УДК 519.66

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ЧИСЛОВОГО ПРОСТРАНСТВА С МАГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Л. П. Андреев,
Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт "Искра", г. Луганск

В статье рассматривается двумерное числовое пространство в виде магической матрицы с неординарными свойствами и подробно описан метод ее построения. Рассматриваются структуры материнской и дочерних магических матриц. Подробно описаны приложения магических матриц при преобразовании координатной системы в n-мерном векторном пространстве. Описаны методы сжатия матричной информации и определены законы распределений чисел в магических матрицах.

Ключевые слова: *матрица, преобразование координатной системы, векторное пространство, магическое пространство, сжатие матричной информации.*

У статті розглянуто двовимірний числовий простір у вигляді магічної матриці з неординарними властивостями і детально описано метод її побудови. Розглядаються структури материнської і дочірніх магічних матриць. Детально описані додатки магічних матриць при перетворенні координатної системи в n-вимірному векторному просторі. Описано методи стиснення інформації і визначено закони розподілів чисел у магічних матрицях.

Ключові слова: *матриця, перетворення координатної системи, векторний простір, стиснення інформації.*

ВВЕДЕНИЕ

В результате проведенных научно-исследовательских работ по поиску новых математических методов, которые позволили бы сжимать числовую информацию без потерь (loss-les), появилась необходимость в создании специальной алгебры, которая была названа «*магическая алгебра*». Основными математическими объектами, над которыми проводятся вычислительные операции в *магической алгебре*, являются так называемые *магические матрицы*, *магические векторы* и *магическое пространство*. Поэтому алгебра получила название «*магическая алгебра*». Словосочетания *магическая матрица, магический вектор, магическое пространство* следует понимать как волшебные, непривычные, неподдающиеся известным правилам, описания. В настоящее время *магическая алгебра* находится в начальной стадии своего развития. В предлагаемой статье подробно описан метод построения *двумерного числового пространства с магической* структурой, его основные свойства и возможные приложения. *Магическая матрица* – это система элементов (чисел) a_{ij}, расположенных в таблице $m \times m$ и имеющих *магическую* структуру. Для краткости изложения двумерное числовое пространство с *магической* структурой будем называть *магической матрицей*, если суммы элементов в отдельно взятых диагоналях равны между собой.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

В качестве числового материала применим числа натурального ряда от 0 до 255.

Преобразуем все числа натурального ряда в заданном диапазоне в 8-битовые двоичные коды (байты) и разложим их на четные и нечетные биты. Из четных и нечетных битов сформируем два соответствующих

4-битовых кода (тетрады) и снова преобразуем их в десятичные числа, например (см. рис. 1).

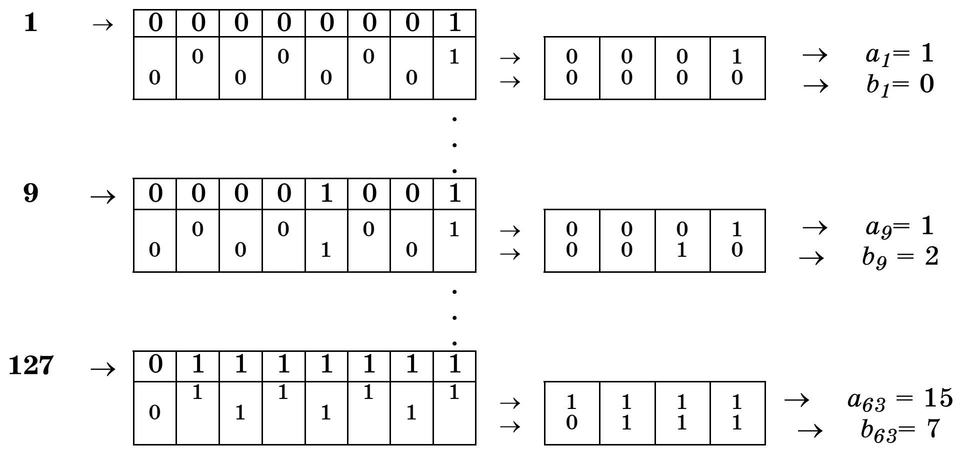

Рисунок 1 – Преобразование чисел натурального ряда в тетрады a_n и b_n

Обозначим число (тетраду, сформированную из четных битов) через a_n, а число (тетраду, сформированную из нечетных битов) через b_n. Здесь индекс n указывает на номер числа из натурального ряда в диапазоне 0–255. Проводя вышеописанные преобразования, сформируем таблицу 1, в которой жирным шрифтом изображены числа натурального ряда, а нежирным шрифтом изображены числа a_n и b_n.

Таблица 1 – Числа натурального ряда с тетрадами a_n и b_n

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	0	1	2	3	2	3
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
4	5	4	5	6	7	6	7	4	5	4	5	6	7	6	7
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
32	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	0	1	2	3	2	3
4	4	5	5	4	4	5	5	6	6	7	7	6	6	7	7
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**
4	5	4	5	6	7	6	7	4	5	4	5	6	7	6	7
4	4	5	5	4	4	5	5	6	6	7	7	6	6	7	7
64	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**
8	9	8	9	10	11	10	11	8	9	8	9	10	11	10	11
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
80	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**
12	13	12	13	14	15	14	15	12	13	12	13	14	15	14	15
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
...															
224	**225**	**226**	**227**	**228**	**229**	**230**	**231**	**232**	**233**	**234**	**235**	**236**	**237**	**238**	**239**
8	9	8	9	10	11	10	11	8	9	8	9	10	11	10	11
12	12	13	13	12	12	13	13	14	14	15	15	14	14	15	15
240	**241**	**242**	**243**	**244**	**245**	**246**	**247**	**248**	**249**	**250**	**251**	**252**	**253**	**254**	**255**
12	13	12	13	14	15	14	15	12	13	12	13	14	15	14	15
12	12	13	13	12	12	13	13	14	14	15	15	14	14	15	15

Анализируя таблицу 1, просматривается некоторая закономерность чисел натурального ряда для одинаковых (равных) a_n, т. е.

