Павленко І.В.

ТЕОРІЯ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Суми, 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій
Кафедра загальної механіки і динаміки машин

ТЕОРІЯ ПЛАСТИН
І ОБОЛОНОК

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів 4-го курсу
факультету технічних систем та енергоефективних технологій
денної форми навчання

Студент: ___________________________________

Група: ___________________________________

Викладач: ___________________________________

Суми
«Видавництво СумДУ»
2010

Теорія пластин і оболонок: опорний конспект лекцій / укладач І.В. Павленко.– Суми: Видавництво СумДУ, 2010.– 36 с.

Кафедра загальної механіки і динаміки машин

ЗМІСТ

ВСТУП

Відповідно до потреб сучасного машинобудування розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість стають більш актуальними, відіграючи найважливішу роль у процесі створення новітніх конструкцій. Розв’язання більшості задач при цьому є доступним лише кваліфікованим спеціалістам. Питання, пов’язані з проектними розрахунками елементів конструкцій, розглядаються в традиційних дисциплінах: «Опір матеріалів», «Теорія пружності», «Стійкість де формівних систем» тощо. Вивчення дисципліни «Теорія пластин і оболонок» як логічного продовження попередніх має на меті вивчення з єдиних позицій основних методів розрахунків однойменних елементів машин, формування логічного і алгоритмічного мислення майбутнього фахівця з динаміки та міцності. При цьому слід приділяти належну увагу отриманню навичок побудови розрахункових схем і математичних моделей, застосуванню сучасних методів досліджень напруженого стану пластин і оболонок.

Метою опорного конспекту є активізація творчого мислення студентів під час лекційного заняття. Він містить понятійний апарат і основні відомості з дисципліни, подані у стислій формі.

ЛЕКЦІЯ 1

Основні поняття теорії пластин і оболонок

План лекції
1.1 Становлення дисципліни.
1.2 Понятійний апарат дисципліни.
1.3 Класифікація пластин і оболонок.
1.4 Межі застосування формул.

Мета – ознайомлення з історією розвитку і понятійним апаратом дисципліни.

1.1 Становлення дисципліни

Теорія пластин і оболонок є порівняно сучасною дисципліною, активному розвитку якої сприяли наукові досягнення з таких дисциплін, як «Опір матеріалів», «Теорія пружності», «Теорія коливань», «Математична фізика» тощо.

Слід зазначити невичерпний вклад учених у сучасну теорію пластин і оболонок, яка відрізняється різноманітністю і складністю задач, що мають практичну значущість:

а) велика кількість праць, присвячених теорії циліндричних оболонок із застосуванням спрощуючих гіпотез, належить С.П. Тимошенку, І.Г. Бубнову, Б.Г. Гальоркіну;

б) у роботах В.В. Соколовського, А.Л. Гольденвейзера викладена безмоментна теорія довільним чином навантажених оболонок обертання;

в) інженерний напрямок у дослідженнях пластин і оболонок належить В.З. Власову;

г) урахування згинальних моментів і перерізувальних сил в елементах поперечного перетину висвітлені в роботах С.Н. Кана;

д) вплив початкових прогинів на стійкість оболонок досліджено А.С. Вольміром, В.А. Агаміровим, В.Є. Мінєєвим;

е) над нелінійною теорією пластин і оболонок працювали Х.М. Муштарі, В.В. Новожилов;

є) велика кількість праць, присвячених теорії анізотропних оболонок, належить С.Г. Лехницькому, С.А. Абарцумяну, Е.І. Григолюку.

1.2 Понятійний апарат дисципліни

Міцність – ____
____
____

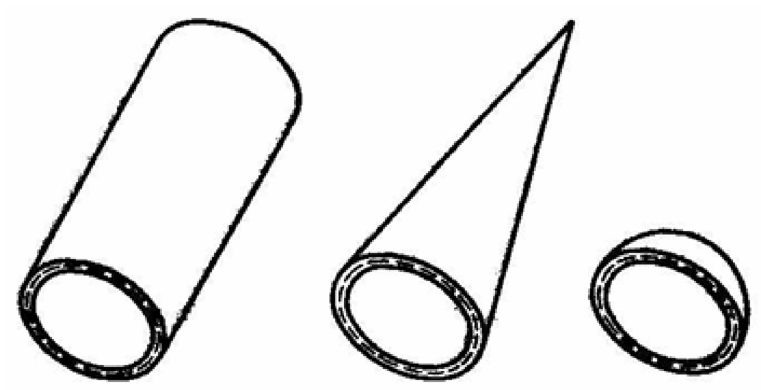
Жорсткість – ____
____
____
____

Стійкість – ____
____
____

1.3 Класифікація пластин і оболонок

Оболонкою називається ____
____

Поверхню, яка ділить навпіл товщину оболонки, називають ____________________
______________:



_______________ оболонка   _______________ оболонка   _______________ оболонка

Якщо серединна поверхня є плоскою, то об'єкт називається ____________________.

Залежно від геометричних співвідношень розрізняють декілька видів пластин і оболонок:

а) *плита* – пластина, відношення товщини якої до характерного розміру перевищує ____;

б) *мембрана* – пластина, відношення товщини якої до характерного розміру не перевищує _____;

в) *жорстка пластина* – пластина, відношення найбільшого прогину до товщини якої не перевищує ____;

г) *тонка оболонка* – оболонка, відношення товщини до одного з радіусів кривини серединної поверхні якої не перевищує _____.

1.4 Межі застосування формул

Теорія пластин, побудована на ряді припущень, протягом багатьох років проходила перевірку досвідом. Формули, які у подальшому будуть отримані для прогину пластин, дають задовільні результати у випадку їх достатньої жорсткості, коли відношення максимального прогину до товщини пластини не перевищує ___ .

Теорія пластин у звичному розумінні не враховує зближення сторін контуру пластини: жорстке закріплення призводить до появи розтягуючих зусиль у серединній поверхні. Однак для малих прогинів вплив цих зусиль незначний.

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 2

Теорія пластин у прикладній теорії пружності

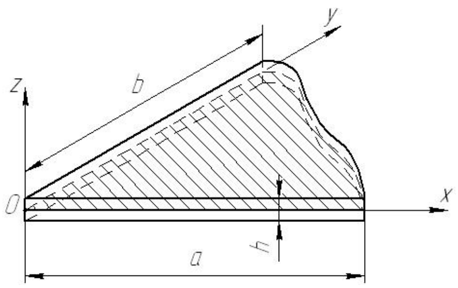
План лекції

2.1 Основні визначення і гіпотези.
2.2 Чистий вигин пластини.
2.3 Диференціальне рівняння пружної серединної поверхні.
2.4 Внутрішні інтегральні силові фактори.
2.5 Граничні умови.
2.6 Перевірка пластини на міцність.

Мета – складання математичного підґрунтя теорії пластин.

2.1 Основні визначення і гіпотези

Пластиною називається тіло призматичної або циліндричної форми, у якого один із розмірів значно менший за інший:



Площина, рівновіддалена від верхньої та нижньої сторін пластини,– ___________________________________ – після вигину перетворюється у ________________________ ________________.

Погонні зусилля

Назва	*Позначення*	*Лінії дії*
Просторові	R , F	Довільні у просторі
Ланцюгові	T , S , N	Дотичні до ____________ ________________________
Перерізувальні	Q	__________________ до серединної поверхні

Ланцюгові зусилля призводять до розтягування (стискання), *перерізувальні* – до вигину серединної площини.

