Содержание

Перечень условных обозначений

Через A и B мы обозначаем величины, постоянные по параметрам, участвующим в доказательстве. В доказательстве даже одной теоремы символами A и B могут обозначаться различные константы, кроме специально оговоренных случаев, когда константы A и B фиксируются.

$\mathbb{C}$ — открытая комплексная плоскость;

$\mathbb{C}_+$ — верхняя комплексная полуплоскость: $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$;

$\mathbb{C}_-$ — нижняя комплексная полуплоскость: $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$;

$\mathbb{R}$ — вещественная ось;

$\gamma(r)$ — функция роста;

$\rho(r)$ — уточнённый порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$;

$[\cdot]$ — целая часть числа;

$\delta S(\gamma(r))$ — класс дельта-субгармонических функций конечного γ-типа;

$S(\gamma(r))$ — класс субгармонических функций конечного γ-типа;

$S\delta(\gamma(r))$ — класс дельта-субгармонических функций в полуплоскости конечного γ-типа;

$JS(\gamma(r))$ — класс субгармонических функций в полуплоскости конечного γ-типа;

$C(a, r)$ — открытый круг с центром в точке a радиуса r;

$B(a, r)$ — замкнутый круг с центром в точке a радиуса r;

$l^*(G)$ — верхняя линейная плотность множества G;

$c_k(r; v)$ — коэффициенты Фурье функции v;

μ_v — мера Рисса функции v;

$$S(r; k, \mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k};$$

$$S(r_1, r_2; k, \mu) = S(r_2; k, \mu) - S(r_1; k, \mu), \quad r_1 \le r_2;$$

$$S'(r; k, \mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{B(0,r)} \left(\frac{\bar{\zeta}}{r}\right)^k d\mu(\zeta);$$

$T(r; v) = N(r, v) + m(r, v)$ — характеристика Неванлинны функции v;

$$N(r, v) = \int\limits_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt;$$

$m(r, v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v_+(re^{i\theta} \, d\theta;$

λ_v — полная мера функции v;

ν_v — граничая мера функции v;

$D_+(R_1, R_2) = \overline{C_+(0, R_2) \backslash C_+(0, R_1)}$, $R_1 < R_2$, — полукольцо;

$$S_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k} \iint\limits_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} \, d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint\limits_{\overline{C_+(0, r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k \, d\lambda(\zeta)\,;$$

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) = S_+(r_2; k, \lambda) - S_+(r_1; k, \lambda), \quad r_1 \le r_2\,;$$

$\mathcal{E}(\gamma)$ — класс целых функций конечного γ-типа;

$D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивизор;

Введение

"Одной из самых красивых глав классического анализа является теория суб- и супергармонических функций". Это слова из предисловия Е. Б. Дынкина к переводу книги Дж. А. Ханта. Субгармонические функции были введены в анализ Гартогсом (Hartogs) и Ф. Риссом (F. Riesz), однако, их идея уже заложена в методе "выметания"Пуанкаре (Poincaré). Они представляют собой распространение на случай функций нескольких переменных выпуклых функций одного переменного. В своей монографии И. И. Привалов [21] писал: "После того как теория субгармонических функций достаточно развилась, естественно возник вопрос о приложении их как более общего класса функций к теории аналитических функций комплексного переменного. Этот новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основе которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, даёт упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций."Вследствие теоремы Рисса о представлении теория субгармонических функций оказывается тесно связанной с оформившейся ранее теорией потенциала. Теория потенциала является более общей теорией, так как в ней рассматриваются более общие ядра, чем в теории субгармонических функций. Сближение тут происходит на путях развития абстрактной теории субгармонических функций.

В работе изучаются представления субгармонических функций в комплексной плоскости и в верхней полуплоскости комплексного переменного. Эти представления применяются к исследованию роста субгармонических функций, к решению задач интерполяции и к изучению идеалов в классах целых функций.

Актуальность темы. Теория субгармонических функций является активно развивающейся областью современной математики. Исследованиям в этой области посвящены многочисленные работы. Она находит свои применения в теории функций комплексного переменного, в теории потенциала, в теории случайных процессов, в геометрии. Поэтому получение любого нового результата в этой области является актуальной задачей как для самой математики, так и для её приложений.

В теории субгармонических функций много важных результатов получаются с помощью различных представлений этих функций. Наиболее известные из них – формула Пуассона-Йенсена, на которую опирается большая часть теории субгармонических функций. Сюда же относятся формулы Неванлинны, Симидзу-Альфорса, Карлемана, Б. Я. Левина. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным, большей частью опирается на открытые им интегральные формулы. Из представления Гришина ясно видно, что субгармоническая функция конечного порядка в верхней полуплоскости определяется своей полной мерой с точностью до гармонического полинома, который обращается в нуль на вещественной оси, аналогично тому, как целая функция конечного порядка определяется своими корнями с точностью до функции вида $\exp\{P(z)\}$, где $P(z)$ – полином. Аналогичные формулы при разных ограничениях получали другие математики: М. В. Говоров, У. Хейман, Д. Ито.

В теории целых функций важную роль играют их канонические произведения. Для целых функций конечного порядка таким представлением является представление Адамара. Для целых функций произвольного γ-типа аналог этого факта был установлен Л. Рубелом. Методом, которым пользовался Л. Рубел, был метод рядов Фурье целых и мероморфных функций. Этот метод, основанный на использовании ряда Фурье для $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ, стал систематически использоваться для изучения асимптотических свойств целых и мероморфных функций в работах Л. Рубела и Б. Тейлора. Затем к ним присоединились Д. Майлз, Д. Шиа и др. Следует отметить, что ещё в 1927 г. Н. И. Ахиезер исползовал соотношения между коеффициентами Фурье и нулями целой функции для доказательства теоремы Линделёфа о типе целой функции. Позднее ними пользовались М. Картрайт и А. Пфлюгер. Однако, это были изолированные работы без особых применений. В. С. Азарин (1977) получил критерий вполне регулярного роста целой функции в терминах её коэффициентов Фурье. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком, который обобщил теорию Левина-Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ-типа. Ряд важных результатов в этом направлении получили также А. Ф. Гришин, А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Я. В. Василькив, Н. В. Заболоцкий и др.

В начале XXI столетия метод рядов Фурье К. Г. Малютиным был перенесен на функции субгармонические в полуплоскости. К. Г. Малютин и Н. Садык расширили вышеупомянутые результати на δ-субгармонические функции конечного γ-типа. Важные результаты в этом направлении за последние годы были получены А. А. Кондратюком и А. Я. Християниным.

С вопросами представления целых функций тесно связаны интерполяционные задачи и изучение идеалов в разных классах целых функций. Вопросами интерполяции в классах целых функций занимались многие математики. Укажем на исследования А. В. Братищева, А. О. Гельфонда, В. Л. Гончарова, А. Ф. Гришина и А. М. Руссаковского, М. О. Евграфова, Ю. Ф. Коробейника, Б. Я. Левина, А. Ф. Леонтьева, К. Г. Малютина и мн. др. Для классов целых функций бесконечного порядка задачи интерполяции изучены не достаточно полно. Мы укажем на исследования С. А. Беренстейна и Б. А. Тейлора, У. А. Сквайерса, Р. Е. Хеймана, Т. И. Абаниной, Б. В. Винницкого и И. Б. Шепарович.

Всё вышеизложенное и обусловило выбор объекта, темы исследования и её актуальность.

Объект и предмет исследования. Объектами исследования являются функции, субгармонические в комплексной плоскости, и функции, субгармонические в верхней полуплоскости.

Предметом исследования являются свойства функций, субгармонических в комплексной плоскости, и функций, субгармонических в верхней полуплоскости, распределение их риссовских и полных мер, аналог теорий Л. Рубела и А. А. Кондратюка.

