МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Д. Погребной

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Сумы
Сумский государственный университет
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для студентов специальности
6.04030101 «Прикладная математика»”
всех форм обучения

Утверждено
на заседании кафедры
прикладной и вычислительной
математики
как конспект лекций
по дисциплине «Теория функций
действительной переменной».
Протокол № 8 от 27.03.2012 г.

Сумы
Сумский государственный университет
2012

Теория функций действительной переменной : конспект лекций / составитель В. Д. Погребной. – Сумы : Сумский государственный университет, 2012. – 239 с.

Кафедра прикладной и вычислительной математики

СОДЕРЖАНИЕ

С.

СОДЕРЖАНИЕ **3**

ПРЕДИСЛОВИЕ **6**

ВВЕДЕНИЕ **7**

РАЗДЕЛ 1. ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ. **10**

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. **10**

§ 1. Множества, подмножества 10
§ 2. Действия над множествами. 13
§ 3. Мощность множества 18
§ 4. Сравнение мощностей 23
§ 5. Счетные множества 26
§ 6. Мощность континуума 32
§ 7. Функциональная мощность 37
§ 8. Упорядоченные множества 38
§ 9. Вполне упорядоченные множества 40
§ 10. Трансфинитные числа 43
§ 11. Континуум - гипотеза 44
Решение типовых задач к главе 1 .... *46*
Задачи к главе 1 .... *48*

ГЛАВА 2. МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ R^n **50**

§1. Метрические пространства 50
§2. Специальные точки множеств 55
§3. Открытые множества 60
§4. Замкнутые множества 62
§5. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой 67
§6. Множества на плоскости, в пространстве и в R^n 71
Решение типовых задач к главе 2 .... *74*
Задачи к главе 2 .... *76*

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ **77**

§1. Непрерывность функций 77
§2. Непрерывные функции на замкнутых множествах 80

§3. Точки разрыва 82
§4. Последовательности функций 86
§5. Классификация Бэра 89
§6. Функции ограниченной вариации 91
Решение типовых задач к главе 3 102
Задачи к главе 3........ 105

РАЗДЕЛ 2. МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ 106

ГЛАВА 1. ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА 106

§ 1. Движения в пространстве R^n 106
§ 2. Проблемы построения меры 108
§ 3. Мера Жордана 110
§ 4. Построение меры Лебега 113
§ 5. Мера открытых множеств 114
§ 6. Мера замкнутых множеств 116
§ 7. Внутренняя и внешняя меры 120
§ 8. Измеримость множеств 123
§ 9. Класс измеримых множеств 126
§ 10. Сходимость почти всюду 129
§ 11. Мера Лебега в пространстве R^n 130
§ 12. Связь мер Жордана и Лебега 131
§ 13. Мера абстрактных множеств 132
Решение типовых задач к главе 1 135
Задачи к главе 1........ 137

ГЛАВА 2. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ 138

§ 1. Измеримость функции 138
§ 2. Последовательности измеримых функций 142
§ 3. Структура измеримых функций 149
Решение типовых задач к главе 2 155
Задачи к главе 2........ 156

ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛ 157

§ 1. Интеграл Римана 157
§ 2. Интеграл Стилтьеса 161
§ 3. Интеграл Лебега 168
§ 4. Сравнение интегралов Римана и Лебега 176

§ 5. Обобщенный интеграл Лебега от неотрицательной функции 179
§ 6. Обобщенный интеграл Лебега от функций произвольных знаков 185
Решение типовых задач к главе 3 .... *195*
Задачи к главе 3 .... *198*

ГЛАВА 4. ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ 199

§ 1. Линейные пространства 199
§ 2. Нормированные линейные пространства 202
§ 3. Эвклидовы и унитарные пространства 204
§ 4. Гильбертовы пространства 209
§ 5. Пространство суммируемых функций $L(X)$ 211
§ 6. Пространство функций с суммируемым квадратом 214
§ 7. Пространства функций, суммируемых с данной степенью 223
§ 8. Пространства последовательностей l_p 230
§ 9. Пространства $L^2(X)$ и l_2 231
Решение типовых задач к главе 4 .... *234*
Задачи к главе 4 .... *237*
Заключение 238

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс лекций по дисциплине «Теория функций действительной переменной» предназначен для студентов специальности «Прикладная математика». Курс лекций содержит больше материала, чем реально можно изложить в лекционном курсе, и может быть использован для индивидуальной работы со студентами и самостоятельной работы студентов. Он также может использоваться как пособие при изучении дисциплин прикладного математического цикла. Данная дисциплина должна основательно подготовить студентов к изучению функционального анализа, занимающего важное место в подготовке специалиста по прикладной математике.

Курс лекций имеет два раздела. Первый раздел посвящен дескриптивной теории функций, второй – метрической теории функций. В конце каждой главы даются решения типовых задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения. Список рекомендованной литературы, естественно, не является исчерпывающим.

ВВЕДЕНИЕ

п 1. Предмет теории функций действительной переменной

Теория функций действительной переменной представляет собой следующий после классического математического анализа этап развития анализа в широком понимании этой математической науки («большого анализа»). В основном развитие идет не «вширь», а «вглубь», т. е. в плане исследования и обобщения результатов и понятий классического анализа. Отдельные факты теории функций действительной переменной (ТФВП) были открыты уже в рамках классического анализа в XIX веке. Например, непрерывные нигде не дифференцируемые функции, ряды непрерывных функций с разрывной суммой и т. п. Но тогда они еще не воспринимались как система, а считались исключениями из правил. Но «странности» накапливались, требовалась реакция на них. И только в начале XX века, когда математика стала переходить на основу в виде теории множеств и математической логики, оформилась, и начала систематически развиваться ТФВП. В ее развитие внесли свой вклад многие видные математики разных стран, и в нашем курсе мы будем их упоминать.

ТФВП основывается на классическом анализе и теории множеств, тесно связана с линейной алгеброй и геометрией. Через ТФВП лежит путь к функциональному анализу и общей топологии, т. е. современному анализу.

п 2. Разделы ТФВП

Общепринятым в настоящее время является деление ТФВП на следующие направления:

1. Дескриптивная теория функций. Изучаются предельные переходы в множествах точек и множествах функций.

2. Метрическая теория функций. Множества точек и функций изучаются с точки зрения меры, являющейся обобщением геометрических понятий длины отрезка, площади фигуры, объема тела.

3. Конструктивная теория функций. Изучаются проблемы представления функций с помощью указанных аналитических средств.

В нашем курсе мы коснемся только 1-го и 2-го направлений.

п 3. Обзор основной литературы

Мы упоминаем литературу лишь на украинском и русском языках, наиболее распространенную. Книги рассчитаны на подготовку специалистов разных профилей, и пригодность их для специальности «Прикладная математика» различна и частична. Литературу будем рассматривать по основным группам.

1. Литература для математиков-теоретиков научного направления. Содержит больше материала, чем наша программа предусматривает:

1. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

2. Натансон І. П. Основи теорії функцій дійсної змінної. – К. : Радянська школа, 1950. – 424 с.

3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. – М. : Физматгиз, 1960.

4. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М. : Наука, 1973. – 350 с.

5. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1972. – 496 с.

6. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М. : Наука, 1968. – 268 с.

2. Литература для математиков-теоретиков педагогического направления. Содержит практически весь нужный материал и другие вопросы:

1. Давидов М. О. Додаткові розділи математичного аналізу. – К. : Вища школа, 1971. – 440 с.

2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Т3. – К. : Вища школа, 1979. – 384 с.

3. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. – М. : Просвещение, 1968. – 312 с.

4. Лузин Н. Н. Теория функций действительной переменной. – М. : Учпедгиз, 1948.

5. Макаров И. П. Теория функций вещественной переменной. – М. : Просвещение, 1958. – 176 с.

6. Фролов Н. А. Теория функций действительной переменной. – М. : Просвещение, 1966. – 172 с.

3. Сборники задач:

1. Очан Ю. С. Сборник задач и теорем по теории функций вещественной переменной. – М. : Просвещение, 1965.

2. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. – М. : Просвещение, 1981. – 272 с.

3. Петров В. А. Элементы функционального анализа в задачах / В. А. Петров, Н. Я. Виленкин, М. И. Граев. – М. : Просвещение, 1978. – 128 с.

4. Теляковский С. А. Сборник задач по теории функций действительной переменной. – М. : Наука, 1980. – 112 с.

5. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвиашвили. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

п 4. Основные обозначения

Мы будем использовать стандартную логическую символику:

$\vee$ – или

$\wedge$ – и

$\Rightarrow$ – следует

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда

::= – по определению

► – начало доказательства

◄ – конец доказательства

РАЗДЕЛ 1. ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

§ 1. МНОЖЕСТВА, ПОДМНОЖЕСТВА

Нам необходимо напомнить основные сведения о множествах, подмножествах, действиях над множествами и свойствах этих действий.

Мы в основном будем придерживаться так называемого «наивного» подхода к теории множеств – пониманию множества как совокупности некоторых объектов, которые объединены вместе по каким-то общим признакам, и эта совокупность рассматривается как один новый объект.

Процитируем создателя теории множеств: «Множество есть многое, мыслимое как единое» (Георг Кантор).

Г. Кантор (Georg Cantor, 1845 – 1918) – великий немецкий математик. Его бессмертной заслугой и было создание теории множеств, являющейся вместе с математической логикой основой всей современной математики. Понятие множества мы будем принимать как основное, неопределимое понятие.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, входит ли он в это множество. Множества будем обозначать большими латинскими буквами: $A, B, C, X, Y, \ldots$ Объекты, составляющие множество, называются его элементами. Факт принадлежности элемента a множеству A отображается символической записью: $a \in A$. В противном случае пишут: $a \overline{\in} A$ или $a \notin A$.

Договоримся сразу о стандартных обозначениях для некоторых множеств:

N – множество натуральных чисел;

N_0 – множество 0,1,2,3,…;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество вещественных (действительных) чисел;

C – множество комплексных чисел.

Также еще некоторые множества:

R^+ – строго положительных вещественных чисел;

R_+ – неотрицательных вещественных чисел.

Множества R_- и R^- определяются очевидным образом.

Множества можно задавать различными способами. Можно, например, перечислять все их элементы: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Можно указывать свойства, по которым элементы отбираются во множество $A = \{x : P(x)\}$. Здесь $P(x)$ – некоторое свойство (одноместный предикат). Может не оказаться элементов с указанными свойствами. Так мы приходим к понятию пустого множества, не имеющего ни одного элемента. Оно обозначается $\varnothing$ или Λ. Итак, $\varnothing = \{x : x \neq x\}$.

Равенство множеств определяют исходя из принципа объемности (равнообъемности): два множества считаются равными, тогда и только тогда они состоят из одних и тех же элементов:

$$A = B ::= [a \in A \Rightarrow a \in B] \wedge [\forall b \in B \Rightarrow b \in A]$$

Равенство множеств, очевидно, обладает свойствами:

1^0. Рефлексивность:

$\forall A[A = A]$.

2^0.Симметричность:

$\forall A, B[A = B \Rightarrow B = A]$.

3^0.Транзитивность:

$\forall A, B, C[A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C]$.

Если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$, то множество A называется подмножеством множества B. Запись $A \subset B$.

В этой ситуации называется надмножеством или расширением множества А.

Запись: $B \supset A$. Например, $Z \subset Q$, $Q \supset Z$. Подмножества $\varnothing$ и A имеются у каждого множества. Они называются несобственными или тривиальными. Другие подмножества, если они есть, называются собственными или нетривиальными. Таким образом, B – собственное подмножество множества A, если $\varnothing \underset{\neq}{\subset} B \underset{\neq}{\subset} A$.

Скажем, что Z – собственное подмножество для Q. Не всякое множество имеет собственные подмножества. Например, $A = \{1\}$. Подмножества, очевидно, имеют свойства:

1^0. $\forall A[\varnothing \subset A]$.

2^0. $\forall A[A \subset A]$ – рефлексивность.

3^0. $\forall A, B[A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B]$ – антисимметричность.

4^0. $\forall A, B, C[A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C]$ – транзитивность.

Очевидно также, что $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Можно рассматривать множество некоторых или всех подмножеств данного множества (иногда говорят: семейство множеств, хотя этот термин употребляется также в несколько другом значении: имеется множество индексов $I=\{i\}$ и функция $i \to A_i$, тогда записывают $\{A_i\}_{i\in I}$ и говорят, что задано семейство или индексированное семейство множеств). Множество всех подмножеств данного множества X называется его булеаном (в честь одного из создателей математической логики Джорджа Буля, George Boole, Англия, 1815 – 1864). Запись: $\beta(X), 2^x, \exp X$. Смысл двух последних символов прояснится немного позднее. $\beta(X)=\{A : A\subset X\}$.

§ 2. Действия над множествами

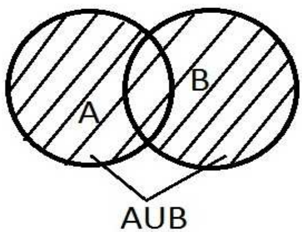
Напомним теперь о действиях над множествами.

I. Теоретико-множественное сложение – объединение

$A\bigcup B ::= \{x : x\in A \vee x\in B\}$.

Пример: [1;5]$\bigcup$(-1;2)=(-1;5].

Действия над множествами можно иллюстрировать рисунками (диаграммы Эйлера-Венна).



Понятно, можно рассматривать объединение любого семейства множеств: $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

При $I=\{1,2,...,n\}$ пишут $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

При $I=N$ запись будет $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$.

Свойства объединения:

1^0. $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$ – ассоциативность;

2^0. $A\bigcup B = B\bigcup A$ – коммутативность;

3^0. $A\bigcup A = A$ – самопоглощение;

4^0. $A\bigcup\varnothing = A$;

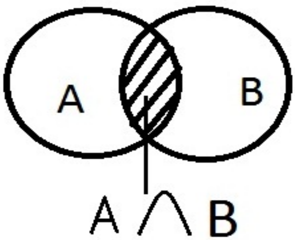
5^0. $A\subset B \Rightarrow A\bigcup B = B$;

6^0. $A\bigcup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \wedge B = \varnothing$.

II. Теоретико-множественное умножение – пересечение

$A\bigcap B ::= \{x : x\in A \wedge x\in B\}$.

Пример: $[0;1]\bigcap(-1;0] = \{0\}$.



Можно рассматривать пересечение любого семейства множеств: $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Аналогично объединению может быть $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$; $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Свойства пересечения:

1. $(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$ – Ассоциативность;
2. $A\bigcap B = B\bigcap A$ – Коммутативность;
3. $A\bigcap A = A$ – Самопоглощение;
4. $A\bigcap\varnothing = \varnothing$;
5. $A\subset B \Rightarrow A\bigcap B = A$.

Связь объединения и пересечения:

1. $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

2. $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$.

3. $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

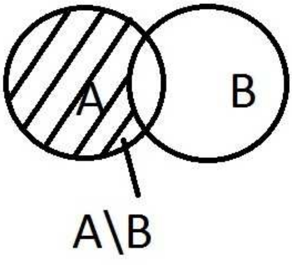
4. $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$.

Это левая и правая дистрибутивность, $\bigcup$ и $\bigcap$ друг относительно друга.

III. Разность множеств

$A\setminus B::=\{x\in A: x\notin B\}$.

Пример: $[0;2]\setminus(-1;1)=[1;2]$.



Свойства разности множеств:

1^0. $A\setminus B\subset A$.

2^0. $(A\setminus B)\bigcap B=\varnothing$.

3^0. $(A\setminus B)\bigcup B=A\bigcup B$.

4^0. $A\setminus B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B$.

5^0. $A\setminus B=A\Leftrightarrow A\bigcap B=\varnothing$.

6^0. $(A\setminus B)\bigcup A=A$.

7^0. $(A\setminus B)\bigcap A=A\setminus B$.

8^0. $A\setminus(A\setminus B)=A\bigcup B$.

9^0. $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.

10^0. $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.

11^0. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

12^0. $A \subset B \Rightarrow C \setminus B \subset C \setminus A$.

13^0. $(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C)$.

14^0. $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$.

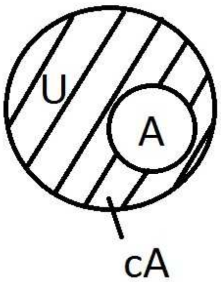
15^0. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \bigcup (A \bigcap C)$.

IV. Дополнение к множеству

В некоторых задачах все рассматриваемые множества есть подмножества одного и того же множества U (универсальное множество).

Тогда $U \setminus A$ называется: дополнение к A, запись cA или $\overline{A}$.

$cA = \{x \in U : x \overline{\in} A\}$.



Свойства дополнения:

1. $cU = \varnothing$.
2. $c\varnothing = U$.
3. $c(cA) = A$.
4. $A \subset B \Leftrightarrow cA \supset cB$.
5. $A \bigcup cA = U$.
6. $A \bigcap cA = \varnothing$.

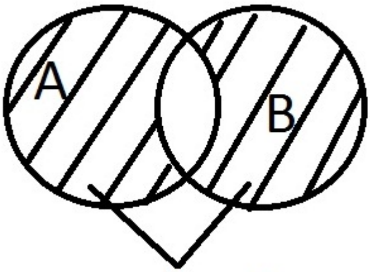
$$\left.\begin{array}{l} 7.\ c(A \bigcup B) = cA \bigcap cB \\ 8.\ c(A \bigcap B) = cA \bigcup cB \end{array}\right\} \text{законы де Моргана.}$$

(де Морган, 1806 – 1871, Шотландия, один из основателей математической логики).

Есть еще так называемая симметрическая разность множеств:

$$A\Delta B=\left\{x:\left(x\in A\Lambda x\overline{\in} B\right)\vee\left(x\overline{\in} A\Lambda x\in B\right)\right\}.$$

Очевидно, $A\Delta B=\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)=\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)$.



$A\Delta B$

Часто возникает необходимость доказывать включение множеств: $X\subset Y$ или их равенство: $X=Y$.

При этом исходят из определений:

$X\subset Y\Leftrightarrow\forall x\in X\Rightarrow x\in Y$,

$X=Y\Leftrightarrow X\subset Y\Lambda Y\subset X$.

Пример

Доказать первый закон де Моргана: $c\left(A\bigcup B\right)=cA\bigcap cB$.

Доказательство будет иметь 2 этапа.

1. $x\in c\left(A\bigcup B\right)\Rightarrow x\overline{\in} A\bigcup B\Rightarrow x\overline{\in} A\Lambda x$

$\overline{\in} B\Rightarrow x\in cA\Lambda\, x\in cB\Rightarrow x\in cA\bigcap B$.

2. $y\in cA\bigcap cB\Rightarrow y\in cA\Lambda\, y\in cB\Rightarrow y\overline{\in} A\Lambda\, y\overline{\in} B\Rightarrow$

$\Rightarrow y\overline{\in} A\bigcup B\Rightarrow y\in c\left(A\bigcup B\right)$.

Таким образом, наши множества состоят из одних и тех же элементов, следовательно, они равны.

Далее мы перейдем к более специальным и сложным аспектам общей теории множеств.

§ 3. Мощность множества

Нередко возникает проблема: сравнить два непустых множества по количеству элементов. Для конечных множеств это не представляет никакого затруднения: подсчитать количества элементов в них и сравнить два натуральных числа. Таким образом, очевидной является роль натуральных чисел как меры количества элементов в конечных множествах.