просматриваются группы чисел, имеющих равные a_n и нарастающие на единицу b_n. Так, при a_n= 0 получим нулевую группу чисел натурального ряда – **0, 2, 8, 10, 32, 34, ..., 170**, при этом b_n будут соответственно равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 15. При a_n=1 получим первую группу чисел натурального ряда – **1, 3, 9, 11, 33, 35, ..., 171**, при этом b_n будут соответственно равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 15 и т. д. Таким образом, сгруппируем 16 групп для a_n=0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 15. Расположив каждую группу в соответствующую строку (нулевая группа – нулевая строка, первая группа – первая строка и т. д.), построим таблицу 2, в которой жирным шрифтом изображены числа натурального ряда, а нежирным шрифтом изображены числа a_n и b_n, причем верхнее число – a_n, а нижнее под ним – b_n.

Таблица 2 – Числа натурального ряда, объединенные в группы с равными тетрадами a_n и нарастающими на единицу b_n

0 0 0	**2** 0 1	**8** 0 2	**10** 0 3	**32** 0 4	**34** 0 5	**40** 0 6	**42** 0 7	**128** 0 8	**130** 0 9	**136** 0 10	**138** 0 11	**160** 0 12	**162** 0 13	**168** 0 14	**170** 0 15
1 1 0	**3** 1 1	**9** 1 2	**11** 1 3	**33** 1 4	**35** 1 5	**41** 1 6	**43** 1 7	**129** 1 8	**131** 1 9	**137** 1 10	**139** 1 11	**161** 1 12	**163** 1 13	**169** 1 14	**171** 1 15
4 2 0	**6** 2 1	**12** 2 2	**14** 2 3	**36** 2 4	**38** 2 5	**44** 2 6	**46** 2 7	**132** 2 8	**134** 2 9	**140** 2 10	**142** 2 11	**164** 2 12	**166** 2 13	**172** 2 14	**174** 2 15
5 3 0	**7** 3 1	**13** 3 2	**15** 3 3	**37** 3 4	**39** 3 5	**45** 3 6	**47** 3 7	**133** 3 8	**135** 3 9	**141** 3 10	**143** 3 11	**165** 3 12	**167** 3 13	**173** 3 14	**175** 3 15
16 4 0	**18** 4 1	**24** 4 2	**26** 4 3	**48** 4 4	**50** 4 5	**56** 4 6	**58** 4 7	**144** 4 8	**146** 4 9	**152** 4 10	**154** 4 11	**176** 4 12	**178** 4 13	**184** 4 14	**186** 4 15
17 5 0	**19** 5 1	**25** 5 2	**27** 5 3	**49** 5 4	**51** 5 5	**57** 5 6	**59** 5 7	**145** 5 8	**147** 5 9	**153** 5 10	**155** 5 11	**177** 5 12	**179** 5 13	**185** 5 14	**187** 5 15
...															
84 14 0	**86** 14 1	**92** 14 2	**94** 14 3	**116** 14 4	**118** 14 5	**124** 14 6	**126** 14 7	**212** 14 8	**214** 14 9	**220** 14 10	**222** 14 11	**244** 14 12	**246** 14 13	**252** 14 14	**254** 14 15
85 15 0	**87** 15 1	**93** 15 2	**95** 15 3	**117** 15 4	**119** 15 5	**125** 15 6	**127** 15 7	**213** 15 8	**215** 15 9	**221** 15 10	**223** 15 11	**245** 15 12	**247** 15 13	**253** 15 14	**255** 15 15

Если убрать числа a_n и b_n из таблицы 2 и оставить только числа натурального ряда, то будет сформирована таблица 3, в результате анализа которой можно сделать вывод, что эта таблица представляет собой *магическую* матрицу 16-го порядка, т. к. она полностью отвечает всем условиям *магичности* (см. табл. 3).

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Ясно, что основным и главным свойством *магической* матрицы является то, что сумма элементов в отдельно взятых диагоналях одинакова, т. е. суммы, получаемые от сложения чисел в каждой диагонали (основной, вспомогательной и параллельных им диагоналях) равны. Будем называть эту сумму «*магическое число матрицы*» и обозначать символом ξ или числом. Обозначать *магические* матрицы можно любой полужирной большой буквой английского или греческого алфавитов, например:

$$"\mathbf{A}\mathit{mag}\xi" \quad \text{или} \quad "\mathbf{A}\mathit{mag}\,366", \tag{1}$$

где A – *магическая* матрица, у которой mag-символ *магичности* матрицы и ξ – символ *магического числа* или само *магическое число*, например 366.

Двумерное числовое пространство 16-го порядка ($n \times n = 16 \times 16$) с *магической* структурой будем называть *двумерным магическим пространством* или *материнской магической* матрицей.

Таблица 3 – Двумерное магическое пространство или *магическая материнская матрица 16-порядка*