1 Обзор литературы, выбор направлений исследования

Субгармонические функции были введены в анализ Гартогсом (Hartogs) и Ф. Риссом (F. Riesz), однако, их идея уже заложена в методе "выметания"Пуанкаре (Poincaré). Они представляют собой распространение на случай функций нескольких переменных выпуклых функций одного переменного. В своей монографии И. И. Привалов [21] писал: "Новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основе которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, даёт упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций."

Имеется много книг, посвященных различным аспектам теориии субгармонических функций. Мы отметим здесь монографии У. Хеймана и П. Кеннеди [24], У. Хеймана [31, 32].

Вследствие теоремы Рисса о представлении теория субгармонических функций оказывается тесно связанной с теорией потенциала. Теория потенциала является более общей теорией, чем теория так как в ней рассматриваются более общие ядра. Сближение происходит на путях развития абстрактной теории субгармонических функций.

Субгармонические функции естественным образом появляются в теории винеровских процессов. Связь теории потенциала и теории случайных процессов изложена в книгах Е. Б. Дынкина [12], Дж. А. Ханта [23], Дж. Л. Дуба [27]. Теория субгармонических функций тесно связана и с другими разделами математики. Например, известны приложения теории субгармонических функций к геометрии [33].

В работе теория субгармонических функций развивается в направлении, о котором писал И. И. Привалов, то есть в тесной связи с теорией аналитических функций.

Изучение свойств специальных классов целых и субгармонических функций — другой важный аспект современных исследований. Большое применение находит класс целых функций вполне регулярного роста в смысле Левина–Пфлюгера. Теория функций вполне регулярного роста создана в работах этих математиков. Ее изложение приведено в книге [17]. Новый подход к этой теории получается в рамках , созданной В. С. Азариным [1] теории динамических систем субгармонических функций. Н. В. Говоров [3] построил теорию функций вполне регулярного роста в полуплоскости. После введения А. Ф. Гришиным [9] понятия полной меры стало яснее сходство и различие между теорией аналитических и субгармонических функций для плоскости и для полуплоскости. Использование аналогии между такими теориями позволило [29] получить вариант второй основной теоремы Р. Неванлинны для полуплоскости.

В 60-х годах прошлого века в работах Л. Рубела [43, 44], Л. Рубела и Б. Тейлора [45], Д. Майлза [38, 39], Д. Майлза и Д. Шиа [40], Н. Рао и Д. Шиа [41] и др. начал широко применяться метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций. Этот метод является эффективным при решении ряда общих задач теории мероморфных функций и устанавливает ее связь с теорией рядов Фурье. Одним из преимуществ этого метода является то, что он позволяет исследовать функции с довольно нерегулярным ростом на бесконечности и функции бесконечного порядка. Кроме того, поскольку коэффициенты Фурье

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})\,d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

выражаются определённым образом через нули и полюсы мероморфной функции f, то с их помощью можно исследовать распределение нулей и полюсов этой функции. Заметим, что ещё в 1927 г. Н. И. Ахиезер применил эти соотношения для нового доказательства теоремы Линделёфа о типе целой функции. Позже ими пользовались также М. Картрайт и А. Пфлюгер. Но это были изолированные работы без широких приложений. В работах же Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза и др., применявших теорию рядов Фурье к изучению целых и мероморфных функций, получены фундаментальные результаты, решены важные задачи теории мероморфных функций.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на $[0,\infty)$, называется функцией роста. Пусть f – мероморфная в комплексной плоскости функция, $Z(f)$ ($W(f)$) – множество её нулей (полюсов), $T(r,f)$ – неванлинновская характеристика, $c_k(r,f)$ – коэффициенты Фурье функции f. Функция f называется функцией конечного γ-типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r,f) \leq A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. Класс таких функций обозначим через $\mathcal{M}(\gamma)$, через $\mathcal{E}(\gamma)$ обозначим класс целых функций конечного γ-типа. Методом рядов Фурье Рубел и Тейлор нашли исчерпывающие характеристики множеств $Z(f)$ и $W(f)$ функций из класса $\mathcal{M}(\gamma)$. Используя метод рядов Фурье, Д. Майлз решил, не поддававшуюся решению на протяжении ряда лет, проблему представления мероморфной функции $f \in \mathcal{M}(\gamma)$ в виде частного двух целых функций из класса $\mathcal{E}(\gamma)$: $\mathcal{M}(\gamma)=\mathcal{E}(\gamma)/\mathcal{E}(\gamma)$.

Метод рядов Фурье позволил построить обобщение известной теории Левина–Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста, распространить её основные положения не только на целые функции с нерегулярным ростом, но и на мероморфные функции. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком [14, 15, 16].

В работах Я. В. Василькива [2] и К. Г. Малютина [18] результаты Рубела и Тейлора были обобщены на субгармонические функции в комплексной плоскости.

Созданная А. Ф. Гришиным теория субгармонических функций в полуплскости позволила К. Г. Малютину [19] распространить результаты Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза на δ-субгармонические функции, определённые в полуплоскости. Важные результаты в этом направлении за последние годы были получены А. Я. Христианиным [35] и в совместных работах А. Я. Христианина и А. А. Кондратюка [36, 37]. Переход в полуплоскость вызывает определённые трудности, связанные со сложным поведением функции в окрестности границы. Отличие от плоскости проявляется уже при получении критериев принадлежности δ-субгармонической функции заданному классу. Так, например, для полуплоскости невозможно никакое обобщение одного из критериев Рубела-Тейлора. В совместной работе К. Г. Малютина и Н. Садыка [20] получены важные результаты для δ-субгармонических функций вполне регулярного роста в полуплоскости.

2 Ряды фурье и дельта-субгармонические функции в комплексной плоскости

2.1 Функции роста

Метод рядов Фурье суб- и дельта-субгармонических функций, основанный на использовании ряда Фурье для $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ, систематически стал применяться для изучения асимптотических свойств целых и мероморфных функций в работах Л. Рубела и Б. Тейлора, Д. Майлза, Д. Шея и др. Следует заметить, что еще в 1927 г. Н.И. Ахиезер применил соотношения между коэффициентами Фурье и нулями целой функции для доказательства теоремы Линделефа о типе целой функции. Позже ими пользовались М. Картрайт и А. Пфлюгер. Но это были изолированные работы без особых приложений. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком, обобщившем теорию Левина – Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ-типа.

Определение 0.1 *Положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, называется функцией роста.*

В случае необходимости будем считать значения функции $\gamma(r)$ на полуинтервале (0,1] должным образом измененными (в частности, $\lim\limits_{r\to+0}\gamma(r) = 1$). Измененная функция также будет функцией роста.

Далее через $\gamma(r)$ всегда будет обозначаться некоторая (как правило, фиксированная) функция роста. Кроме того, следуя Титчмаршу, мы будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$", которое не должно вызывать недоразумений.

Определение 0.2 *Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины:*

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \quad \alpha[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}.$$

Среди функций роста выделяется класс таких функций, что функция $\ln\gamma(r)$ является выпуклой относительно $\ln r$. Иногда используется следующая лемма о представлении таких функций [13, Предложение 5.1].

Лемма 0.1 *Пусть функция $\varphi(r)$ является выпуклой относительно $\ln r$ и неубывающей на полуоси $\mathbb{R}_+$. Тогда справедливо представление:*

$$\varphi(r) = \varphi(0) + \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

где $\omega(t)$ – неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$, $\omega(t) \geq 0$.

Требование, чтобы функция $\ln\gamma(r)$ была выпуклой относительно $\ln r$ выполняется для широкого класса функций роста, важных в приложениях (например, для функции $\gamma(r) = r^\rho$, $\rho > 0$). Такие функции роста обладают некоторыми важными свойствами. Следующая лемма – это Лемма 5.1 из [13].

Лемма 0.2 *Пусть функция* $\ln \gamma(r)$ *выпукла относительно* $\ln r$. *Тогда существует число* $R_0 > 0$ *такое, что для каждого* $R \geq R_0$ *найдется* $\sigma = \sigma(R) > 0$ *такое, что*

$$\frac{\gamma(R)}{R^\sigma} = \inf \left\{ \frac{\gamma(r)}{r^\sigma} : r > 0 \right\} . \tag{0.1}$$

Среди функций роста важную роль играют функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\gamma(2r) \leq A\gamma(r) \tag{0.2}$$

при некотором $A > 0$.