Базові гіпотези теорії пластин і оболонок:

а) *гіпотеза суцільного матеріалу* передбачає нехтування атомістичною структурою дискретної будови речовини;

б) *гіпотеза малих деформацій* передбачає, що деформації елементів конструкції значно менші за розміри конструкції;

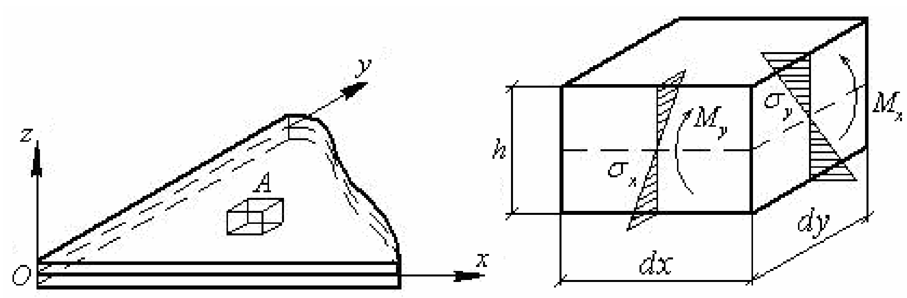
в) *гіпотеза абсолютної пружності* передбачає відсутність залишкових деформацій елементів конструкцій після зняття навантаження;

г) *гіпотеза лінійної залежності між деформаціями і навантаженнями* – узагальнений закон Гука;

д) *гіпотеза прямих нормалей* передбачає, що перпендикуляр до серединної поверхні залишається після вигину пластини чи оболонки прямим і нормальним до здеформованої серединної поверхні;

е) *гіпотеза відсутності поперечного тиску* передбачає відсутність нормального тиску між шарами, паралельними до серединної поверхні.

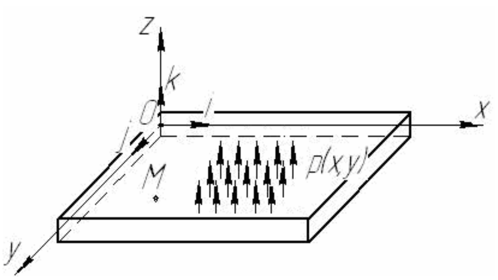
2.2 Чистий вигин пластини

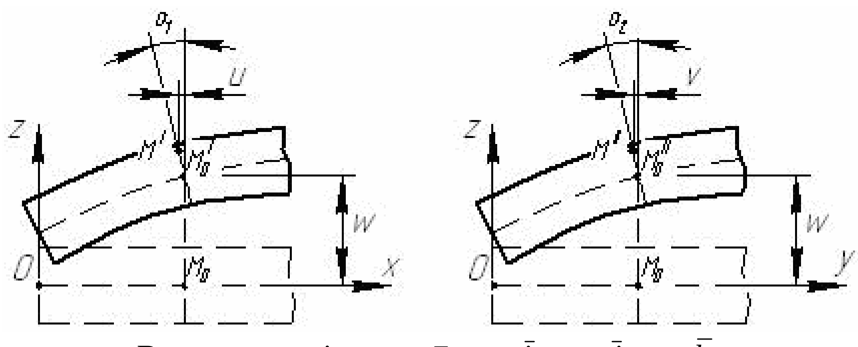


Якщо на бокові грані виділеного елемента діють лише нормальні напруження σ_x і σ_y, які зводяться до пар сил із моментами M_x і M_y відповідно, то такий вигляд напруженого стану буде відповідати *чистому вигину*.

У теорії чистого вигину бокові грані виділеного елемента залишаються ___________________, а серединна поверхня відіграє роль _____________________ шару.

2.3 Диференціальне рівняння пружної серединної поверхні





Вектор переміщення $\bar{s} = \_\_\cdot\bar{i} + \_\_\cdot\bar{j} + \_\_\cdot\bar{k}$.

а) зв’язок між компонентами вектора переміщень:

$$\begin{cases} u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x}; \\ v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y}; \end{cases}$$

б) геометричні рівняння Коші:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

в) рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

г) фізичні рівняння узагальненого закону Гука:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right); \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y\right); \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \end{cases}$$

E – ______________

____

___________________;

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ –

____

____

___________________;

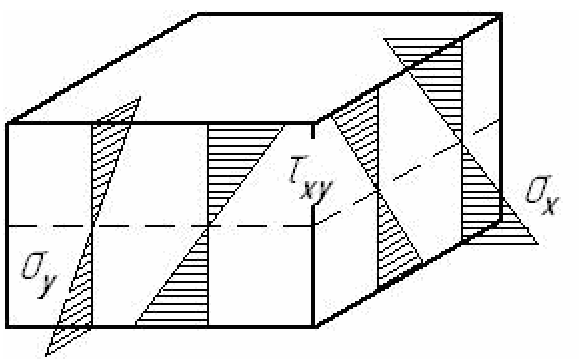
ν – ________________

___________________.

д) компоненти тензора напружень:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \tau_{xy} = -\dfrac{Ez}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{D}{h^3}\left(h^2 - 4z^2\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right); \\ \tau_{yz} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{D}{h^3}\left(h^2 - 4z^2\right)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right); \end{cases}$$



$$\sigma_z = \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}\frac{Dz}{h^3}\left(h^2 - \frac{4}{3}z^2\right)\nabla^2\nabla^2 w.$$

$D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$. – ________________________________

________________________________.

Основне рівняння теорії вигину пластин за відсутності ланцюгових і об’ємних сил має назву рівняння бігармонічного рівняння ___________________________:

$$\boxed{\nabla^2\nabla^2 w = \frac{p}{D}.}$$

2.4 Внутрішні інтегральні силові фактори

а) *перерізувальні зусилля* характеризують інтенсивність поперечних сил:

$$\begin{cases} Q_x = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right); \\ Q_y = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right); \end{cases}$$

б) *згинальний моменти* є результатом дії нормальних напружень:

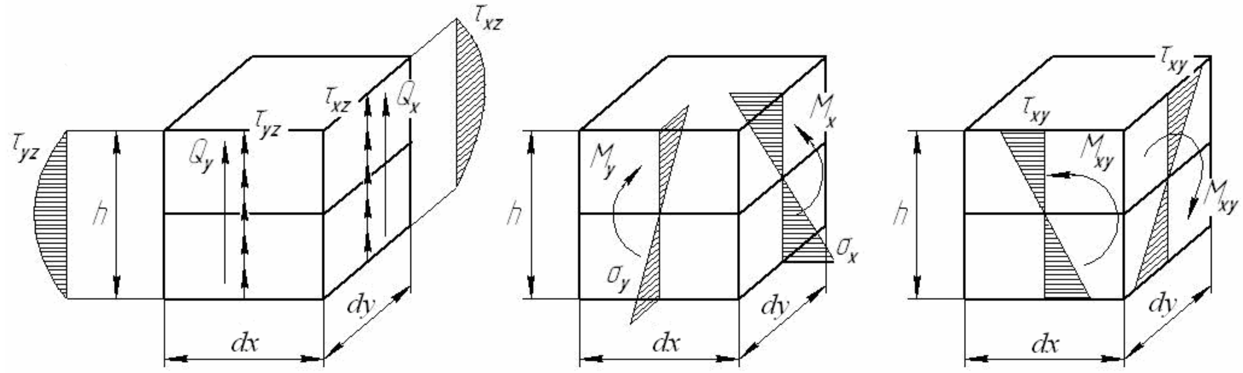
$$\begin{cases} M_x = \int\limits_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ M_y = \int\limits_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz = -D\left(\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \end{cases}$$