$$\mathbf{A}\,\mathrm{mag}\,2040 = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 2 & 8 & 10 & 32 & 34 & 40 & 42 & 128 & 130 & 136 & 138 & 160 & 162 & 168 & 170 \\
1 & 3 & 9 & 11 & 33 & 35 & 41 & 43 & 129 & 131 & 137 & 139 & 161 & 163 & 169 & 171 \\
4 & 6 & 12 & 14 & 36 & 38 & 44 & 46 & 132 & 134 & 140 & 142 & 164 & 166 & 172 & 174 \\
5 & 7 & 13 & 15 & 37 & 39 & 45 & 47 & 133 & 135 & 141 & 143 & 165 & 167 & 173 & 175 \\
16 & 18 & 24 & 26 & 48 & 50 & 56 & 58 & 144 & 146 & 152 & 154 & 176 & 178 & 184 & 186 \\
17 & 19 & 25 & 27 & 49 & 51 & 57 & 59 & 145 & 147 & 153 & 155 & 177 & 179 & 185 & 187 \\
20 & 22 & 28 & 30 & 52 & 54 & 60 & 62 & 148 & 150 & 156 & 158 & 180 & 182 & 188 & 190 \\
21 & 23 & 29 & 31 & 53 & 55 & 61 & 63 & 149 & 151 & 157 & 159 & 181 & 183 & 189 & 191 \\
64 & 66 & 72 & 74 & 96 & 98 & 104 & 106 & 192 & 194 & 200 & 202 & 224 & 226 & 232 & 234 \\
65 & 67 & 73 & 75 & 97 & 99 & 105 & 107 & 193 & 195 & 201 & 203 & 225 & 227 & 233 & 235 \\
68 & 70 & 76 & 78 & 100 & 102 & 108 & 110 & 196 & 198 & 204 & 206 & 228 & 230 & 236 & 238 \\
69 & 71 & 77 & 79 & 101 & 103 & 109 & 111 & 197 & 199 & 205 & 207 & 229 & 231 & 237 & 239 \\
80 & 82 & 88 & 90 & 112 & 114 & 120 & 122 & 208 & 210 & 216 & 218 & 240 & 242 & 248 & 250 \\
81 & 83 & 89 & 91 & 113 & 115 & 121 & 123 & 209 & 211 & 217 & 219 & 241 & 243 & 249 & 251 \\
84 & 86 & 92 & 94 & 116 & 118 & 124 & 126 & 212 & 214 & 220 & 222 & 244 & 246 & 252 & 254 \\
85 & 87 & 93 & 95 & 117 & 119 & 125 & 127 & 213 & 215 & 221 & 223 & 245 & 247 & 253 & 255
\end{array}\right)$$

Самое удивительное свойство *материнской магической* матрицы является то, что она состоит из квадратных подматриц порядка $m \le n$, которые также являются *магическими матрицами*. Такие матрицы мы будем называть *дочерними магическими* матрицами. *Дочерние магические* матрицы можно не только произвольно выбирать, но и строить в любом месте поля *материнской магической* матрицы, но при условии $m \le n$. Например, выбрав в поле *материнской магической* матрицы элемент a_{ij} и присвоив ему номер a_{11}, двигаемся по вертикали вверх или вниз, формируя тем самым первый столбец матрицы. Далее, двигаясь влево или вправо, выбираем любые столбцы порядка m с сохранением в них закона распределения чисел первого столбца и формируем квадратную матрицу, которая также будет *магической матрицей*. Аналогично для строк, двигаясь по горизонтали влево или вправо, формируем первую строку матрицы порядка m. Далее, двигаясь вверх или вниз, выбираем любые строки порядка m с сохранением в них закона распределения чисел первой строки и формируем квадратную матрицу, которая также будет *магической матрицей*. Другим важным свойством таких матриц является то, что при перемене мест столбцов или строк магическое число матрицы не изменяется.

Рассмотрим признаки магичности *дочерних* матриц 3-го и 4-го порядков, произвольно выбранных из поля *материнской магической* матрицы.

Дочерняя магическая матрица 3-го порядка. Пусть

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ \xi=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$; разложив матрицу по диагоналям, получим

ряд однодиагональных матриц, состоящий из *2m* диагоналей, где *m* – порядок матрицы:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . \\ . & a_{22} & . \\ . & . & a_{33} \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & . & a_{13} \\ . & a_{22} & . \\ a_{31} & . & . \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & a_{12} & . \\ . & . & a_{23} \\ a_{31} & . & . \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & . & a_{13} \\ a_{21} & . & . \\ . & a_{32} & . \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & a_{12} & . \\ a_{21} & . & . \\ . & . & a_{33} \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} a_{11} & . & . \\ . & . & a_{23} \\ . & a_{32} & . \end{pmatrix}.$$

Магическое число любой матрицы из ряда однодиагональных матриц будет одним и тем же числом и равным сумме элементов диагонали, т. е.

$$mag\,\xi=(a_{11}+a_{22}+a_{33})=(a_{13}+a_{22}+a_{31})=(a_{12}+a_{23}+a_{31})=(a_{13}+a_{21}+a_{32})=$$
$$=(a_{12}+a_{21}+a_{33})=(a_{11}+a_{23}+a_{32}).$$

Например: $\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 15=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$, разложив матрицу по диагоналям,

получим

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 3 & . \\ . & . & 12 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & . & 8 \\ . & 3 & . \\ 4 & . & . \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & 2 & . \\ . & . & 9 \\ 4 & . & . \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & . & 8 \\ 1 & . & . \\ . & 6 & . \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} . & 2 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & 12 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & . & 9 \\ . & 6 & . \end{pmatrix}.$$

Магическое число такой матрицы

$$mag\,\xi=(0+3+12)=(8+3+4)=(2+9+4)=(8+1+6)=(2+1+12)=(0+9+6)=15.$$

Для наглядности выберем случайно следующие *дочерние* матрицы, у которых

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 25=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 9 & 11 \\ 6 & 12 & 14 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 60=\begin{pmatrix} 9 & 11 & 33 \\ 12 & 14 & 36 \\ 13 & 15 & 37 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 268=\begin{pmatrix} 57 & 59 & 145 \\ 60 & 62 & 148 \\ 61 & 63 & 149 \end{pmatrix};$$. и т. д.

Дочерняя магическая матрица 4-го порядка

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ \xi=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$; разложив матрицу по диагоналям, получим

ряд

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a_{14} \\ \cdot & \cdot & a_{23} & \cdot \\ \cdot & a_{32} & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{34} \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{24} \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{42} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cup$$

$$\cup \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{32} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{43} & \cdot \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot & \cdot \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{34} \\ \cdot & \cdot & a_{43} & \cdot \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{24} \\ \cdot & \cdot & a_{33} & \cdot \\ \cdot & a_{42} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Магическое число матрицы:

$$mag' = (a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}) = (a_{14}+a_{23}+a_{32}+a_{41}) = (a_{12}+a_{23}+a_{34}+a_{41}) =$$
$$= (a_{13}+a_{24}+a_{31}+a_{42}) = (a_{14}+a_{21}+a_{32}+a_{43}) = (a_{12}+a_{21}+a_{34}+a_{43}) =$$
$$= (a_{13}+a_{22}+a_{31}+a_{44}) = (a_{11}+a_{24}+a_{33}+a_{42}).$$