Достаточное условие для выполнения (0.2) содержится в Лемме 5.1 из [13].

Лемма 0.3 *Пусть функция* $\ln \gamma(r)$ *выпукла относительно* $\ln r$ *и* $\beta[\gamma] < \infty$, *тогда выполняется неравенство* (0.2).

Определение 0.3 *Абсолютно непрерывная функция* $\rho(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, *называется уточнённым порядком в смысле Бутру, если она удовлетворяет следующим условиям*

$$-\infty < \alpha = \liminf_{r\to\infty} \rho(r) \leq \rho = \limsup_{r\to\infty} \rho(r) \leq +\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} \rho'(r) r \ln r = 0 \,.$$

Если $\alpha = \rho$, *то функция* $\rho(r)$ *называется уточнённым порядком в смысле Валирона (часто – просто уточнённым порядком).*

Функцию $r^{\rho(r)}$ мы будем обозначать через $V(r)$. Так как

$$V'(r) = \frac{1}{r} V(r)(\rho(r) + \rho'(r) r \ln r)\,,$$

то из определения уточнённого порядка следует, что функция $V(r)$ при $\alpha > 0$ (а именно этот случай нас в основном будет интересовать в дальнейшем) есть строго возрастающая функция в некоторой окрестности бесконечности. Ограничения, которые накладываются на функцию $\rho(r)$, касаются ее поведения в окрестности бесконечности. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы функция $V(r)$ при $\alpha > 0$ была монотонной (например, $\rho'(r)r\ln r) \geq -\rho(r))$, т.е. была функцией роста, причем $\lim\limits_{r\to+0} V(r) = 1$.

Следующее полезное утверждение легко доказывается и хорошо известно [17] для уточнённого порядка в смысле Валирона.

Лемма 0.4 *Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок в смысле Бутру. Если сегмент $[a,b]$ таков, что $a > 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ асимптотически, равномерно относительно $B \in [a,b]$, выполняется соотношение*

$$B^{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{V(Br)}{V(r)} \leq B^{\rho+\varepsilon}\,.$$

Доказательство. Воспользуемся методом работы [8]. Имеем

$$\frac{V(Br)}{V(r)} = B^{\rho(Br)}r^{\rho(Br)-\rho(r)}\,.$$

Пусть

$$\varepsilon(r) = \sup_{u\geq r} u\rho'(u)\ln u\,.$$

Тогда

$$|\rho(Br)-\rho(r)| = \left|\int\limits_r^{Br}\rho'(u)\,du\right| \leq \varepsilon(r)\frac{(B-1)r}{r\ln r}\,.$$

Теперь из определения уточнённого порядка легко следует утверждение леммы.

В дальнейшем будет полезна ещё одна лемма.

Лемма 0.5 *Пусть* $\rho(r)$ *– уточнённый порядок в смысле Бутру. При* $\lambda < \alpha + 1$

$$\int\limits_{\delta}^{r} \frac{V(t)}{t^{\lambda}}\, dt \leq \frac{V(r)r}{(\alpha+1-\lambda)r^{\lambda}} + o\left(\frac{V(r)r}{r^{\lambda}}\right), \quad r \to \infty\,, \tag{0.3}$$

а при $\lambda > \rho + 1$

$$\int\limits_{r}^{\infty} \frac{V(t)}{t^{\lambda}}\, dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^{\lambda}} + o\left(\frac{V(r)r}{r^{\lambda}}\right), \quad r \to \infty\,. \tag{0.4}$$

Доказательство. Докажем, например, неравенство (0.4). Действительно, интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_{r}^{\infty} \frac{t^{\rho}}{t^{\lambda}} \frac{V(t)}{t^{\rho}}\, dt = \left.\frac{V(t)t}{(\rho+1-\lambda)t^{\lambda}}\right|_{r}^{\infty} -$$

$$\frac{1}{(\rho+1-\lambda)} \int\limits_{r}^{\infty} \left[\frac{V(t)}{t^{\lambda}}(\rho(t)-\rho) + \frac{V(t)t}{t^{\lambda}}\rho'(t)\ln t\right] dt\,.$$

Из определения уточнённого порядка следует, что асимптотически

$$\rho(t) - \rho < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |t\rho'(t)\ln t| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Воспользовавшись этим мы получим, что

$$(1+o(1)) \int\limits_{r}^{\infty} \frac{V(t)}{t^{\lambda}}\, dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^{\lambda}} + O(1), \quad r \to \infty\,,$$

и, наконец,

$$\int\limits_{r}^{\infty} \frac{V(t)}{t^{\lambda}}\, dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^{\lambda}} + o\left(\frac{V(r)r}{r^{\lambda}}\right), \quad r \to \infty\,.$$

2.2 Дельта-субгармонические функции

Пусть $\mathbb{C}$ – плоскость комплексного переменного. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a, а через $B(a,r)$

– замкнутый круг. Под дельта-субгармонической функцией в области D мы понимаем разность двух субгармонических в этой области функций: $v(z) = v_1(z) - v_2(z)$, где v_i, $i = 1, 2$, – функции субгармонические в области D.

Если D – область с кусочно-гладкой границей ∂D, $v(z) \neq -\infty$ тождественно, μ – мера Рисса функции v, дельта-субгармонической в замкнутой области $\overline{D}$, то справедлива формула братьев Рольфа и Фритьофа Неванлинн

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D} v(z) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} \, d\zeta - \iint\limits_{D} G(\zeta, z) \, d\mu(\zeta), \tag{0.5}$$

где G – функция Грина области D, $\partial G / \partial n$ – производная по внутренней нормали.

Если $D = B(0, R)$, то формула (0.5) называется формулой Пуассона-Иенсена и принимает вид:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \, d\varphi - \iint\limits_{|\zeta| \le R} \ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \zeta)} \right| \, d\mu(\zeta). \tag{0.6}$$

При $z = 0$, $v(0) \neq \pm\infty$, формула (0.6) называется формулой Иенсена:

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) \, d\varphi - \iint\limits_{|\zeta| \le R} \ln \left| \frac{R}{\zeta} \right| \, d\mu(\zeta). \tag{0.7}$$

Характеристикой Неванлинны, дельта-субгармонической в круге $C(0, R)$ функции v, $v(0) \neq \infty$, называется выражение

$$T(r, v) = m(r, v) + N(r, v), \quad r < R,$$

где

$$m(r, v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} v_+(re^{i\varphi}) \, d\varphi, \quad N(r, v) = \int\limits_{0}^{r} \frac{\mu_-(t)}{t} \, dt.$$

Здесь $v_+ = \max\{v, 0\}$, $\mu = \mu_+ - \mu_-$ – жорданово разложение риссовской меры функции v, $\mu_-(t) = \mu_-\{C(0,t)\}$.

Характеристика Неванлинны $T(r, v)$ удовлетворяет неравенству

$$T\left(r, \sum_{j=1}^{q} v_j\right) \leq \sum_{j=1}^{q} T(r, v_j)\,. \tag{0.8}$$

Если v – субгармоническая функция в круге $B(0, R)$, то как следует из формулы (0.6),

$$T(r, v) \leq M(r, v) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, v), \quad 0 < r < R\,, \tag{0.9}$$

где $M(r, v) = \max\{v(z) : |z| = r\}$.

Все эти сведения можно найти в книгах [21, 24, 31, 32].

2.3 Коэффициенты Фурье дельта-субгармонических функций

Следуя работе [18] введем следующее

Определение 0.4 *Коэффициентами Фурье дельта-субгармонической в круге $C(0, R)$ функции $v(z)$ называются числа*

$$c_k(r, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} v(re^{i\theta})\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r < R\,.$$

Для заданной меры μ обозначим

$$d\mu_k(\zeta) = \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}, \quad \mu_k(r) = \mu_k(B(0, r))\,.$$

В следующей лемме мы получаем выражения для коэффициентов Фурье, которые несколько отличаютеся от соответствующих формул, полученных в работе [18].