в) *скручувальні моменти* є результатом обертальної дії дотичних напружень:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

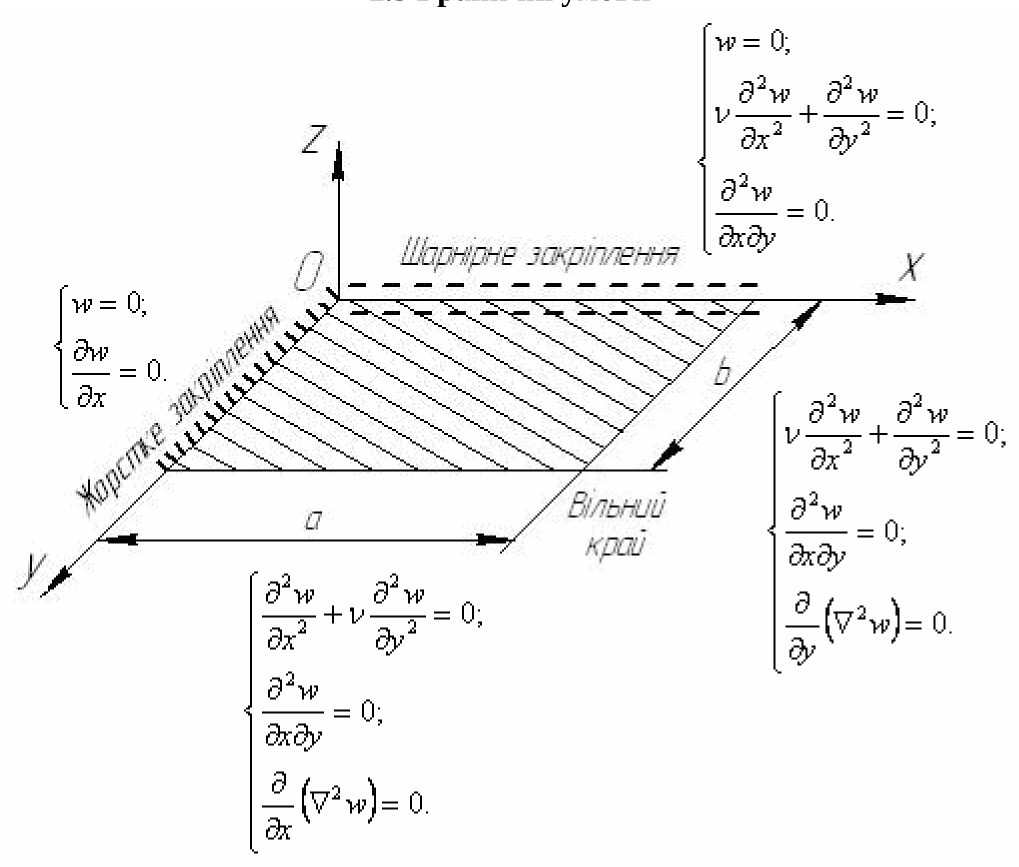
г) *зведені перерізувальні зусилля* – результат умовного об’єднати дотичного напруження на контурі пластини (τ_{xz} або τ_{yz}) з дотичними напруженнями від скручування τ_{xy}:

$$\begin{cases} V_x = Q_x + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ V_y = Q_y + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(2-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \end{cases}$$



Розмірність перерізувальних зусиль – _____,згинальних і скручувальних моментів – ___.

2.5 Граничні умови



Види граничних умов

Тип закріплення	*Граничні умови*	
	точні	*пом'якшені*
Жорстке закріплення	$\begin{cases} w = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \end{cases}$	
Шарнірне закріплення	$\begin{cases} w = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial \tau} = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} w = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0. \end{cases}$
Вільний край	$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial \tau} = 0. \\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right) = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} = 0. \end{cases}$

n – ____;

τ – ____.

2.6 Перевірка пластини на міцність

Міцність пластини перевіряється нерівністю

$$\sigma_{екв} = [\sigma],$$

де $\sigma_{екв}$ – ____;

$[\sigma]$ – ____.

а) перша теорія міцності: $\sigma_{екв} = \sigma_1$;

б) друга теорія міцності: $\sigma_{екв} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)$;

в) третя теорія міцності: $\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3$;

б) четверта теорія міцності:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]}.$$

Тут $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – ______________________________ як корені кубічного рівняння

$$\sigma^3 - \sigma_I \sigma^2 + \sigma_{II}\sigma - \sigma_{III} = 0,$$

причому $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ – ____________________ ____:

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \sigma_{II} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ \sigma_{III} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \end{cases}$$

Зв’язок максимальних значень компонентів тензора напружень із внутрішніми інтегральними силовими факторами такий:

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{h^2};\ \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{h^2};\ \sigma_z^{\max} = \pm p;$$

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2};\ \tau_{yz}^{\max} = \frac{3Q_y}{2h};\ \tau_{zx}^{\max} = \frac{3Q_x}{2h}.$$

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 3

Чисельні методи розрахунку пластин

План лекції
3.1 Потенціальна енергія пластини.
3.2 Метод Рітца.
3.3 Метод Гальоркіна.
3.4 Інтегральний метод найменших квадратів.

Мета – формування уявлення про наближені методи розрахунку пластин.

3.1 Потенціальна енергія пластини

Потенціальна енергія пластини E складається із *внутрішньої енергії деформації*

$$U = \frac{D}{2}\iint\limits_{(\Sigma)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy$$

і потенціалу зовнішнього навантаження (нормального тиску) $\Pi = -\iint\limits_{(\Sigma)} pwdxdy$:

$$E = \iint\limits_{(\Sigma)}\left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] - pw\right\}dxdy,$$

де подвійний інтеграл розраховується по серединній площині (Σ).

3.2 Метод Рітца

Розв'язання задачі вигину пластини методом Рітца полягає у знаходженні функції прогину у вигляді ряду

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x, y),$$

де f_i – сімейство n лінійно незалежних функцій, які задовольняють граничні умови задачі (принаймні кінематичним); a_i – коефіцієнти ряду, які надають стаціонарного значення повній потенціальній енергії вигину пластини $\delta E = 0$. Остання умова згідно з теорією варіаційного числення аналогічна до умови $\delta E_R = 0$, де E_R – функціонал Рітца:

$$E_R = \iint\limits_{(\Sigma)}\left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] - pw\right\}dxdy.$$

3.3 Метод Гальоркіна

Розв'язання задачі вигину пластини методом Гальоркіна полягає у знаходженні функції прогину як такої, що надає стаціонарного значення функціонала

$$E_G = \iint\limits_{(\Sigma)}\left(\nabla^2\nabla^2 w - \frac{p}{D}\right)wdxdy,$$

тобто має виконуватись умова $\delta E_G = 0$.

3.4 Інтегральний метод найменших квадратів

Поряд із вищезазначеними методами застосовується інтегральний метод найменших квадратів, суть якого полягає у знаходженні функції прогину як такої, що надає функціоналу сумарної квадратичної похибки

$$E_S = \iint\limits_{(\Sigma)} \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{p}{D} \right)^2 dxdy$$

найменшого значення, тобто $\delta E_S = 0$ при $\delta^2 E_S > 0$.

