УДК 539.3

В. Н. Долгих, Л. А. Фильштинский

МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ, АРМИРОВАННОЙ ТОНКИМИ ЛЕНТАМИ

Теория волокнистых композиционных материалов (КМ) с регулярной структурой содержится в работах [1, 2, 5]. Свойства КМ, армированных лентами, исследуются в статьях [4, 9].

В данной статье результаты, полученные в работе [4], обобщаются на КМ с анизотропной матрицей.

§ 1. Рассмотрим упругую анизотропную среду, армированную двоякопериодической (в смысле геометрии и упругих характеристик) системой групп тонкостенных прямолинейных включений. Пусть среда обладает плоскостью упругой симметрии, а внешнее нагружение реализуется в виде средних напряжений $\sigma^0{}_x$, $\sigma^0{}_y$, $\tau^0{}_{xy}$, действующих в этой плоскости.

В случае плоской деформации такой среды будем говорить о поперечной (по отношению к направлению армирования) деформации КМ, армированного в направлении оси oz лентами. Плоское напряженное состояние указанной среды соответствует задаче о деформации неограниченной пластины, усиленной регулярной системой впаянных или вклеенных тонких ребер (стрингеров), жесткость которых распределена симметрично относительно срединной плоскости пластины. В обоих случаях будем считать, что в плоскости xoy включение — одномерный континуум, работающий лишь на растяжение—сжатие, с жесткостью, значительно превышающей жесткость прилегающей среды.

Пусть ω_1 и ω_2 ($\mathrm{Im}\,\omega_1 = 0$; $\mathrm{Im}\,\omega_2/\omega_1 > 0$) — основные периоды структуры; D — область, занятая средой. Граница L области D состоит из конгруэнтных групп различных параллельных отрезков L^j_{mn} ($j = 1, 2, \ldots, k$; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), имеющих сосредоточенные жесткости на растяжение—сжатие (рис. 1). Внутри основного параллелограмма периодов $UL^j_{00} = l_{00}$, а в любом параллелограмме, конгруэнтном основному, $UL^j_{mn} = l_{mn} \equiv l_{00} \pmod{\omega_1, \omega_2}$. Отрезок L^j_{00} характеризуется концевыми точками a_j и b_j ($\mathrm{Im}\,a_j = \mathrm{Im}\,b_j$; $j = 1, 2, \ldots, k$).

Задача заключается в изучении напряженного состояния среды и включений, а также в описании жесткости всей системы в целом. Поскольку толщина включений мала, считаем, что при переходе через L смещения u, v и нормальные напряжения σ_y непрерывны, а касательные образуют скачок $\tau_{xy}{}^+ - \tau_{xy}{}^- = -q_0(t)$, $t \in L$ (значками «+» и «—» отмечены граничные значения, принимаемые соответственно на верхнем и нижнем берегах включения).

Из уравнения равновесия элемента включения единичной ширины (в направлении оси oz) получаем выражение для погонного (на единицу ширины зоны контакта в направлении оси oz) нормального усилия в произвольном сечении включения

$$p(x) = -\int\limits_x^{b_j} q_0(t)\,dt \quad (x \in L_{00}^j). \tag{1.1}$$

Комплексные потенциалы $\varphi_\nu(z_\nu)$ ($\nu=1,\ 2$), определяющие напряженное состояние в анизотропной среде [7] и удовлетворяющие условиям двоякопериодичности напряжений в D, а также обеспечивающие существование на L скачка касательных напряжений $q_0(t)$, представим в форме

$$\varphi_\nu(z_\nu) = A_\nu \int\limits_{l_{00}^{(\nu)}} q_0(t)\ln\sigma(z_\nu - t_\nu)\,dt_\nu + c_\nu z_\nu \quad (\nu = 1, 2);$$

$$\operatorname{Im} q_0(t) = 0; \quad \int\limits_{L_{00}^j} q_0(t)\,dt = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, k); \ z_\nu = \operatorname{Re} t + \mu_\nu \operatorname{Im} t;$$

$$\operatorname{Im}(A_1 + A_2) = 0; \quad \operatorname{Im}(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2) = (4\pi)^{-1}; \tag{1.2}$$

$$\operatorname{Im}(\mu_1^2 A_1 + \mu_2^2 A_2) = \frac{a_{16}}{a_{11}}\frac{1}{4\pi}; \ \operatorname{Im}\left(\frac{A_1}{\mu_1} + \frac{A_2}{\mu_2}\right) = -\frac{a_{12}}{a_{22}}\frac{1}{4\pi}.$$