Для бесконечных множеств этот способ не годится – мы не сможем закончить подсчет всех натуральных чисел. С целыми, рациональными и тем более вещественными числами еще сложнее. Для конечных множеств есть еще один способ. Будем устанавливать взаимно однозначное соответствие между данными множествами. Собственно говоря, речь идет о взаимно однозначных функциях множества на множество. Эти функции имеют название: биекция. Например, нужно решить вопрос: кого в данной академической группе больше: студентов или студенток? По первому способу можно эти количества подсчитать отдельно, а затем сравнить. По второму способу построим студентов в одну колонну, рядом студенток в другую колонну, чтобы в каждом ряду был один студент и одна студентка. Тогда будет понятно, кого больше.

Студенты: 

Студентки: 

В данном случае ясно видно, что студенток в группе больше. Такой способ годится и для бесконечных множеств, если удается установить биекцию $f : A \leftrightarrow B$ всего множества A на все множество B, то следует признать, что в смысле «количества элементов» данные множества равноценны или эквивалентны. Второй термин примем как официальный.

Определение

Множества A и B называются эквивалентными или равномощными между собой, если существует биекция $f : A \leftrightarrow B$. Запись: $A \sim B$.

Мы легко можем указать простейшие свойства эквивалентности множеств.

1 Рефлексивность.

$A \sim A$ для всех множеств A.

Действительно, $f = idA$ – есть биекция A на A.

2 Симметричность.

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

Действительно, если $f : A \leftrightarrow B$ – биекция, то f^{-1} – биекция B на A.

3 Транзитивность.

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Действительно, при $f : A \leftrightarrow B, g : B \leftrightarrow C$, fog есть биекция A на C.

Отсюда сразу же следует простейший вывод, что эквивалентность множеств есть отношение эквивалентности и разбивает все «множество множеств» на классы эквивалентных между собой множеств.

Доказательство $A \sim B$ должно состоять в доказательстве существования биекции $f : A \leftrightarrow B$, например, путем ее конструктивного построения.

Пример

Доказать, что [0;1]~[0;2].

$\forall x \in [0;1]$, положим $y = f(x) = 2x$. Эта функция отображает весь [0;1] на весь [0;2] и взаимно однозначна: $f(\alpha) = f(\beta)$, т. е. $2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta$, т. е. получили [0;1]~[0;2].

Множества одного класса эквивалентности имеют между собой нечто общее, характеризующее только этот класс. Это то «количество элементов», о котором мы говорим. Это общее называется мощностью или кардинальным (т. е. количественным) числом данного множества.,

Запись: $\overline{\overline{A}}$ или $cardA$. Итак, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow A \sim B$.

Ясно, что понятие мощности есть обобщение понятия количества элементов в конечном множестве. (Можно и формально определить кардинальное число как элемент фактор – множества M/E,
где M – множество всех множеств;
E – отношение равномощности множеств, но начинающему это не прибавит ясности понимания).

Ограничившись интуитивным представлением, согласимся на то, что кардинальные числа или мощности – это элементы некоторого множества символов, причем эквивалентным множествам соответствует один символ, неэквивалентным – разные.

Неизбежен вывод, что натуральные числа следует рассматривать как мощности конечных множеств: если $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, то $\overline{\overline{A}}=n$. Сразу же примем, по определению, что $\overline{\overline{\varnothing}}=0$. Это хорошо согласуется с «наглядностью». Итак, среди кардинальных чисел (мощностей) имеется и число 0, и все натуральные числа. Понятно, что этим дело не ограничивается: множество N бесконечно и у него свое кардинальное число, явно бесконечное. К кардинальным бесконечным числам мы скоро вернемся, а теперь установим простые свойства равномощности, которые часто бывают необходимы.

Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ – дизъюнктные семейства множеств, (т. е. $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing \wedge B_i\cap B_j=\varnothing$). Обозначим $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$, $B=\bigcup\limits_{i\in I}B_i$. Если $i\in I\Rightarrow \overline{\overline{A_i}}=\overline{\overline{B_i}}$, то можно ожидать, что $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. Это действительно так.

Теорема 1 (принцип склеивания)

Если $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ – дизъюнктные семейства множеств, $\overline{\overline{A_i}}=\overline{\overline{B_i}}$ для всех $i\in I$, то $\overline{\overline{\bigcup\limits_{i\in I}A_i}}=\overline{\overline{\bigcup\limits_{i\in I}B_i}}$.

Доказательство

Если $f_i : A_i \leftrightarrow B_i$ – биекция, то, очевидно, $f_0 = \bigcup\limits_{i \in I} f_i$ есть биекция A на B.

Теорема доказана.

При сравнении мощностей иногда приходится «зажимать» множество между двумя эквивалентными. В какой-то мере это аналог теоремы о пределе промежуточной последовательности.

Теорема 2 (о промежуточной мощности)

Если $A_2 \subset A_1 \subset A,\ A_2 \sim A$, то $A_1 \sim A$.

Доказательство

Пусть $f : A \leftrightarrow A_2$ – биекция.

Обозначим $f(A_1) = A_3$. Тогда $A_1 \sim A_3$.

$A_2 \subset A_1$. Пусть $f(F_2) = A_4$. Продолжим этот процесс.

Обозначим $A = A_0$, имеем:

$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset \ldots$

При этом $A_0 \sim A_2,\ A_1 \sim A_3,\ A_2 \sim A_4,\ A_3 \sim A_5, \ldots$

По построению множеств A_n имеем:

$$\left.\begin{array}{l} A \setminus A_1 \sim A_2 \setminus A_3 \\ A_1 \setminus A_2 \sim A_3 \setminus A_4 \\ A_2 \setminus A_3 \sim A_4 \setminus A_5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} (A \setminus A_1) \bigcap (A_1 \setminus A_2) = \varnothing \\ (A_1 \setminus A_2) \bigcap (A_2 \setminus A_3) = \varnothing \\ (A_2 \setminus A_3) \bigcap (A_3 \setminus A_4) = \varnothing \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (**)$$

Обозначим $B = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} A_i$.

С одной стороны,

$A = \underline{(A \setminus A_1)} \bigcup (A_1 \setminus A_2) \bigcup \underline{\underline{(A_2 \setminus A_3)}} \bigcup (A_3 \setminus A_4) \bigcup (A_4 \setminus A_5) \bigcup \ldots \bigcup B$.

С другой стороны,

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup \underline{(A_2 \setminus A_3)} \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \underline{\underline{(A_4 \setminus A_5)}} \cup \ldots \cup B.$$

Используя соотношения (*), (**), попарную непересекаемость множеств и принцип склеивания, получаем: $A \sim A_1$.

Теорема доказана.

В некоторых случаях построить биекцию $f : A \leftrightarrow B$ сложно или технически неудобно. Оказывается, можно строить биекции $A \leftrightarrow B_1$, $A_1 \leftrightarrow B$, где $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ и, тем не менее, получать $A \sim B$.

Теорема 3 (Г. Кантор, 1845 – 1918, Ф. Бернштейн, 1878 – 1956, Э. Шредер, 1841 – 1902)

Если $A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1 \sim B, B_1 \sim A,$ то $A \sim B$.

Доказательство

Пусть $f : B \leftrightarrow A_1$ – биекция.

Обозначим $A_2 = \{ a \in A_1 : a = f(b_1), b_1 \in B_1 \}$, т. е. $A_2 = f(B_1)$.

Тогда $A \supset A_1 \supset A_2$. Получаем: $B_1 \sim A, B_1 \sim A_2$. В силу теоремы 2 о промежуточной мощности $A \sim A_1$.

Итак, $A \sim A_1 \wedge A_1 \sim B$. Значит, $A \sim B$.

Теорема доказана.

Следует обратить внимание на важный аспект.

Может быть, $A \underset{\neq}{\subset} B$, но $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. Достаточно взять уже рассмотренный пример $A = [0;1]$, $B = [0;2]$. Два совпадающих для конечных множеств аспекта – включение и эквивалентность – у бесконечных множеств уже различны.

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы сравнения между собой кардинальных чисел.

§ 4. Сравнение мощностей

Обозначим $\overline{\overline{A}} = \alpha, \overline{\overline{B}} = \beta$. Как ввести отношение порядка во множестве кардинальных чисел?

С точки зрения логики возможны четыре случая:

1) $A \sim B_1 \subset B \wedge B \sim A_1 \sim A$.

В этом случае по теореме Кантора-Шредера-Бернштейна $A \sim B$, т. е. $\alpha = \beta$.

2) $A \supset A_1 \sim B$, но $\overline{\exists} B_1 \subset B : B_1 \sim A$.

Естественно считать, что $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, т. е. $\alpha > \beta$.

3) $B \supset B_1 \sim A$, но $\overline{\exists} A_1 \sim A : A_1 \sim B$.

Аналогично считаем $\beta > \alpha$.

4) $\overline{\exists} A_1 \subset A : A_1 \sim B \wedge \overline{\exists} B_1 \subset B : B_1 \sim A$.

В этом случае надо считать α и β несравнимыми между собой. Однако в современной математике во избежание парадоксов все же ограничивают доступ множеств в математику некоторой системой аксиом. При принятии наиболее распространенной аксиоматики Цермело – Френкеля доказывается, что случай 4 невозможен, и далее мы его не рассматриваем. За подробностями отсылаем к [1].

Итак, вследствие наших определений любые два кардинальных числа сравнимы. Выясним свойства введенного нами отношения порядка для мощностей.

Ясно, что случай $\alpha = \beta$ исключает $\alpha > \beta$ и $\beta > \alpha$. Как обычно, $\alpha < \beta$ означает, что $\beta > \alpha$. Одновременно $\alpha > \beta$ и $\alpha < \beta$ не могут иметь место. Действительно, в противном случае имеем: $\exists A_1 : A \sim B$ и $\exists B_1 : B_1 \sim A$. Тогда по теореме Кантора-Шредера-Берштейна: $\alpha = \beta$.

Несовместимы также $\alpha = \beta$ и $\alpha > \beta$, поскольку $\alpha = \beta$ требует $B_1 \subset B : B_1 \sim A_1$, а $\alpha > \beta$ запрещает это. Аналогично

$\alpha = \beta$ и $\alpha < \beta$ не могут иметь место одновременно. Значит, верна.

Теорема 1

При сравнении кардинальных чисел выполняется одно и только одно из трех условий:

1) $\alpha = \beta$;
2) $\alpha > \beta$;
3) $\alpha < \beta$.

(свойство трихотомии).

В частности, $\alpha > \alpha$ никогда не выполняется. Для того чтобы утверждать, что сравнение кардинальных чисел, введенное нами, действительно есть отношение порядка, надо еще установить, что оно транзитивно.

Теорема 2

Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Доказательство

По условию $A \sim B_1 \subset B$, $B \sim C_1 \subset C$, отсюда $A \sim C_2 \subset C$, $C_2 = \varphi(B_1)$, здесь $\varphi : B \leftrightarrow C_1$. Остается показать, что $A \nsim C$. В противном случае $C_2 \sim C \Rightarrow C_1 \sim C \Rightarrow B \sim C \Rightarrow \beta = \gamma$, что невозможно. И тогда $\alpha < \gamma$.

Теорема доказана.

Как обычно, $\alpha \le \beta$ означает $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$. Таким образом, отношение $\alpha > \beta$ есть отношение порядка на множестве кардинальных чисел.

Наименьшая мощность есть $\overline{\overline{\varnothing}} = 0$. Есть ли наибольшая мощность? Ответ укажет следующая теорема.

Теорема 3

Мощность булеана непустого множества больше мощности данного множества.

Доказательство

$\beta(A)$ имеет подмножество $\{\{\alpha_i\}\}$ одноэлементных множеств, эквивалентное A, поэтому $\overline{\overline{\beta(A)}} \geq \overline{\overline{A}}$. Покажем, что A неэквивалентно $\beta(A)$. Допустим противное: $a \in A \leftrightarrow \varphi(a) = C \subset A$.

Возможны 2 и только 2 случая:

1. $a \in \varphi(a); a$ – назовем элементом 1-го типа.
2. $a \overline{\in} \varphi(a)$; тогда a – элемент 2-го типа.

Обозначим S –множество всех элементов 2-го типа; $S \leftrightarrow a_0 \in A$.

Какой же a_0? Если $a_0 \in S$, то он 1-го типа, но S из 2-го типа.

Если $a_0 \overline{\in} S$, то тоже не получится, т. к. он будет 2-го типа и должен войти в S. Противоречие, тогда $A \nsim B(A)$ и $\overline{\overline{B(A)}} > \overline{\overline{A}}$. *Теорема доказана.*

Отсюда, очевидно, вытекает исключительно важный и интересный результат.

Следствие

Не существует наибольшей мощности.

Если $\overline{\overline{A}} = n$, то $\beta(A)$ имеет 2^n элементов:

$C_n^0 = 1, \varnothing$;

C_n^1 – одноэлементных;

C_n^2 – 2 элементных;

……………………….

C_n^n – все A.

Всего их $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Поэтому по аналогии, если $\overline{\overline{A}} = \alpha$, то мощность булеана обозначают 2^α. Теорема 3 дает $2^\alpha > \alpha$.

В связи с этим понятными становятся обозначения самого булеана: $2^A, \exp A$.

Далее мы перейдем к рассмотрению бесконечных мощностей.

Начнем с мощности множества N натуральных чисел.

§ 5. Счетные множества

Поскольку $n \in N, M_n = \{1, 2, 3, ..., n\} \underset{\neq}{\subset} N$, то $\overline{\overline{N}} > n$.

Итак, $\overline{\overline{N}}$ – бесконечная мощность. Она обозначается $\underline{a}$ или IC_0 (читается: алеф-нуль, алеф IC – это первая буква древнееврейского алфавита, аналог α греческой).

Таким образом, все множества $A \sim N$ имеют эту мощность.

Определение

Множество, эквивалентное множеству N, называется счетным множеством.

Из самого определения имеем, что $\overline{\overline{A}} = a$ тогда и только тогда, когда существует биекция $f : N \leftrightarrow A$. По-другому можно сказать так: множество A счетно тогда и только тогда, когда все его элементы можно перенумеровать всеми натуральными числами. Это дает нам и инструмент для установления счетности множеств. Изучим простейшие свойства счетных множеств.

1) Из каждого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество, причем так, что останется бесконечное множество.

Доказательство

Выберем произвольно $b_1 \in A$. Поскольку A бесконечно, то можно взять еще $c_1 \in A : c_1 \neq b_1$. Так как A бесконечно, то можно выбрать $b_2 \in A,\ c_2 \in A$ так, что $b_2 \neq b_1, c_2 \neq c_1 \neq b_1$.

Этот процесс можно продолжить бесконечно, т. к. A бесконечно. Обозначим: $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$, B – счетно. $C = \{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$. Поскольку $C \subset A \setminus B$, то $A \setminus B$ бесконечно.
Свойство доказано.

2) Каждое бесконечное подмножество счетного множества само счетно.

Доказательство

Пусть $\overline{\overline{A}} = a,\ B \subset A, B$ – бесконечно. Возможность нумерации элементов A означает возможность их расположения в бесконечную последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ попарно различных элементов.

Будем двигаться по этой последовательности, строго увеличивая номера, в поисках элементов множества B. Они найдутся, так как $B \subset A$. Пусть $a_{n_1} \in B$ – с наименьшим номером.

Обозначим $a_{n_1} = b_1$. Двигаясь далее, находим $b_2 = a_{n_2}$ и т. д. Поскольку B бесконечно, для нумерации элементов придется использовать все числа из N. Это значит, что B счетно.
Свойство доказано.

Следствие

Счетная мощность есть наименьшая бесконечная мощность, т. е. IC_0 есть кардинальное наименьшее бесконечное число.

3) Если A счетно, B конечно, то $A \bigcup B$ счетно.

Доказательство

Очевидно, достаточно считать $A \bigcap B = \varnothing$. В других случаях получается тем более. Применим принцип счетности – возможность нумерации.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$.

$C = A \bigcup B$. Нумеруем: $c_1 = b_1, c_m = b_m, c_{m+1} = a_1, ...$
Свойство доказано.

Следствие

Если A счетно, B – конечно, то $A \setminus B$ счетно.

4) Объединение конечного числа счетных множеств счетно.

Доказательство

Достаточно считать данное семейство множеств $\{A_i\}_{i=1+m}$ дизъюнктным. Расположим все элементы семейства в виде бесконечной матрицы и покажем стрелками ход нумерации:

$$A_1 : a_{11}, \quad a_{12}, ..., a_{1n}, ...$$

$$A_2 : a_{21}, \quad a_{12}, ..., a_{2n}, ...$$

– – – – – – – – – – – – – –

$$A_m : a_{m1,\to} a_{m2,} ...., a_{mn,} ...$$

Свойство доказано.

Теперь мы уже можем решить вопрос о множестве целых чисел.

Следствие

Множество $Z = N \bigcup \{0\} \bigcup (-N)$. Поскольку $(-N)$ счетно в силу биекции $f \coloneqq n \leftrightarrow (-n)$, $N \bigcup (-N)$ по свойству 4) счетно. По 3- му свойству $Z = (N \cup (-N)) \cup \{0\}$ счетно.

5) Объединение счетного дизъюнктного семейства конечных множеств счетно.

Доказательство

Применим тот же прием:

$$A_1 \coloneqq a_{11}, \to a_{12}, \to, a_{1K_1} --_{\downarrow}$$

$$A_2 \coloneqq a_{21}, \underset{\downarrow}{--} a_{22}, \leftarrow, a_{2K_2} \leftarrow$$

………..$\underset{\downarrow}{.}$…………………

$$A_2 : a_{n_1}, \quad a_{n_2}, ..., a_{nK_n}$$

Свойство доказано.

6) Объединение счетного семейства счетных множеств счетно.

Доказательство

Достаточно считать семейство дизъюнктным, указываем нумерацию:

$$
\begin{array}{l}
A_1 : a_{11}, \to a_{12},\, a_{13}, \to \ldots,\; a_{1n_1}, \ldots \\
A_2 : a_{21}, a_{22}, \quad a_{23}, \ldots, \quad a_{2n_1}, \ldots \\
A_3 : a_{31}, a_{32}, \quad a_{33}, \ldots., \quad a_{3n}, \ldots. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n : a_{n1}, a_{n2}, \ldots, \qquad\qquad a_{nn}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Свойство доказано.

Договоримся об одном термине. Если множество A конечно или счетно, будем говорить, что оно не более чем счетно.

Следствие 1

Объединение не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Теперь мы можем установить счетность множества рациональных чисел.

Следствие 2

Множество Q счетно.

Доказательство

Рассмотрим в начале положительные рациональные числа: Q_+.

$$Q_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{p}{q} \right\} = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q .$$

$Q_q = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{n}{q}, \ldots \right\}$ очевидно счетно. Семейство $\{Q_q\}_{q \in N}$ не дизъюнктно, но поскольку Q_+ все-таки бесконечное подмножество счетного множества $\bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q$, то оно счетно. В силу биекции $f:\dfrac{p}{q}\leftrightarrow\dfrac{-p}{q}, p,q\in N,(p,q)=1,$ Q_- – счетно. А тогда $Q=Q_+\bigcup\{0\}\bigcup Q_-$ – счетно. Известно, что каждый промежуток $\langle a,b\rangle$ имеет бесконечное множество рациональных чисел. Отсюда:

Следствие 3

Множество рациональных чисел $Q_{<a,b>}$ счетно.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, будем называть несчетным. Поскольку IC_0 – кардинальное наименьшее бесконечное число, то мощность несчетного множества больше, чем IC_0. То, что счетная мощность среди бесконечных мощностей «весьма мала», показывает следующее свойство.

7) Если множество B бесконечно, а A не более чем счетно, то $\overline{\overline{B\bigcup A}}=\overline{\overline{B}}$.