Бігармонічне рівняння Софі Жермен є рівнянням Ейлера варіаційної задачі про знаходження стаціонарних значень функціоналів Рітца, Гальоркіна, інтегрального методу найменших квадратів.

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 4

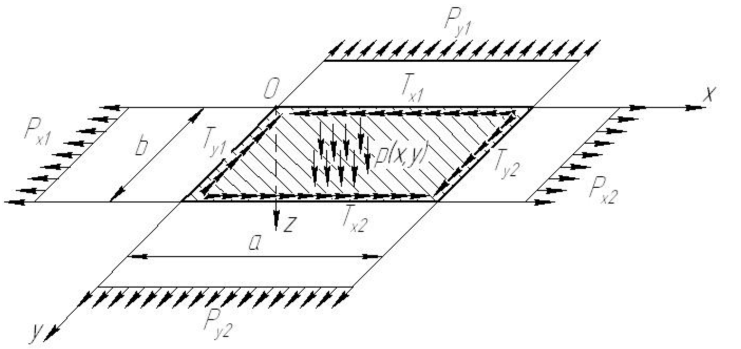
Поєднання вигину з розтягуванням (стисканням)

План лекції
4.1 Повна система внутрішніх інтегральних силових факторів.
4.2 Основне рівняння викривленої серединної поверхні.
4.3 Втрата стійкості пластини.

Мета – узагальнення математичної моделі напружено-деформованого стану пластини.

4.1 Повна система внутрішніх інтегральних силових факторів

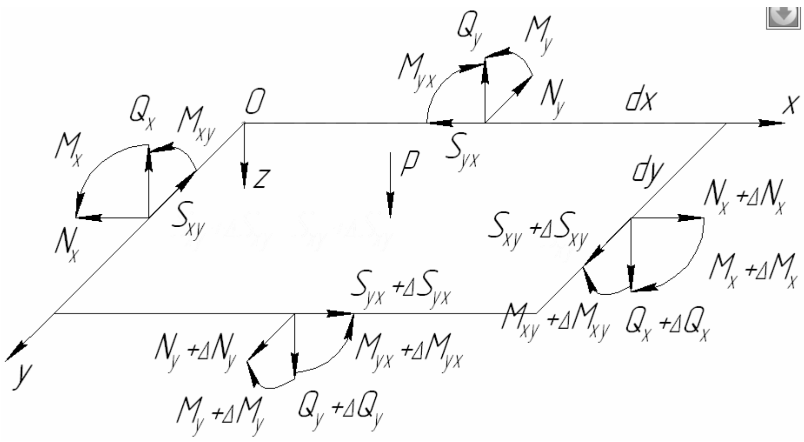
Розглянемо прямокутну пластину, навантажену нормальним тиском і ланцюговими зусиллями на контурі:

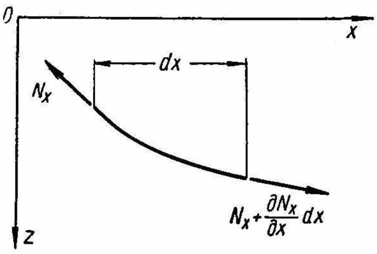


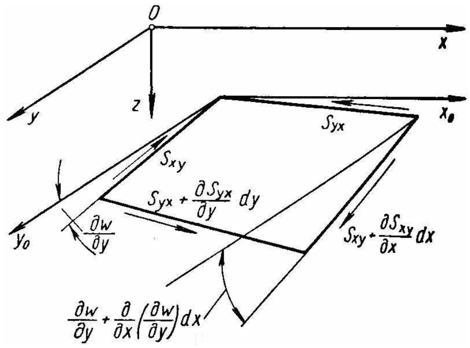
P_{x1}, P_{x2} – ____
____;
P_{y1}, P_{y2} – ____
____;
T_{x1}, T_{x2} – ____
____;
T_{y1}, T_{y2} – ____
____.

Повна система погонних навантажень

Назва	*Позначення*	*Напрям дії*	*Розмірність*
Q_x	перерізу-вальні сили	уздовж осі z	Н/м
Q_y			
N_x	ланцюгові сили	уздовж осі x	
N_y		уздовж осі y	
S_{xy}			
S_{yx}		уздовж осі x	
M_x	згинальні моменти	у площині xz	Н
M_y		у площині yz	
M_{xy}	крутні моменти		
M_{yx}		у площині xz	







4.2 Основне рівняння викривленої серединної поверхні

Рівняння силової рівноваги:

а) у проекції на вісь x:

$$\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy-N_x dy+\left(S_{yx}+\frac{\partial S_{yx}}{\partial y}dy\right)dx-S_{yx}dx=0;$$

б) у проекції на вісь y:

$$\left(N_y+\frac{\partial N_y}{\partial y}dy\right)dx-N_y dx+\left(S_{xy}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}dx\right)dy-S_{xy}dy=0;$$

в) у проекції на вісь z:

$$p+\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\right]-N_x dy\frac{\partial w}{\partial x}+$$

$$+\left(N_y+\frac{\partial N_y}{\partial y}dy\right)dx\left[\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy\right]-N_y dx\frac{\partial w}{\partial y}+$$

$$+\left(S_{xy}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}dx\right)dy\left[\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\right]-S_{xy}dy\frac{\partial w}{\partial y}+$$

$$+\left(S_{yx}+\frac{\partial S_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dy\right]-S_{yx}dx\frac{\partial w}{\partial x}+$$

$$+\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dy-Q_x dy+\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx-Q_y dx=0.$$

Рівняння моментної рівноваги відносно осі z:

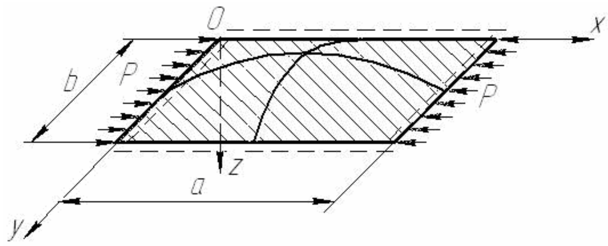
$$S_{xy}dydx-S_{yx}dxdy=0.$$

Основне рівняння викривленої серединної поверхні пластини, в якому враховані як поперечні, так і ланцюгові навантаження:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

4.3 Втрата стійкості пластини

Наявність ланцюгових розтягувальних зусиль призводить до підвищення жорсткості пластини. Стискальні ланцюгові зусилля можуть призвести до втрати стійкості конструкції.



Внутрішні інтегральні силові фактори $N_x = -P$, $N_y = S_{xy} = 0$ однакові для усіх точок пластини.

Основному рівнянню вигину $D\nabla^2\nabla^2 w + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ разом із граничними умовами

$$\begin{cases} w(0,y) = w(a,y) = 0; \quad w(x,0) = w(x,b) = 0; \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=a} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

задовольняє розв'язок $w(x,y) = C\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$,

підстановка якого до диференціального рівняння дає значення критичної сили $P_{кр} = \pi^2 D\frac{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2}{(m/a)^2}$.