Например: $\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 30 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix}$. Разложив матрицу по диагоналям, получим

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ . & 3 & . & . \\ . & . & 12 & . \\ . & . & . & 15 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} . & . & . & 10 \\ . & . & 9 & . \\ . & 6 & . & . \\ 5 & . & . & . \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} . & 2 & . & . \\ . & . & 9 & . \\ . & . & . & 14 \\ 5 & . & . & . \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} . & . & 8 & . \\ . & . & . & 11 \\ 4 & . & . & . \\ . & 7 & . & . \end{pmatrix} \cup$$

$$\cup \begin{pmatrix} . & . & . & 10 \\ 1 & . & . & . \\ . & 6 & . & . \\ . & . & 13 & . \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} . & 2 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & 14 \\ . & . & 13 & . \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} . & . & 8 & . \\ . & 3 & . & . \\ 4 & . & . & . \\ . & . & . & 15 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ . & . & . & 11 \\ . & . & 12 & . \\ . & 7 & . & . \end{pmatrix}.$$

Магическое число такой матрицы

$$mag' = (0+3+12+15) = (10+9+6+5) = (2+9+14+5) = (8+11+4+7) =$$
$$= (10+1+6+13) = (2+1+14+13) = (8+3+4+15) = (0+11+12+7) = 30.$$

Для наглядности, выберем случайно следующие *дочерние* матрицы, у которых

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 94 = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 32 & 34 \\ 9 & 11 & 33 & 35 \\ 12 & 14 & 36 & 38 \\ 13 & 15 & 37 & 39 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 94 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 36 \\ 7 & 13 & 15 & 37 \\ 18 & 24 & 26 & 48 \\ 19 & 25 & 27 & 49 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 366 = \begin{pmatrix} 51 & 57 & 59 & 145 \\ 54 & 60 & 62 & 148 \\ 55 & 61 & 63 & 149 \\ 98 & 104 & 106 & 192 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных примеров видно, что любая *дочерняя* матрица порядка $m<n$ всегда будет *магической* в поле *магического числового пространства* матрицы порядка n, т. е. *материнской магической* матрицы. Поэтому двумерное числовое пространство *материнской*

магической матрицы порядка *n* будем называть *магическим двумерным числовым пространством.*

Основные операции с магическими матрицами

1. Сумма /разность/ *магической* матрицы и числа:

$$\boldsymbol{A}_1 \text{ mag } \xi_1 = \boldsymbol{A} \text{ mag } (\xi + 4 \cdot a) \text{ и } \boldsymbol{A}_2 \text{ mag } \xi_2 = \boldsymbol{A} \text{ mag}(\xi - 4 \cdot a), \text{ где } a - \text{число.} \tag{2}$$

Например: пусть $a = 17$, тогда

$$\boldsymbol{A}_1 \text{ mag } 162 = \boldsymbol{A} \text{ mag } (94 + 4 \cdot 17) = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 36 \\ 7 & 13 & 15 & 37 \\ 18 & 24 & 26 & 48 \\ 19 & 25 & 27 & 49 \end{pmatrix} + 17 = \begin{pmatrix} 23 & 29 & 31 & 53 \\ 24 & 30 & 32 & 54 \\ 35 & 41 & 43 & 65 \\ 36 & 42 & 44 & 66 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\boldsymbol{A}_2 \text{ mag } 26 = \boldsymbol{A} \text{ mag } (94 - 4 \cdot 17) = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 36 \\ 7 & 13 & 15 & 37 \\ 18 & 24 & 26 & 48 \\ 19 & 25 & 27 & 49 \end{pmatrix} - 17 = \begin{pmatrix} -11 & -5 & -3 & 19 \\ -10 & -4 & -2 & 20 \\ 1 & 7 & 9 & 31 \\ 2 & 8 & 10 & 32 \end{pmatrix}.$$

2. Сумма /разность/ двух *магических* матриц:

$$\boldsymbol{A}_{12} \text{ mag } 124 = \boldsymbol{A}_1 \text{ mag } 94 + \boldsymbol{A}_2 \; mag \; 30 =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 36 \\ 7 & 13 & 15 & 37 \\ 18 & 24 & 26 & 48 \\ 19 & 25 & 27 & 49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 22 & 46 \\ 8 & 16 & 24 & 48 \\ 22 & 30 & 38 & 62 \\ 24 & 32 & 40 & 64 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} \text{ mag } 64 = \boldsymbol{A}_1 \text{ mag } 94 - \boldsymbol{A}_2 \; mag \; 30 =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 36 \\ 7 & 13 & 15 & 37 \\ 18 & 24 & 26 & 48 \\ 19 & 25 & 27 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 26 \\ 6 & 10 & 6 & 26 \\ 14 & 18 & 14 & 34 \\ 14 & 18 & 14 & 34 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение *магической* матрицы на число:

$$\mathbf{A}_1 \; mag \; \xi_1 = \boldsymbol{A} \; mag \; \xi \cdot a, \qquad \text{где } a - \text{число.} \tag{4}$$

Например: пусть $a = 5$, тогда

$$\boldsymbol{A}_1 \; mag \; 340 = \boldsymbol{A} \; mag \, 68 \cdot 5 = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 21 & 22 \\ 16 & 17 & 20 & 21 \\ 13 & 14 & 17 & 18 \\ 12 & 13 & 16 & 17 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 85 & 90 & 105 & 110 \\ 80 & 85 & 100 & 105 \\ 65 & 70 & 85 & 90 \\ 60 & 65 & 80 & 85 \end{pmatrix}.$$

4). Сумма *магической* матрицы и ее транспонированной матрицы:

$$A \; mag \; 2\xi = (A + A^T) \; mag \; \xi, \tag{5}$$

например:

$$\boldsymbol{A} \text{ mag } 60 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T) \text{mag } 30 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 15 \\ 3 & 6 & 15 & 18 \\ 12 & 15 & 24 & 27 \\ 15 & 18 & 27 & 30 \end{pmatrix}.$$

Так как результирующая матрица совпадает со своей транспонированной матрицей и $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица $\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 2\xi$ – симметрическая матрица, которая является частным случаем эрмитовской матрицы.