Доказательство

Считаем $B\bigcap A=\varnothing$. Выделим из В счетное подмножество С. Обозначим:

$D=B\setminus C$. Имеем $B=D\bigcup C$, $B\bigcup A=D\bigcup(C\bigcup A)$. $\overline{\overline{C\bigcup A}}=IC_0$, так что $C\bigcup A\sim C$. По теореме о склеивании $B=D\bigcup C\sim D\bigcup(C\bigcup A)=B\bigcup A$.

Свойство доказано.

8) Если B несчетно, $A\subset B$, а A не более чем счетно, то $B\setminus A$~B, т. е. $\overline{\overline{B\setminus A}}=\overline{\overline{B}}$.

Доказательство

$B\setminus A=C$ не может быть конечным, иначе $B=C\bigcup A$ было бы не более чем счетно. Значит, C бесконечно. По 7°, $C\bigcup A\sim C$, т. е. $B\setminus A$~B.

Свойство доказано.

Таким образом, прибавление или удаление не более чем счетного множества не меняет мощности несчетного множества.

Следствие

Каждое бесконечное множество имеет собственное бесконечное подмножество.

Иногда это используется как определение бесконечного множества.

Весьма применимым является:

9) Если элементы множества A определяются одним и тем же конечным семейством индексов, каждый из которых независимо от других принимает счетное множество значений, то множество A счетно.

Доказательство

$$A = \{a_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\}. x_i \in X_i, \overline{\overline{X_i}} = IC_0.$$

Применим полную индукцию по n.

При $n = 1$, очевидно, верно. Пусть верно при $n = k$.

Покажем, что верно при $n = k + 1$.

$A = \{a_{x_1}, \ldots, a_{x_k}, a_{x_{k+1}}\}$. Введем обозначение: A_i – множество $a \in A$ таких, что у них x_{k+1} принимает какое-то фиксированное значение $x_{k+1} = x_{k+1}^{(i)}$. По предположению индукции A_i счетно.

Поскольку $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то A тоже счетно.

Свойство доказано.

Следствие

Счетными являются множества:

– точек плоскости с рациональными координатами;

– точек пространства с рациональными координатами;

– множество Q^n;

– множество полиномов $Z[x]$;

– множество полиномов $Q[x]$.

Итак, счетные множества имеют важные и интересные свойства. Далее мы перейдем к более высокой мощности.
Отметим лишь в конце символические правила арифметики счетных множеств:

$$a+n=a\,,\ a-n=a\,,\ \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}=na=a\,,$$

$$n_1+n_2+\ldots+n_k+\ldots=a, aa=a.$$

§ 6. Мощность континуума

Существование несчетных множеств очевидно. Например, булеан счетного множества имеет мощность $2^a>a$. Рассмотрим еще одно несчетное множество.

Теорема 1

Сегмент (отрезок) [0;1] есть несчетное множество.

Доказательство

Допустим противное. Тогда $\left[0;1\right]=\{x_1, x_2,..., x_n,...\}$. Разделим [0;1] на три отрезка $\left[0;\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right],\left[\frac{2}{3};1\right]$. Число x_1 не может принадлежать сразу всем трем отрезкам. Есть промежуток, не содержащий x_1. Обозначим этот отрезок Δ_1. Делим Δ_1 на три равные части и обозначаем Δ_2 ту из них, что не содержит x_2, и т. д.

Получаем последовательность вложенных отрезков:

$$\Delta_0\supset\Delta_1\supset\ldots\supset\Delta_n\ldots$$

Длина Δ_n равна $\frac{1}{3^n}\to 0$ при $n\to\infty$. По принципу Кантора $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\Delta_n=\{x_0\}$.

$x_0 \in \Delta_0 = [0;1]$, но $x_0 \neq x_i \quad \forall i \in N$. Противоречие.

Теорема доказана.

Поскольку $\overline{\overline{Q}}[0;1] = IC_0$, то $\overline{\overline{[0;1]}} > IC_0$.

Мы пришли к более высокой мощности.

Определение

Если $A \sim [0;1]$, то A называется множеством мощности континуума. Запись: $\overline{\overline{A}} = c$.

Таким образом, $c > a$.

Для установления $\overline{\overline{A}} = c$ обычно строят биекцию $f : A \leftrightarrow [0;1]$ или $f : A \leftrightarrow B$, где уже известно, что $\overline{\overline{B}} = c$.

Рассмотрим свойства множеств мощности континуума.

1° При $a < b$, $\overline{\overline{< a,b >}} = c$.

Доказательство

Для $[a,b]$ построим биекцию $f(x) = a + (b-a)x$ отрезка $[0;1]$ к $[a;b]$. Значит, $\overline{\overline{[a,b]}} = c$. Другие промежутки получаются удалением 1 или 2 элементов, что не меняет мощности бесконечного множества. Свойство доказано.

2° Если $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing, \overline{\overline{A_i}} = c$, то $\overline{\overline{A}} = c$

Доказательство

Возьмем набор точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{x_{n-1}} < x_n = 1$.

Тогда $[0;1) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k), ... \overline{\overline{[x_{k-1}, x_k)}} = c$. Поставим в соответствие A_k промежуток $[x_{k-1}, x_k)$. По принципу склеивания $\overline{\overline{A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{[x_{k-1}, x_k)}} = \overline{\overline{[0,1)}} = c$.

Свойство доказано.

3° $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing, \overline{\overline{A_i}} = c \Rightarrow \overline{\overline{A}} = c$.

Доказательство

Возьмем на [0;1) строго возрастающую последовательность $(x_n)_{n\in N}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Установив соответствие $A_k \leftrightarrow [x_{k-1}, x_k)$, $x \in N$ и применив принцип склеивания, получаем $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1}, x_k)}} = \overline{\overline{[0;1)}} = c$

Свойство доказано.

4° $\overline{\overline{R}} = c$.

Действительно, $R = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[(-n);(-n+1))\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n-1;n)\right)$.

5° $\overline{\overline{I}} = c$ (I множество всех иррациональных чисел).

Действительно, $I = R \setminus Q$, а $Q = IC_0 = a$.

6° Множество всех последовательностей натуральных чисел имеет мощность c. Примем это свойство без доказательства. Для доказательства можно использовать либо цепные, либо двоичные дроби. Оба способа описаны в [1]. Примем без доказательства еще несколько свойств.

7° Множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел имеет мощность c.

8° Если элементы множества определяются конечным или счетным количеством индексов, каждый из которых независимо от других принимает c значений, то это множество имеет мощность c.

Следствие

Мощность множества R^n, в частности R^2 (плоскость) и R^3 (пространство), равна c.

9° Объединение континуального дизъюнктного семейства множеств мощности c есть множество мощности c.

Доказательство

Пусть $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, $\overline{\overline{I}} = c$, тогда $I \sim R$.

Пусть $f(i)=a\in R$. Функция $f: a\to A_i$ – есть биекция. Поскольку $A_i \sim R$, то A_i эквивалентно прямой $y=a$ на плоскости. В силу принципа склеивания $A=\bigcup\limits_{i\in I} A_i \sim \bigcup\limits_{a\in R}\{y=a\}=R^2$. Значит, $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{R^2}}=c$.

Свойство доказано.

10° Множество всех последовательностей вида $(a_n)_{n\in N}$, где a_n принимают независимо друг от друга два данных значения (например, 0 и 1), имеет мощность c.

11° Если $A=\left\{a_{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots}\right\}$, где x_k независимо от других принимают два фиксированных значения, то $\overline{\overline{A}}=c$.

Примем эти два свойства без доказательства.

Следующие два свойства настолько важны и интересны, что мы их подадим в виде теорем.

Теорема 2

Множество $C[0;1]$ непрерывных вещественных функций, заданных на [0;1] имеет мощность континуума.

Доказательство

$C[0;1]$ имеет подмножества, эквивалентные R.

Например, $\{x+b\}, b\in R$. Так что $\overline{\overline{C[0;1]}}\geq c$. Покажем, что $\overline{\overline{C[0;1]}}\leq c$.

Рассмотрим множество R^{∞} всех вещественных последовательностей. $\overline{\overline{R^{\infty}}}=c$ по 8°. Множество $Q[0;1]$, как мы ранее уже указывали, счетно. Расположим его элементы в виде последовательности $(r_n)_{n\in N}$.

Каждой функции $f\in C[0;1]$ поставим в соответствие последовательность $(f(r_n))_{n\in N}$. Это множество последовательностей есть подмножество множества $\overline{\overline{R^{\infty}}}=c$. Указанное соответствие взаимно однозначно: если бы

$(f(r_n))_{n\in N} = (g(r_n))_{n\in N}$ для $f, g \in C[0;1]$, $f \neq g$, то в силу непрерывности f и g, и представления вещественных чисел как пределов последовательностей рациональных чисел было бы

$f(x) = g(x)\, \forall x \in [0;1]$, т. е. $f = g$.

Итак, $C[0;1]$ эквивалентно множеству указанных последовательностей, части множества R^∞ мощности c. Значит, $\overline{\overline{C[0;1]}} \leq c$.

Окончательно $\overline{\overline{C[0;1]}} = c$.

Теорема доказана.

Теорема 3. $2^a = c$.

Доказательство

Пусть $B = \beta(N)$, $P = \{(a_n)_{n\in N}\}$ таких, что $a_n = 0 \vee a_n = 1$. По свойству 10°. $\overline{\overline{P}} = c$. $\overline{\overline{B}} = 2^a$.

Возьмем произвольно $N^* \subset N$. Поставим ему в соответствие последовательность $(a_n)_{n\in N}$, так, $a_n = \begin{cases} 1, n \in N^*, \\ 0, n \bar{\in} N^*. \end{cases}$

Мы получаем биекцию B на P. Значит, $\overline{\overline{B}} = c$.

Теорема доказана.

В заключение рассмотрения континуальных множеств запишем законы континуальной арифметики:

$c > a, 2^a = c, c + ... + c = c, ca = c, cc = c$.

Конечно же, континуальной мощностью бесконечные мощности не исчерпываются.

§ 7. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ

Теорема 1

Мощность $F[0;1]$ множества всех вещественных функций, заданных на $[0;1]$, имеет мощность, большую, чем мощность континуума.

Доказательство

Поскольку $C[0;1] \underset{\neq}{\subset} F[0;1]$, то $\overline{\overline{F}} \geq c$. Покажем, что $F[0;1]$ неэквивалентно $[0;1]$. Допустим противное. Каждому $t \in [0;1]$ взаимно однозначно соответствует $f_t(x)$. Введем еще одну функцию: $F(t,x) = f_t(x)$. Она задана на $[0;1] \times [0;1]$. В частности, при $t = x, F(x;x)$ есть функция x. И еще одна функция: $g(x) = F(x;x) + 1$. $g \in F$, значит $g(x) = f_a(x)$. Другими словами, $g(x) = F(a;x)$. Значит, при всех $x \in [0;1]$ $F(x;x) + 1 = F\{a;x)$. Но при $x = a$, а это вполне допустимо, $F(x;x) + 1 = F(x;x)$, что невозможно.

Значит, $F[0;1]$ $[0;1]$ и $\overline{\overline{\boldsymbol{F[0,1]}}} > c$.

Теорема доказана.

$\overline{\overline{\boldsymbol{F[0,1]}}}$ обозначается f и называется функциональной мощностью. Получаем $f > c$. Также f называется гиперконтинуум.

Теорема 2

$2^c = f$.

Примем этот результат к сведению. Он показывает интересный факт: непрерывные функции составляют «ничтожно малую» часть в множестве всех функций. Понятие функции очень общее и далеко не все поддается наглядным представлениям.

Что же дальше? Наибольшей мощности нет, можно двигаться беспредельно. Какие глубокие законы вселенной отражает этот результат, нам не известно. Далее мы займемся более специальными множествами – упорядоченными, и это дает возможность с новой стороны взглянуть на мощности – кардинальные числа. В частности, прояснится такой момент: почему мы рассмотрели только алеф-нуль IC_o и есть ли другие алефы.

§ 8. Упорядоченные множества

Среди разнообразных взаимодействий между элементами данного множества есть такие, которые сравнивают между собой элементы и определяют, какой из них «больше» и «меньше» в определенном смысле. Такие взаимодействия называются отношениями порядка. Дадим точное определение. Пусть $X \neq \varnothing$.

Определение

Отношением порядка или порядком на X, называется бинарное (т. е. двухместное) отношение P на X, которое имеет специальные свойства антисимметричности и транзитивности, т. е. выполнены аксиомы:

П 1. Антисимметричность

$\forall a, b \in X \ \ [aPb \wedge bPa \Rightarrow a = b]$

П 2. Транзитивность

$\forall a, b, c \in X \ \ [aPb \wedge bPc \Rightarrow aPc]$.

Для отношений порядка употребляется символ $a \prec b$.

Понятие порядка весьма общее. Более привычными и наиболее важными являются два специальных типа порядка:

1. Нестрогий, если P рефлексивно.
2. Строгий, если P антирефлексивно.

Поскольку для бинарных отношений на A из антирефлексивности и транзитивности следует антисимметричность, то строгий порядок задается двумя аксиомами:

СП 1. Антирефлексивность

$\forall a \in X \ \ [\overline{aPa}]$

СП 2. Транзитивность

$\forall a,b,c \in X \ \ [aPb \wedge bPc \Rightarrow aPc]$

Пример

1) $R, a > b$;

2) $R, a < b$;

3) $X \neq \varnothing,\ \beta(x), A \underset{\neq}{\subset} B$.

Для строгого порядка будем употреблять обычную запись: $a > b$, $a < b$ означает, что $b > a$.

Нестрогий порядок задается тремя аксиомами:

НСП 1. Рефлексивность

$\forall a \in A \ \ [aPa]$.

НСП 2. Антисимметричность.

НСП 3. Транзитивность.

Нестрогий порядок будем обозначать $a \geq b$, $a \leq b$ обозначает, что $b \geq a$

Примеры

1. $R, a \geq b$.
2. $R, a \leq b$.
3. $X \neq \varnothing, \beta(x), A \subset B$.

Строгий и нестрогий порядки очень тесно связаны и могут быть определены один через другой.

1) если есть $a > b$, то $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$;

2) если есть $a \geq b$, то $a > b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \neq b$.

Это позволяет легко переходить от одного типа порядка к другому. Таким образом, задание одного типа автоматически означает наличие и другого типа.

Отношения порядка делятся также на линейный порядок, когда любые два элемента данного множества можно сравнить между собой:

$$\forall a, b \in X \quad [a > b \vee b > a \vee a = b],$$

и частичный, когда имеются несравнимые между собой элементы:

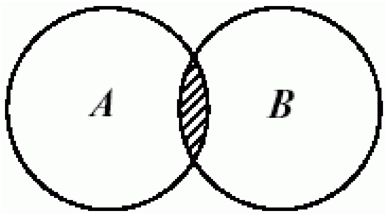
$$\exists a, b \in X : \; \overline{a > b} \wedge \overline{b > a} \wedge a \neq b.$$

Мы будем рассматривать только линейный порядок. Из линейно упорядоченных множеств мы выделим еще более узкий класс, важный для рассматриваемых нами вопросов.

Отметим только, что линейный и частичный порядки можно показать на очень простых примерах.

1) $R, a > b$ – линейный;

2) $X \neq \varnothing, \beta(x), A \subset B$ - частичный,



A, B – несравнимы в смысле порядка $A \subset B$.

§ 9. Вполне упорядоченные множества

Определение

Упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, а порядок полным, если каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Примеры

1) N вполне упорядочено;

2) Z – не вполне упорядочено: $-N \subset Z$ не имеет наименьшего элемента;

3) Q, I, R – не вполне упорядочены.

Легко видеть, что каждое вполне упорядоченное множество является линейно упорядоченным. Действительно, $\forall a,b \in X$, рассмотрим $\{a,b\}$. Оно имеет наименьший элемент. Если это a, то $a < b$. Если это b, то $b < a$. В обоих случаях a,b сравнимы и порядок линейный.

Среди функций, действующих в упорядоченных множествах, естественно, наиболее важны те, что согласованы с отношением порядка.

Пусть A,B – упорядоченные множества, $f: A \to B$. Если $\forall a,b \in A \quad [a \underset{A}{>} b \Rightarrow f(a) \underset{B}{>} f(b)]$, то функция f называется изотонной функцией или порядковым гомоморфизмом. Если f – биекция A на B и взаимно изотонна, то f – называется порядковым изоморфизмом множеств A,B. Эти множества в таком случае называются порядково изоморфными, или подобными между собой.
Запись: $A \sim B$.

Поскольку функция подобия есть биекция, то $A \sim B \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Подобие есть более сильное условие, чем равномощность. Понятно, что подобие множеств есть отношение эквивалентности.

Аналогично мощности, то общее, что присущее каждому множеству из класса подобных множеств, называется порядковым типом множества. Запись: $\overline{A}$.

Порядковым типом n-элементного линейно упорядоченного (тогда оно вполне упорядоченно) является число $n \in N, n > 1, \overline{\varnothing} ::= 0, \{\overline{a}\} ::= 1$. Таким образом, число множества N_0 является порядковым типом.

В линейно упорядоченном множестве A можно ввести обратный (инверсный) порядок: $a \prec b$ заменяется на $b \prec a$. Полученное упорядоченное множество обозначается A^*. Ясно, что $(\overline{A^*})^* = \overline{A}$. Для конечных множеств $n^* = n$. Далее укажем обозначение для порядковых типов основных числовых множеств.

$\overline{N} = \omega$, $\overline{N^*} = \omega^*$. Ясно, что $\omega^* \neq \omega$, т. к. в N порядок полный, а в N^* – нет. $\overline{Z} = \pi, \pi^* = \pi$. $\overline{Q} = \eta, \eta^* = \eta$. $\overline{R} = \lambda, \lambda^* = \lambda$.

Аналогом подмножества непустого множества является понятие отрезка упорядоченного множества. Отрезком упорядоченного множества A, определенным элементом $a \in A$, называется упорядоченное множество $A_a = \{x \in A : x < a\}$. Если $b < a$, то, очевидно, $(A_a)_b = A_b$. Поставив в соответствие $\forall a \in A$ его отрезок A_a, получим подобие A и $\{A_a\}_{a \in A}$.

Пусть имеется дизъюнктное семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ упорядоченных множеств по упорядоченному семейству индексов I, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. A можно упорядочить. Если $a \in A_i, b \in A_j, i > j,$ то считаем $a > b$. Порядковый тип множества $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ называется сумой порядковых типов $\overline{A_i}, i \in y$. В частности, $A \bigcup B$ и $B \bigcup A$ есть разные упорядоченные множества, их порядковые типы, вообще говоря, различны.

Примеры

1) $1 + \omega = \omega$ и вообще, $n + \omega = \omega,$ т. к. множества $\{a_1, .., a_n ..., a_m\}$ и $\{b_1, b_2, .., b_n, a_1, a_2, ..., a_m, ...\}$ подобны;

2) $\omega + n \neq \omega$, т. к. $\omega + n$ есть порядковый тип множества $\{a_1, .., a_m, ..., b_1, b_2, ..., b_n\}$;

3) $\omega^* + \omega = \pi$, также $\omega^* + \omega \neq \omega + \omega^*$;

4) $1 + \lambda + 1$ есть порядковый тип множества $[a, b]$.

Сравнение порядковых типов основано на понятии «короче».

Если $A \sim B_b$, то говорят, что A короче B, тогда, если $\overline{A} = \alpha$, $\overline{B} = \beta$, считают $\alpha < \beta$.

Оказывается, что из двух вполне упорядоченных множеств одно подобно другому или отрезку другого, т. е. $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, или $\alpha > \beta$.

Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется порядковым, или ординальным числом. Итак, 0 и $n \in N$ есть одновременно и кардинальные, и ординальные числа.

ω – порядковое число. $\omega^*, \pi, \eta, \lambda$ – не порядковые числа, т. к. это порядковые типы не вполне упорядоченных множеств.

Каждое множество порядковых чисел вполне упорядоченно. Аналогом отсутствия наибольшей мощности есть такой факт: если $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ – множество порядковых чисел, то существует порядковое число $\alpha > \alpha_i$. $\alpha + 1$ есть первое, следующее за α. Последнее предшествующее есть не всегда, например, для ω, т. е. есть числа 1-го и 2-го типа.

§ 10. ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

Порядковые числа бесконечной мощности называются трансфинитными числами. Все числа из $\omega, \omega+1, ... \omega+n$ – есть трансфинитные числа.

Порядковые типы $\omega^*, \pi, \eta, \lambda$ не есть трансфинитные числа, ибо это типы не вполне упорядоченных множеств.

Множество N_0 называется первым числовым классом. Ему соответствуют конечные мощности. Вторым числовым классом K_0 называется множество всех порядковых чисел, которые есть типами счетных вполне упорядоченных множеств. Числа класса K_0 уже трансфинитны. Класс K_0 уже несчетен, $\overline{\overline{K}}_0$ обозначается IC_1. Вообще, алефами называются мощности вполне упорядоченных множеств. Каждые два алефа сравнимы. Таким образом, мощность первого числового класса N_0 равна IC_0, второго класса K_0 - IC_1. В класс K_0 входят числа уже $\omega, \omega+1, \ldots, \omega+n, \ldots, \omega+\omega=\omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1$ и т. д.

Продолжая процесс, определим все числа вида $\omega\cdot n+m$. Их счетное множество.

Первое, следующее за ними число обозначается ω^2.

Далее идут

$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+n, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^2+\omega+n, \ldots, \omega^2+$$
$$+\omega\cdot 2, \ldots, \omega^2+\omega\cdot 2+n \text{ и т. д.}$$

Первое, следующее за ними число, обозначается ω^3. Продолжение этого процесса приводит к $\omega^k\cdot n+\omega^{k-1}\cdot n_1+\ldots+n_k$. За ними идет число, обозначаемое ω^ω. Процесс продолжается и далее. Число, следующее за числами вида $\omega^{\omega^{\cdot\cdot\omega}}$, обозначаем через ε. Далее идут $\varepsilon+1$ и т. д. И все же для всех чисел из K_0 мы не можем ввести символы, т. к. обозначениями мы охватим только счетное множество чисел, а класс K_0 несчетен.

Что касается алефов, то наибольшего алефа нет, каждый алеф имеет непосредственно следующий алеф. Каждый алеф есть IC_α, где α – порядковое число.

§ 11. Континуум - гипотеза

Сравнительно легко устанавливается, что нет мощности, промежуточной между IC_0 и IC_1. Но после счетных мы рассматривали континуальные множества. Возникает вопрос:

какой алеф есть мощность континуума? Есть ли мощности, промежуточные между счетной и континуальной? Знаменитая континуум - гипотеза утверждает, что $c = IC_1$, т. е. между a и c нет промежуточных мощностей. Что $c \geq IC_1$ – устанавливается бесспорно.

Континуум – гипотеза тесно связана с аксиоматикой теории множеств. Особую роль играет т. н. аксиома произвольного выбора Цермело: если есть дизъюнктное семейство множеств $\{A_i\}_{i \in I}$, то можно построить новое множество B, имеющее с каждым A_i один и только один общий элемент. Анализ многих математических доказательств привел к тому, что они, в конце концов, опираются на эту аксиому. На нее же опираются и т. н. контрпримеры – «странные» множества, функции и т. д. Но отказ от аксиомы произвольного выбора не оставил бы от математики почти ничего. Эта аксиома дает возможность доказать теорему Цермело, что каждое множество можно вполне упорядочить, а доказательство имеет неконструктивный характер.

В 1969 году американский математик Поль Коэн установил, что аксиома произвольного выбора не вступает в противоречие с другими аксиомами теории множеств и не зависит от них. Таким образом, здесь получается аналогия с аксиомой параллельности. Можно строить теории множеств с аксиомой Цермело, можно без нее. С ней получается все-таки более привычная математика: всякая мощность есть алеф, каждые два алефа сравнимы, наибольшего алефа нет, каждый алеф имеет непосредственно следующий. Обобщенная гипотеза континуума звучит так: $2^{IC_n} = IC_{n+1}$. П. Коэн установил, что она не зависит от аксиом теории множеств и не противоречит им.

В будущем, по-видимому, будут рассматриваться различные «математики» и с континуум - гипотезой, и без нее, как сейчас рассматриваются различные геометрии.

На этом мы закончим наш очень краткий и беглый обзор общей теории множеств и перейдем к более специальным множествам.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 1

П 1. Доказательство включения множеств.

Требуется доказать, что $X \subset Y$. Доказательство, проводится исходя из определения понятия подмножества: $X \subset Y ::= \forall x \in X \Rightarrow x \in Y$.

Задача 1

Доказать, что $A \setminus (A \setminus B) \subset A \bigcap B$

Решение

$\forall x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow x \in A \wedge x \overline{\in} A \setminus B$. Для того чтобы, $x \overline{\in} A \setminus B$, есть 2 возможности:

1) $x \overline{\in} A$, тогда $x \overline{\in} A \setminus B$. Но уже известно, что $x \in A$. Следовательно, эта возможность не реализуется.

2) $x \in A \wedge x \in B$. Но тогда $x \in A$, что и требовалось доказать.

П 2. Доказательство равенства множеств.

$X = Y \Leftrightarrow X \subset Y \wedge Y \subset X$, потому доказательство имеет 2 этапы:

1. $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$.
2. $\forall y \in Y \Rightarrow y \in X$.

Задача 2

Доказать, что $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$.

Решение

1) $\forall x \in A \setminus (B \bigcup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \overline{\in} B \bigcup C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \overline{\in} B \wedge x \overline{\in} C \Rightarrow x \in A \setminus B \bigcap x \in A \setminus C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$.

2) $\forall y \in (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C) \Rightarrow x \in A \wedge x \overline{\in} B \wedge x \overline{\in} C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \overline{\in} B \bigcup C \Rightarrow x \in A \setminus (B \bigcup C)$.

П 3. Доказательство равенства или включения в том случае, когда множества являются декартовыми произведениями. Производится аналогично, исходя из того, что элементы множеств – упорядоченные наборы элементов.

Задача 3

Доказать, что $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$.

Решение

1)

$\forall (x, y) \in A \times (B \bigcup C) \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \bigcup C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge (y \in B \bigcup y \in C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B \bigcup (x, y) \in A \times C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \bigcup (A \times C)$;

2)

$\forall (x, y) \in (A \times B) \bigcup (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B \bigcup (x, y) \in A \times C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A, y \in B) \bigcup (x \in A, y \in C) \Rightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A, y \in B \bigcup C \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \bigcup C)$.

П 4. Доказательство равномощности множеств, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, производится доказательством существование биекции $f : A \leftrightarrow B$. Например, путем её конструктивного построения.

Задача 4

Доказать, что [-2,-1]~[3,7].

Решение

Одним из примеров биекций $f : R \leftrightarrow R$ является линейная функция $f = kx + b$. Подберем подходящие значения k, b. Поскольку $f(x)$ строго возрастает при $k > 0$, будем искать $k > 0$ и $b \in R$: $f(-2) = 3$, $f(-1) = 7$. Имеем: $-2k + b = 3$,

$-k+b=7$. Отсюда $k=4$. Тогда $b=11$, $f(x)=4x+11$. Эта функция строго монотонна и непрерывна. Следовательно, она биекция, $f([-1,-1])=[3,7]$.

П 5. Установление счетности или континуальности данного множества.

Для этого может использоваться одно из свойств множеств указанной мощности.

Задача 5

Какую мощность имеет множество всех треугольников на декартовой плоскости, координаты которых есть целые числа?

Решение

Каждый такой треугольник взаимно однозначно определяется своими вершинами, а каждая вершина – своими 2 координатами. Итак, треугольник определяется 6 числами-индексами, определяющими это множество треугольников, каждый из которых независимо от других принимает счётное количество значений $\left(\overline{\overline{Z}}=IC_0\right)$. По 9^0 счётных множеств множество указанных треугольников счетно.

Задачи к главе 1

1. Доказать включение: $A\setminus C\subset(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)$.

2. Доказать равенства: $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

$A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;

$(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$;

$(A\bigcup B)\times C=(A\times C)\bigcup(B\times C)$.

3. Установить биекцию (-5,-1) на (0,7).
4. Установить, что (0,1)~(0,+∞).

5. Какую мощность имеет множество многочленов переменной x, степени не больше 7, коэффициенты которых есть рациональные числа?

6. Пусть X – счетное множество точек на окружности. Можно ли повернуть окружность вокруг центра на некоторый угол φ, так, чтобы полученное множество точек X^* не пересекалось с X?

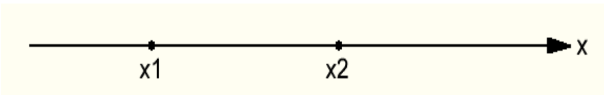
7. Какую мощность может иметь множество букв L на плоскости, если буквы попарно не пересекаются?

ГЛАВА 2. МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

Далее мы перейдем от рассмотрения вопросов общей теории множеств к специальным множествам, находящимся в пространстве R^n. Это изучение будет проводиться уже в плане основной операции анализа – предельного перехода.

§1. Метрические пространства

Основные понятия и результаты анализа фактически основываются на понятии окрестности данной точки x_0. Окрестность обычно понимается как ε - окрестность, т. е. множество $\{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ на прямой. А $|x_0 - y_0|$ на прямой есть расстояние между точками x_0 и y_0: $|x_0 - y_0| = \rho(x_0, y_0)$.



Итак, основой классического анализа на прямой есть это расстояние между точками. У него еще есть название «метрика». Метрические свойства – это свойства, связанные с расстоянием между точками. Отсюда следует вывод: в более общих множествах тоже можно ввести основные понятия анализа, если в них имеется возможность определить эту метрику. Так мы приходим к концепции метрического пространства. Требования к метрике (аксиомы) получаются из свойств расстояния на прямой. Отбирают необходимый минимум этих свойств и берут их в качестве аксиом. Перейдем к точным определениям. Пусть $X \neq \varnothing$.

Определение

Метрикой на множестве X называется функция $\rho : X^2 \to R$, удовлетворяющая аксиомам:

M1. Неотрицательность:

$\forall x, y \in X \left[\rho(x, y) \geq 0 \right]$.

M2. Отделимость:

$\forall x, y \in X \left[\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \right]$.

M3. Симметричность:

$\forall x, y \in X \left[\rho(y, x) = \rho(x, y) \right]$.

M4. Неравенство треугольника:

$\forall x, y, z \in X \left[\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \right]$.

Множество с заданной на нем метрикой, т. е., фактически, упорядоченная пара, (X, ρ) называется метрическим пространством. Понятно, что задавая на X различные метрики, мы получаем различные метрические пространства. Их следует и обозначать по-разному.

Примеры:

1) $X = R,\ \rho(x, y) = |x - y|$;

2) $X = C,\ \rho(x, y) = x - y$;

3) $X = R^n$,

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y(y_1, y_2, ..., y_n),\ \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Эта метрика называется эвклидовой, а R^n с этой метрикой называется n - мерным эвклидовым пространством и обозначается E^n или R_2^n.

1. $X = R^n$, $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|$. Это метрическое пространство обозначается R_1^n.

2. $X = R^n$, $\rho(x,y)=\max_{k=1\div n}|x_k - y_k|$. Это пространство обозначается R_0^n.

3. $X = C[a,b]$ (функций $x(t)$ заданных и непрерывных при $t\in[a,b]$ $\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$. Это пространство так и обозначается: $C[a,b]$.

4. $X = C[a,b]$, $\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}$. Это эвклидова метрика на $C[a,b]$, а пространство обозначается $C_2[a,b]$ или $C_E[a,b]$.

5. $X = C[a,b]$, $\rho(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$.

Эта метрика называется чебышевской (в честь Пафнутия Львовича Чебышева, 1821–1894). Пространство обозначается $C_L[a,b]$.

Ограничимся этими примерами. В этой главе мы будем заниматься исключительно пространством E^n и обозначать его будем часто просто R^n, потому что метрика всюду эвклидова.

Обобщением понятия ε - окрестности точки на прямой в общих метрических пространствах является понятие открытого шара с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $\varepsilon_0 > 0$:

$$\overset{\circ}{Ш}(x_0,\varepsilon)=\{x\in X : \rho(x,x_0)<\varepsilon\}.$$

Аналогично вводится замкнутый шар

$$\overline{Ш}(x_0,\varepsilon)=\{x\in X:\rho(x,x_0)\le\varepsilon\}$$

и сфера:

$$S(x_0,\varepsilon)=\{x\in X:\rho(x,x_0)=\varepsilon\}.$$

Окрестностью точки $x_0\in X$ называется множество $V(x_0)$, содержащее некоторый $\overset{\circ}{Ш}(x_0,\varepsilon)$. В частности, такие шары и $\overline{Ш}(x_0,\varepsilon)$ также являются окрестностями точки x_0. Наличие окрестностей дает возможность определить сходимость последовательностей в данном метрическом пространстве, т. е. по данной метрике:

$$x_n\to x_0:\forall V(x_0)\exists n_0:n>n_0\Rightarrow x_n\in V(x_0).$$

Поскольку каждая окрестность содержит $\overset{\circ}{Ш}(x_0,\varepsilon)$, а окрестность определяется через метрику, то $x_n\xrightarrow{\rho}x_0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists n_0(\varepsilon):n>n_0\Rightarrow\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$. Т. е. это естественное обобщение сходимости последовательностей на прямой.

Две метрики ρ_1 и ρ_2 на X определяют, вообще говоря, различные сходимости. Говорят, что ρ_1 сильнее ρ_2, если $x_n\xrightarrow{\rho_1}x_0\Rightarrow x_n\xrightarrow{\rho_2}x_0$. Т. е. чем сильнее метрика, тем меньше сходящихся по ней последовательностей. Метрики называются эквивалентными, $\rho_1\sim\rho_2$, если $x_n\xrightarrow{\rho_1}x_0\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{\rho_2}x_0$.

Пусть X – метрическое и одновременно линейное (векторное) пространство, вещественное или комплексное (R^n – как раз такой случай).

X называется метрическим линейным пространством, если метрическая и линейная структуры согласованы между собой:

$$x_n \to x_0, y_n \to y_0 \Rightarrow x_n + y_n \to x_0 + y_0,$$

$$\lambda_n \to \lambda_0, x_n \to x_0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0,$$

$$(x_n, x_0, y_n, y_0 \epsilon X, \lambda_n, \lambda_0 \epsilon R(C)).$$

Метрика ρ называется инвариантной, если

$$\forall x, y, z \in X\left[\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)\right].$$

В метрическом линейном пространстве всегда можно ввести инвариантную метрику, эквивалентную данной метрике.

Множество $A \subset X$ называется ограниченным, если $A \subset Ш(x_0, r), x_0 \in X, r > 0$, шар открытый или замкнутый.

Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ называется последовательностью Коши (Огюстен Луи Коши, A. L. Cauchy, 1789–1857, Франция) или фундаментальной или сходящейся в себе, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : k, l > n_0 \Rightarrow \rho(x_k, x_l) < \varepsilon$. Как и на прямой, каждая сходящаяся последовательность фундаментальна. В общих метрических пространствах обратное не всегда верно. Если в X это верно, то есть каждая фундаментальная последовательность сходится в X к некоторой точке $x_o \in X$, то X называется полным метрическим пространством.

E^n полно, $C_E\left[a, b\right]$ – неполно.

Наличие окрестностей и сходимости позволяет определить специальные точки множеств, открытые и замкнутые множества, имеющие важнейшее значение в анализе. Мы будем рассматривать E^n, обозначая его как R^n, хотя многие результаты совершенно аналогично доказываются в общих метрических пространствах.

§2. Специальные точки множеств

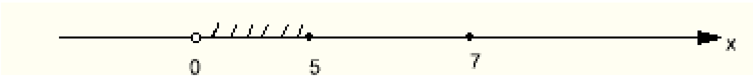
Пусть $x_0 \in R^n$, $X \subset R^n, X \neq \varnothing$.

Рассмотрим важные соотношения между точкой x_0 и множеством X.

П 1. Внутренние точки. x_0 называется внутренней точкой X, если она входит в X вместе с некоторой своей окрестностью: $x_0 \in V\left(x_0\right) \subset X$.

Пример

$X = (0,5] \bigcup \{7\}$ на R.



$x_0 = 1$ – внутренняя для X : $1 \in \left(0,9;1,1\right) \subset X$.

$x_0 = 12$ – невнутренняя для X : $12 \overline{\in} X$.

$x_0 = 0$ – невнутренняя для X : $0 \overline{\in} X$.

$x_0 = 5$ – невнутренняя для X : $\forall \varepsilon > 0$, $\left(5-\varepsilon, 5+\varepsilon\right) \not\subset X$, ибо $5+\varepsilon \overline{\in} X, \varepsilon \neq 2$.

$x_0 = 7$ – не внутренняя для X : $\forall \varepsilon > 0, (7-\varepsilon, 7+\varepsilon) \not\subset X$.

Итак, все внутренние точки X входят в X, но не всегда $x_0 \in X$ есть внутренняя точка X. Точки, не входящие в X, внутренними для X не являются.

Множество всех внутренних точек называется внутренностью данного множества, или его ядром. Обозначение $IntX$, $\overset{o}{X}$

Для $X = \left(0,5\right] \cup \left\{7\right\}$, $IntX = \left(0,5\right)$.

П 2. Внешние точки. x_0 называется внешней точкой для X, если она внутренняя для его дополнения. Множество всех таких точек называется внешностью множеств. Для $X=(0,5)\bigcup\{7\}$ внешностью X есть множество $(-\infty,0)\bigcup(5,7)\bigcup(7,+\infty)$. Внешние точки в множество не входят.

П 3. Граничные точки (по-украински: межові). Пример показывает, что есть точки (в примере это 0,5,7), которые не являются внутренними ни для X, ни для $\subset X$. Они тоже важны.

x_0 называется граничной точкой X, если в каждой ее окрестности есть и точки X, и точки его дополнения. Множество этих точек называется границей (на украинском языке – межа) множества. Обозначение: $F_r X$.

Для $X=(0,5]\bigcup\{7\}$, $X=(0,5]\bigcup\{7\}$, $F_r X=(0,5]\bigcup\{0,5;7\}$. Пример показывает, что граничные точки могут входить в X, могут и не входить. Соотношение между X и $F_r X$ различны:

1. $X=[0,1]$, $F_r X=\{0,1\}\subset X$.
2. $X=(0,1]$, $F_r X=\{0,1\}\not\subset X$, $F_r X\bigcap X\neq\varnothing$,

$X=(0,1)$, $F_r X=\{0,1\}$, $F_r X\bigcap X=\varnothing$.

П 4. Изолированные точки. x_0 называется изолированной точкой X, если она имеет окрестность, в которой, кроме нее, нет других точек X. Итак, изолированные точки всегда входят в X.

Для $X=(0,5)\bigcup\{7\}$ изолированной будет только $x_0=7$.

X может не иметь изолированных точек: $X=(0,1)$.

X может иметь часть точек изолированными: $X=[0,1]\bigcup\{3\}$.