Здесь $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса [3].

Вычисляя компоненты главного вектора усилий, действующих на гранях параллелограмма периодов, и полагая среднее вращение фундаментальной ячейки равным нулю, получаем

$$\begin{gathered}
2\operatorname{Re}(c_1 + c_2) = \sigma_y^0 + 2\operatorname{Re}(\delta_1^{(1)} A_1 + \delta_1^{(2)} A_2)\, a/\omega_1;\\
2\operatorname{Re}(\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2) = -\tau_{xy}^0 + 2\operatorname{Re}(\mu_1\delta_1^{(1)} A_1 + \mu_2\delta_1^{(2)} A_2)\, a/\omega_1;\\
2\operatorname{Re}(\mu_1^2 c_1 + \mu_2^2 c_2) = \sigma_x^0 + \frac{a}{\omega_1}\left[\frac{1}{\operatorname{Im}\omega_2} + 2\operatorname{Re}(\mu_1^2\delta_1^{(1)} A_1 + \mu_2^2\delta_1^{(2)} A_2)\right];\\
2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{a_{22}}{\mu_1} - \mu_1^3 a_{11}\right)c_1 + \left(\frac{a_{22}}{\mu_2} - \mu_2^3 a_{11}\right)c_2\right] = a_{26}\sigma_y^0 - a_{16}\sigma_x^0 +\\
+\frac{a}{\omega_1}\left\{2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{a_{22}}{\mu_1} - \mu_1^3 a_{11}\right)\delta_1^{(1)} A_1 + \left(\frac{a_{22}}{\mu_2} - \mu_2^3 a_{11}\right)\delta_1^{(2)} A_2\right] - \frac{a_{16}}{\operatorname{Im}\omega_2}\right\};\\
a = \int\limits_{l_{00}} q_0(t)\,t\,dt; \quad \delta_1^{(k)}\omega_2^{(k)} - \delta_2^{(k)}\omega_1^{(k)} = 2\pi i;\\
\omega_\nu^{(k)} = \operatorname{Re}\omega_\nu + \mu_k \operatorname{Im}\omega_\nu; \quad \delta_\nu^{(k)} = 2\zeta(\omega_\nu^{(k)}/2) \ (\nu, k = 1, 2).
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Коэффициенты a_{ij} ($i,\ j=1,\ 2,\ 6$) характеризуют упругие свойства среды [7].

§ 2. Приравнивая деформацию e_x среды и включений на l_{00}, получаем систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно $q_0(t)$

$$\int\limits_{l_{00}} K(t - t_0)\,q_0(t)\,dt + \beta_j^* \int\limits_{t_0}^{b_j} q_0(t_j)\,dt_j + M\{q_0(t)\} = f \quad (j = 1, 2, \ldots, k);$$

$$K(t - t_0) = \frac{1}{\operatorname{Re}(p_1 A_1 + p_2 A_2)}\operatorname{Re}[p_1 A_1\zeta(t_1 - t_{10}) + p_2 A_2\zeta(t_2 - t_{20})]; \tag{2.1}$$

$$M\{q_0(t)\} = -\frac{a}{2\omega_1 \operatorname{Re}(p_1A_1 + p_2A_2)}\left[\frac{a_{11}}{\operatorname{Im}\omega_2} + 2\operatorname{Re}(p_1A_1\delta_1^{(1)} + p_2A_2\delta_1^{(2)})\right];$$

$$f = \frac{a_{11}\sigma_x^0 + a_{12}\sigma_y^0 + a_{16}\tau_{xy}^0}{2\operatorname{Re}(p_1A_1 + p_2A_2)};$$

$$\beta_j^* = \begin{cases} \dfrac{1}{2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)}\dfrac{\delta}{E_jF_j} \text{ — для пластинки со стрингерами;} \\ \dfrac{1}{2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)}\dfrac{1}{E_jd_j} \text{ — для композиционного материала.} \end{cases}$$