5. Разность между магической матрицей и её транспонированной:

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 0 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T)\mathrm{mag}\ \xi. \qquad (6)$$

Например:

$$\boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ 0 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T)\mathrm{mag}\ 30 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 4 & 5 \\ -1 & \mathbf{0} & 3 & 4 \\ -4 & -3 & \mathbf{0} & 1 \\ -5 & -4 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Из примера (7) видно, что получена уникальная, почти симметрическая матрица, у которой *магическое* число равно нулю и $a_{ij} = -a_{ji}$, что позволяет назвать такую матрицу *инверсно-симметрической* матрицей.

6. Произведение магической матрицы на её транспонированную матрицу равно некоторой не магической матрицы, у которой элементы строк равны соответствующим элементам столбцов и наоборот:

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}^T)\ \mathrm{mag}\ 0 = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T \text{ и } (\boldsymbol{A}^T \times \boldsymbol{A})\ \mathrm{mag}\ 0 = \boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{B}\ ; \qquad (8)$$

очевидно, что

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}^T)\ \mathrm{mag}\ 0 = (\boldsymbol{A}^T \times \mathrm{A})\ \mathrm{mag}\ 0\ . \qquad (9)$$

Например:

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}^T)\ \mathrm{mag}\ 0 = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 4 & 5 \\ -1 & \mathbf{0} & 3 & 4 \\ -4 & -3 & \mathbf{0} & 1 \\ -5 & -4 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -1 & -4 & -5 \\ 1 & \mathbf{0} & -3 & -4 \\ 4 & 3 & \mathbf{0} & -1 \\ 5 & 4 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 32 & 2 & -8 \\ 32 & 26 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 26 & 32 \\ -8 & 2 & 32 & 42 \end{pmatrix}.$$

Так как результирующая не магическая матрица совпадает со своей транспонированной матрицей, $\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathbf{7}}$ и $a_{ij} = a_{ji}$, то $\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathbf{7}}$ – не магическая симметрическая матрица.

7. Все *магические* матрицы (кроме матриц 2-го порядка) – сингулярные матрицы, т. е. вырожденные, так как $\mathrm{Det}\ \boldsymbol{A}\ \mathrm{mag}\ \xi = 0$. Из приведённых примеров выполнения операций над *магическими* матрицами видно, что *магичность* результирующих матриц не нарушается, а изменяются только их *магические* числа.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕКТОРОВ

В связи с обобщением понятия пространства элементы пространства – векторы или точки – стали отождествляться с объектами любой природы: числами, кодами, матрицами и т. д. Так, числовой вектор – вектор в числовом пространстве. Вектор в n-мерном пространстве – это совокупность n чисел (комплексных), идущих в определенном порядке. Таким образом, всякий такой вектор $\boldsymbol{x}$ характеризуется последовательностью n (комплексных) чисел, которые называются составляющими этого вектора: $\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, .., x_n)$, где $\boldsymbol{x}^T$ – транспонированный вектор. Совокупность таких векторов образует n-мерное векторное пространство R_n. Линейным преобразованием с n переменными называется преобразование вида [1]:

$$
\left.\begin{array}{l}
x_1^{'} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
x_2^{'} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\
x_3^{'} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.
\end{array}\right\} \qquad (10)
$$

Или в символическом виде преобразование (10) можно записать так:

$$x' = A \cdot \quad , \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица коэффициентов.

Такое преобразование можно толковать по-разному. ***Например***, как переход от некоторого вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ n – мерного пространства к другому вектору $(x_1', \ldots, x_n')$. Можно иначе толковать $(x_1, \ldots, x_n)$, как координаты точки в n – мерном пространстве, а преобразование (10) – как переход от одной точки к другой.

Так как определители *магических* матриц (кроме матриц 2-го порядка) равны нулю, то все они – сингулярные, т. е. вырождены, поэтому построить матрицу обратную *магической* матрице невозможно, а значит, и восстановить исходный вектор невозможно. Другими словами, системы линейных неоднородных уравнений с магической матрицей $\boldsymbol{A}$ не имеют решений. Для устранения этого недостатка было введено понятие матриц-циркулянтов. Циркулянтом называется квадратная матрица, полученная циклической перестановкой первой вектор-строки [2]:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}. \qquad (12)
$$

Сделав циклическую перестановку любой строки *магической* матрицы, сформируем матрицу-циркулянт. Тогда выражение (11) можно записать следующим образом:

$$x' = C \cdot \quad . \qquad (13)$$

Для восстановления исходного вектора необходимо найти обратную матрицу матрицы-циркулянта $\boldsymbol{C}$, тогда исходный вектор будет равен $x = C^{-1} \cdot \;'$

Преобразование вектора в магическую матрицу

Сделав циклическую перестановку каждой вектор-строки *магической* матрицы $\boldsymbol{A}\,\mathrm{mag}\,0$ (7), сформируем матрицы-циркулянты. Тогда выражение (11) можно записать следующим образом:

$$x_i' = C_i \cdot x_i, \qquad (14)$$

где C_i – матрица-циркулянт i-й строки *магической* матрицы $\boldsymbol{A}\,\mathrm{mag}\,0$ (7); x_i – исходные векторы; $x_i^{'}$ – преобразованные векторы, зависящие от i-й строки $\boldsymbol{A}\,\mathrm{mag}\,0$.