X может состоять из изолированных точек $X=\{1,2,3\}$.

Каждая изолированная точка граничная: в X входит она сама, в cX входят другие точки указанной окрестности. Изолированные точки – не внутренние и не внешние.

П 5. Предельные точки. x_0 называется предельной точкой X, или точкой сгущения, или точкой накопления, если в каждой ее окрестности есть точка $x^* \in X$, $x^* \neq x_0$. Другими словами, каждая окрестность $V(x_0)$ содержит бесконечное множество точек X. Множество предельных точек называется предельным, или производным множеством. Обозначение: X'.

Для $X = (0,5) \cup \{7\}$, $X' = [0,5]$. $0 \in X'$, так как в $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ справа содержится бесконечное множество точек из X. $7 \overline{\in} X'$: в достаточно малой окрестности т. 7 из X есть только она сама. Как показывает пример, не все точки X могут входить в X'. С другой стороны, возможно, что в X' входят точки, не принадлежащие X. Изолированные точки в X' входить не могут. Все внутренние точки – предельные, так что $\operatorname{Int} X \subset X'$. Граничные точки могут входить в X', могут не входить (если они изолированные). Граничная точка либо предельная, либо изолированная.

Для $x_0 \in X$ есть 2 и только 2 возможности:

1. $\forall V(x_0)$ имеет точку $x^* \in X$, $x^* \neq x_0$ тогда, x_0 предельная.

2. $\exists V(x_0)$: в котором, кроме x_0, нет других точек из. Тогда x_0 = изолированная.

Эти варианты несовместимы. Может быть, что $X' = \varnothing$, если X состоит только из изолированных точек. Например, $X = \{1, 2, 3\}$.

П 6. Точка прикосновения. x_0 называется точкой прикосновения, если в любой ее окрестности есть точка из X.

Множество этих точек называется замыканием множества X. Обозначение: $\bar{X}$ или $[X]$.

Точки прикосновения похожи на предельные, но их определение «более либерально»: не требуется, чтобы точка из окрестности была отлична от x_0. Поэтому предельная точка является точкой прикосновения. $X=[0,1]\cup\{3\}$, $3\in\bar{X}$, но $3\notin X'$.

Также $X\subset\bar{X}$, т. к. можно взять саму $x_0\in X$. Изолированные точки входят в $\bar{X}$, но не входят в X'. Граничные точки входят в $\bar{X}: F_r X\subset X$, т. к. имеют в любой своей окрестности точки из X.

Для $X=(0,5]\cup\{7\}$, $\bar{X}=[0,5]\cup\{7\}$.

Установим связь специальных точек с предельными переходами.

Теорема 1

$$x_0\in\bar{X}\Leftrightarrow\exists(x_n)_{n\in N}: x_n\in X,\ x_n\to x_0.$$

1) *Необходимость*. Пусть $x_0\in\bar{X}$. $\forall n\in N$ в $\overset{o}{Ш}(x_0,1/n)$ выберем $x_n\in X$. Получаем $(x_n)_{n\in N}$, $\rho(x_n,x_0)<1/n\to 0$, т. е. $x_n\to x_0$ при $n\to+\infty$.

2) *Достаточность*. Пусть $\exists(x_n)_{n\in N}: x_n\in X$, $x_n\to x_0$. Тогда $\forall m\in N\exists n_0\in N: n>n_0\Rightarrow x_n\in\overset{o}{Ш}(x_0,1/m)$. $m\in N$ возьмем достаточно большим для того, чтобы $\overset{o}{Ш}(x_0,1/m)$ вошел в $\forall V(x_0)$ наперед заданную. Тогда $\forall V(x_0)$ имеет точку $x_n\in X\Rightarrow x_0\in\bar{X}$.

Отсюда получается важный результат.

Теорема 2

Замыкание множества состоит в точности из всех пределов всех сходящихся последовательностей точек этого множества.

Аналогично для предельного множества.

Теорема 3

$x_0 \in X' \Leftrightarrow$ существует последовательность попарно различных точек из X, сходящаяся к x_0.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только при построении $\left(x_n\right)_{n\in N}$ нужно в каждом шаре $\overset{\circ}{Ш}\left(x_0, 1/n\right)$ брать x_n отличным от всех предыдущих. Это возможно, т. к. $\forall V\left(x_0\right)$ имеет бесконечное множество точек из X.

Теорема 4

X' состоит в точности из всех пределов всех сходящихся последовательностей попарно различных точек множества X.

В классическом анализе известна важная теорема Больцано - Вайерштрасса о том, что каждая ограниченная последовательность имеет собственно сходящуюся подпоследовательность. С учетом теоремы 3 получаем вариант этой теоремы в терминах специальных точек.

Теорема 5. (Б. Больцано – К. Вайерштрасс).

Каждое бесконечное ограниченное множество имеет предельную точку.

Замечание.

Условия бесконечности и ограниченности необходимы.

Пример 1

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ в R. Ограничено, но конечно, $X' = \varnothing$.

Пример 2

$X = N$ в R. Бесконечно, но неограниченно, $X' = \varnothing$.

Перейдем к изучению двух важнейших классов множеств – открытых и замкнутых.

§3. Открытые множества

Определение

Множество G называется открытым, если все его точки внутренние.

Таким образом, G открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью: $G = \operatorname{Int} G$.

Примеры.

1) (a,b) открыт в R;

2) $[a,b)$ не открыт в $R: x = a \in [a,b)$ – невнутренняя;

3) круг $x^2 + y^2 < r^2$ открыт в R^2;

4) множество из изолированных точек, в частности, конечное – не открыто.

Свойства открытых множеств

1^0. Все пространство R^n открыто.

► Все его точки внутренние ◄.

2^0. $\varnothing$ открыто.

► Нет невнутренних точек ◄.

3^0. Объединение произвольного (непустого) семейства открытых множеств есть открытое множество.

► Пусть $G_0 = \bigcup_{t \in I} G_i$, $I \neq \varnothing$, G_i – открыты $\forall i \in i$. Тогда возьмем $\forall x_0 \in G_0$ и покажем, что это внутренняя точка G_0. $x_0 \in G_0 \Leftrightarrow \exists i_0 \in I : x_0 \in G_{i0}$. Поскольку G_{i0} открыто, то $x_0 \in V(x_0) \subset G_{i0} \subset V(x_0) \subset G_i = G_0 \Rightarrow x_0$ – внутренняя точка G_0. В силу произвольности x_0, все точки G_0 внутренние и оно открыто ◄.

4^0. $\overset{\circ}{Ш}(x_0, r)$ есть открытое множество.

► $\forall y \in \overset{\circ}{Ш}(x_0, r)$ покажем, что y – внутренняя точка этого шара. $\rho(x_0, y) < r$. Обозначим $\rho(x_0, y) = r^* < r$.

Выберем $r^{**} < r - r^*$. Пусть $z \in \overset{\circ}{Ш}(x_0, r^{**})$. Имеем: $\rho(x, z) \le \rho(x_0, y) + \rho(y, z) < r^* + r^{**} = r^* + (r - r^*) = r$,

следовательно,

$\overset{\circ}{Ш}(y, r^{**}) \subset \overset{\circ}{Ш}(x_0, r)$, т. е. y – внутренняя точка $\overset{\circ}{Ш}(x_0, r)$ и он является открытым множеством ◄.

5^0. $IntX$ есть $\bigcup\limits_{G_i \subset X} G_i$.

► 1. $\forall x_0 \in IntX \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{Ш}(x_0, r) \subset \underset{G_i \subset X}{U} G_i$, ибо этот шар есть открытое множество, содержащееся в X . Значит, $IntX \subset \bigcup\limits_{G_i \subset X} G_i$.

2. $\forall x_0 \in \bigcup\limits_{G_i \subset X} G_i \Rightarrow x_0 \in G_{i0} \subset X \Rightarrow x_0$ – внутренняя точка G_{i0} , т. к. G_{i0} как открытое множество состоит только из внутренних точек $\Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{Ш}(x_0, r) \subset G_{i0} \subset X \Rightarrow x_0$ – внутренняя точка $X \Rightarrow x_0 \in IntX$ и $\bigcup\limits_{G_i \subset X} G_i \subset IntX$.

3. Тогда $IntX = \bigcup\limits_{G_i \subset X} G_i$ ◄.

6^0. $IntX$ есть открытое множество.

► Вытекает из 5^0 и 3^0 ◄.

7^0. $IntX$ есть max открытое множество, содержащееся в X .

► $IntX = \bigcup\limits_{G_i \subset X} G_i$, а это объединение включает все $G_i \subset X$ ◄.

8^0. Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.

► Пусть $G_0 = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, G_i – открыты, $i = 1 \div n$. $\forall x_0 \in G_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_0 \in G_i$ $\forall i = 1 \div n$. Тогда $x_0 \in \overset{\circ}{Ш}(x_0, r_i) \subset G_i$, $i = 1 \div n$. Положим $r_0 = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$, $r_0 > 0$. Получаем $\overset{\circ}{Ш}(x_0, r_0) \subset G_i$ $\forall i = 1 \div n \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G_0$. Все точки G_0 внутренние, и оно открыто ◄.

Замечание

Пересечение бесконечного, в частности, счетного семейства открытых множеств, может не быть открытым.

Пример

$$R, \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) = \{0\} \text{ не открыто.}$$

Тем не менее, пересечение счетного семейства открытых множеств есть множество, важное в современном анализе, оно имеет свое название и обозначение.

Определение

Множество, являющееся пересечением счетного множества открытых множеств, называется множеством типа G_δ.

В частности, взяв $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, $G_i = G \, \forall i \in N$, получаем, что открытые множества тоже имеют тип G_δ.

Перейдем ко второму важному классу множеств.

§4. Замкнутые множества

Определение

Множество F называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения: $\overline{F} \subset F$.

Поскольку всегда $\overline{F} \supset F$, то F замкнуто $\Leftrightarrow \overline{F} = F$.

Примеры

1) $[a,b]$ замкнут в R;

2) $[a,b)$ не замкнут в R: $x_0 = b$ – точка прикосновения, не входящая во множество;

3) множество, состоящее только из изолированных точек, в частности, конечное множество, замкнуто.

Свойства замкнутых множеств, замыканий и предельных множеств.

1^0. F замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\subset F = G = R^n \setminus F$ открыто.

►1) Пусть F замкнуто. Рассмотрим возможные случаи.

1. $F = \varnothing$. Оно замкнуто, так как нет точек прикосновения, ему не принадлежащих. Тогда $G = R^n$ открыто.

2. $G = R^n$ - замкнуто: содержит все точки прикосновения $G = \varnothing$ - открыто.

3. $\varnothing \underset{\neq}{\subset} F \underset{\neq}{\subset} R^n$. $\forall x_0 \in G$. Точка x_0 не может быть точкой прикосновения F, так как она внутренняя для G, т. е. $\exists V(x_0) : V(x_0) \bigcap F = \varnothing$. Итак, все точки прикосновения F в него входят и F замкнуто.

2) Пусть G открыто.

1. $G = \varnothing \Rightarrow F = R^n$ – замкнуто

2. $G = \varnothing \Rightarrow F = \varnothing$ - замкнуто

3. $\varnothing \underset{\neq}{\subset} G \underset{\neq}{\subset} R^n$. Пусть x_0 - любая точка прикосновения F, значит, $\forall V(x_0)$ имеет точку из $F \Rightarrow x_0$ не внутренняя для G, которое состоит только из внутренних точек $\Rightarrow x_0 \in F$ и F замкнуто ◄.

2^0. $\varnothing$ и R^n одновременно открыты и замкнуты.

►Вытекает из 1^0 ◄.

3^0. Пересечение произвольного непустого и объединение конечного семейств замкнутых множеств замкнуты.

► Вытекает из 1^0, свойств открытых множеств и законов де Моргана ◄.

Замечание

Объединение бесконечного, в частности, счетного, семейства замкнутых множеств, может не быть замкнутым.

Пример

$R,\ \bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m},1\right]=(0,1]$ – не замкнуто.

Если $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i, F_i$ замкнуты, то X называется множеством типа F_σ, в частности при, $F_i=F\forall i\in N$ получаем, что замкнутые множества имеют тип F_σ. Из законов де Моргана получаем: $c(G_\delta)=F_\delta,\ c(F_\delta)=G_\delta$.

4^0. X замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои предельные точки: $X'\subset X$.

► 1) Необходимость. Если X замкнуто, то $X=\overline{X}\supset X'$.

2) Достаточность. Пусть $X'\subset X$. Точки прикосновения – это либо точки X, либо предельные, не принадлежащие X. Т. к. $X'\subset X$, то предельных, не входящих в X, нет. Значит, $\overline{X}\subset X$ и X замкнуто ◄.

5^0. Предельное множество X' замкнуто.

►1) Если $X'\neq\varnothing$, то верно.

2) Пусть $X'\neq\varnothing$ и $\forall x_0\in(X')'$. В $\forall V(x_0)$ есть бесконечно много точек из X. Итак, $x_0\in X',\ (X')'\subset X'$ – замкнуто ◄.

6^0. $\overline{X}=X\bigcup X'$.

► Каждая точка $\overline{X}$ - либо изолированная, либо предельная. Если она изолированная, то входит в $X\subset\overline{X}$. Если она предельная, то входит в $X' \subset \overline{X} \Rightarrow \overline{X} \subset X \bigcup X'$. Обратно, если $x_0 \in X \bigcup X'$, то в $\forall V(x_0)$ есть точка из X: она сама, если изолированная из X, или $X^* \neq X_0$, $X^* \in X$, если она граничная для X. В обоих случаях $x_0 \in \overline{X}$ и $X \bigcup X' \subset \overline{X}$. В итоге $\overline{X} = X \bigcup X'$ ◄.

7^0. $X \subset Y \Rightarrow X' \subset Y'$.

► Если $x_0 \in X'$, то в $V(x_0)$ есть точка $x^* \in X$, $x^* \neq x_0$. Тогда $x^* \in Y \Rightarrow x_0 \in Y' \Rightarrow X' \subset Y'$ ◄.

8^0. $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$.

►Вытекает из 6^0, 7^0 ◄.

9^0. $(X \bigcup Y)' = X' \bigcup Y'$.

► 1). $X \subset X \bigcup Y, Y \subset X \bigcup Y \Rightarrow X' \overset{7^0}{\subset} (X \bigcup Y)', Y' \subset (X \bigcup Y)' \Rightarrow$
$\Rightarrow X' \bigcup Y' \subset (X \bigcup Y)'$.

2) Покажем, что $(X \bigcup Y)' \subset X' \bigcup Y'$. Если $(X \bigcup Y)' = \varnothing$, то верно.

Пусть $(X \bigcup Y)' \neq \varnothing$, $\forall x_0 \in (X \bigcup Y)'. \exists (x_n)_{n \in N}$ попарно различных точек из $X \bigcup Y$, сходящаяся к x_0. Возможны 2 и только 2 случая.

1. Существует бесконечное множество номеров $n' \in N : x_n' \in X$.

Тогда $(x_n')_{n' \in N}$ есть подпоследовательность указанной последовательности, следовательно, она тоже сходится и x_0. Тогда $x_0 \in X' \subset X' \bigcup Y'$.

2. Таких номеров n' конечное множество $\Rightarrow \exists n_0 \in N : n > n_0 \Rightarrow x_n \in Y$. $(x_n)_{n \in N}, n > n_0$ также есть

подпоследовательность данной последовательности, и она тоже сходится к x_0.

Итак, $x_0 \in Y' \subset X' \bigcup Y'$.

В обоих случаях, $x_0 \in X' \bigcup Y'$. В силу произвольности $x_0 \in (X \bigcup Y)'$ имеем $(X \bigcup Y)' \subset X' \bigcup Y'$.

В итоге $(X \bigcup Y)' = X' \bigcup Y'$ ◄.

10^0. $(\overline{\overline{X}}) = \overline{X}$

► $(\overline{\overline{X}}) = \overline{X \cup X'} = (X \cup X') \bigcup (X \cup X)' = X \cup X' \cup X' \cup X''$.

Поскольку X' замкнуто, то $X'' \subset X'$. Тогда $\overline{\overline{X}} = X \bigcup X' = \overline{X}$ ◄.

11^0. $\overline{X \bigcup Y} = \overline{X} \bigcup \overline{Y}$.

► $\overline{X \bigcup Y} = (X \bigcup Y) \bigcup (X \bigcup Y)' \overset{9^0}{=} X \bigcup Y \bigcup X' \bigcup Y' =$

$= (X \bigcup Y') \bigcup (Y \bigcup Y') = \overline{X} \bigcup \overline{Y}$ ◄.

Далее мы установим структуру открытых и замкнутых множеств на прямой, на плоскости, в пространстве и в R^n.

Еще несколько понятий и фактов, относящихся к замкнутым множествам, предельным точкам и точкам прикосновения. Если $\overline{X} \supset Y$, то X называется плотным в Y. Если $\overline{X} = Y$, то X называется всюду плотным в Y. Например, Q всюду плотно в R, т. к. каждое вещественное число есть предел последовательности рациональных чисел.

Если $X \subset X'$ (нет изолированных точек), то X называется плотным в себе. Если $X = X'$, то X называется совершенным. Можно доказать, что каждое непустое совершенное множество имеет мощность континуума.

Точка x_0 называется точкой конденсации X, если в $\forall V(x_0)$ есть несчетное множество точек из X.

Если множество не имеет точек конденсации, то оно не более чем счетно (теорема Линделёфа). Также несчетное замкнутое множество имеет мощность континуума. У каждого несчетного множества множество точек конденсации совершенно. Каждое несчетное замкнутое множество является объединением совершенного и не более чем счетного множеств.

§5. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой

Установим строение открытых и замкнутых множеств на R.

Теорема 1

Если замкнутое множество F непусто и ограничено сверху (снизу), то оно имеет наибольший (наименьший) элемент.

► Пусть F ограничено сверху. Тогда $\exists x_0 = \sup F < +\infty$.

$\Rightarrow \forall n \in N \exists x_n \in F : x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n \le x_0$. Тогда при $n \to \infty \Rightarrow x_n \to x_0$.

x_0 – предельная точка F, F замкнуто $\Rightarrow x_0 \in F$, x_0 – наибольший элемент F. Для ограниченных снизу множеств аналогично ◄.

Следствие

Если непустое замкнутое ограниченное множество дано, то существует наименьший сегмент $[a,b]$, содержащий F.

Пусть теперь $G \ne \varnothing$ открыто.

Определение

Если $(\alpha,\beta) \subset G, \alpha \overline{\in} G, \beta \overline{\in} G,$ то (α,β) называется составляющим интервалом множества G.

Замечание

Составляющий интервал может быть и неограниченным.

Теорема 2

Любые два составляющих интервала не имеют общих точек.

► Пусть (α,β) и (γ,δ) – составляющие интервалы множества G. Если $\alpha=\gamma$, то автоматически $\beta=\delta$, иначе один из концов составляющих интервалов вошел бы в G.

Пусть $\alpha<\gamma$. Покажем, что $\beta\le\gamma$. Допустим противное: $\beta>\gamma$. Получаем: $\alpha<\gamma<\beta\Rightarrow\gamma\in(\alpha,\beta)\Rightarrow\gamma\in G$, что невозможно ◄.

Теорема 3

Каждая точка $G\ne\varnothing$ входит в некоторый составляющий интервал.

► Рассмотрим возможные случаи.

1. $G=R\Rightarrow\forall x_0\in(-\infty;+\infty)$.

2. Слева и справа от x_0 есть точки, не входящие в G.

Тогда они принадлежат замкнутому множеству $F=cG$.