Лемма 0.6 *Пусть v – дельта-субгармоническая в круге $C(0, R_0)$ функция, $v(0) = 0$, μ – её риссовская мера,*

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{2}\left(\alpha_k e^{ik\theta} + \bar{\alpha}_k e^{-ik\theta}\right)$$

– разложение в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Тогда для $0 < r < R_0$ справедливо

$$c_0(r, v) = N(r, -v) - N(r, v); \tag{0.10}$$

$$c_k(r, v) = \frac{r^k}{2}\alpha_k + \frac{1}{2k} \iint\limits_{|\zeta| \le r} \frac{r^{2k} - \tau^{2k}}{r^k}\, d\mu_k(\zeta), \quad z = re^{i\theta}, \zeta = \tau e^{i\varphi}, \tag{0.11}$$

при $k \ge 1$ и $c_k = \bar{c}_{-k}$ при $k \le -1$.

Доказательство. Формула (0.10) совпадает с формулой Иенсена (0.7). Для доказательства (0.11) будем использовать формулу Пуассона-Иенсена (0.6). Так как при $0 \le r < R < R_0$

$$\operatorname{Re} \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik(\theta - \varphi)}, \quad z = re^{i\theta}, \tag{0.12}$$

то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z}\, d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(R, v) \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik\theta}. \tag{0.13}$$

Воспользовавшись далее разложением ядра

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{R}{\tau} + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{2|k|} \left(\frac{r}{\tau}\right)^{|k|} \left(1 - \frac{\tau^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{ik(\theta - \varphi)}\,, \tag{0.14}$$

$$0 \le r < \tau \le R, \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{R}{r} + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{2|k|} \left(\frac{\tau}{r}\right)^{|k|} \left(1 - \frac{r^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{ik(\theta - \varphi)} \tag{0.15}$$

$$0 \le \tau < r \le R,$$

(штрих над знаком суммы означает, что отсутствует слагаемое при $k = 0$), и приравнивая коэффициенты Фурье правой и левой частей формулы (0.6), для $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{2}\alpha_k r^k = c_k(R)\left(\frac{r}{R}\right)^k - \frac{1}{2k}\iint\limits_{|\zeta|\le r}\left(\frac{r}{\tau}\right)^{|k|}\left(1-\frac{\tau^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right)e^{-ik\varphi}\,d\mu(\zeta).$$

Умножив это равенство на $(R/r)^k$, получим (0.11) при $r = R$.

3 Целые и мероморфные функции вполне регулярного роста

3.1 Целые функции вполне регулярного роста

Теория целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.) относительно функции $\gamma(r)$, близкой к степенной, созданная в конце 30-х годов XX века независимо друг от друга Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером, занимает видное место в комплексном анализе. Исследования по этой теории продолжаются, одновременно расширяется круг ее приложений – от теории характеристических функций вероятностных законов и аналитической теории дифференциальных уравнений до теории краевых задач, представления аналитических функций рядами экспонент и теории субгармонических функций. А. Ф. Гришин перенес теорию Левина-Пфлюгера на субгармонические функции в комплексной плоскости. Используя метод рядов Фурье, А. А. Кондратюк, обобщил теорию Левина-Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ-типа. Эти обобщения были сделаны им в двух направлениях: 1) рост функций измерялся относительно произвольной функцией роста $\gamma(r)$; 2) были введены и исследованы классы мероморфных в комплексной плоскости функций в.р.р.

Для характеристики зависимости роста функции конечного порядка, голоморфной внутри угла $\alpha \le \arg z \le \beta := [\alpha, \beta]$, от направления, по которому точка z стремится к бесконечности Фрагмен и Линделеф ввели функцию

$$h_f(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} \quad \alpha \le \theta \le \beta\,,$$

которую называют *индикатором функции* $f(z)$ (относительно функции роста $r^{\rho(r)}$).

Условимся, что запись

$$\overset{*}{\lim_{r\to\infty}} \varphi(r) = a$$

будет обозначать предел, когда r стремится к ∞, пробегая все положителные значения, за исключением некоторого множества E *нулевой относительной меры*, т.е. такого, что

$$\overset{*}{\lim_{r\to\infty}} r^{-1}\mathrm{mes}([0,r]\cap E) = 0\,.$$

Определение 0.5 *Функция $f(z)$, аналитическая в угле (α,β), называется функцией в.р.р. в замкнутом угле $[\alpha,\beta]$, если предел*

$$\overset{*}{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = h_f(\theta)$$

равномерно по θ, когда $r\to\infty$, не принимая значений из некоторого общего для всех $\theta\in[\alpha,\beta]$ множества E нулевой относительной меры.

Определение 0.6 *Функция $f(z)$, аналитическая в угле (α,β), называется функцией в.р.р. в открытом угле (α,β), если она имеет в.р.р. в каждом замкнутом угле $[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$.*

Определение 0.7 *Целая функция $f(z)$ называется функцией в.р.р., если она имеет в.р.р. во всей плоскости, т.е. в угле $[0,2\pi)$.*

Если для множества $\{a_n\}$ точек комплексной плоскости при всех $\theta,\eta\in[0,2\pi]\setminus N$, где N – разве лишь счетно, существует конечный предел

$$\Delta(\theta,\eta) = \lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}n(r,\theta,\eta)\,,$$

где $n(r,\theta,\eta)$ – число точек a_n в секторе $\{z:|z|\le r, \arg z\in(\theta,\eta]\}$, то говорят, что множество $\{a_n\}$ имеет *угловую плотность*.

Определение 0.8 *Угловой плотностью множества* $\{a_n\}$ *называется определенная с точностью до аддитивной постоянной функция* $\Delta(\psi) = \Delta(\psi_0, \psi)$, *где* $\psi_0 \notin N$ *– произвольно фиксировано.*

Основные результаты теории целых функций в.р.р. содержатся в двух теоремах.

Теорема 0.1 (Левин-Пфлюгер) *Для того, чтобы целая функция* $f(z)$ *была функцией в.р.р., необходимо и достаточно, чтобы при нецелом* ρ *множество ее нулей имело угловую плотность, а при целом* $\rho > 0$ *еще дополнительно существовал предел*

$$\delta_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{r^{\rho}}{r^{\rho(r)}} \left\{ c_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_n|\le r} a_n^{-\rho} \right\} .$$

Теорема 0.2 (Левин-Пфлюгер) *Индикатор целой функции* $f(z)$ *в.р.р. при нецелом* ρ *выражается формулой*

$$h_f(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int\limits_0^{2\pi} \cos\rho(|\theta - \psi| - \pi)\, d\Delta(\psi)\,,$$

а при целом $\rho > 0$ *– формулой*[1]

$$h_f(\theta) = \int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi)\sin\rho(\psi - \theta)\, d\Delta(\psi) + \tau_f \cos(\rho\,\theta + \theta_f)\,,$$

где $\Delta(\psi)$ *– угловая плотность нулей* $f(z)$, $\tau_f = |\delta_0/\rho + c_\rho|$, $\theta_f = \arg(\delta_0/\rho + c_\rho)$, *а* c_ρ *обозначает старший коэффициент многочлена в каноническом представлении* $f(z) = z^m \exp(P(z))E(z)$ ($E(z)$ *– каноническое произведение нулей* $f(z)$).

[1] в [9], с. 122 эта формула приведена с опечатками

3.2 Мероморфные функции вполне регулярного роста

Мероморфные функции вполне регулярного роста относительно достаточно произвольной функции роста были введены А. А. Кондратюком. Основные понятия и результаты этой теории изложены в книге [**?**]. Основным инструментом его исследований явился, разработанный Л. Рубелом и Б. Тейлором [**?**], метод рядов Фурье целых и мероморфных функций, который является весьма эффективным при изучении функций бесконечного порядка и функций нерегулярно растущих в окрестности бесконечности.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, называется *функцией роста.*

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины:

$$p[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \quad p_*[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}.$$

Далее через $\gamma(r)$ всегда будет обозначаться некоторая (как правило, фиксированная) функция роста. Кроме того, следуя Титчмаршу, будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$", которое не должно вызывать недоразумений.