Матрицы-циркулянты: C_1, C_2, C_3, C_4, т.е. матрицы-циркулянты i-й строки матрицы A mag 0, *(7)*, где i= 1, 2, 3, 4:

$$C_1=\begin{pmatrix}0&1&4&5\\1&4&5&0\\4&5&0&1\\5&0&1&4\end{pmatrix}\ C_2=\begin{pmatrix}-1&0&3&4\\0&3&4&-1\\3&4&-1&0\\4&-1&0&3\end{pmatrix}\ C_3=\begin{pmatrix}-4&-3&0&1\\-3&0&1&-4\\0&1&-4&-3\\1&-4&-3&0\end{pmatrix}\ C_4=\begin{pmatrix}-5&-4&-1&0\\-4&-1&0&-5\\-1&0&-5&-4\\0&-5&-4&-1\end{pmatrix}.$$

Обратные матрицы матриц - циркулянтов соответствующих строк A mag 0:

$$C_1^{-1}=\frac{1}{80}\cdot\begin{pmatrix}-13&7&-3&17\\7&-3&17&-13\\-3&17&-13&7\\17&-13&7&-3\end{pmatrix},\qquad C_2^{-1}=\frac{1}{48}\cdot\begin{pmatrix}-7&5&-1&11\\5&-1&11&-7\\-1&11&-7&5\\11&-7&5&-1\end{pmatrix},$$

$$C_3^{-1}=\frac{1}{48}\cdot\begin{pmatrix}-11&1&-5&7\\1&-5&7&-11\\-5&7&-11&1\\7&-11&1&-5\end{pmatrix},\qquad C_4^{-1}=\frac{1}{80}\cdot\begin{pmatrix}-17&3&-7&13\\3&-7&13&-17\\-7&13&-17&3\\13&-17&3&-7\end{pmatrix}.$$

Например, умножим матрицы-циркулянты C_1, C_2, C_3, C_4 на векторы x_1, x_2, x_3, x_4. Если x_1 ,= x_2, = x_3, = x_4 = x_i^T = (9, 2, 11, 6), то

$$x_1'=\begin{pmatrix}0&1&4&5\\1&4&5&0\\4&5&0&1\\5&0&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\2\\11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}76\\72\\52\\80\end{pmatrix},\qquad x_2'=\begin{pmatrix}-1&0&3&4\\0&3&4&-1\\3&4&-1&0\\4&-1&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\2\\11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\44\\24\\52\end{pmatrix},$$

$$x_3'=\begin{pmatrix}-4&-3&0&1\\-3&0&1&-4\\0&1&-4&-3\\1&-4&-3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\2\\11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36\\-40\\-60\\-32\end{pmatrix},\qquad x_4'=\begin{pmatrix}-5&-4&-1&0\\-4&-1&0&-5\\-1&0&-5&-4\\0&-5&-4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\2\\11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-64\\-68\\-88\\-60\end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для восстановления исходного вектора умножим C_i^{-1}, на вектор x_i', т. е.

$$x_i=C_i^{-1}\cdot x_i', \quad (16)$$

где i – номер вектор-строки матрицы A mag 0, ***например:***

для первой вектор-строки $i=1$: для второй вектор-строки $i=2$:

$$x_1=C_1^{-1}x_1'==\frac{1}{80}\begin{pmatrix}-13&7&-3&17\\7&-3&17&-13\\-3&17&-13&7\\17&-13&7&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}76\\72\\52\\80\end{pmatrix}=\frac{1}{80}\begin{pmatrix}720\\160\\880\\480\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\2\\11\\6\end{pmatrix},$$

$$x_2=C_2^{-1}x_2'==\frac{1}{48}\begin{pmatrix}-7&5&-1&11\\5&-1&11&-7\\-1&11&-7&5\\11&-7&5&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}48\\44\\24\\52\end{pmatrix}=\frac{1}{48}\begin{pmatrix}432\\96\\528\\288\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\2\\11\\6\end{pmatrix}, \quad (17)$$

для третей вектор-строки $i=3$: для четвёртой вектор-строки $i=4$:

$$x_3 = C_3^{-1}x_3' = \frac{1}{48}\cdot\begin{pmatrix} -11 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 7 & -11 \\ -5 & 7 & -11 & 1 \\ 7 & -11 & 1 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -36 \\ -40 \\ -60 \\ -32 \end{pmatrix} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 432 \\ 96 \\ 528 \\ 288 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = C_4^{-1}x_4' = \frac{1}{80}\cdot\begin{pmatrix} -17 & 3 & -7 & 13 \\ 3 & -7 & 13 & -17 \\ -7 & 13 & -17 & 3 \\ 13 & -17 & 3 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -64 \\ -68 \\ -88 \\ -60 \end{pmatrix} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} 720 \\ 160 \\ 880 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Из приведённых примеров видно, что для любой матрицы-циркулянта, полученной из любой вектор - строки *магической* матрицы $\boldsymbol{A}$mag0 (7) всегда восстанавливается исходный вектор, т.е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_4$.

Объединив векторы $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_3'$, $\boldsymbol{x}_4'$ *из примера (15), получим* магическую *матрицу:*

$$\boldsymbol{X}'\,\mathrm{mag}0 = \begin{pmatrix} 76 & 48 & -36 & -64 \\ 72 & 44 & -40 & -68 \\ 52 & 24 & -60 & -88 \\ 80 & 52 & -32 & -60 \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Из выражения (16) и приведённых примеров (17, 18, 19), следует, что любой вектор можно преобразовать в магическую матрицу, у которой магическое число всегда равно нулю.

По формуле (5) вычислим сумму:

$$X_1'\,mag0 = (X' + X'^T)\,mag0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 76 & 48 & -36 & -64 \\ 72 & 44 & -40 & -68 \\ 52 & 24 & -60 & -88 \\ 80 & 52 & -32 & -60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76 & 72 & 52 & 80 \\ 48 & 44 & 24 & 52 \\ -36 & -40 & -60 & -32 \\ -64 & -68 & -88 & -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152 & 120 & 16 & 16 \\ 120 & 88 & -16 & -16 \\ 16 & -16 & -120 & -120 \\ 16 & -16 & -120 & -120 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

В результате получим симметрическую матрицу, у которой магическое число также как и у матрицы $\boldsymbol{X}'$ равно нулю.