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 5

Безмоментна теорія оболонок

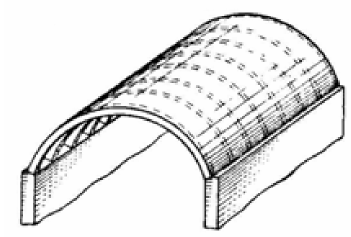
План лекції

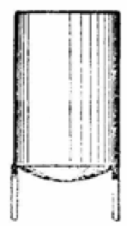
5.1 Види оболонок.
5.2 Поняття про розрахунок оболонки.
5.3 Безмоментна теорія напруженого стану.
5.4 Розрахунок оболонки, навантаженої нормальним тиском.
5.5 Перевірка оболонки на міцність.

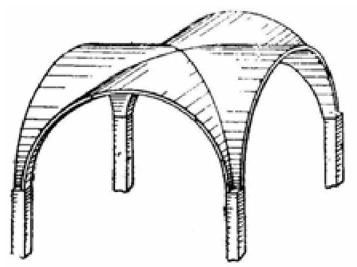
Мета – ознайомлення зі спрощеною методикою розрахунку оболонок на міцність.

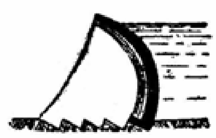
5.1 Види оболонок

Оболонками називають конструкції, які складаються з елементів, обмежених криволінійними поверхнями, розміщеними на відносно невеликій відстані одна від одної:









Класифікація оболонок
за співвідношенням головних радіусів кривизни

Назва	*Характеристика*
сферична оболонка	$\rho_1 = \rho_2$
гіперсферична оболонка	$\rho_1 \cdot \rho_2 < 0$
купол	$\rho_1 \cdot \rho_2 > 0$
циліндрична оболонка	$\rho_2 \to \infty$

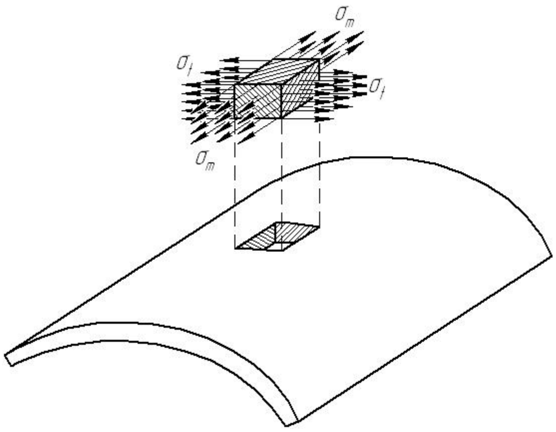
5.2 Поняття про розрахунок оболонки

Залежно від форми серединної поверхні, характеру і навантаження і закону його розподілення, способу закріплення застосовують спрощену безмоментну теорію або більш точну – моментну теорію оболонок. До переліку гіпотез входять гіпотези теорії пластин.

Застосування сучасних методів дослідження напружено-деформованого стану (варіаційні методи, реалізовані на ЕОМ) дозволяє розглядати теорію оболонок з позицій узагальненої тривимірної задачі теорії пружності. Такий підхід не потребує введення додаткових гіпотез, але пов'язаний з великим обсягом інформації, що потребує опрацювання.

5.3 Безмоментна теорія напруженого стану

Безмоментна теорія оболонок базується на припущенні, що оболонка не опирається вигину, а в кожній точці прямої нормалі до серединної поверхні мають місце лише напруження, спрямовані по дотичній до серединної поверхні й рівномірно розподілені уздовж товщини оболонки. Такі напруження називаються ____________________.



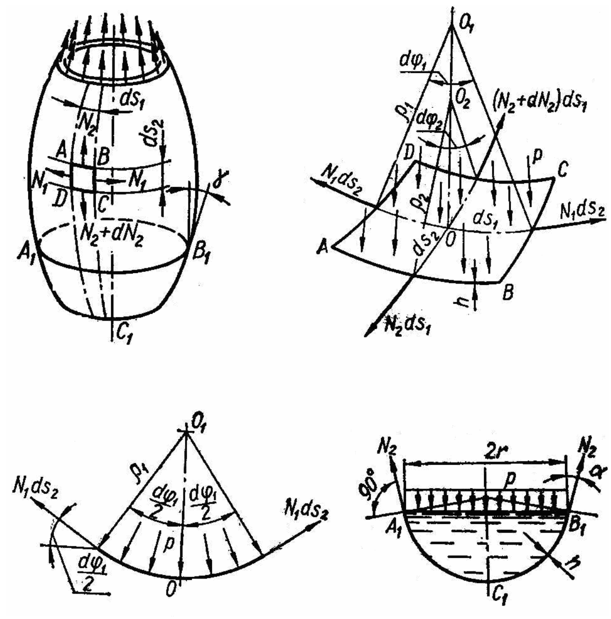
Мембранні напруження

Назва	*Позначення*	*Характеристика*
колові	σ_t	спрямовані уздовж дотичної до напрямної
меридіональні	σ_m	спрямовані уздовж дотичної до твірної

(!) *Межі застосування безмоментної теорії обмежені плавністю форми оболонки: у місцях стику частин оболонки різної кривизни або поблизу зони дії зосереджених сил теорія дає незадовільні результати, і необхідним є застосування моментної теорії.*

5.4 Розрахунок оболонки, навантаженої нормальним тиском

Розглянемо резервуар, серединна поверхня якого є поверхнею обертання. Товщина оболонки мала порівняно з радіусами кривизни. Вільний край закріплений так, що діють лише зусилля, дотичні до твірної. На стінки резервуара діє нормальний тиск.



На грані нескінченно малого елемента оболонки діятимуть лише нормальні погонні зусилля $N_1 = \sigma_t h$ і $N_2 = \sigma_m h$. Геометричні співвідношення: $ds_1 = \rho_1 d\varphi_1$, $ds_2 = \rho_2 d\varphi_2$. Умова рівноваги елемента у проекції на нормаль називається ________________________________:

$$\boxed{\frac{\sigma_t}{\rho_1} + \frac{\sigma_m}{\rho_2} = \frac{p}{h}.}$$

До цього рівняння додається умова осьової рівноваги частини резервуара $\sigma_m = [pr + Q/(\pi r)]/(2h\cos\alpha)$, яка називається _____________________________. Тут Q – вага частини резервуара разом із середовищем.

5.5 Перевірка оболонки на міцність

Безмоментна теорія відповідає двовимірній задачі напруженого стану, для якої умова міцності

$$\sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t \sigma_m} \le [\sigma].$$

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 6

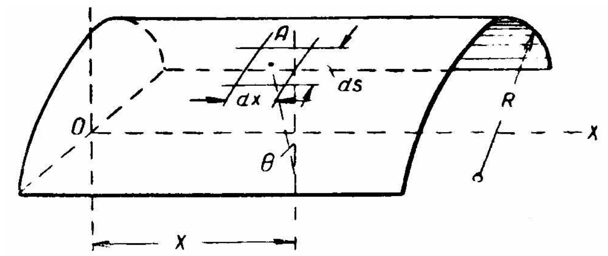
Моментна теорія оболонок

План лекції

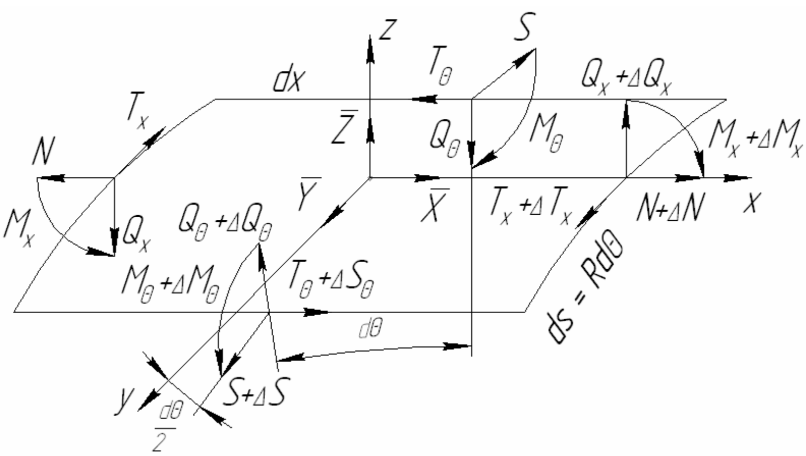
6.1 Система рівнянь рівноваги.
6.2 Геометричні рівняння Коші.
6.3 Загальна система диференціальних рівнянь моментної теорії оболонок.