Определение 0.9 *Мероморфная функция* $f(z)$ *называется функцией* *конечного γ-типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r,f) \le A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. (Здесь $T(r,f)$ – характеристика Неванлинны функции $f(z)$.)*

Класс данных мероморфных функций при фиксированной функции γ обозначим через $M(\gamma(r))$. Через $E(\gamma(r))$ обозначим класс целых функций конечного γ-типа.

Предположим, что условие

$$\gamma(2r) \le K\gamma(r) \tag{0.16}$$

выполняется при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$.

При условии (0.16) А. А. Кондратюк ввел понятие мероморфной функции в.р.р.

Определение 0.10 *Функция $f \in M(\gamma(r))$ называется мероморфной функцией в.р.р., если для всех η и φ из $[0, 2\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_{\eta}^{\varphi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta\, .$$

Класс таких функций обозначим через $M^o(\gamma(r))$. Через $E^o(\gamma(r))$ обозначим подкласс целых функций из $M^o(\gamma(r))$.

Обозначим через

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-ik\theta} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

коэффициенты Фурье функции f.

Теорема 0.3 (Кондратюк) *Пусть f – мероморфная функция, $f(0) = 1$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $f \in M^o(\gamma(r))$;

(ii) $f \in M(\gamma(r))$ *и для каждого* $k \in \mathbb{Z}$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,f)}{\gamma(r)} = c_k\,;$$

(iii) $N(r,f) = O(\gamma(r))$, $r \to \infty$, *и для каждой функции* ψ *из* χ *существует конечный предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta) \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta\,,$$

где ψ *– любое из пространств* $C[0,2\pi]$, $L_p[0,2\pi]$, $p > 1$.

А. А. Кондратюк ввел понятие индикатора мероморфной функции в.р.р.

Определение 0.11 *Если* $f \in M^o(\gamma(r))$, *то функция*

$$h(\theta, f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$$

называется индикатором функции f.

Он показал, что для любой функции роста $\gamma(r)$, удовлетворяющей условию (0.16)

$$h(\theta, f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{\gamma(r)}\,.$$

А. А. Кондратюк развил теорию мероморфных функций в.р.р., аналогичную теории Левина-Пфлюгера, одним из достоинств которой является тот факт, что если $f \in E^o(r^{\rho(r)})$, то f является целой функцией в.р.р. в смысле Левина-Пфлюгера, т.е. теория Левина-Пфлюгера включается в теорию Кондратюка.

4 Множества регулярного роста целых функций

В 80-е годы прошлого столетия А. Ф. Гришин развил теорию Левина-Пфлюгера в другом направлении, введя понятие множества регулярного роста (м.р.р.) целой функции.

Определение 0.12 *Отображение $T(z)$, определенное на множестве E, называется асимптотически тождественным на бесконечности, если*

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in E}} \frac{T(z)-z}{z} = 0\,.$$

Определение 0.13 *Пусть $f(z)$ – целая функция с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$, если существует отображение $T(z)$, определенное на E, асимптотически тождественное на бесконечности, такое, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in T(E)}} \left[\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} - h_f(\theta)\right] = 0\,.$$

А. Ф. Гришин показал: для того, чтобы луч $\arg z = \theta$ был м.р.р. целой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была функцией в.р.р. на этом луче в смысле Левина-Пфлюгера. В частности, для того, чтобы целая функция $f(z)$ была функцией в.р.р., необходимо и достаточно, чтобы вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ была ее м.р.р. Т.о. целая функция в.р.р. регулярно растет на своих корнях в смысле определения Гришина.

Определение 0.14 *Пусть E – м.р.р. для функции $f(z)$, A – предельное множество функции $\arg z (\mathrm{mod} 2\pi)$ при $z\to\infty$, $z\in E$. Пусть $h_1(\theta)$*

– тригонометрически ρ-выпуклый индикатор такой, что $h_1(\theta) \geq h_f(\theta)$, $h_1(\theta) = h_f(\theta)$ при $\theta \in A$. Тогда множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$.

Произвольная целая функция, не являющаяся функцией в.р.р., может регулярно расти на множестве E, которое является частью множества ее корней. Для оценки плотности таких множеств Гришин ввел специальные характеристики.

Пусть E – счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности, $n_E(G)$ – число точек E, принадлежащих множеству G, $n_E(C(0,r)) \leq Mr^{\rho(r)}$ ($C(z,r)$ – открытый круг с центром в точке z радиуса r). Пусть K – компакт, $K_\sigma = \overline{\bigcup\limits_{z\in K} C(z,\sigma)}$, K^t – гомотетия множества K с коэффициентом t и центром в начале координат, $K^t_\sigma = (K_\sigma)^t$. Обозначим

$$\tilde{d}_E(K) = \limsup_{t\to\infty} \frac{n_E(K^t)}{t^{\rho(t)}}, \quad d_E(K) = \limsup_{\sigma\to+0} \tilde{d}_E(K_\sigma)\,.$$

Теорема 0.4 (Гришин) *Пусть E – часть множества корней целой функции $f(z)$ с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Пусть E – м.р.р. функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$. Пусть μ_H – риссовская мера субгармонической функции $H(re^{i\theta}) = r^\rho h_1(\theta)$. Тогда для любого компакта K справедливо неравенство*

$$d_E(K) \leq \mu_H(K)\,. \tag{0.17}$$

Классы функций, регулярно растущих на множестве своих корней, естественным образом появляются при исследовании интерполяционной задачи в классе $[\rho(r), h(\theta)]_r$ целых функций в.р.р. с индикатором равным

$h(\theta)$. Полное описание этого класса, представляющее известную гипотезу А. Ф. Леонтьева, неизвестно.

Проблема Леонтьева состоит в следующем: нужно выяснить, имеются ли функции $f(z)$ с простыми нулями $\{a_n\}$, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln|f'(a_n)|}{r_n^{\rho(r_n)}} - h_f(\theta_n)\right] = 0, \quad a_n = r_n e^{i\theta_n}, \tag{0.18}$$

но не являются функциями в.р.р.

А. Ф. Гришин, используя теорию м.р.р. показал, что при выполнении (0.18) множество $\{a_n\}$ является частью корней некоторой функции из класса $[\rho(r), h(\theta)]_r$. (Интересные результаты в этом направлении были получены ранее А. В. Братищевым.) Одновременно, А. Ф. Гришин решил интерполяционную задачу в этом классе.

5 Функции вполне регулярного роста в полуплоскости

5.1 Регулярно растущие функции относительно $r^{\rho(r)}$

Напомним основные факты теории аналитических функций в.р.р. в полуплоскости, следуя книге. Определим на квадрате $D = \{\psi, \theta : 0 \le \psi \le$

$\pi, 0 \le \theta \le \pi\}$ следующую функцию:

$$g(\psi,\theta) = \begin{cases} (\cos\rho(|\psi-\theta|-\pi)-, & \psi\in(0,\pi),\ \theta\in[0,\pi], \\ \cos\rho(\psi+\theta-\pi))/\sin\psi, & \\ 2\rho\sin\rho(\theta-\pi), & \psi=0, \theta\in[0,\pi), \\ -2\rho\sin\rho\theta, & \psi=\pi,\ \theta\in(0,\pi], \\ 0, & \psi=\theta=0,\ \psi=\theta=\pi\,. \end{cases}$$

Теорема 0.5 (Гришин-Говоров) *Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, была функцией в.р.р. в открытой полуплоскости относительно функции роста $r^{\rho(r)}$, необходимо и достаточно, чтобы при нецелом ρ множество ее нулей имело аргументно-граничную $\rho(r)$-плотность, а при целом $\rho > 0$ еще дополнительно аргументно-граничную $\rho(r)$-симметрию.*

В этом случае индикатор функции $f(z)$ при нецелом ρ выражается формулой

$$h_f(\theta) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_0^\pi g(\psi,\theta)\,d\lambda(\psi), \quad 0<\theta<\pi\,,$$

а при целом ρ – формулой

$$h_f(\theta) = 2\pi\cos\rho\theta\int\limits_0^\pi \frac{\sin\rho\psi}{\sin\psi}\,d\lambda(\psi) + 2\sin\rho\theta\left\{\sigma - \frac{1}{2}a_\rho + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\theta \frac{\psi\cos\rho\psi}{\sin\psi}\,d\lambda(\psi) + \int\limits_\theta^\pi \frac{(\psi-\pi)\cos\rho\psi}{\sin\psi}\,d\lambda(\psi)\right\}, \quad 0<\theta<\pi\,,$$

где $\lambda(\psi)$ – аргументно-граничная плотность нулей $f(z)$, σ – коэффициент аргументно-граничной симметрии, а a_ρ – коэффициент из канонического представления.