Здесь δ — толщина пластинки; E_j — модуль Юнга j-го включения; d_j — толщина ленты; F_j — площадь поперечного сечения j-го стрингера.

К системе (2.1) необходимо присовокупить условия равновесия включений

$$\int\limits_{L_{00}^j} q_0(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{2.2}$$

Пусть в пределах параллелограмма периодов имеется лишь одно включение длиной $2l$ ($k=1$, $a_1=-l$, $b_1=l$). Разлагая дзета-функцию в степенной ряд, получаем сингулярное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{q(\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0} - \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}\Lambda_j\int\limits_{-1}^{1}q(\xi)(\xi-\xi_0)^{2j+1}d\xi -$$

$$-\beta\int\limits_{\xi_0}^{1}q(\xi)\,d\xi = f \; (-1 \leqslant \xi_0 \leqslant 1);\; q(\xi) = q_0(t);$$

$$\Lambda_0 = \frac{\omega_1}{2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)}\left[\frac{a_{11}}{\operatorname{Im}\omega_2} + 2\operatorname{Re}(p_1A_1\delta_1^{(1)} + p_2A_2\delta_1^{(2)})\right];$$

$$\Lambda_j = \frac{\operatorname{Re}(p_1A_1g_{j+1}^{(1)} + p_2A_2g_{j+1}^{(2)})}{\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)};\; g_{j+1}^{(\nu)} = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m+n\omega_2^{(\nu)}/\omega_1)^{2j+2}}; \tag{2.3}$$

$$f = \frac{a_{11}\sigma_x^0 + a_{12}\sigma_y^0 + a_{16}\tau_{xy}^0}{2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)};\; \lambda = \frac{2l}{\omega_1};\quad \xi = \frac{t}{l};$$

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)}\dfrac{\delta l}{E_1F_1} \text{ — для пластинки со стрингерами;} \\ \dfrac{1}{2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)}\dfrac{l}{E_1d_1} \text{ — для композиционного материала.} \end{cases}$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование распространяется на все m, n, за исключением $m=n=0$.

Для получения численного решения уравнения (2.3) можно воспользоваться квадратурными формулами, приведенными в работах [4, 6].

§ 3. Для определения макроскопических упругих параметров армированной среды найдем закон связи между средними напряжениями и средними деформациями в структуре.

Введем средние деформации параллелограмма периодов [8]

$$\langle e_x\rangle=\frac{1}{\omega_1}u\,|_z^{z+\omega_1};\ \langle e_y\rangle=\frac{1}{|\omega_2|\sin\alpha}v\,|_z^{z+\omega_2}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\omega_1}v\,|_z^{z+\omega_1};$$

$$\langle\gamma_{xy}\rangle=\frac{1}{|\omega_2|\sin\alpha}u\,|_z^{z+\omega_2}+\frac{1}{\omega_1}v\,|_z^{z+\omega_1}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\omega_1}u\,|_z^{z+\omega_1};\ \alpha=\arg\omega_2, \tag{3.1}$$

где $u\,|_z^{z+\omega_\nu}$ обозначает приращение функции $u(z)$ при переходе от точки z к точке $z+\omega_\nu$ $(v=1,2)$.

Решение уравнения (2.3) можно записать

$$q(\xi)=(a_{11}\sigma_x^0+a_{12}\sigma_y^0+a_{16}\tau_{xy}^0)\,\tilde q(\xi), \tag{3.2}$$

причем $\tilde q(\xi)$ — решение (2.3) при $f=[2\operatorname{Re}(p_1A_1+p_2A_2)]^{-1}$.