Мета – складання математичної моделі напружено-деформованого стану циліндричної оболонки.

6.1 Система рівнянь рівноваги



Головні радіуси кривизни $\rho_1 =$___, $\rho_2 =$___.



Повна система внутрішніх і зовнішніх навантажень

Назва	*Позначення*	*Напрям дії*	*Розмірність*
$\bar{X}$	проекції поверхневих сил	уздовж осі x	Н/м^2
$\bar{Y}$		уздовж осі y	
$\bar{Z}$		уздовж осі z	
Q_x	перерізу-вальні сили	уздовж осі z	Н/м
Q_θ			
N	ланцюгові сили	уздовж осі x	
S		уздовж осі y	
T_x			
T_θ		уздовж осі x	
M_x	згинальні моменти	у площині xz	Н
M_θ		у площині yz	

Правило знаків для моментів:

Моменти додатні, якщо вони розтягують зовнішні волокна (з боку додатних w).

Складання рівноваги виділеного елемента:

а) рівняння силової рівноваги у проекції на вісь x:

$$\left(N+\frac{\partial N}{\partial x}\right)ds-Nds+\left(T_\theta+\frac{\partial T_\theta}{\partial s}ds\right)dx-T_\theta dx+\overline{X}dsdx=0;$$

б) рівняння силової рівноваги у проекції на вісь y:

$$\left(S+\frac{\partial S}{\partial s}\right)dx-Sdx+\left(T_x+\frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)ds-T_x ds+$$

$$+\left(Q_\theta+\frac{\partial Q_\theta}{\partial s}\right)dx\frac{d\theta}{2}+Q_\theta dx\frac{d\theta}{2}+\overline{Y}dsdx=0;$$

в) рівняння силової рівноваги у проекції на вісь z:

$$-\left(S+\frac{\partial S}{ds}ds\right)dx\frac{d\theta}{2}-Sdx\frac{d\theta}{2}+\left(Q_\theta+\frac{\partial Q_\theta}{ds}ds\right)dx-$$

$$-Q_\theta dx+\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{dx}dx\right)ds-Q_x ds+\overline{Z}dsdx=0;$$

г) рівняння моментної рівноваги відносно осі x:

$$-\left(Q_\theta+\frac{\partial Q_\theta}{\partial s}ds\right)dx\frac{ds}{2}-Q_\theta dx\frac{ds}{2}+$$

$$+\left(M_\theta+\frac{\partial M_\theta}{\partial s}ds\right)dx-M_\theta dx=0;$$

д) рівняння моментної рівноваги відносно осі y:

$$\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)ds\frac{dx}{2}+Q_x ds\frac{dx}{2}-$$

$$-\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)ds+M_x ds=0;$$

е) рівняння моментної рівноваги відносно осі z:

$$\left(T_\theta+\frac{\partial T_\theta}{\partial s}ds\right)dx\frac{ds}{2}+T_\theta dx\frac{ds}{2}-$$

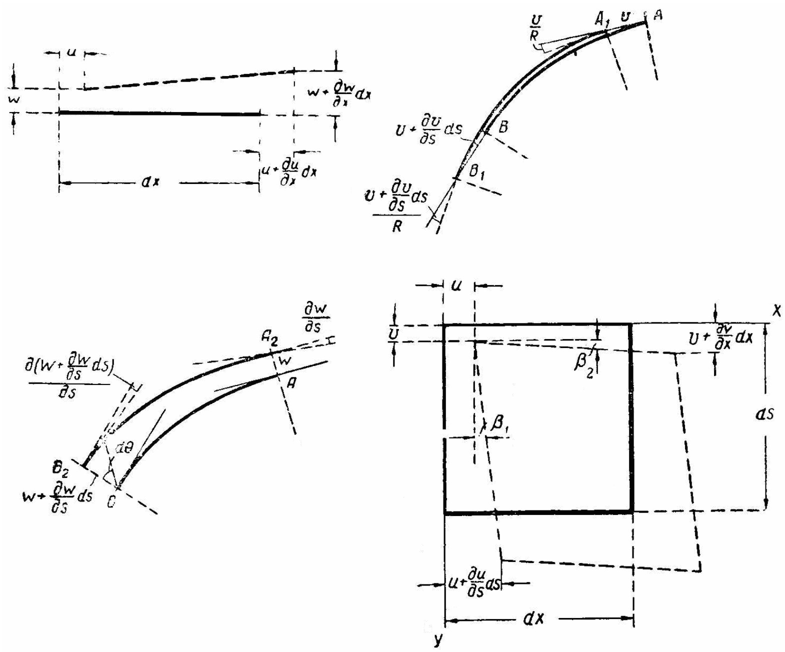
$$-\left(T_x+\frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)ds\frac{dx}{2}-T_x ds\frac{dx}{2}=0.$$

Незамкнута система рівнянь рівноваги

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial x}+\dfrac{\partial T}{\partial s}+\overline{X}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial T}{\partial x}+\dfrac{\partial S}{\partial s}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial M_\theta}{\partial s}+\overline{Y}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 M_\theta}{\partial s^2}-\dfrac{S}{R}+\overline{Z}=0\end{cases}$$

має доповнюватися рівняннями закону Гука.

6.2 Геометричні рівняння Коші



Компоненти тензору деформації:

а) у напрямку осі x:

$$\varepsilon_x = \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u \right] / \partial x = \frac{\partial u}{\partial x};$$

б) у напрямку осі y:

1) за рахунок подовження v:

$$\varepsilon_\theta^{/} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds \right) - v}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s};$$

2) за рахунок подовження w:

$$\varepsilon_\theta^{//} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial s} ds \right) d\theta}{ds} = w \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{w}{R};$$

3) сумарне:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^{/} + \varepsilon_\theta^{//} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R};$$

в) деформація зсуву:

$$\gamma_{\theta x} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial s} ds}{ds} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

6.3 Загальна система диференціальних рівнянь моментної теорії оболонок

Доповнимо рівняння рівноваги рівняннями Гука:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta\right); \\ \sigma_\theta = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_\theta\right); \\ \tau_{\theta x} = G\gamma_{\theta x}. \end{cases}$$

Перерізувальні сили:

$$\begin{cases} N = \sigma_x h = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{w}{R}\right)\right]; \\ S = \sigma_\theta h = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{w}{R}\right); \\ T = \tau_{\theta x} h = Gh\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Моменти згину:

$$\begin{cases} M_x = -D\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial v}{\partial s}\right)\right]; \\ M_\theta = -D\left(\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial v}{\partial s}\right). \end{cases}$$