Аналогичные результаты получены и для функций в.р.р. в замкнутой полуплоскости.

5.2 Множества регулярного роста функций, аналитических в полуплоскости

В 90-е годы прошлого столетия первый автор этой статьи перенес теорию А. Ф. Гришина на полуплоскость, введя понятия множества регулярного роста функции, аналитической в полуплоскости. Также как и в случае плоскости это понятие оказалось весьма эффективным при решении ряда интерполяционных задач в классах функций в.р.р. в полуплоскости, так и при построении функций в.р.р. в полуплоскости с заданным индикатором.

Определение 0.15 *Отображение $T(z)$, определенное на множестве $E \subset \mathbb{C}_+$, называется асимптотически тождественным на бесконечности, если*

$$T(E) \subset \mathbb{C}_+, \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in E}} \frac{T(z)}{z} = 1\,, \sup_{z\in E} \frac{T(z)-z}{\Im z} < \infty\,.$$

Как и вслучае плоскости введем определение м.р.р. для функции $f(z)$, аналитической в полуплоскости.

Определение 0.16 *Пусть $f(z)$ –функция, аналитическая в полуплоскости, с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$, если существует отображение $T(z)$, определенное на E, асимптотически тождественное на бесконечности, такое, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in T(E)}} \left[\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} - h_f(\theta)\right] = 0\,.$$

Определение 0.17 *Пусть E – м.р.р. для функции $f(z)$, A – предельное множество функции $\arg z \in (0,\pi)$ при $z \to \infty$, $z \in E$. Пусть $h_1(\theta)$*

– тригонометрически ρ-выпуклый ограниченный (непрерывный) индикатор на отрезке $[0,\pi]$ такой, что $h_1(\theta) \geq h_f(\theta)$, $\theta \in (0,\pi)$ ($\theta \in [0,\pi]$) и $h_1(\theta) = h_f(\theta)$ при $\theta \in A \setminus \{0;\pi\}$ ($\theta \in A$). Тогда множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$ в открытой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$).

Связь введенного определения с классическим раскрывается следующими двумя теоремами.

Теорема 0.6 *Для того чтобы функция $f(z)$ была функцией в.р.р. в открытой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ относительно функции роста $r^{\rho(r)}$, необходимо и достаточно, чтобы вся полуплоскость $\mathbb{C}_+$ была ее м.р.р.*

Теорема 0.7 *Для того чтобы функция $f(z)$ была функцией в.р.р. в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$ относительно функции роста $r^{\rho(r)}$, необходимо и достаточно, чтобы вся полуплоскость $\overline{\mathbb{C}_+}$ была ее м.р.р. и ее индикатор $h_f(\theta)$ был непрерывен на отрезке $[0,\pi]$.*

Так же как и в случае целых функций произволная функция, аналитическая в полуплоскости, не являющаяся функцией в.р.р., может регулярно расти на множестве E, кторое является частью множества ее корней. Для оценки плотности таких множеств были введены характеристики аналогичные тем, которые были введены А. Ф. Гришиным.

Пусть $E \subset \mathbb{C}_+$ – счетное множество с точками сгущения на бесконечности и на вещественной оси,

$$n_E^+(G) = \sum_{a_n \in E \cap C(0,1)} \Im a_n + \sum_{a_n \in E \setminus C(0,1)} \sin \arg a_n \,,$$

$$n_E^+(C(0,r)) \le Mr^{\rho(r)}\,.$$

Пусть K – компакт, а функция $d_E^+(K)$ определяется как и характеристика $d_E(K)$ заменой меры n_E на меру n_E^+.

Теорема 0.8 *Пусть E – часть множества корней аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции $f(z)$, $\ln|f(z)| \le M|z|^{\rho(|z|)}$, с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Пусть E – м.р.р. функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$, ограниченного на отрезке $[0,\pi]$. Пусть μ_H – неванлинновская мера субгармонической функции $H(re^{i\theta}) = r^\rho h_1(\theta)$. Тогда для любого компакта K справедливо неравенство*

$$d_E^+(K) \le \mu_H(K)\,. \tag{0.19}$$

Для всякого множества $E \subset \mathbb{C}_+$, удовлетворяющего условию (2.1) можно построить функцию $f(z)$ в.р.р., которая обращается в ноль в точках множества E и имеет индикатор $h_f(\theta) = h_1(\theta)$, $\theta \in [0,\pi]$. При этом корни функции $f(z)$, отличные от точек множества E, "хорошо"отделены от множества E и образуют слабо регулярное множества в полуплоскости (или корче $WR^+(\rho(r))$ [27])

Классы функций, регулярно растущих на множестве своих корней, естественным образом появляются при исследовании интерполяционной задачи в классах аналитических функций в.р.р. с индикатором равным $h(\theta)$. Эти задачи решены первым автором для ограниченного индикатора и непрерывного индикатора на отрезке $[0,\pi]$.

6 Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости

6.1 Дельта-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости

Пусть $J\delta = JS - JS$ – класс δ-субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$. Для фиксированной меры λ положим

$$d\lambda_k(\zeta) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\, d\lambda(\zeta)\ (\zeta = \tau e^{i\varphi}), \lambda_k(r) = \lambda_k\Big(\overline{C(0,r)}\Big)\,,$$

где $\dfrac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ для $\varphi = 0,\ \pi$ определяется по непрерывности. В частности, $\lambda(r) = \lambda(\overline{C(0,r)})$.

Коэффициенты Фурье для функции $v \in J\delta$ определяются формулами:

$$c_k(r,v) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\, d\theta, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Пусть $v = v_+ - v_-$ и λ – полная мера функции v. Пусть $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ. Положим

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^\pi v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi,\ N(r,r_0,v) := N(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt\,,$$

$$T(r,r_0,v) := T(r,v) := m(r,v) + N(r,v) + m(r_0,-v)\,,$$

где $r_0 > 0$ – произвольное, фиксированное число, $r_0 < r$; можно считать $r_0 = 1$.

Далее предположим, что функция роста удовлетворяет условию:

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\gamma(r)}{r} > 0\,. \tag{0.20}$$

Определение 0.18 *Функция $v \in J\delta$ называется функцией конечного γ-типа, если существую константы $A, B > 0$ такие, что*

$$T(r, v) \leq \frac{A}{r}\gamma(Br), \quad r > r_0 \,.$$

Обозначим соответствующий класс δ-субгармонических функций конечного γ-типа через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим соответствующий класс субгармонических функций конечного γ-типа.

Если условие (0.20) не выполняется, мы используем другую характеристику для описания роста функций

$$T(r, v) := m(r, v) + N\left(r, \frac{r}{2}, v\right) + m\left(\frac{r}{2}, -v\right) \,.$$

Все утверждения и в этом случае сохраняют силу.

Определение 0.19 *Положительная мера λ имеет конечную γ-плотность, если существуют положительные константы A и B такие, что*

$$N(r, \lambda) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}\, dt \leq \frac{A}{r}\gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$.