Обозначим $F_1=F\bigcap\left[x_0;+\infty\right)$. F_1 замкнуто и ограничено снизу точкой x_0.

По теореме 1 F_1 имеет min элемент $\beta>x_0$, т. к. $x_0\,\overline{\in}\,F_1$. Отсюда $\left[x_0;\beta\right)\subset G.$

Аналогично $\exists\alpha\,\overline{\in}\,G:\left(\alpha,x_0\right]\subset G$. Значит, $x_0\in(\alpha,\beta)$ и $\alpha,\beta\,\overline{\in}\,G\Rightarrow\left(\alpha,\beta\right)$ – составляющий интервал G.

3. Если справа от x_0 нет точек не из G, а слева есть то $x_0\in\left(\alpha;+\infty\right)$ – составляющий интервал G.

4. Аналогично, если слева от x_0 нет точек не из G, а справа есть, то $x_0\in(-\infty;\beta)$ ◄.

Теорема 4

Семейство составляющих интервалов непустого открытого множества не более чем счетно.

► В каждом составляющем интервале $\left(\alpha_i;\beta_i\right)$ выберем по одной рациональной точке. Получим взаимнооднозначное соответствие $\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i\in J}$ составляющих интервалов (оно взаимно-однозначно, т. к. соответствующие интервалы попарно не пересекаются) и некоторым подмножеством $Q^*\subset Q$, а оно не более чем счетно ◄.

Теорема 5

Каждое непустое открытое множество на прямой есть не более чем счетное объединение дизъюнктного семейства составляющих интервалов.

► Дизъюнктность и не более чем счетность $\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i\in J}$ уже доказаны. Обозначим $A=\bigcup\limits_{i\in J}(\alpha_i,\beta_i)$. Покажем, что $G=A$.

1. $(\alpha_i,\beta_i)\subset G_{\forall i\in J}\Rightarrow\bigcup\limits_{i\in J}(\alpha_i,\beta_i)=A\subset G$.

2. $\forall x_0\in G$ входит в некоторый $(\alpha_i,\beta_i)\Rightarrow G\subset A$.

3. Тогда $G=A$ ◄.

Теорема 6

Каждое открытое непустое множество есть объединение счетного семейства отрезков.

► В силу теоремы 4 достаточно показать для $(a;b),(-\infty;a),(a,+\infty)$.

Действительно, $(a,b)=\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n};\ b-\frac{1}{n}\right]$ при $\frac{1}{n}<\frac{b-a}{3}$.

$$(a,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left[a+\frac{1}{n};\ a+n\right]\right),(-\infty;\ a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a-n;\ a-\frac{1}{n}\right].$$

$(-\infty;+\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-n;n]$ ◄.

Следствие

$G\neq\varnothing$ есть множества типа F_σ.

Перейдем к замкнутым множествам.

Используя результат о дополнении открытых и замкнутых множеств, сразу же устанавливаем структуру замкнутых множеств на прямой.

Теорема 7

Каждое не пустое замкнутое множество на прямой есть либо вся прямая, либо получается из прямой удалением не более чем счетного дизъюнктного семейства интервалов. В частности, непустое замкнутое ограниченное множество есть либо сегмент, либо получается из сегмента удалением указанного семейства.
Следующим будет такой факт.

Теорема 8

Каждое непустое замкнутое множество есть пересечение счетного семейства открытых множеств, т. е. множество типа G_δ.

► Действительно, $F = R \setminus G$ и используя законы де Моргана.

Таким образом, $c(F_\sigma) = G_\delta$, $c(G_\delta) = F_\sigma$. Открытые и замкнутые множества есть одновременно множества и типа G_δ, и типа F_σ ◄.

В заключение рассмотрим так называемые канторовы множества G_0 и F_0.

Представим $[0;1] = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. Удалим среднюю часть, а крайние снова разделим на 3 части и каждую среднюю часть удалим. Продолжим процесс. $G_0 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right) \cup \ldots$. $\overline{\overline{G}} = c$. Хоть и странно, но $F_0 = [0,1] \setminus G_0$ также континуально. F_0 совершенно, G_0 открыто, F_0 замкнуто.

§6. Множества на плоскости, в пространстве и в R^n

Поговорим немного о структуре открытых и замкнутых множеств в пространстве $R^n, n>1$.

Теорема 1

Каждое открытое непустое ограниченное множество на плоскости есть объединение не более чем счетного семейства замкнутых прямоугольников без общих внутренних точек попарно.

► Выберем на плоскости прямоугольную систему координат xOy, проведем сетку прямых, параллельных осям, через 1 единицу масштаба. Эту сетку обозначим как S_1. Далее проводим прямые через $\frac{1}{2}$ единицы, получаем сетку S_2 и т. д. Сетка S_n образована квадратами со стороны $\frac{1}{2^n}$. Четыре квадрата сетки S_{k+1} составляют один квадрат сетки S_k.

Пусть G – данное непустое открытое ограниченное множество. Обозначим через F_1 замкнутое множество, состоящее из всех квадратов сетки S_1, целиком входящих в G.

$G \supset F_1$. Далее F_2 – замкнутое множество, получающееся из F_1 присоединением тех квадратов сетки S_2, которые входят в G, но не вошли в F_1. Продолжим этот процесс. Обозначим $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Покажем, что $A=G$. $A \subset G$, очевидно, что $\forall n \in N \Rightarrow F_n \subset G$. Установим, что $G \subset A$. Пусть $x_0 \in G$ – любая. Тогда существует последовательность квадратов $(K_n)_{n\in N}$, стягивающаяся к точке x_0. Так как G открыто, то x_0 входит в G вместе с некоторой ε-окрестностью. Начиная с $n=n_0$ и далее, квадраты K_n входят в эту окрестность, а значит, и в G. Пусть K_{n_0} – квадрат с наименьшим номером из вошедших в G. Он входит в F_{n_0} (либо как квадрат сетки S_{n_0}, либо как часть квадрата сетки с меньшим номером).

Значит, $K_{n_0} \subset A \Rightarrow x_0 \in A$ и $G \subset A$.

В итоге $G = A$. Семейство $\{F_n\}$ счетно, ибо при конечном количестве $\bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n$ замкнуто ◄.

Указанное разложение $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ неоднозначно.

Этот результат можно, очевидно, обобщить на пространство R_n.

Представление будет через n- мерные гиперкубы (см.[10], с.114–116). Эти результаты, очевидно, есть обобщение теоремы 5 §4. Можно обобщить и теорему 5.

Теорема 2

Каждое непустое открытое множество $G \subset R^n$ есть объединение не более чем счетного семейства открытых гипершаров.

Обозначим гипершар с центром в т. $x \in R^n$ и радиусом r через $\overset{o}{Ш}(x_0; r)$. $\overset{o}{Ш}(x_0; r) = \{ x \in R^n : \rho_E(x, x_0) < r \}$. Рассмотрим два случая.

1. $G = R^n$. Тогда $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \overset{o}{Ш}(0; m)$.

2. $G \neq R^n$. В этом случае среди всех $\overset{o}{Ш}(x; k)$, где $x \in G$ и $\overset{o}{Ш}(x; r) \subset G$ всегда имеется гипершар *max* радиуса. Докажем это. Обозначим $D = \left\{ r > 0 : \overset{o}{Ш}(x; z) \subset G \right\}$. $D \neq \varnothing$, т. к.

G открыто и такие гипершары имеются. $G \neq R^n$, поэтому D ограничено сверху. По принципу Вайерштрасса (см. курс матанализа), $\exists r_0 = \sup D$. Покажем, что $\overset{\circ}{Ш}(x;z) \subset G$. Это будет искомый гипершар.

Возьмем произвольно $y \in \overset{\circ}{Ш}(x;r)$, т. е. $\rho_E(y;x) < r_0$.

Найдется $r \in D : \rho(y;x) < r$, при этом $\overset{\circ}{Ш}(x;r) \subset G$. Поскольку $y \in \overset{\circ}{Ш}(x;r)$, то $y \in G$ и $\overset{\circ}{Ш}(x;r_0) \subset G$.

Далее обозначим G_Q множество всех рациональных точек множества G. Оно непусто, поэтому счетно. Перенумеруем его: $x_1, x_2, ..., x_m, ...$ $\forall x_m$ существует гипершар $\overset{\circ}{Ш}_m$ max радиуса с центром в точке x_m, содержащейся в G.

Покажем, что $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overset{\circ}{Ш}_m$. Очевидно, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \overset{\circ}{Ш}_m \subset G$. Покажем, что $G \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \overset{\circ}{Ш}_m$. Произвольно возьмем $y \in G$, тогда $\overset{\circ}{Ш}(y;\varepsilon) \subset G$ при определенном $\varepsilon > 0$. Подберем рациональную точку $x \in R^n$ так, чтобы $\rho_E(y;x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $x \in \overset{\circ}{Ш}(y;\varepsilon) \subset G$, то $x \in G_Q$. Пусть $x = x_k$. $\overset{\circ}{Ш}(x;\frac{\varepsilon}{2}) \subset G$ (неравенство треугольника для метрики). Из $\overset{\circ}{Ш}(x_k;\frac{\varepsilon}{2}) \subset G$ видно, что $\overset{\circ}{Ш}_k$ имеет радиус $\geq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow y \in \overset{\circ}{Ш}_k$. $y \in G$ - произвольно, тогда $G \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$.

Решение типовых задач к главе 2

Задача 1

Найти расстояние между точками $A(1,3,0,4,5)$ и $B(2,1,1,3,1)$ в пространстве R^5.

Решение

По эквклидовой метрике

$$\rho(A,B)=\sqrt{(2-1)^2+(1-3)^2+(1-0)^2+(3-4)^2+(1-5)^2}=$$

$$=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2+(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{1+4+1+1+16}=\sqrt{23}\,.$$

Задача 2

Доказать, что в пространстве

$$R^3,\, A(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n},2+\frac{3}{n^3})\to A_0(1,2,2) \text{ при } n\to+\infty.$$

Решение

$$\rho(A_n,A_0)=\sqrt{(1+\frac{1}{n}-1)^2+(2-\frac{1}{n^2}-2)^2+(2+\frac{3}{n^3}-2)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{9}{n^6}}\to 0\,.$$

Задача 3

Имеет ли множество N внутренние точки?

Решение

Выберем произвольно $n\in N$, тогда окрестность $(n-\frac{1}{m},n+\frac{1}{m})$ при $m\geq 2$ не содержит, кроме n, других чисел из N. Все точки из N невнутренние и $IntN=\varnothing$.

Задача 4

Найти предельные точки множества $A=\{1,2,3,4\}$.

Решение

Предельных точек это множество не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности каждой точки из A, кроме нее, нет других точек из A. Следовательно, $A' = \varnothing$.

Задача 5

Найти внутренность, предельное множество, замыкание множества $A = (1,2] \bigcup \{5\}$.

Решение

Точки, не входящие в A, внутренними быть не могут. $(1,2) \subset IntA$, т. к. каждая точка входит в A вместе с некоторой окрестностью. Точка 5 – изолированная следовательно, $IntA = (1,2)$.

$A' = [1,2]$, т. к. 1,2 предельные. $\overline{A} = [1,2] \bigcup \{5\}$ по формуле $\overline{A} = A \bigcup A'$.

Задача 6

Является ли множество $A = (1,5]$ множеством типа G_δ?

Решение

Поскольку $(1,5] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (1,5 + \frac{1}{n})$, то A имеет тип G_δ.

Задача 7

Является ли множество $A = N \times R$ открытым в R^2?

Решение

Не является, т. к. нет круга на плоскости, содержащего точку $(n,\alpha), n \in N, \alpha \in R$ и полностью входящего в A.

Задачи к главе 2

1) Входят ли точки $A(1,1,2,1)$ в шар $\overline{Ш}(0,r), 0(0,0,0,0)$ в пространстве R^4?

2) Доказать, что последовательность точек $A_n(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n^3}, 1)$ сходится к точке $A_0(0,1,1)$ в пространстве R^3.

3) Выяснить, являются ли открытыми или замкнутыми множества N, Z, Q, I на прямой.

4) Найти $IntA,\ A',\ \overline{A},\ F_r A$ для $A = (-1,9] \bigcup \{11\} \bigcup \{12\}$ на прямой.

5) Найти $IntA,\ A',\ F_2 A,\ \ \overline{A}$

для множества $A = \{M(x,y): 1 < x^2 + y^2 \le 9\}$ на плоскости.

6) Найти множество A, если $A' = \{0\}$.

7) Найти множество A, если $A' = \{0,1,2\}$.

8) Найти множество A, если $A' = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, n \in N$.

9) Является ли множество $A = [1,2] \bigcup \{3\}$ множеством типа G_δ?

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Непрерывность функций

Пусть функция f задана на множестве $X \subset R^n$ и принимает вещественные значения. Как всегда, $V\left(x_0;\delta;X\right)$ означает δ -окрестность точки x_0 в множестве X, т. е. множество $\left\{x\in X : \rho\left(x;x_0\right)<\delta\right\}$. (Метрика всюду эвклидова, это каждый раз отмечать не будем). Рассмотрим три подхода к понятию непрерывности функции f в точке x_0.

Определение Коши (Огюстен Луи Коши, Cauchy)

Функция f называется непрерывной в точке x_0 по множеству X, если

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=f(x_0)$, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0 : x\in V(x_0;\delta;X)\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \qquad \text{(C)}$$

Определение Гайне (Э. Гайне, 1821-1881, Heine,Германия).

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$\forall(x_n)_{n\in N}\subset X : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0). \qquad \text{(H)}$$

Чтобы рассмотреть еще одно определение, напомним некоторые простые понятия. Пусть f ограничена на X. Число $\omega_X(f)=\sup\limits_{x\in X} f(x)-\inf\limits_{x\in X} f(x)$ называется колебанием функции на множестве X. Можно рассмотреть колебание $\omega_{V_\delta}(x_0;f)$ на окрестности $V\left(x_0;\delta;X\right)$. Число $\omega(x_0;f)=\inf\limits_{\delta>0}\omega_{V_\delta}(x_0;f)$ называется колебанием функции в точке x_0. Колебание есть неотрицательное вещественное число.

Если f неограниченна в каждой окрестности точки x_0, то принимаем, по определению, $\omega(x_0; f) = +\infty$.

Определение Бэра (Р. Бэр, 1874–1932, Baire,Франция).

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если ее колебание в этой точке равно нулю:

$$\omega(f, x_0) = 0 . \qquad (B)$$

Более известны первые два определения. Определение Коши используется для практического доказательства непрерывности, а определение Гайне удобно использовать для доказательства разрывности. Но все эти подходы теоретически равноценны.

Теорема

Определения непрерывности по Коши, Гайне и Бэру эквивалентны.

Доказательство

1) $(C) \Rightarrow (H)$. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 по Коши, $(x_n)_{n\in N} \subset X$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

Тогда $\forall \delta > 0 \exists n_0(\delta) \in N : n > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \delta.$

Зададимся $\forall \varepsilon > 0$. Из условия (C) найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$, а по δ найдем соответствующий номер n_0. Тогда при $n > n_0 \Rightarrow \left| f(x_n) - f(x_0) \right| < \varepsilon$, т. е. $f(x_n) \to f(x_0)$.

2) $(C) \Rightarrow (B)$. Из условия (C) имеем: при $x \in V(x_0; \delta; X) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Это означает, что $\sup f(x) \le f(x_0) + \varepsilon$,

$\inf f(x) \ge f(x_0) - \varepsilon$ для точки x.

Следовательно, $\omega_{x_\delta}(x_0; f) \le 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\omega(x_0; f) = \inf \omega_{V_\delta}(x_0; f) = 0$ и условие (B) выполнено.

3) $(B) \Rightarrow (C)$. Пусть $\omega(x_0; f)$, т. е.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \omega_{V_\delta}(x_0; f) < \varepsilon$.

Значит, $\forall x \in V(x_0; \delta; X) \Rightarrow | f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ и (C) выполнено.

4) $(H) \Rightarrow (C)$. Допустим противное:

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in V(x_0; \delta; X) : | f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Положим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$.

Получим $(x_n)_{n \in N} : x_n \in V(x_0; \dfrac{1}{n}; X) \Lambda | f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

В то же время $x_n \to x_0$. Противоречие с условием (H).

Теорема доказана.

Замечание

Интересно отметить, что доказательство импликации $(H) \Rightarrow (C)$ опирается на аксиому произвольного выбора Цермело.

Действительно, мы получим для $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n \to x_0 \Lambda | f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Но существование $x_\delta : \rho(x_\delta; x_0) < \delta \Lambda | f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

не означает существования правила их построения. Достаточно показать, что предположение $\{x_\delta\} = \varnothing$ ведет к противоречию. Таким образом, предположение, что $f(x)$ ненепрерывна в т. x_0 означает лишь, что для некоторого $\varepsilon > 0$ будет: $\forall \delta > 0$ $M_\delta = \{x \in V(x_0; \delta; X) : | f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \neq \varnothing$. Переход от $\{M_{\delta_n}\}$ к $(x_n)_{n \in N}$ может осуществляться лишь путем произвольного выбора $x_n \in M_{\delta_n}$.

При этом $M_{n+1} \subset M_n \Rightarrow$ надо рассматривать $M_n \setminus M_{n+1}$. Берем лишь непустые из них, обозначаем M_n и из них на основании аксиомы произвольного выбора выбираем по точке x_n.

Обобщением и усилением обычной непрерывности функций есть понятие абсолютной непрерывности. Рассмотрим ее применительно к функциям на отрезке. Пусть $f(x)$ конечна на $[a;b]$. $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на $[a;b]$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$: для произвольной системы попарно различных наборов $\{(a_1;b_1),...,(a_n;b_n)\}$, если $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(f(b_k)-f(a_k)\right)\right|<\varepsilon. \tag{*}$$

При $n=1$ получаем обычную непрерывность. Обратное неверно. Условие (*) можно заменить более сильным:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_n)\right|<\varepsilon. \tag{**}$$

К абсолютно непрерывным функциям относятся функции, удовлетворяющие так называемому условию Липшица:

$$\forall\alpha,\beta\in[a;b]\Rightarrow\left|f(\beta)-f(\alpha)\right|\le L|\beta-\alpha|,\ \ L=const.$$

Арифметические действия сохраняют абсолютную непрерывность.

§2. Непрерывные функции на замкнутых множествах

Напомним известные из курса математического анализа свойства непрерывных функций, заданных на замкнутом ограниченном множестве $F\subset R^n$.

Теорема 1 (1-я теорема Вайерштрасса)

Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $F\subset R^n$, ограничена на нем.

Теорема 2 (2-я теорема Вайерштрасса)

Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $F \subset R^n$, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Теорема 3 (Кантор)

Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, равномерно непрерывна на нем.

Доказательства можно найти в литературе по математическому анализу. Установим и новые результаты.

Теорема 4

Функция f, непрерывна на замкнутом множестве $F \subset R^n$ тогда и только тогда, когда $\forall a \in R$ множества $\{x : f(x) \le a\}$ и $\{x : f(x) \ge a\}$ замкнуты $(x \in F)$.

Доказательство

1. Необходимость.

Пусть $a \in R$ задано. Обозначим $E = \{x : f(x) \ge a\}$. Пусть $(x_m)_{m \in N} \subset E,\ x_m \to x_0.$ F замкнуто, тогда $x_0 \in F$.

В силу непрерывности f, $f(x_n) \to f(x_0)$. Но $f(x_m) \ge a$ $\forall m \in N \Rightarrow$ $f(x_0) \ge a \Rightarrow x_0 \in E$ и E замкнуто.

Для другого множества аналогично.

2. Достаточность.