Замкнута система рівнянь рівноваги моментної теорії оболонок

$$\begin{cases} \dfrac{D}{h^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left(\dfrac{\nu D}{h^2} + Gh\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \dfrac{\nu D}{Rh^2}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \overline{X} = 0; \\ \left(\dfrac{\nu D}{h^2} + Gh\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + Gh\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D\left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \\ \qquad + \dfrac{D}{R}\left(\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial w}{\partial s} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s}\right) + \overline{Y} = 0; \\ -\dfrac{\nu D}{Rh^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{D}{R}\left(\dfrac{\partial^3 v}{\partial s^3} - \dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial v}{\partial s} + \nu\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial s}\right) - \\ \qquad - D\left(\dfrac{12w}{R^2h^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2\nu\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2}\right) + \overline{Z} = 0. \end{cases}$$

Для вісесиметричного навантаження циліндричної оболонки ($\overline{Y} = 0$, $\partial/\partial s = 0$, $v = 0$) маємо

$$\begin{cases} \dfrac{D}{h^2}\left(\dfrac{d^2 u}{dx^2} + \dfrac{\nu}{R}\dfrac{dw}{\partial x}\right) + \overline{X} = 0; \\ -D\left(\dfrac{\nu}{Rh^2}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{12w}{R^2h^2} + \dfrac{d^4 w}{dx^4}\right) + \overline{Z} = 0, \end{cases}$$

а для випадку незначних поздовжніх деформацій ($u << w$) оболонки, навантаженої нормальним тиском $\overline{Z} = p$,

$$D\left[\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{12 w(x)}{R^2 h^2}\right] = p(x).$$

Останнє рівняння є *основним рівнянням* моментної теорії вигину циліндричних оболонок у вісесиметричній постановці. Воно містить невідому функцію прогину і може бути проінтегровано аналітичними або чисельним методами.

Більш точний, енергетичний спосіб дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки уточнює основне рівняння:

$$D\left[\frac{d^4 w}{dx^4} + 12\left(1-\nu^2\right)\frac{w}{R^2 h^2}\right] = p.$$

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 7

Вісесиметрична задача вигину оболонок

План лекції
7.1 Диференціальне рівняння рівноваги.
7.2 Граничні умови.
7.3 Аналітичний спосіб визначення функції прогину.

Мета – ознайомлення з методикою аналітичного розв'язання одновимірної задачі моментної теорії оболонок.

7.1 Диференціальне рівняння рівноваги

Диференціальне рівняння рівноваги циліндричної вісесиметрично навантаженої оболонки в одновимірній моментній теорії

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{p}{D}$$

може бути мати розв'язане аналітично для заданого закону розподілу нормального тиску p по довжині (осі) оболонки x. Тут λ – допоміжний параметр, який має розмірність м$^{-1}$, і введений з метою спрощення запису остаточних формул:

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1{,}316}{\sqrt{Rh}}.$$

7.2 Граничні умови

Диференціальне рівняння рівноваги слід доповнити чотирма граничними умовами (по дві умови з кожного торця оболонки). З метою аналітичного розв'язання задачі слід обирати пом'якшені граничні умови.

Види граничних умов

<table>
<tr><th>Вид границі</th><th>Форма запису</th><th>Фізичний і геометричний зміст</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Жорстке закріплення</td><td>$w' = 0$</td><td>нульова девіація</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$w = 0$</td><td rowspan="2">відсутність прогину</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Шарнірне закріплення</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$w'' = 0$</td><td rowspan="2">нульовий згинальний момент</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Вільний край</td></tr>
<tr><td>w'''</td><td>нульова переізувальна сила</td></tr>
</table>

7.3 Аналітичний спосіб визначення функції прогину

Загальний розв'язок w диференціального рівняння одновимірної задачі моментної теорії оболонок складається з двох складових:

$$w = w_1 + w_2,$$

де w_1 – окремий розв'язок рівняння $w_1^{IV} + 4\lambda^4 w_1 = p / D$. Якщо функція тиску є поліномом максимум третьої степені, окремий розв’язок $w_1 = \frac{p}{4\lambda^4 D}$. w_2 – загальний розв’язок рівняння $w_2^{IV} + 4\lambda^4 w_2 = 0$, характеристичне рівняння якого $p^4 + 4\lambda^2 = 0$ має чотири корені $p_{1,2,3,4} = \pm 1 \pm i$ (i – мнима одиниця). Як наслідок,

$$w_2 = \sin \lambda x \left(C_1 sh\lambda x + C_2 ch\lambda x\right) + \cos \lambda x \left(C_3 sh\lambda x + C_4 ch\lambda x\right).$$

Для однозначного визначення функції прогину

$$w = \frac{p}{4\lambda^4 D} + \sin \lambda x \left(C_1 sh\lambda x + C_2 ch\lambda x\right) + \cos \lambda x \left(C_3 sh\lambda x + C_4 ch\lambda x\right)$$

слід встановити чотири константи інтегрування $C_{1,2,3,4}$ шляхом задоволення граничних умов.

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 8

Чисельні методи розрахунку оболонок

План лекції
8.1 Метод Рітца.
8.2 Метод Гальоркіна.
8.3 Інтегральний метод найменших квадратів.

Мета – формування уявлення про способи наближеного розрахунку на жорсткість і міцність.

8.1 Метод Рітца

Розв’язання задачі вигину оболонки методом Рітца полягає у знаходженні функції прогину у вигляді ряду

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x),$$

де f_i – сімейство n лінійно незалежних функцій, які задовольняють граничні умови задачі; a_i – коефіцієнти ряду, які надають стаціонарного значення функціоналу Рітца. Останній має такий вигляд:

$$E_R = \int_0^L \left\{ D\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + 4\lambda^4 w^2 \right] - pw \right\} dx,$$

де L – довжина циліндричної оболонки.

8.2 Метод Гальоркіна

Розв’язання задачі вигину оболонки методом Гальоркіна полягає у знаходженні функції прогину як такої, що надає стаціонарного значення функціоналу

$$E_G = \int_0^L \left[D\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w \right) - p \right] w\,dx.$$

8.3 Інтегральний метод найменших квадратів

При застосуванні інтегрального методу найменших квадратів шукана функція прогину надає мінімального значення сумарній квадратичній похибці

$$E_S = \int_0^L \left[D\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w \right) - p \right]^2 dx.$$

Рівняння $w^{IV} + 4\lambda^4 w = p / D$ є рівнянням Ейлера варіаційної задачі про знаходження стаціонарних значень функціоналів Рітца, Гальоркіна, інтегрального методу найменших квадратів.

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 9

Основні співвідношення у теорії пластин і оболонок

План лекції
9.1 Рівняння рівноваги Нав'є.
9.2 Геометричні рівняння Коші.
9.3 Фізичні рівняння Гука.
9.4 Основні диференціальні рівняння.
9.5 Методи розв'язання основних рівнянь теорії пластин і оболонок.

Мета – узагальнення відомостей з дисципліни.