Определение 0.20 *Положительная мера λ в полуплоскости называется мерой конечного γ-типа, если если существуют положительные константы A и B такие, что для всех $r > 0$,*

$$\lambda(r) \leq Ar\gamma(Br) \,. \tag{0.21}$$

Следующая теорема имеет место.

Теорема 0.9 *Пусть γ – функция роста и пусть $v \in J\delta$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) $v \in J\delta(\gamma(r))$;

(ii) *мера* $\lambda_+(v)$ (*или* $\lambda_-(v)$) *имеет конечную* γ-*плотность и*

$$|c_k(r,v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

для некоторых положительных A, B *и всех* $r > 0$.

6.2 Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста полуплоскости

Определение 0.21 *Функция* $v \in J\delta$ *называется функцией вполне регулярного роста относительно* $\gamma(r)$, *если для всех* η *и* φ *из отрезка* $[0,\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_{\eta}^{\varphi} v(re^{i\theta}) \sin\theta \, d\theta\,. \tag{0.22}$$

Обозначим соответствующий класс δ-субгармонических функций в.р.р. относительно $\gamma(r)$ через $J\delta(\gamma(r))^o$. Через $JS(\gamma(r))^o$ обозначим класс истинно-субгармонических функций в.р.р. из $J\delta(\gamma(r))^o$.

Пусть $\widetilde{L}^\infty[0,\pi]$ – банахово подпространство $L^\infty[0,\pi]$ порожденное семейством характеристических функций всех отрезков из $[0,\pi]$. По теореме Кантора о равномерной непрерывнсти $C[0,\pi] \subset \widetilde{L}^\infty[0,\pi]$. Обозначим через $\mathcal{L}[0,\pi]$ любое из пространств $C[0,\pi]$, $\widetilde{L}^\infty[0,\pi]$ или $L^1[0,\pi]$. Следующая теорема получена в [20].

Теорема 0.10 *Пусть* $v \in J\delta$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $v \in J\delta(\gamma(r))^o$;

(ii) *$v \in J\delta(\gamma(r))$ и для всех $k \in \mathbb{N}$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,v)}{\gamma(r)} = c_k\,; \tag{0.23}$$

(iii) *мера $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ-плотность и для любой функции ψ из $\mathcal{L}[0,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_0^\pi \psi(\theta) v(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta\,.$$

Здесь $\lambda(v)$=$\lambda_+(v) - \lambda_-(v)$ – полная мера, соответствующая функции v и $c_k(r,v)$ – коэффициенты Фурье функции v.

Заметим, что если v из класса $JS(\gamma(r))^o$, то ограничение на меру $\lambda_-(v)$ в (iii) отсутствует ($\lambda_-(v) \equiv 0$).

6.3 Индикатор дельта-субгармонической функции вполне регулярного γ-роста

Следуя Кондратюку введем следующее определение.

Определение 0.22 *Пусть $v \in J\delta(\gamma(r))^o$, а c_k определены равенствами (3.4). Тогда функция*

$$h(\theta, v) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\theta$$

называется индикатором функции v.

Существование такой функции и ее принадлежность классу $L2[0, 2\pi]$ мы покажем ниже Нам понадобится лемма о пиках Пойя [?].

Лемма 0.7 *Пуст ψ_1, ψ_2, ψ – положительные непрерывные функции от r на луче $[r_0, \infty)$ такие, что отношение $\psi_2(r)/\psi_1(r)$ возрастает и*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\psi_1(r)} = \infty, \quad \limsup_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\psi_2(r)} = 0\,.$$

Тогда существует такая последовательность $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, *что при* $r = r_n$ *выполняется*

$$\frac{\psi(t)}{\psi_1(t)} \le \frac{\psi(r_n)}{\psi_1(r_n)}, \quad r_0 \le t \le r_n,$$
$$\frac{\psi(t)}{\psi_2(t)} \le \frac{\psi(r_n)}{\psi_2(r_n)}, \quad r_n \le t < \infty\,.$$

Теорема 0.11 *Пусть функция* v *принадлежит классу* $J\delta(\gamma(r))^o$. *Тогда индикатор* $h(\theta, v)$ *принадлежит* $L_2[0,\pi]$.

Доказательство. Из (0.16) следует [16], что порядок $\beta := p[\gamma] < \infty$. Тогда $\lim_{r\to\infty} \gamma(r)/r^k = 0$ для всех $k > \beta$. Из неравенства $|c_k(r,v)| \le A\gamma(r)$ и формулы для коэффициентов Фурье [14] при $r > r_0$

$$c_k(r,v) = c_k(r_0,v)\left(\frac{r}{r_0}\right)^k + \frac{2r^k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

получаем

$$c_k(r,v) = -\frac{2r^k}{\pi}\int\limits_{r}^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k > \beta\,. \tag{0.24}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (0.24), получаем для всех $k > \beta$

$$c_k(r,v) = -\frac{1}{\pi k r^k}\iint\limits_{C_+(0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) - \frac{r^k}{\pi k}\iint\limits_{|\zeta|\ge r} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im\zeta}\,d\lambda(\zeta),\ \zeta = \tau e^{i\varphi}\,. \tag{0.25}$$

Положим $\tilde\lambda = |\lambda|$,

$$N_1(r,v) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde\lambda(t)}{t^3}\,dt\,.$$

Из теоремы 0.9 следует, что мера $\tilde\lambda$ имеет кончную γ-плотность. Из (0.25) получаем неравенство

$$|c_k(r,v)| \le \frac{1}{\pi r^k}\int\limits_0^r t^{k-1}\,d\tilde\lambda(t) + \frac{r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{d\tilde\lambda(t)}{t^{k+1}}, \quad k > \beta\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям в правой части этого неравенства, получаем для всех $k > \beta$

$$|c_k(r,v)| \le \frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\tilde\lambda(t)}{t^{k+2}}\,dt - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k-2}\tilde\lambda(t)\,dt =$$

$$\frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{dN_1(t)}{t^{k-1}} - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k+1}\,dN_1(t) = \tag{0.26}$$

$$\frac{(k^2-1)}{\pi}\left\{\int\limits_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k N_1(t)\,dt + \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k N_1(t)\,dt\right\} - \frac{2k}{\pi} rN_1(r)\,.$$

Пусть $\limsup\limits_{r\to\infty} N_1(r)/r^{\beta-\varepsilon} = \infty$ для всех $\varepsilon > 0$. Применяя лемму 0.7 к функциям $\psi(r) = N_1(r)$, $\psi_1(r) = r^{\beta-\varepsilon}$, $\psi_2(r) = r^{\beta+\varepsilon}$, находим последовательность $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, такую, что

$$N_1(t) \le \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\beta-\varepsilon}, r_0 \le t \le r_n; \quad N_1(t) \le \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\beta+\varepsilon}, r_n \le t < \infty\,. \tag{0.27}$$

Используя (0.27), получим из (0.26)

$$|c_k(r_n,v)| \le \frac{2k}{\pi}N(r_n)\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2} - 1\right\} \le$$

$$\frac{Ak}{\pi}\gamma(r_n)\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2} - 1\right\}, \quad k > \beta\,.$$

Из последнего неравенства следует, что при $k > \beta$

$$|c_k| = \lim_{r\to\infty}\frac{|c_k(r,v)|}{\gamma(r)} = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_k(r_n,v)|}{\gamma(r_n)} \le \frac{Ak}{\pi}\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2} - 1\right\}\,.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ любое число, то

$$|c_k| \le \frac{Ak}{\pi}\left\{\frac{\beta^2+\beta}{k^2-\beta^2}\right\}, \quad k > \beta\,.$$

Выводы

В работе рассматриваются суб- и дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости. Техническим аппаратом при изучении классов таких функций является теория полной меры, который была разработана А. Ф. Гришиным [9, 10]. Используя теорию полной меры и метод рядов Фурье, К. Г. Малютин [18, 19] получил ряд фундаментальных результатов для суб- и дельта-субгармонических функций произвольного гамма-роста, которые являются аналогами соответствующих результатов Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза. Третий раздел является логическим продолжением работ К. Г. Малютина и Н. Садыка и посвящён теории роста суб- и дельта-субгармонических функций в полуплоскости. Классическая теорема А. А. Кондратюкаа утверждает, что коэффициенты Фурье любой мероморфной функции f порядка γ регулярно растут на бесконечности. Теорема 0.10 является новой теоремой такого типа.