Пусть $x_m \in F, x_m \to x_0$. Тогда $x_0 \in F$. $\forall \varepsilon > 0$, рассмотрим два множества:

$E_1 = \{x \in F : f(x) \ge f(x_0) + \varepsilon\}$, $E_2 = \{x \in F : f(x) \le f(x_0) - \varepsilon\}$.

Эти множества замкнуты, $\Rightarrow E = E_1 \bigcup E_2$ замкнуто.

$x_0 \overline{\in} E \Rightarrow x_0$ не есть предельная точка E. Тогда имеется окрестность $V(x_0; \delta; F)$, не содержащая ни одной точки из E. Но x_m входит в нее при достаточно больших $m, \Rightarrow x_m \ \overline{\in E}$ при

$m > m_0$. Тогда $f(x_0) - \varepsilon < f(x_m) < f(x_0) + \varepsilon$. В силу произвольности ε

$$f(x_m) \to f(x_0) \Rightarrow f \text{ непрерывна.}$$

Теорема доказана.

Указанные множества часто обозначают $F(f \geq a)$ и $F(f \leq a)$.

Следствие

Функция f непрерывна на всем пространстве R^n тогда и только тогда, когда $\forall a \in R$ множества $R^n(f > a)$ и $R^n(f < a)$ открыты.

Теорема 5

Множество точек непрерывности функции f, заданной на замкнутом или открытом множестве на прямой, есть множество типа G_δ (в частности, это может быть $\varnothing$ или R).

Примем эту теорему без доказательства.

В заключение отметим, что если x_0 – изолированная точка множества $X \subset R$, на котором задана функция f, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Действительно, $x_n \to x_0$ возможно лишь тогда, когда при $n > n_0 \Rightarrow x_n = x_0$, и тогда $f(x_n) = f(x_0) \to f(x_0)$. Иногда непрерывность с учетом этого соображения называют обобщенной непрерывностью.

§3. Точки разрыва

Имеются различные классификации точек разрыва. В теории функций наиболее принята такая:

1. Если существуют оба односторонних предела $f(x_0+0), f(x_0-0)$, даже и бесконечные, то это разрыв 1-го рода.

2. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов, то это точка разрыва 2-го рода.

Пример

$f\left(x\right)=\begin{cases}0; x\le 0\\ \sin\frac{1}{2}; x>0\end{cases}$ имеет в точке $x_0=0$ разрыв 2-го рода, ибо $\overline{\exists}\lim\limits_{x\to+0}\sin\frac{1}{2}$.

Рассмотрим некоторые факты, связанные с точками разрыва.

Теорема 1

Пусть функция f задана на замкнутом множестве $F\subset R^n$. Множество $A_\varepsilon=\left\{x:\omega\left(x, f\right)\ge\varepsilon\right\}$ замкнуто $\forall\varepsilon>0$.

Доказательство

Пусть x_0 – предельная точка множества $A_{\varepsilon.}$. $A_\varepsilon\subset F\Rightarrow x_0\in F$. В любой окрестности $V\left(x_0;\delta\right)$ имеется точка $x'\ne x_0$ из $A_{\varepsilon.}$, т. е. $\omega\left(x'; f\right)\ge\varepsilon$. Тем более, тогда $\omega\left(x'; f\right)\ge\varepsilon\Rightarrow x_0\in A_\varepsilon$ и $A_{\varepsilon.}$ замкнуто.

Теорема доказана.

Интересен следующий результат.

Теорема 2

Множество точек разрыва функции, заданной на замкнутом множестве $F\subset R^n$, есть объединение не более чем счетного числа замкнутых множеств.

Доказательство

Множество точек разрыва функции f обозначим через A.

Покажем, что $A=\bigcup\limits_m A_{\frac{1}{m}}$. Доказываем как равенство множеств.

1 . $\forall x\in A\Rightarrow\omega\left(x; f\right)>0$.

Тогда $\exists m \in N : \omega(x; f) \geq \frac{1}{m} \Rightarrow x \in A_{\frac{1}{m}} \Rightarrow x \in \bigcup_m A_{\frac{1}{m}} \Rightarrow A \subset \bigcup_m A_{\frac{1}{m}}$

$\forall x \in \bigcup_m A_{\frac{1}{m}} \Rightarrow x \in A_{\frac{1}{m_0}} \Rightarrow \omega(x; f) \geq \frac{1}{m_0} > 0 \Rightarrow x$ – точка разрыва f (по Бэру) $\Rightarrow x \in A \Rightarrow \bigcup_m A_{\frac{1}{m}} \subset A$.

В итоге $A = \bigcup_m A_{\frac{1}{m}}$.

По теореме 2 все множества $A_{\frac{1}{m}}$ замкнуты, их не более IC_0.

Теорема доказана.

Следствие

Множество точек разрыва есть множество типа F_σ. Особенное внимание уделим монотонным функциям.

Теорема 3

Все точки разрыва монотонной функции $f : R \to R$, если они есть, только 1 -го рода.

Доказательство

Пусть, например, $f(x)$ не убывает. Если $x_0 \in X$ – изолированная, то в т. x_0 $f(x)$ непрерывна. Достаточно считать, что x_0 – предельная точка множества $X = \operatorname{dom} f$, $x_0 \in X$. Допустим, что в любой окрестности точки x_0 есть бесконечно много точек из X, лежащих слева от x_0. В силу монотонности f для всех этих точек x^* будет $f(x^*) \leq f(x_0)$.

Тогда существует $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ x < x_0}} f(x)$. Обозначим его через $\underline{m}$. Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = \underline{m}$.

По свойствам $\sup$, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x^* \in X : f(x^*) > \underline{m} - \varepsilon$. Тогда для $x \in (x^*; x_0)$ будет $\underline{m} - \varepsilon < f(x^*) \le f(x) \le \underline{m} < \underline{m} + \varepsilon$, т. е. $| f(x) - \underline{m} | < \varepsilon$, т. е. $f(x_0 - 0) = \underline{m}$.

Пусть далее в любой окрестности точки x_0 справа от x_0 есть бесконечно много точек из множества X.

Для таких точек $f(x_0) \le f(x)$, тогда $\exists \inf\limits_{\substack{x \in X \\ x > x_0}} f(x) = \overline{m}$.

Аналогично показываем, что $f(x_0 + 0) = \overline{m}$. В этом случае $f(x_0 \pm 0)$ существуют, они конечны. Если x_0 – точка разрыва, то 1-го рода с конечным скачком.

Если же слева от x_0 в любой ее окрестности имеется лишь конечное множество точек из X, а справа бесконечное или наоборот, т. е. в достаточно малой окрестности есть точка из X только с одной стороны, то x_0 – точка устранимого разрыва. Теорема доказана.

Таким образом, точка разрыва монотонной функции, если они есть, только 1-го рода и с конечным скачком: $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Установим мощность множества точек разрыва монотонной функции. С учетом наших дальнейших потребностей, ограничимся случаем $X = [a; b]$.

Теорема 4

Множество точек разрыва монотонной функции, заданной на $[a; b]$, не более чем счетно.

Доказательство

Пусть, например, f возрастает. Известно, что множество точек разрыва по теореме 1 $A = \bigcup\limits_m A_{\frac{1}{m}}$. Каждое $A_{\frac{1}{m}}$ – конечное или пустое: оно имеет элементов не больше, чем $\left(f(b) - f(a) \right)$:

$\frac{1}{m}$. Тогда A как объединение счетного числа не более чем конечных множеств не более чем счетно.

Теорема доказана.

Этот результат можно обобщить на случай более общего множества X. А именно, верны:

Теорема 5

Если функция f монотонна и ограничена на множестве $X \subset R$, то $\forall \varepsilon > 0$ множество A_ε не более чем конечно.

Теорема 6

Множество точек разрыва функции, монотонной и ограниченной на множестве $X \subset R$, не более чем счетно.

Теорема 7

Множество точек разрыва функции, монотонной на множестве $X \subset R$, не более чем счетно.

Доказательства см. в [4].

§4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функциональную последовательность $(f(x))_{n\in N}$, заданную на множестве $X \subset R$.

Нам придется в дальнейшем рассматривать несколько типов сходимости последовательности функций. Наиболее простая из них – простая поточечная сходимость.

$f_0(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f_0(x_0)$ $\forall x_0 \in X$.

Таким образом,

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon, x_0) : n > n_0 \Rightarrow | f_n(x_0) - f_0(x_0) | < \varepsilon \forall x_0 \in X$.

Более сильное условие представляет собой равномерная сходимость, когда n_0 зависит только от ε и годится для всех $x \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall x \in X \Lambda n > n_0 \Rightarrow | f_n(x) - f_0(x) | < \varepsilon .$$

Для простой поточечной сходимости будем использовать обозначение $f_n(x) \to f_0(x)$, для равномерной $f_n(x) \underset{\to}{\to} f_0(x)$. Очевидно, простая поточечная сходимость всегда вытекает из равномерной, а обратное неверно в общем случае. Равномерность сходимости также зависит от множества X .

Примеры

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{2x+n}$, $X = (0;+\infty)$.

$\forall x \in (0;+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2x+n} = 0$, поэтому простой поточечный предел последовательности есть функция $f_0\left(x\right) = 0$ на X .

Пусть $| f_n(x) - f(x) | = \dfrac{1}{2x+n} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Если взять $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $| f_n(x) - f_0(x) | < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Сходимость равномерная.

2. $f_n\left(x\right) = x_n$, $X = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Очевидно, $f_n\left(x\right) \to 0$.

Поскольку $x^n < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$, то сходимость равномерная.

3. $f_n\left(x\right) = x_n$, $X\left[0;1\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_0^n = 0$, при $x \in [0;1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_0^n = 1$, при $x_0 = 1$.

Сходимость неравномерная.

Этот пример, кроме всего прочего, показывает, что простой поточечный предел последовательности непрерывных функций может быть разрывной функцией. Равномерная сходимость в этом плане лучше.

Теорема 1

Равномерный предел последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция.

Доказательство

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ на X.

В силу равномерности сходимости,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Lambda \forall x \in X \Rightarrow \left| f_n(x) - f_0(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

Фиксируем $\forall x_0 \in X$. Тогда

$$\left| f_n(x_0) - f_0(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

при достаточно больших n.

В силу непрерывности $f_n\left(x\right)$ в точке x_0, $\exists\delta > 0 : \left|x - x_0\right| < \delta$,

$$x \in X \Rightarrow \left| f_n(x) - f_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Пусть теперь $x \in X$, $\left|x - x_0\right| < \delta$ достаточно велико. Из условий (1), (2),(3) получаем:

$$\left| f_0(x) - f_0(x_0) \right| \le \left| f_0(x) - f_n(x) \right| + \left| f_n(x) - f_n(x_0) \right| +$$

$$+\left| f_n(x_0) - f_0(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Это значит, что $f_0(x)$ непрерывна в точке x_0, $\forall x_0 \in X$

Теорема доказана.

Теорема 2 (Э. Хелли, E. Helli)

Если последовательность функций $(f_n(x))_{n\in N}$ на $\left[a;b\right]$ равномерно ограничена: $\left| f_n(x) \right| \le H \quad \forall n \in N$, и полные вариации ограничены тем же числом: $\bigvee\limits_a^b (f_n) \le H \ \forall n \in N$, то существует подпоследовательность $(f_{n_k}(x))_{k\in N}$, поточечно сходящаяся на $[a;b]$ к $f_0(x)$ – ФОВ на $[a;b]$.

Примем эту теорему без доказательства. Доказательство можно найти, например, в [1].

§5. Классификация Бэра

Французский математик Рене Луи Бэр (1874–1932) разработал классификацию функций по «степени их разрывности». Рассмотрим его результаты в обзорном порядке. Ограничимся $[a;b]$, хотя можно обобщить на более общее множество $X \subset R$.

Множество всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. $C[a;b]$ назовем нулевым классом Бэра и обозначим B_0. В первый класс Бэра, B_1, включили те и только те функции, которые уже имеют разрывы, но являются поточечными пределами последовательностей непрерывных функций.

Пример

$f(x)=\begin{cases}0; x\in[0;1) \\ 1; x=1\end{cases}$ не входит в B_0. Но $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n$, на $[0;1]$ и относится к классу B_1.

Функции, не входящие в B_0 и B_1, но являющиеся $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)\in B_1$, составляют класс Бэра – B_2. Аналогично получаем $B_n, n\in N$.

Так, функция Дирихле – $Di(x)=\begin{cases}1; x\in Q \\ 0; x\in \overline{Q}\end{cases}$ – есть функция второго класса Бэра.

Как известно, она разрывна во всех точках отрезка $[a;b]$. Действительно, рассмотрим множество $Q[a;b]$ рациональных точек из $[a;b]$. Оно счетно.

Перенумеруем его: $(r_n), n \in N$. Введем функции:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1; \ x = n_k, \ k = 1, 2, \ldots, n \\ 0, \ \textit{в остальных точках.} \end{cases}$$

$\varphi_n(x)$ имеет конечное число точек разрыва и относится к классу B_1.

$Di(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x)$ и $Di(x) \in B_2$.

Однако классификацию Бэра можно продолжить и дальше. Если $f(x) \overline{\in} B_m \ \ \forall m \in N$, но $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, где $f_n(x) \in B_{m_n}$, то $f(x)$ отнесем к классу B_ω. Далее определяется класс $B_{\omega+1}$ и т. д.

Если α – порядковое число второго числового класса и определены все классы Бэра B_β, $\beta < \alpha$, то функции из B_α определяются как не входящие ни в один класс B_β, $\beta < \alpha$, но $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in B_{\beta_n}$, $\beta_n < \alpha$.

Такая классификация функций называется классификацией Бэра, а функции всех классов B_α, $\alpha < \Omega$ называются функциями Бэра.

Интересно отметить, что номерами классов Бэра могут быть только числа 1 и 2 числовых классов. Способом Бэра нельзя определить класс B_Ω. Действительно, каждая последовательность функций Бэра $(f_n(x))_{n \in N}$ характеризуется тем, что $f_n(x) \in B_{\alpha_n}$, $\alpha_n < \Omega$.

Тогда $\exists\gamma>\alpha_n\ \ \forall n\in N$, γ входит во второй числовой класс. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ входит в класс с номером, не больше γ.

Рассмотрим основные свойства функций Бэра.

1. Все классы Бэра непустые.
2. Множество всех функций Бэра имеет мощность континуума.
3. Каждая функция первого класса Бэра имеет всюду плотное множество точек непрерывности.
4. Монотонная функция есть функция не выше 1-го класса.
5. Каждая функция 1-го класса есть предел последовательности полиномов с рациональными коэффициентами.
6. Функция с конечным или счетным множеством точек разрыва есть функция 1-го класса Бэра.
7. Равномерный предел последовательности функций классов $\le\alpha$ есть функция классов $\le\alpha$.

Свойство 2 показывает, что все функции Бэра составляют ничтожно малую часть множества всех функций, заданных на $[a;b]$.

§6. Функции ограниченной вариации

Проблема

Насколько сильно изменяются значения $f(x)$ на $[a,b]$?

Пусть функция $f(x)$ задана на $[a,b]$. Выполним (T)–разбиение $[a,b]: a=x_0<x_1<...<x_{k+1}<...<x_{n-1}<x_n=b$. Составим сумму $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|\,f(x_{k+1})-f(x_k)|$. Эта сумма называется вариацией или изменением $f(x)$ на $[a,b]$ по данному (T)–разбиению. Обозначим $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup\limits_{(T)}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)$. Если $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$, то

$f(x)$ называется функцией, ограниченной вариации на $[a,b]$ (ФОВ на $[a,b]$), а число $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ называется полной вариацией, или полным изменением $f(x)$ на $[a,b]$. ФОВ определил Жордан (C. Jordan). Множество ФОВ на $[a,b]$ обозначается $V[a,b]$.

Если $f(x) \in V[a,b]$, то, по определению $\sup$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (T_0) : \overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T_0) > \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - \varepsilon,$$

т. е. $\underset{a}{V}(f,T)$ можно сделать сколько угодно близкой слева к полной вариации. Всегда $V(f) \geq 0$. Для $f(x) = const$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right) = 0$.

Понятие ФОВ можно распространять на $[a,+\infty)$. Если $f(x)$ есть ФОВ на $[a,b]$ $\forall b > 0$ и $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ ограничены в совокупности, то $f(x)$ называется ФОВ на $[a,+\infty)$ и $\overset{+\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup\limits_{b>a} \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)$. Далее рассмотрим ФОВ на $[a,b]$ и их свойства.

Свойства ФОВ на отрезке

1^0. Монотонная функция есть ФОВ

► Пусть, например $f(x)$ не убывает на $[a,b]$: $f(x) \to \forall (T)$ имеем:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$$

$$= (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1) + \ldots$$

$$\ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a) \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right) = b - a.$$

Аналогично для невозрастающей функции $\mathop{V}\limits_a^b(f)=f(a)-f\left(b\right)$. В общем случае монотонной функции $\mathop{V}\limits_a^b(f)=|\,f(a)-f\left(b\right)|$ ◄.

2^0. Функция класса Липшица (R. Lipschitz) есть ФОВ.

► $\forall\left(T\right)$,

$$\mathop{V}\limits_a^b\left(f;T\right)=\sum_{k=0}^{n-1}|\,f(x_{k+1})-f(x_k)|\le L\sum_{k=0}^{n-1}|\,x_{k+1}-x_k\,|=L\left(b-a\right)<+\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathop{V}\limits_a^b\left(f\right)\le L\left(b-a\right)<+\infty\Rightarrow\mathop{V}\limits_a^b\left(f\right)<+\infty \text{ ◄.}$$

3^0. Если $f(x)$ имеет ограниченную производную на $\left[a,b\right]$, то $f(x)$ есть ФОВ.

► Пусть $\exists|\,f^{'}\left(x\right)|\le K\quad\forall x\in\left[a,b\right]$. По теореме Лагранжа $|\,f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)|\le K\,|\,x_{k+1}-x_k\,|$, поскольку

$$|\,f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)|=|\,f^{'}\left(c_k\right)||\,x_{k+1}-x_k\,|,$$

где $c_k\in\left[x_k,x_{k+1}\right]$, а $|\,f^{'}\left(c_k\right)|\le K$. Тогда $f(x)$ есть функция класса Липшица и по 2^0 она есть ФОВ ◄.

Пример

На $\left[-1;1\right]$, $f\left(x\right)=\begin{cases}0;\ x=0\\ x^2\sin\dfrac{\pi}{x};\ x\ne0\end{cases}$,

$$f'(x)=\begin{cases}0;x=0\\ 2x\sin\dfrac{\pi}{x}-\pi\cos\dfrac{\pi}{x};x\ne0\end{cases},\qquad |\,f'\left(x\right)|\le 2*1*1+\pi*1=\pi+2,$$

$f\left(x\right)$ – ФОВ, хотя при $x\to0$ она колеблется бесконечное количество раз, переходя от возрастания к убыванию и наоборот.

Замечание

Ограниченность вариации не связана напрямую с непрерывностью. С одной стороны, существуют разрывные ФОВ.

Пример

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0; 0\le x<1,\\ 1; x=1.\end{cases}$$

Очевидно, $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=1<+\infty$.

С другой стороны, не каждая непрерывная на $\left[a,b\right]$ функция есть ФОВ на нем.

Пример

$$f(x)=\begin{cases}0; x=0,\\ x\sin\dfrac{\pi}{2x}; 0<x\le 1.\end{cases}.$$

Поскольку $\exists\lim\limits_{x\to+0}x\cos\dfrac{\pi}{2x}=0$, ибо x – бесконечно малая, $\cos\dfrac{\pi}{2x}$ – ограниченная величина, то $f(x)$ непрерывна на $\left[0,1\right]$.