Отсюда следует, что

$$a=l^2(a_{11}\sigma_x^0+a_{12}\sigma_y^0+a_{16}\tau_{xy}^0)\,\tilde a;\ \tilde a=\int_{-1}^{1}\tilde q(\xi)\,\xi d\xi. \tag{3.3}$$

Вычисляя в (3.1) приращения правых частей и учитывая (1.3), получаем закон связи между средними деформациями и средними напряжениями в структуре

$$\langle e_x\rangle=\frac{1}{\langle E_{11}\rangle}\sigma_x^0-\frac{\langle\nu_{12}\rangle}{\langle E_{22}\rangle}\sigma_y^0+\frac{\langle\eta_{1,12}\rangle}{\langle G_{12}\rangle}\tau_{xy}^0;\quad \langle e_y\rangle=-\frac{\langle\nu_{21}\rangle}{\langle E_{11}\rangle}\sigma_x^0+$$

$$+\frac{1}{\langle E_{22}\rangle}\sigma_y^0+\frac{\langle\eta_{2,12}\rangle}{\langle G_{12}\rangle}\tau_{xy}^0;\ \langle\gamma_{xy}\rangle=\frac{\langle\eta_{12,1}\rangle}{\langle E_{11}\rangle}\sigma_x^0+\frac{\langle\eta_{12,2}\rangle}{\langle E_{22}\rangle}\sigma_y^0+\frac{1}{\langle G_{12}\rangle}\tau_{xy}^0. \tag{3.4}$$

Макроскопические упругие параметры здесь имеют вид

$$\frac{1}{\langle E_{11}\rangle}=a_{11}(1+a_{11}a_0);\quad \frac{\langle\nu_{12}\rangle}{\langle E_{22}\rangle}=-a_{12}(1+a_{11}a_0);$$

$$\frac{\langle\eta_{1,12}\rangle}{\langle G_{12}\rangle}=a_{16}(1+a_{16}a_0);\ \frac{1}{\langle E_{22}\rangle}=a_{22}\left(1+\frac{a_{12}^2}{a_{22}}a_0\right);$$

$$\frac{\langle\eta_{2,12}\rangle}{\langle G_{12}\rangle}=a_{26}\left(1+\frac{a_{12}a_{16}}{a_{26}}a_0\right);\ \frac{1}{\langle G_{12}\rangle}=a_{66}\left(1+\frac{a_{16}^2}{a_{66}}a_0\right); \tag{3.5}$$

$$a_0=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\frac{\omega_1\tilde a}{|\omega_2|\sin\alpha};\ \alpha=\arg\omega_2;\ \langle\nu_{12}\rangle\langle E_{11}\rangle=\langle\nu_{21}\rangle\langle E_{22}\rangle;$$

$$\langle\eta_{1,12}\rangle\langle E_{11}\rangle=\langle\eta_{12,1}\rangle\langle G_{12}\rangle;\ \langle\eta_{2,12}\rangle\langle E_{22}\rangle=\langle\eta_{12,2}\rangle\langle G_{12}\rangle.$$

Рассмотрим пример. Пусть пластинка из стеклопластика АГ-4С ($E_{11}=2{,}06\times10^{10}$Па; $E_{22}=1{,}57\times10^{10}$Па; $\nu_{12}=0{,}07$; $G_{12}=4{,}12\times10^9$Па) усилена стрингерами в направлении, составляющем угол $\pi/6$ с направлением наибольшей жесткости. Пластина нагружена усилиями $\sigma_x^0=1$, $\sigma_y^0=\tau_{xy}^0=0$. Распределение «усилий»

$$P^*(\xi)=\frac{p(l\xi)}{l}=-\int_{\xi}^{1}q(\zeta)\,d\zeta\quad(\xi=t/l)$$

по полудлине стрингера в зависимости от относительного размера области $\lambda = 2l/\omega_1$ и параметра $\Omega = \delta l/(a_{11}E_1F_1)$ изображено на рис. 2 (кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\lambda = 0{,}1$; $0{,}8$; $0{,}98$). Изменение макроскопических упругих параметров в функции от тех же величин показано на рис. 3, причем на верхнем поле рисунка (выше единицы) сплошные линии — $\langle E_{11}\rangle/E_{11}$, штриховые — $\langle E_{22}\rangle/E_{22}$, на нижнем поле сплошные линии —