ТЕОРІЯ ПЛАСТИН	*ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК*

9.1 Рівняння рівноваги Нав'є

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_x}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial N_y}{\partial y} + \dfrac{\partial S}{\partial x} = 0; \\ p + \dfrac{\partial Q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ \qquad + 2S \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial s} + \overline{X} = 0; \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial s} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial M_\theta}{\partial s} + \overline{Y} = 0; \\ \dfrac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 M_\theta}{\partial s^2} - \dfrac{S}{R} + \overline{Z} = 0. \end{cases}$$

9.2 Геометричні рівняння Коші

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y = -z \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} = -2z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{w}{R}; \\ \gamma_{\theta x} = \dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

9.3 Фізичні рівняння Гука

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \tau_{xy} = -\dfrac{Ez}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{w}{R}\right)\right]; \\ \sigma_\theta = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{w}{R}\right); \\ \tau_{\theta x} = Gh\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

9.4 Основні диференціальні рівняння

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p.$$

$$D\left[\frac{d^4 w}{dx^4} + 12\left(1-\nu^2\right)\frac{w}{R^2 h^2}\right] = p.$$

9.5 Методи розв’язання основних рівнянь теорії пластин і оболонок

а) аналітичне інтегрування рівняння

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p;$$

б) метод рітца:

$$\delta\iint_{(\Sigma)}\left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] - pw\right\}dxdy = 0;$$

в) метод Гальоркіна:

$$\delta\iint_{(\Sigma)}\left(\nabla^2\nabla^2 w - \frac{p}{D}\right)wdxdy = 0;$$

г) інтегральний метод найменших квадратів:

$$\delta\iint_{(\Sigma)}\left(\nabla^2\nabla^2 w - \frac{p}{D}\right)^2 dxdy = 0.$$

а) аналітичне інтегрування рівняння

$$D\left[\frac{d^4 w}{dx^4} + 12\left(1-\nu^2\right)\frac{w}{R^2 h^2}\right] = p;$$

б) метод рітца:

$$\delta\int_0^L\left\{D\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 + 4\lambda^4 w^2\right] - pw\right\}dx = 0;$$

в) метод Гальоркіна:

$$\delta\int_0^L\left[D\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w\right) - p\right]w\,dx = 0;$$

г) інтегральний метод найменших квадратів:

$$\delta\int_0^L\left[D\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w\right) - p\right]^2 dx = 0.$$

ДЛЯ НОТАТОК

ЛЕКЦІЯ 10

Спеціальні розділи теорії пластин і оболонок

План лекції
10.1 Коливання пластин.
10.2 Коливання оболонок.
10.3 Втрата стійкості оболонки.

Мета – ознайомлення з додатковими розділами теорії пластин і оболонок.

10.1 Коливання пластин

а) рівняння вимушених поперечних коливань пластини:

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t)/D,$$

де $\rho h \partial^2 w/\partial t^2$ – ____________________________________;
ρ – густина матеріалу;

б) рівняння вільних коливань ($p = 0$):

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Окремий його розв'язок $w(x, y, t) = U(x, y)\sin\omega t$ містить власну невідому частоту і функцію форми U, пов'язані співвідношенням $\nabla^2\nabla^2 U + \alpha^2 U = 0$. де $\alpha = \omega\sqrt{\rho h / D}$ – додатковий параметр, розмірність якого м$^{-2}$.

(!) *Функція форми має задовольняти граничні умови задачі.*

в) перша власна частота коливань пластини визначається із застосуванням формули Релея-Рітца:

$$E = \frac{I\omega^2}{2},$$

де E – потенціальна енергія деформації:

$$E = \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy;$$

I – узагальнена маса, кг·м^2:

$$I = \iint\limits_{(\Sigma)} \rho h U^2 dxdy.$$

10.2 Коливання оболонок

Коливання оболонки на відміну від пластини супроводжуються одночасним вигином і розтягуванням серединної поверхні.

Диференціальне рівняння згинальних коливань пластини без урахування поздовжніх деформацій:

$$D\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 12\frac{w}{R^2 h^2}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p.$$

У випадку вільних коливань ($p=0$), які описуються рівнянням

$$D\left(\frac{d^4w}{dx^4}+12\frac{w}{R^2h^2}\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

окремий розв'язок $w(x,t)=U(x)\sin\omega t$.

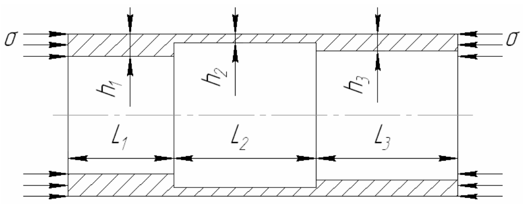
Перша власна частота

$$\omega=\sqrt{\int_0^L D\left[\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)^2+24\left(\frac{U}{Rh}\right)^2\right]dx/\int_0^L \rho hU^2dx},$$

визначена за формулою Релея-Рітца, відповідає формі коливань $U(x)$.

10.3 Втрата стійкості оболонки

Циліндрична оболонка, навантажена в осьовому напрямку стискальним силовим навантаженням, може змінювати прямолінійну форму стійкої рівноваги на суміжну, криволінійну форму при досягненні інтенсивності даного навантаження певного критичного значення $\sigma_{кр}$.



Для циліндричних оболонок ступінчастої товщини розроблена спеціальна методика розрахунку критичного навантаження. Згідно з нею $\sigma_{кр}=kER/L_e(h_e/R)^{3/2}$, де k – коефіцієнт, що враховує спосіб закріплення; L_e, h_e – еквівалентні довжина і товщина оболонки:

$$L_e=\sum_{i=1}^{n}L_i\left(h_{\min}/h_i\right)^{3/2}\ ;\ h_e=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n}L_i h_i\ .$$

Тут $h_{\min}$ – мінімальна товщина; L_i, h_i – довжина і товщина i-ї частини оболонки.

ДЛЯ НОТАТОК

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.– М.: Высшая школа, 1961.– 538 с.

2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов.– М.: ГИТТЛ, 1954.– 856 с.

3. Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко.– М.: Машиностроение, 1988.

4. Винокуров Л.П. Теория упругости и пластичности.– Харьков: Издательство Харьковского государственного университета им. А.М. Горького.– 1965.– 328 с.

5. Жемочкин Б.Н. Теория упругости.– М.: Госстройиздат, 1957.– 256 с.

6. Митинский А.Н. Сопротивление материалов.– Львов: Судпромгиз, 1959.– 296 с.

7. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарёв, А.П. Квитка и др.– Киев: Вища школа, 1973.– 672 с.

8. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев.– Киев: Наукова думка, 1975.– 704 с.

9. Пономарёв С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарёв, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарёв и др.– М.: Государственное издательство технической литературы, 1958.– 976 с.

10. Татур Г.К. Общий курс сопротивления материалов.– Минск: Вышэйшая школа, 1974.– 464 с.

11. Теорія пластин і оболонок: конспект лекцій / укладач І.В. Павленко.– Суми: Видавництво СумДУ, 2010.– 67 с.

12. Тимошенко С.П. Курс сопротивления материалов.– М.: Государственный научно-технический институт, 1931.– 588 с.

13. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов.– Т.2.– М.: Наука, 1965.– 480 с.

14. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем.– М.: ОГИЗ, 1946.– 532 с.

15. Тимошенко С.П. Курс теории упругости.– К.: Наукова думка. – 1972.– 508 с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ПЛАСТИН
І ОБОЛОНОК

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів 4-го курсу
факультету технічних систем та енергоефективних технологій
денної форми навчання

Відповідальний за випуск В.А. Марцинковський
Редактор Т.Г. Чернишова
Комп'ютерне верстання І.В. Павленка

Підписано до друку 29.11.2010, поз.
Формат 60×80/8. Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 1,17. Тираж 40 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.