По формуле (6) вычислим разность:

$$\boldsymbol{X}_2'\,\mathrm{mag}0 = (\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}'^T)\,\mathrm{mag}0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 76 & 48 & -36 & -64 \\ 72 & 44 & -40 & -68 \\ 52 & 24 & -60 & -88 \\ 80 & 52 & -32 & -60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 76 & 72 & 52 & 80 \\ 48 & 44 & 24 & 52 \\ -36 & -40 & -60 & -32 \\ -64 & -68 & -88 & -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -24 & -88 & -144 \\ 24 & 0 & -64 & -120 \\ 88 & 64 & 0 & -56 \\ 144 & 120 & 56 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

В результате получим инверсно-симметрическую матрицу, у которой элементы главной диагонали и магическое число матрицы равны нулю.

Если $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ не равны друг другу, то объединив векторы $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_3'$, $\boldsymbol{x}_4'$ из примера (15), получим не магическую матрицу, или линейные преобразования 4-х векторов.

ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Одним из возможных приложений *магических* матриц является решение системы линейных уравнений, у которой матрица коэффициентов представляет собой немагическую сингулярную матрицу.

Для решения такой системы уравнений необходимо заменить немагическую сингулярную матрицу на *магическую* матрицу. Кроме того, известно, что основным назначением матриц является преобразование координат [3], поэтому основными приложениями *магических* матриц являются линейные преобразования векторов и сжатие матричной информации.

Закон распределения чисел в магической матрице. Рассмотрим методы генерирования случайных чисел с заданными распределениями. Используем известные определения [3] функции распределения случайной величины. Дискретная функция распределения $F(x)$ есть ступенчатая функция для дискретных значений x_1, x_2.., x_n и вероятностей их появления p_1, p_2, ..., p_n:

Непрерывная функция распределения определяется выражением $F(x) = P(\xi \le x) = \int_0^x f(\xi)\cdot d\xi$, где $P(\xi \le x)$ – вероятность того, что $\xi \le x$;

плотность распределения вероятности – $f'(x) = dF(x)/dx$.

Чтобы получить последовательность случайных чисел с заданным распределением, используют последовательность чисел x_1, x_2,.., x_n в интервале [0,1].

$$\sum_{i=0}^{j} p_i \le n \le \sum_{i=0}^{j+1} p_i, \qquad p_0 \equiv 0 . \tag{22}$$

При выполнении этого неравенства считается, что $\xi = x_{j+1}$.

Если представлять любую строку или столбец *материнской магической* матрицы в виде дискретной случайной величины n, то функция распределения вероятностей $F(n)$ будет иметь вид некоторой ступенчатой функции. Плотность вероятностей такого распределения будет представлять собой периодическую функцию $f'(n)$. Для наглядности на рис. 2 функция распределения изображена в упрощенном виде, т. е. по оси ординат отложены не вероятности, а числа случайной величины.

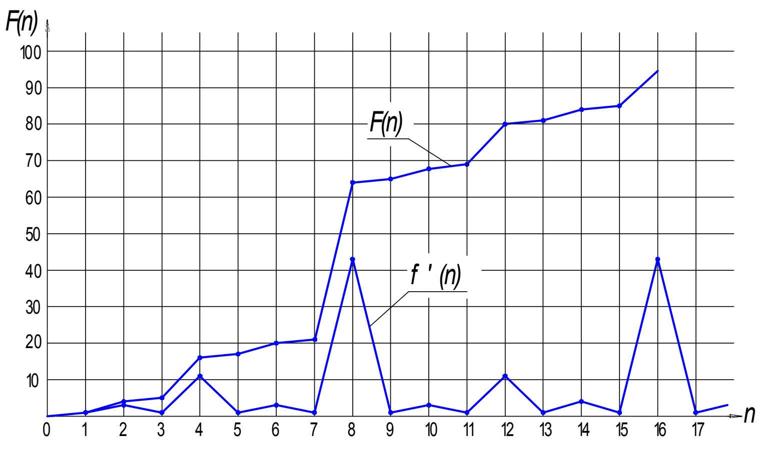

Рисунок 2 – Функция распределения случайной величины (первого столбца) магической матрицы и ее плотность распределения

Знание законов распределения позволяет значительно сжимать матричную информацию и хранить в памяти не всю *магическую* матрицу, а только первую вектор-строку и первый вектор-столбец, т. е. для *магической* матрицы четвертого порядка можно хранить в памяти не 16 чисел, а всего 7, что составляет 56,25 % сжатия матричной информации. Процент сжатия информации зависит от порядка матрицы. Из графика рис. 3 видно, что чем выше порядок матрицы, тем выше процент сжатия матричной информации.

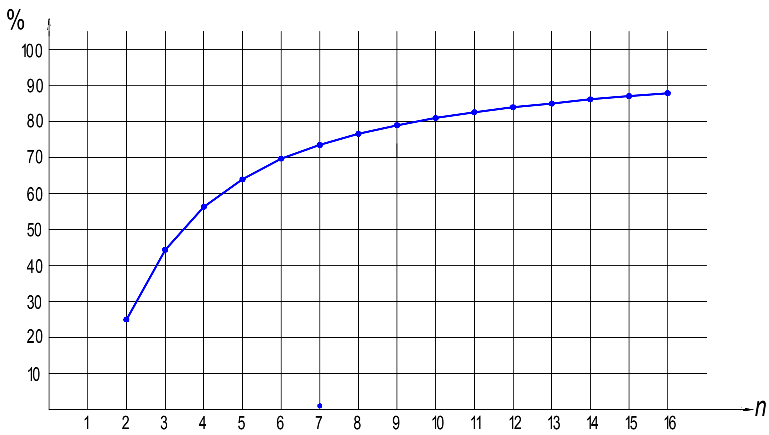

Рисунок 3 - Зависимость процента сжатия информации от порядка матрицы

Например:

исходная матрица сжатая матрица

$$\boldsymbol{A}\text{mag}_{366} = \begin{pmatrix} 51 & 57 & 59 & 145 \\ 54 & 60 & 62 & 148 \\ 55 & 61 & 63 & 149 \\ 98 & 104 & 106 & 192 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 51 & 57 & 59 & 145 \\ 54 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 55 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 98 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Здесь закон распределения известен – это последовательность чисел первой вектор-строки. Вычислим плотность вероятности, т.е. первую производную. Производную будем вычислять в конечных разностях по следующей формуле:

$$\Delta a_{n+1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta n}, \text{ где } n = (0,\ 1,\ 2,\ 3) \text{ и } \Delta n = 1. \qquad (23)$$

Тогда $f'(n)$ = (51, 6, 2, 86); заменим первый элемент, т. е. число «51» на первый элемент второй вектор-строки, т. е. на число «54» и проинтегрируем $f'(n)$ по следующей итерационной формуле:

$$F_{n+1}(n) = (\Delta a_n + \Delta a_{n+1})\Delta n, \text{ где } n = (0,\ 1,\ 2,\ 3) \text{ и } \Delta n = 1. \qquad (24)$$

Получим вторую вектор-строку: $F_2(n)$ = (54, 60, 62, 148). *Проделав такую процедуру для третьей и четвертой вектор-строки, восстановим* магическую *матрицу.*

Для симметрических и инверсно-симметрических *магических* матриц достаточно хранить в памяти одну первую вектор-строку. Например, для матриц 4-го порядка:

$$\boldsymbol{A}_1 \text{mag} 60 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 15 \\ 3 & 6 & 15 & 18 \\ 12 & 15 & 24 & 27 \\ 15 & 18 & 27 & 30 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 15 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2 \text{mag} 0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 4 & 5 \\ -1 & \mathbf{0} & 3 & 4 \\ -4 & -3 & \mathbf{0} & 1 \\ -5 & -4 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 4 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Практический пример

В эмиссионной томографии характеристика стационарного поля содержится в пространственной энергетически-угловой плотности потока частиц $\varphi\ (r,E,\Omega)$. В результате измерения плотности потока с помощью спектрометра мы получим аппаратное распределение $u\ (\rho,\xi,\Theta)$, которое существенно отличается от действительной плотности потока гамма-квантов в точке измерения, здесь (ρ - пространственная переменная, Θ- направление, ξ- энергетическая переменная).

В общем случае связь между искомой функцией $\varphi\ (r,E,\Omega)$ и аппаратным распределением выражается интегральным уравнением вида [4]:

$$u(\xi)= \int_{E_{min}}^{E_{max}} K(\xi,E)\cdot\varphi(E)dE. \tag{25}$$

Как видим это уравнение есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Ядро уравнения $K(\xi,E)$ - аппаратная функция.

Задачи восстановления физического спектра в точке измерения по измеряемому аппаратному спектру могут быть сведены к решению матричного уравнения (26):

$$A\cdot u = f\ , \tag{26}$$

где A - является матрицей аппаратной функции измерительного тракта; f - измеряемый аппаратный спектр; u - физический гамма-спектр в точке измерения, который вычисляется по следующей формуле

$$u = A^{-1}\cdot f\ , \tag{27}$$

где A^{-1} - обратная матрица, которую вычислить практически невозможно, т. к. при больших размерностях матрицы A, как правило, все такие матрицы сингулярные, т. е. вырожденные матрицы. Поэтому задача определения действительного спектра $\varphi(E)$ может быть поставлена только как задача приближения $\varphi(E)$. Под восстановленным физическим спектром понимается энергетическое распределение плотности потока гамма-квантов в точке, оцененное по аппаратному спектру. Оптимальный размер матрицы однозначно определяется физическими и тактико-техническими характеристиками избранной практической реализации прибора. Главными среди них являются: - число каналов в аппаратном спектре и, как следствие, разрядность АЦП. Для сцинтилляционных детекторов оптимальное число энергетических каналов лежит в диапазоне 1024 - 2048. Обычно размерность матрицы аппаратной функции не может превышать число каналов в исходном спектре. Следует учитывать, что с увеличением размера матрицы затраты на необходимую память растут в квадратичной зависимости, а время вычисления в кубической зависимости.

В процессе проведения работ проверялись задачи и методы их решения на матрицах размерами 256×256, 1024×1024. В результате, матрица A размерностью 1024×1024 занимала 1048576 32-х разрядных ячеек памяти. Если преобразовать сингулярную немагическую матрицу A в магическую матрицу, то количество необходимых для хранения ячеек памяти составит 2047, а это значит, что сжатие матричной информации составит 99,8%.

ВЫВОДЫ

И в заключении следует отметить самое главное – это преобразование чисел натурального ряда *в магическое двумерное числовое пространство (магическую материнскую матрицу).* Уникальная *материнская магическая* матрица может породить большое многообразие *дочерних магических* матриц порядка $m < n$, где n порядок *материнской магической* матрицы. Каждая *дочерняя магическая* матрица может быть использована для решения задач линейной алгебры, например, для линейного преобразования числовых векторов при не магических сингулярных, т.е. вырожденных матрицах; для сжатия *магической* матричной информации и др.

SUMMARY

METHOD OF CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL NUMBER SPACE WITH MAGIC STRUCTURE

Andreev L. P.,
Scientific Research and Project Designing Institute "Iskra", Lugansk

The article considers a two-dimensional number space in the form of a magic matrix with unusual features and it describes in detail the method of its construction. It examines the structures of mother and daughter magic matrices. The article describes in detail the enclosures of magic matrices at transformation of the co-ordinate system in the n-dimensional vectorial space. The methods of data compression are described and the distribution laws of numbers in magic matrices are determined.

Key words: *matrix, transformation of coordinates, vectorial space, data compression.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов.– М.: Наука, 1974. – Том III, часть первая. – С. 76-80.
2. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – С. 116-140.
3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - М. : Наука, 1978. – 832 с.
4. Кочергин А. В. Реконструкция сигнала с использованием аппаратурной функции в задачах спектрометрии ионизирующих излучений / А. В. Кочергин // Вестник СевНТУ, Серия «Физика, математика». – 2009. - Вып. 99. - С.86-92.

Поступила в редакцию 28 февраля 2012 г.