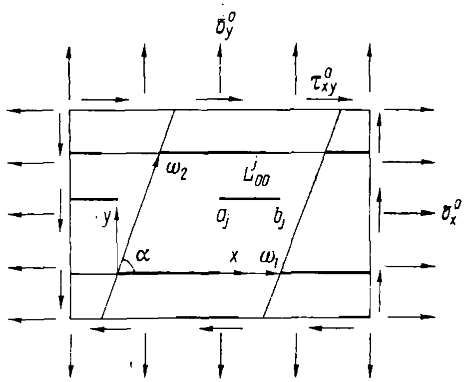

Рис. 1

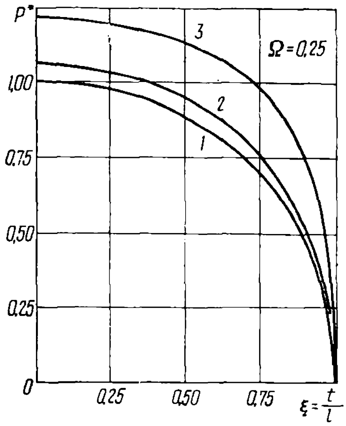

Рис. 2

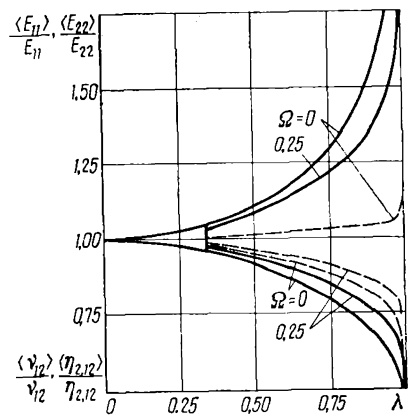

Рис. 3

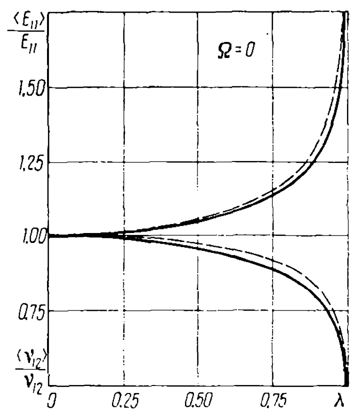

Рис. 4

$\langle \nu_{12}\rangle/\nu_{12}$, штриховые — $\langle \eta_{2,12}\rangle/\eta_{2,12}$. Значения $\langle G_{12}\rangle/G_{12}$, $\langle \eta_{1,12}\rangle/\eta_{1,12}$ мало отличаются соответственно от $\langle E_{22}\rangle/E_{22}$, $\langle \nu_{12}\rangle/\nu_{12}$ и на рисунке не показаны. Расчеты проводились для $\omega_2 = 1{,}35i\omega_1$.

На рис. 4 дано сравнение результатов расчетов эффективных упругих модулей $\langle E_{11}\rangle/E_{11}$, $\langle \nu_{12}\rangle/\nu_{12}$ по предлагаемой в настоящей статье методике (сплошные линии) с результатами точной теории КМ с волокнами произвольного поперечного сечения (штриховые линии) [5]. Расчеты проводились для пластины из АГ-4С, усиленной в направлении наибольшего модуля упругости бесконечно жесткими стрингерами, $\Omega = 0$ (сплошные линии). Штриховыми линиями обозначены результаты расчетов для бесконечно жестких эллиптических включений при отношении большой полуоси эллипса к малой 10. Толщина включения равна толщине пластины, $\omega_2 = 2i\omega_1$. Результаты для остальных макроскопических модулей при $\lambda=0{,}98$ отличаются не более чем на 3,8%.