Как и в случае плоскости важным результатом третьего раздела является и теорема 0.11, обеспечивающая принадлежность идикатора $h(\theta, v)$ классу $L_2[0, \pi]$.

В третьем разделе мы предполагали при определении классов растущих функций, что функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (3.5). Оно необходимо, если мы хотим использовать для определения роста классическую неванлинновскую характеристику $T(r, v)$, т.к. неравенство $T(r, v) \leq A\gamma(Br)/r$ уже накладывает это ограничение на функцию роста γ. Если мы хотим рассматривать общий случай, без всяких ограничений на функцию роста (например, случай $\gamma(r) = r^\rho$, $0 < \rho < 1$), то мы должны использовать более сложную характеристику, чем неванлинновская, а именно $v \in J\delta(\gamma(r))$, если

$$m(r_2, v) + m(r_1, -v) + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt \le \frac{A}{r_1}\gamma(Br_1) + \frac{A}{r_2}\gamma(Br_2)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$. В этом случае все утверждения нашей работы имеют место, а их доказательство автоматически повторяет приведенные выше рассуждения.

Заметим, что это определение и определение, данное выше, совпадают если функция роста удовлетворяет условию (3.5).

Введенное в статье определение порядка, в случае когда функция v является субгармонической в полуплоскости и $\gamma(r) = r^\rho$, совпадает с определением введенным Л. И. Ронкиным [22] и отличается от определения формального порядка, введенного А. Ф. Гришиным [8], и эквивалентных между собой определений порядка Е. Титчмарша и Н. В. Говорова [3]. Однако, все эти понятия совпадают при $\rho > 1$. Качественное их отличие возникает при $\rho \le 1$. В этом случае наше определение является наиболее широким, т.е. субгармоническая функция конечного порядка в смысле А. Ф. Гришина или Титчмарша–Говорова является функцией конечного порядка в смысле определения данного в статье.

Перечень ссылок

[1] Азарин В. С. *Об асимптотическом поведении субгармонических функций* // Матем. сб. – 1979. – Т. 108, №2. – С. 147–167.

[2] Васильків Я. В. *Про зростання субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій нескінченного порядку* // Укр. мат. ж. – 2002. – №9. – С. –.

[3] Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 240 с.

[4] Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". – 1968. – Вып. 6. – С. 3–29.

[5] Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". – 1968. – Вып. 7. – С. 59–84.

[6] Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". – 1969. – Вып. 8. – С. 126–135.

[7] Гришин А. Ф. *О множествах регулярности роста целых функций* // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". – 1984. – Вып. 42. – С. 37–43.

[8] Гришин А. Ф. *Субгармонические функции конечного порядка.* – Харьков.: Диссертация, 1992. – 434 с.

[9] Гришин А. Ф. *Непрерывность и асимтотическая непрерывность субгармонических функций* // Матем. физика, анализ, геом. – 1994. – Т. 1, №2. – С. 193–215.

[10] Гришин А. Ф. *Непрерывность и асимтотическая непрерывность субгармонических функций* // Матем. физика, анализ, геом. – 1995. – Т. 2, №2. – С. 177–193.

[11] Гришин А. Ф., Руссаковский А. М. *Свободная интерполяция целыми функциями* // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". – 1985. – Вып. 44. – С. 32–42.

[12] Дынкин Е. Б. *Марковские процессы.*–М.: ГИФМЛ,1984.–830 с.

[13] Кондратюк А. А. *Ряды Фурье и мероморфные функци.* – Львов: Вища школа, 1988. – 196 с..

[14] Кондратюк А. А. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста* // Матем. сб. – 1978. – Т. 106, №3. – С. 386–408.

[15] Кондратюк А. А. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II* // Матем. сб. – 1980. – Т. 113, №1. – С. 118–132.

[16] Кондратюк А. А. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III* // Матем. сб. – 1983. – Т. 120, №3. – С. 331–343.

[17] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций..* – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.

[18] Малютин К. Г. *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции* // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – Т. 3. – С. 146–157.

[19] Малютин К.Г. *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №6. – С. 51–70.

[20] Малютин К. Г., Садык Н. *Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости* // Доклады РАН. – 2001. – Т. 380, №3. – С. 1–3.

[21] Привалов И. И. *Субгармонические функции.* – Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1937. – 199 с.

[22] Ронкин Л. И. *Регулярность роста и D'-асимптотика голоморфных функций в $\mathbb{C}^+$* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – №2. – С. 16–28.

[23] Хант Дж. А. *Марковские процессы и потенциалы.* – М.: Изд. иностр. литер., 1962. – 278 с.

[24] Хейман У., Кеннеди П. *Субгармонические функции.* – М.: Мир, 1980. – 304 с.

[25] Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении* 1. – М.: "Мир", 1985. – 262 с.

[26] Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении* 2. – М.: "Мир", 1985. – 400 с.

[27] Doob J. L. *Classical Potential Theory and Its Probabiliste Counterpart.* – New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. – 830 p..

[28] Ehrenpreis L. *Mean periodic functions* // Amer. J. Math. – 1955. – Vol 77, No 2. – P. 293–326.

[29] Fedorov M. A., Grishin A. F. *Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. – 1998. – Vol 1, No 3. – P. 1–49.

[30] Haan L. *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes* // Math.Centre Tracts.–1970.–No. 32.

[31] Hayman W. K. *Subharmonic functions. V.* 2. – London, Academic Press Limited, 1989. – 247 p.

[32] Hayman W. K. *Subharmonic functions. V.* 3. – London, Academic Press Limited, 1989. – 342 p.

[33] Huber A. *On subharmonic functions and differntial geometry in the large Comm* // Math. Helv. – 1957. – No. 32. – P. 1–2, 13–72.

[34] Ito Jun-Iti. *Subharmonic functions in half-plane* // Trans. Am. Math. Soc. – 1967. – V. 129, No. 3. – P. 479–499.

[35] Khrystiyanyn A. Ya. *One criterion of γ-type finiteness of an analytic in a half-plane function* // Matematychni studii. – 2004. – V. 21, №2. – P. 151–169.

[36] Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A. *On the Nevanlinna theory for meromorphic function on annuli. I* // Matematychni studii. – 2005. – V. 23, №1. – P. 19–30.

[37] Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A. *On the Nevanlinna theory for meromorphic function on annuli. II* // Matematychni studii. – 2005. – V. 24, №1. – P. 57–68.

[38] Miles J.B. *Quotient representations of meromorphic functions* // J. d′ Analyse Math. – 1972. – V. 25. – P. 371–388.

[39] Miles J.B. *On entire functions of infinite order with radially distributed seros* // Quart. J. Math. Oxford. – 1973. – V. 24. – P. 377–383.

[40] Miles J.B., Shea D. F. *An extremal problem in value distribution theory* // Pasif. J. Math. – 1979. – V. 81, No 1. – P. 131–157.

[41] Rao N.V., Shea D. F. *Growth problems for subharmonic functions of finite order in space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 230. – P. 347–370.

[42] Rubel L. A. *Entire and meromorphic functions.* – New York–Berlin–Heidelberg, Springer, 1996. – 188 p.

[43] Rubel L. A. *Fourier series method for entire functions* // Duce Math. J. – 1963. – V. 30. – P. 437–442.

[44] Rubel L. A. *A survey of a Fourier series method for meromorphic functions* // Lect. Noth. in Math. – 1973. – V. 336. – P. 51–62.

[45] Rubel L.A., Taylor B. A. *Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – V. 96. – P. 53–96.