ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Малютина Т.И., доцент, УАБД, г. Сумы;

Боженко О.А., аспирант, СумГУ, г. Сумы

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Валирона $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\geq 0$, . Обозначим через $[\rho(r),\infty)$ класс целых функций типа не выше чем нормальный при $\rho(r)$, т.е. таких, что для функции f из этого класса существует константа $K_f>0$ такая, что

$$\ln|f(z)|\leq K_f V(|z|),\ z\in\mathbb{C}, \qquad (1)$$

где $V(r)=r^{\rho(r)}$, $r\in[\rho(r),\infty)$, $\lim_{r\to+0}V(r)\stackrel{\text{def}}{=}1$

Мы будем рассматривать задачу простой интерполяции в классе $[\rho(r),\infty)$ при $\rho=0$:

$$F(a_n)=b_{n,}\ n\in\mathbb{N}, \qquad (2)$$

когда все узлы a_n различные и имеют одну предельную точку – бесконечность. Неравенство (1) накладывает естественное ограничение на множество $\{b\_n\}$:

$$sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\ln^+|b_n|}{V(|a_n|)}<\infty \qquad (3)$$

В настоящей работе мы приводим два критерия разрешимости задачи (2): в терминах канонического произведения и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $A=\{a_n\}$ называется интерполяционным в классе $[\rho(r),\infty)$, если для любой последовательности чисел $\{b_n\}$ удовлетворяющей условию (3), существует функция $F\in[\rho(r),\infty)_+$ со свойством (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция

$$E(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

называется каноническим произведением множества .

По заданному множеству введём меру равенством:

$$n_A(G)=\sum_{a_n\in G}1$$

Через будем обозначать открытый круг с центром в точке радиуса ,

$C(r)\stackrel{\text{def}}{=}C(0,r)$, $n_a\stackrel{\text{def}}{=}n_a(C(r))$

Обозначим через

$$\Phi_{A,z}(\alpha) = \frac{\left(n_A\left(C(z, \alpha|z|)\right) - 1\right)^+}{V(|z|)}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = \{a_n\} -$ счётное множество различных точек комплексной плоскости с единственной точкой сгущения на бесконечности, $\rho(r)$ - уточнённый порядок такой, что $\lim_{r\to\infty}\rho(r) = 0$ и функция $V(r)$ либо а) логарифмически выпуклая на оси $[0, \infty)$, либо b) выполняется условие:

$$\sup_{r>0}\frac{1}{\exp V(r)}\max_{1\le t\le r}\left(\frac{r}{t}\right)^{V(t)} < \infty \qquad (4)$$

Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) множество А является интерполяционным в пространстве $[\rho(r), \infty)$;

2) каноническое произведение $E(z)$ множества удовлетворяет условию:

$$sup_{n\in N}\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{1}{E'(|a_n|)} < \infty; \qquad (5)$$

3) выполняется соотношение:

$$\sup\int_0^{1/2}\frac{\Phi_{A,z}(\alpha)}{\alpha}d\alpha < \infty, \qquad (6)$$

Заметим, что теорема верна и при $\rho > 0$. В этом случае эквивалентность условий 1) и 2) получена А.Ф. Леонтьевым [1], случай кратной интерполяции рассмотрен А.В. Братищевым и Ю.Ф. Коробейником [2], критерий 3) получен К.Г. Малютиным [4].

Список литературы

1. Леонтьев А.Ф. К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка // Матем. сб. - 1957. (83). - С. 81-96.

2. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф.. Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1976. 40(5). - С. 1102-1127.

3. Гришин А.Ф., Руссаковский А.М. Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1985. 44. - С. 32-42.

4. Малютин К.Г. Интерполяция голоморфными функциями: дис. канд. физ.-мат. наук. - Харьков, - 1980. - 104с.

5. Малютин К.Г., Герасименко В.А. Свободная интерполяция целыми функциями конечного гамма-типа // Математичні Студії. - 2007. 28(1). - С. 45-50.