§ 4. В заключение приведем соображения о корректности принятой модели контакта, для этого покажем, что характер особенности в касательных напряжениях в данной постановке и в точном решении один и тот же; усилие, передаваемое j-му включению через торцы a_j, b_j, равно нулю.

Для этого проанализируем точное решение задачи теории упругости для эллиптического включения в анизотропной среде под действием однородного поля напряжений на бесконечности [10]. В данном случае потенциалы для среды запишем в виде

$$\Phi_m(z_m) = -\frac{d_m}{\sqrt{z_m^2 - l^2 - \mu_m^2 b^2}}\,\frac{l - i\mu_m b}{(z_m + \sqrt{z_m^2 - l^2 - \mu_m^2 b^2})} + c_m \quad (m = 1, 2) \qquad (4.1)$$

Здесь l, b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса; c_m, d_m — постоянные, зависящие от однородного поля напряжений на бесконечности, упругих и геометрических характеристик среды и включения.

Переходя в выражении (4.1) и соотношениях для d_m к пределу при b, стремящемся к нулю, получаем комплексные потенциалы для анизотропной среды с упругим включением на отрезке $[-l, l]$. Вычисляя компоненту X главного вектора усилий, действующих со стороны среды на часть включения длиной $[t, l]$, получаем

$$X = \int_t^l (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)\,dx + r\int_\gamma (\sigma_x \cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta)\,d\theta, \qquad (4.2)$$

где γ — круговой контур малого радиуса r, охватывающий точку $+l$; θ — угловая координата точки на контуре γ.

Можно показать, что при $r\to 0$ второй интеграл в (4.2) обращается в нуль. Проводя необходимое интегрирование, получаем

$$X = \int_t^l (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)\,dx = 4\sqrt{1 - \left(\frac{t}{l}\right)^2}\ \mathrm{Im}\sum_{m=1}^{2} \mu_m d_m. \qquad (4.3)$$

Постоянная интегрирования в этой формуле, определенная из условия равновесия включения, равна нулю.

Из формул (4.1) и (4.3) следует:

1. Характер особенностей касательных напряжений на концах включений в точной и обсуждаемой постановках совпадает.

2. Усилие, передаваемое через торец включения, равно нулю, что подтверждает результаты работы [11].

Макроскопические упругие параметры, полученные из точного и приближенного решения, практически совпадают (см. рис. 4). Отсюда вытекает, что для указанного отношения полуосей эллипса макропараметры весьма слабо зависят от относительной толщины включения, что говорит в пользу модели контакта по линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями.— Киев: Наук. думка, 1971.— 229 с.
2. Гринга уз М. Г., Фильштинский Л. А. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала.— Прикл. математика и механика, 1975, **39**, № 3, с. 537—546.
3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.— М.: Наука, 1968.— 648 с.

4. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 2, с. 158—164.
5. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Теория линейно-армированного композиционного материала с анизотропными компонентами структуры.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1978, № 6, с. 53—63.
6. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 4, с. 715—718.
7. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.— 355 с.
8. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой.— Прикл. математика и механика, 1973, **37**, № 2, с. 262—273.
9. Chen P. E., Nielsen L. E. Mechanical properties of tape composites, Kolloid — Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere, 1969, **235**, N 1, p. 1174—1181.
10. Chen W. T. On an elliptic elastic inclusion in an anisotropic medium. Quart. Journ. Mech. and applied math., 1967, **20**, N 3, p. 307—313.
11. Muki R., Sternberg E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semiinfinite elastic sheet.— Trans. ASME. Ser. E, 1968, **35**, N 4, p. 737—746.

Сумский филиал
Харьковского политехнического института

Поступила
10.I 1977 г.