P.396002 (9).
 44. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
 45. W. F. Brown Jr., Thermal Fluctuations of a Single-Domain Particle // *Phys. Rev.* – 1963. – Vol.130, №5. – P.1677 -1686.
 46. W. T. Coffey, Yu. P. Kalmykov, J. T. Waldron, *The Langevin Equation*, 2nd ed. (World Scientific, Singapore, 2004).
 47. P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* – 1990. – Vol.62, №2. – P.251 -341.
 48. S. Redner, *A Guide to First-Passage Processes* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
 49. S. I. Denisov, A.N. Yunda, Thermal-induced inversion of the magnetic moment in superparamagnetic particles // *Physica B.* – 1998. – Vol.245, №3. – P.282-287
 50. C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
 51. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, K.N. Trohidou, Magnetic relaxation in finite two-dimensional nanoparticle ensembles // *Phys. Rev. B.* – 2003. – Vol.67. – P. 014411 (9).
 52. P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, *Numerical Solution of SDE Through Com-*

- puter Experiments (Berlin: Springer: 1994).
53. C. Thirion, W. Wernsdorfer, D. Mailly, Switching of magnetization by nonlinear resonance studied in single nanoparticles // *Nat. Mater.* – 2003. – Vol.2. – P.524-527.
 54. Z.Z. Sun, X.R. Wang, Strategy to reduce minimal magnetization switching field for Stoner particles // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.73. – P.092416.
 55. Z.Z. Sun, X.R. Wang, Magnetization reversal through synchronization with a microwave // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.74. – P.132401.
 56. J. Podbielski, D. Heitmann, D. Grundler, Microwave-Assisted Switching of Microscopic Rings: Correlation Between Nonlinear Spin Dynamics and Critical Microwave Fields // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol.99. – P.207202.
 57. G. Woltersdorf, C.H. Back, Microwave Assisted Switching of Single Domain Ni₈₀Fe₂₀ Elements // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol.99. – P.227207.
 58. J.G. Zhu, X. Zhu, Y. Tang, Microwave Assisted Magnetic Recording // *IEEE Trans. Magn.* – 2008. – Vol.44, №1. – P.125-131.
 59. G. Bertotti, C. Serpico, I.D. Mayergoyz, Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol.86, №4. – P.724-727.
 60. G. Bertotti, I.D. Mayergoyz, C. Serpico, Analytical solutions of Landau-Lifshitz equation for precessional dynamics // *Physica B* . – 2004. – Vol.343. – P.325-330.
 61. G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, C. Serpico, M. d'Aquino, R. Bonin, Nonlinear-dynamical-system approach to microwave-assisted magnetization dynamics // *J. Appl. Phys.* – 2009. – Vol.105. – P.07B712.
 62. L. Chotorlishvili, P. Schwab, J. Berakdar, Dynamic switching of the magnetization in a driven molecular nanomagnet // *J. Phys. Condens. Matter.* – 2010. – Vol.22, №3. – P.036002.
 63. G. Bertotti, I. Mayergoyz, C. Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems* (Elsevier, Oxford, 2009).
 64. S. I. Denisov, T.V. Lyutyy, C. Binns, P. Hänggi Phase diagrams for the precession states of the nanoparticle magnetization in a rotating magnetic field // *J.*

- Magn. Magn. Mater. – 2010. – Vol.322. – P.1360-1362.
65. S.I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, P. Hänggi, Mean first-passage times for an ac-driven magnetic moment of a nanoparticle // *Europhys. Lett.* – 2006. – Vol.76, №6. – P.1001-1007.
 66. S. I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, P. Hänggi, Rapidly driven nanoparticles: Mean first-passage times and relaxation of the magnetic moment // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol.75. – P.184432.
 67. S.I. Denisov, A.Yu. Polyakov, T.V. Lyutyy, Resonant suppression of thermal stability of the nanoparticle magnetization // *Phys. Rev.B.* – 2011. – Vol.84. – P.174410(11).
 68. See Eq. 2.1.9.3 in A. D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (CRC, Boca Raton, 1995).
 69. F.W.J. Olver, *Introduction to Asymptotics and Special Functions* (Academic, New York, 1974).
 70. C. H. Back, R. Allenspach, W. Weber, S.S.P. Parkin, D. Weller, E.L. Garwin, H. C. Siegmann, Minimum Field Strength in Precessional Magnetization Reversal // *Science.* – 1999. – Vol.285, №5429. – P.864-867.
 71. J.P. Bouchaud, A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // *Phys. Rep.* – 1990. – Vol.195, №4. – P.127-293.
 72. R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* – 2000. – Vol.339, №1. – P.1-77
 73. D. Ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* – Cambridge University Press, 2000. – 332 c.
 74. M.F. Shlesinger, Asymptotic solutions of continuous-time random walks // *J. Stat. Phys.* – 1974. – Vol.10, P. 421-434.
 75. G. Zumofen, J. Klafter, Scale-invariant motion in intermittent chaotic systems // *Phys. Rev. E.* –1993. – Vol. 47, P. 851-863.
 76. S.I. Denisov, H. Kantz, Anomalous biased diffusion in a randomly layered medium // *Phys. Rev. E.* – 2010. – Vol.81, 021117.

77. Ya.G. Sinai, Limit behaviour of one-dimensional random walks in random environments // *Theory Probab. Appl.* – 1982. – 1982 Vol.27, P. 256-.
78. S. Havlin, R. Blumberg Selinger, M. Schwartz, H.E. Stanley, A. Bunde, Random Multiplicative Processes and Transport in Structures with Correlated Spatial Disorder // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – Vol.61, P. 1438-1441.
79. S. Havlin, G.H. Weiss, A new class of long-tailed pausing time densities for the CTRW // *J. Stat. Phys.* – 1990. – Vol. 58, P. 1267-1273.
80. H. Schiessel, I.M. Sokolov, A. Blumen, Dynamics of a polyampholyte hooked around an obstacle // *Phys. Rev. E.* –1997. – Vol.56 R2390-R2393.
81. F. Igloi, L. Turban, H. Rieger, Anomalous diffusion in aperiodic environments // *Phys. Rev. E.* – 1999. –Vol.59, P. 1465-1474.
82. J. Drager, J. Klafter, Strong Anomaly in Diffusion Generated by Iterated Maps // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol.84, P. 5998-6001.
83. S.I. Denisov, W. Horsthemke, Anomalous diffusion of particles driven by correlated noise // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62, P. 7729-7734.
84. A.V. Chechkin, J. Klafter, I.M. Sokolov, Fractional Fokker-Planck equation for ultraslow kinetics // *Europhys. Lett.* – 2003. – Vol. 63, P. 326-329.
85. E.W. Montroll, G.H. Weiss, Random walks on lattices. II // *J. Math. Phys.* – 1965. – Vol.6, P. 167-181.
86. S.I. Denisov, H. Kantz, P. Hanggi, Langevin equation with super-heavy-tailed noise // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2010. – Vol.43, 285004.
87. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol.2 (Wiley, New York) 1971.
88. S.I. Denisov, E.S. Denisova, H. Kantz, Biased diffusion in a piecewise linear random potential // *Eur. Phys. J. B.* – 2010. – Vol.76, P. 1-8.
89. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press, Cambridge) 1987.