Возьмем $\left(T\right)$, $0<\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{2n-1}<...<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<1$. Тогда $\overset{1}{\underset{0}{V}}\left(f,T\right)=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. Значит, $\overset{1}{\underset{0}{V}}\left(f\right)=+\infty$.

Продолжим изучение свойств ФОВ.

4^0. ФОВ ограничена на $\left[a,b\right]$.

► Пусть $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)<+\infty$. Выполним такое (Т): $a=x_0<x_1<x_2=b$, x_1 – произвольна. Обозначим $x_1=x$.

$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f;x\right)=\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|+\left|f\left(b\right)-f\left(x\right)\right|\le\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)$ по свойству модуля,

$$|f(x)|-|f(a)|\le|f(x)-f(a)|,\ |f(x)|-|f(b)\le|f(b)-f(x)|.$$

Имеем: $2|f(x)|-|f(a)|-|f(b)|\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$, отсюда $|f(x)|\le\frac{1}{2}\left(|f(a)|+|f(b)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\right)$, $\forall x\in(a,b)$. Следовательно, $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ ◄.

5^0. Сумма ФОВ есть ФОВ

► Пусть $\varphi(x)=f(x)+g(x)$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<+\infty$.

Имеем:

$$|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)|=|f(x_{k+1})+g(x_{k+1})|-|f(x_k)+g(x_{k+1})|=$$
$$=|(f(x_{k+1})-f(x_k))+(g(x_{k+1})-g(x_k))|\le$$
$$\le|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|g(x_{k+1})-g(x_k)|.$$

Отсюда $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<+\infty$ ◄.

6^0. Разность ФОВ есть ФОВ. Аналогично 5^0.

7^0. Произведение ФОВ есть ФОВ.

► Пусть $h(x)=f(x)g(x)$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty, \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<+\infty$. По 4 $f(x)$, $g(x)$ ограничены на $[a;b]$; $|f(x)|\le A$, $|g(x)|\le B$, $\forall x\in[a;b]$.

Имеем:

$$|h(x_{k+1})-h(x_k)|=|f(x_{k+1})g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_k)|=$$
$$=|(f(x_{k+1})g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_{k+1}))+(f(x_k)g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_k))|\le$$
$$\le|g(x_{k+1})||f(x_{k+1})-f(x_k)|+|f(x_k)||g(x_{k+1})-g(x_k)|\le$$
$$\le B|f(x_{k+1})-f(x_k)|+A|g(x_{k+1})-g(x_k)|.$$

Отсюда: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(h)\le B\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+A\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty$ ◄.

8^0. Если $g(x)$ – ФОВ, $|g(x)| \geq \alpha > 0$ $\forall x \in [a;b]$, то $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ – ФОВ

► $$|h(x_{k+1}) - h(x_k)| = \left| \frac{1}{g(x_{k+1})} - \frac{1}{g(x_k)} \right| =$$

$$= \left| \frac{g(x_{k+1}) - g(x_k)}{g(x_{k+1})g(x_k)} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|.$$

Отсюда $\mathop{V}\limits_a^b(h) \leq \dfrac{1}{\alpha^2} V(g)$ ◄.

9^0. Если $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$, $g(x)$ – ФОВ, $|g(x)| \geq \alpha > 0$ $\forall x \in [a;b]$, то $h(x)$ – ФОВ.

► Вытекает из 7 и 8 ◄.

10^0. Если $a < c < b$,

то $f(x) \in V[a;b] \Leftrightarrow f(x) \in V[a;c] \wedge f(x) \in V[c;b]$.

При этом, $\mathop{V}\limits_a^b(f) = \mathop{V}\limits_a^c(f) + \mathop{V}\limits_c^b(f)$.

► 1. Пусть $f(x) \in V[a;b]$. Сделаем (T) – разбиение $[a;c]$ и $[c;b]$. Отдельно

$$(T_1):\ a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c;\ (T_2):\ c = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b.$$

$(T_1) \cup (T_2) = (T_3)$ для $[a;b]$. $\mathop{V}\limits_a^c(f; T_1) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|$,

$\mathop{V}\limits_c^b(f) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$, тогда

$$\mathop{V}\limits_a^c(f; T_1) + \mathop{V}\limits_c^b(f; T_2) = \mathop{V}\limits_a^b(f; T_3) \leq \mathop{V}\limits_a^b(f) < +\infty \Rightarrow \mathop{V}\limits_a^c(f) < +\infty,$$

$\mathop{V}\limits_c^b(f) < +\infty$.

После перехода к sup имеем: $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

2. Пусть $f(x)\in V[a;c]$, $f(x)\in V[c;b]$. Возьмем любое (T) – разбиение для $[a;b]$. Если $c\ne x_k$ $\forall k=1/(n-1)$, то введем еще одну точку $c=x_m$, при этом вариация по разбиению может только увеличиться. Получаем: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T^*)\le\overset{c}{\underset{a}{V}}(f,T_1)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f,T_2)$, где $T^*=(T_1)\bigcup(T_2)$ – полученное разбиение $[a,c)$ и $[c,b]$. Поскольку $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f,T_1)\le\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$, $\overset{b}{\underset{c}{V}}(f,T_2)\le\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<+\infty$, то $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T)<+\infty$ для всех (T) и $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$, отсюда $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$.

3. Из двух неравенств получаем $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$ ◄.

Очевидно, аналогичное свойство верно для разбиения $[a,b]$ на любое конечное число отрезков и кусочно-монотонная функция есть ФОВ.

11^0. Если $f(x)\in V[a,b]$, то функция $g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f(t))$ ограничена и неубывающая на $[a,b]$.

► Пусть $a\le x^*<x^{**}\le b$. Тогда $g(x^{**})=\overset{x^{**}}{\underset{a}{V}}(f(t))=$

$$=\underbrace{\overset{x^*}{\underset{a}{V}}(f(t))}_{g(x^*)}+\underbrace{\overset{x^{**}}{\underset{x^*}{V}}(f(t))}_{\ge 0}\Rightarrow g(x^{**})\ge g(x^*);\ g(x)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\ ◄.$$

12^0. $f(x)\in V[a;b]\Leftrightarrow\exists F(x)$ на $[a,b]$ неубывающая и ограниченная, такая, что $\forall x^*$,

$$x^{**}\in[a,b],x^*<x^{**}\Rightarrow|f(x^{**})-f(x^{**})|\le F(x^{**})-F(x^*).$$

► 1. Необходимость. Пусть $f(x) \in V[a,b]$. Возьмем $F(x) = g(x) \overset{x}{\underset{a}{V}}(f(t))$. Она не убывает и ограничена по 11^0. $|f(x^{**}) - f(x^*)| \le \overset{x^{**}}{\underset{x^*}{V}}(f(t)) = g(x^{**}) - g(x^*)$ для $[x^*, x^{**}]$.

2. Достаточность

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$$

$= F(b) - F(a) < +\infty$, $\forall (T)$- разбиение, следовательно, $f(x) \in V[a,b]$ ◄.

13^0. $f(x) \in V[a;b] \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$, где $g(x), h(x)$ – ограниченные и неубывающие на $[a,b]$.

► 1. Необходимость.

По 12^0 найдём $F(x)$, неубывающую и ограниченную. Положим $g(x) = F(x)$, $h(x) = F(x) - f(x)$. Тогда $f(x) = g(x) - h(x)$. Покажем, что $h(x)$ неубывающая. Пусть $x^* < x^{**}$.

$$h(x^{**}) - h(x^*) = \left(F(x^{**}) - F(x^*)\right) - \left(f(x^{**}) - f(x^*)\right) \ge 0$$

по свойствам $F(x)$.

2. Достаточность. Если $f(x) = g(x) - h(x)$, то возьмем $F(x) = g(x) + h(x)$ – ограниченную и неубывающую. $|f(x^{**}) - f(x^*)| \le \left(g(x^{**}) - g(x^*)\right) + \left(h(x^{**}) - h(x^*)\right) =$ $= F(x^{**}) - F(x^*)$. Так что $F(x)$ удовлетворяет 12^0, следовательно, $f(x)$ есть ФОВ ◄.

Замечание

Поскольку $g(x), h(x)$ ограниченные, то, добавив к ним одну и ту же $const$, можно добиться их положительности на

$[a,b]$. Добавив к ним одну и ту же строго возрастающую ограниченную функцию (например, $arctgx$), получим $g(x),h(x)$ строго возрастающими. Итак, в 13^0. Всегда можно считать, что $g(x),h(x)$ строго возрастают и положительны на $[a,b]$.

Из представления $f(x)=g(x)-h(x)$ получаем несколько следствий ФОВ.

Следствие 1

ФОВ может иметь разрывы только 1-го рода с конечным скачком.

Следствие 2

Множество точек разрыва ФОВ не более чем счетно.

Следствие 3

ФОВ есть функция не выше 1-го класса Бэра.

Как уже отмечалось, ФОВ необязательно непрерывна. Рассмотрим специальные свойства непрерывных ФОВ.

14^0. Если $f(x)\in V[a,b]$ непрерывна в точке x_0, то в этой же точке непрерывна и функция $g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f(t))$.

► Пусть $x_0\in(a,b)$. Покажем, что $g(x_0+0)=g(x_0)$ $\forall\varepsilon>0$. Возьмем (T) – разбиение $[x_0;b]: x_0<x_1<...<x_n=b$ так, чтобы $\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f(t);T)>\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f(t))-\varepsilon$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в т. x_0, то можно считать, что при этом $|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$. Тогда имеем:

$$\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f(t))<\varepsilon+\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(t;T)<2\varepsilon+\overset{b}{\underset{x_1}{V}}(t;T)\le 2\varepsilon+\overset{b}{\underset{x_1}{V}}(t).$$

Отсюда: $\overset{x}{\underset{x_0}{V}}(f)<2\varepsilon$, т. е. $g(x_1)-g(x_0)<2\varepsilon$. Тем более $0\le g(x_0+0)-g(x_0)<2\varepsilon$. В силу произвольности ε

$g(x_0+0)=g(x_0)$. Аналогично $g(x_0-0)=g(x_0)$. Следовательно, $g(x)$ непрерывна в т. x_0. Так же получаем непрерывность $g(x)$ в т. $x=a$ справа, в т. $x=b$ слева ◄.

15^0. Если $f(x)\in V[a;b]$ и непрерывна, то $f(x)=g(x)-h(x)$ непрерывна и неубывающая (которые можно при необходимости считать положительными или строго возрастающими).

► Вытекает из 14^0 ◄.

16^0. $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)$.

► $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)$ при добавлении новых точек разбиение не убывает:

$$\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=\left|f(x_{k+1})-f\left(x_k^*\right)+f\left(x_k^*\right)-f(x_k)\right|\le$$

$$\le\left|f(x_{k+1})-f\left(x_k^*\right)\right|+\left|f\left(x_k^*\right)-f(x_k)\right|.$$

При $x_k\le x_k^*\le x_{k+1}$. С другой стороны, это увеличение $\le 2\omega(f)$ на $[x_k;x_{k+1}]$.

Возьмем $\alpha<\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ и $\left(T^*\right): a=x_0^*<x_1^0<\ldots<x_m^*=b$ такое, что $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f;T^*\right)>\alpha$.

Выберем $\delta>0$, так, что $\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|<\dfrac{\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f;T^*\right)-\alpha}{4m}$ при $\left|x''-x'\right|<\delta$. Это возможно, т. к. $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$.

Покажем, что при $\lambda(T)<\delta$ будет $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)>\alpha$. Имея (T^*), составим по имеющемуся такому (T) новое разбиение (T^{**}), получающееся как $(T)\cup(T^*)$.

Тогда $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^{**})\geq\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^*)$. С другой стороны, (T^{**}) получается из (T) добавлением не более чем m точек (по одной).

Каждый раз вариация по разбиению увеличивается меньше, чем на $\dfrac{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^*)-\alpha}{2m}$.

Тогда $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^{**})-\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)<\dfrac{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^*)-\alpha}{2}$.

Получаем:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)>\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^{**})-\frac{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^*)-\alpha}{2}\geq\frac{\alpha+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T^*)}{2}>\alpha.$$

Значит, при $\lambda(T)<\delta$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)>\alpha$, также $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)\leq\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$, это и означает, что $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f;T)$ ◄.

Решение типовых задач к главе 3

Задача 1

Доказать непрерывность функции $f(x)=3x+5$ в точке $x_0=1$ по Коши, Гайне и Бэру.

Решение

1) По Коши. Зададим произвольно $\varepsilon>0$.

Рассмотрим условие $\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$. (*)

Имеем: $\left|(3x+5)-\left(3*1+5\right)\right|=\left|3x-3\right|=3\left|x-1\right|<\varepsilon$. Если $\left|x-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, то (*) выполнена. Положим $\delta\left(\varepsilon;x_0\right)=\dfrac{\varepsilon}{3}$, т. е. $\left|x-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, тогда $\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$ и условие $\left(C\right)$ выполнено.

2) По Гайне. Пусть $x_n\to1$ при $n\to+\infty$. Зададим $\forall\varepsilon>0$. Рассмотрим условие $\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$. Имеем: $\left|\left(3x_n+5\right)-\left(3*1+5\right)\right|=3\left|x_n-1\right|<\varepsilon$. Поскольку $x_n\to1$, то $\forall\delta>0\ n_0\left(\delta\right):n>n_0\Rightarrow\left|x_n-x_0\right|=\left|x_n-1\right|<\delta$. Поскольку $\left|x_n-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ влечет $\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$, то положим $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ и по нему найдем $n_0(\delta)$. При $n>n_0$ будет $\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$, т. е. $f\left(x_n\right)\underset{n\to+\infty}{\to}f\left(x_0\right)$ и условие (H) выполнено.

3) По Бэру. Пусть $x\in V_\delta\left(x_0\right)$, т. е. $\left|x-1\right|<\delta\Rightarrow1-\delta<x<1+\delta$. Поскольку $f\left(x\right)$ возрастает, то при таких x будет: $f\left(1-\delta\right)<f\left(x\right)<f(1+\delta)$, т. е. $3\left(1-\delta\right)+5<3x+5<3\left(1+\delta\right)+5$, $8-3\delta<f\left(x\right)<8+3\delta$.

Колебание функции $\omega(f;1;\delta)\le 6\delta$. Колебание в точке: $\omega(f;1)=\inf\limits_{\delta>0}\{6\delta\}=0$ и условие (B) выполнено.

Задача 2

Найти множество $A_{\frac{1}{5}}$ для функции Дирихле на $[0,1]$.

Решение

В любой окрестности $V(f;x_0,\delta)$, $x_0\in[0,1]$ колебание функции Дирихле равно $1-0=1$. Поэтому $\forall\varepsilon>0$, $A_\varepsilon=[0,1]$. В частности, $A_{\frac{1}{5}}=[0,1]$.

Задача 3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2$ на множестве $F=[1,2]\cup\{5\}$.

Решение

F замкнуто, поэтому указанные значения существуют. $f(x)$ возрастает, поэтому $\underline{m}=f(1)=1$, $\overline{m}=f(5)=25$.

Задача 4

На множестве $X=[0,+\infty)$ задана функциональная последовательность $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+1+5n}$. Найти предельную функцию, если она существует, и выяснить характер сходимости.

Решение

$x\in X$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1+5n}=0$, так что $f_0(x)\equiv 0$.

Рассмотрим неравенство $\left|f_n(x)-f_0(x)\right|<\varepsilon$. Имеем: $\left|\dfrac{1}{x^2+5n+1}-0\right|=\dfrac{1}{x^2+5n+1}<\dfrac{1}{5n}$ $\forall x\in X$. Если $\dfrac{1}{5n}<\varepsilon$, то

$\left|f_n(x)-f_0(x)\right|<\varepsilon \quad \forall x\in X$. Таким образом, можно выбрать $n_0=\left[\frac{1}{5\varepsilon}\right]+1$ зависящим только от ε. Следовательно, сходимость равномерная.

Задача 5

Найти полную вариацию функций

$$f(x)=\begin{cases}7, & x=0,\\ 3x+1, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases} \qquad \boldsymbol{на}\ [0,1].$$

Решение

Выполним произвольное (T) – разбиение:

$[0,1]:\ 0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$.

Рассмотрим:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f,T)=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=$$

$$=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|+\left|f(x_3)-f(x_2)\right|+\ldots$$

$$+\left|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\right|+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=$$

$$=\left|-7+(3x_1+1)\right|+\left|(3x_2+1)-(3x_1+1)\right|+\left|(3x_3+1)-(3x_2+1)\right|+\ldots$$

$$+\left|(3x_{n-1}+1)-(3x_{n-2}+1)\right|+\left|0-(3x_{n-1}+1)\right|=$$

$$=7-3x_1-1+3x_2-3x_1+3x_3-3x_2+\ldots+3x_{n-1}-3x_{n-2}+3x_{n-1}+1=$$

$=7-6x_1+6x_{n-1}$. Это значение будет увеличиваться при $x_1\to+0,\ x_{n-1}\to 1-0$. Тогда $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=\boldsymbol{sup}(7-6x_1+6x_{n-1})=13$.

Задачи к главе 3

1) Доказать непрерывность функции $f(x)=x^2$ в точке $x_0=1$ по Коши, Гайне и Бэру.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2-5x+7$ на множестве $X=[0,1]\cup[4,5]\cup\{7\}$.

3) Какова мощность множества точек разрыва функции $Di(x)$?

4) Построить функцию, непрерывную в т. $x_0=0$, и разрывную в остальных точках прямой.

5) Построить функцию, непрерывную в точках $x=m$, $m\in\mathbb{Z}$, и разрывную в остальных точках прямой.

6) Построить какую-либо функцию 1-го класса Бэра.

7) Построить какую-либо функцию 2-го класса Бэра.

8) Найти полную вариацию функции

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\in[0,1), \\ 5, & x=1, \\ -x+3, & x\in(1,2]. \end{cases}$$

9) Установить равномерность или неравномерность сходимости функциональной последовательности $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$ на множестве $X=[0,1]$.

РАЗДЕЛ 2. МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Глава 1. Измеримые множества

§ 1. Движения в пространстве R^n

Определение

Движением в пространстве R^n называется преобразование $\varphi : R^n \to R^n$, сохраняющее расстояние между точками: $\forall\, A, B \in R^n \Rightarrow \rho(A, B) = \rho(\varphi(A), \varphi(B))$.

Имеется в виду эвклидова метрика. Таким образом, движение есть изометрия. Движения имеют очень важное свойство – взаимной однозначности (инъективность).

Теорема 1

Движение есть инъективная функция.

Доказательство

Обозначим $\varphi(A) = A', \varphi(B) = B'$. Если $A \neq B$, то $\rho(A, B) > 0 \Rightarrow \rho(A', B') = \rho(A, B) > 0 \Rightarrow A' \neq B'$.

Теорема доказана.

Примерами движения в пространстве R^1 (прямая), а нам нужен, в первую очередь, именно этот случай, будут:

1. Параллельный перенос (сдвиг), $\varphi(x) = x + d$.

2. Зеркальное отображение (симметрия относительно т. О), $\varphi(x) = -x$.

Это и есть основа всех движений в R.

Теорема 2

Каждое движение в R есть либо сдвиг, либо зеркальное отображение, либо их суперпозиция $\varphi(x) = \pm x + d$.

Доказательство

Обозначим $\varphi(0)=d$. Тогда

$\forall x\in R\Rightarrow\left|\varphi(x)-d\right|=|x|\Rightarrow\varphi(x)=\pm x+d$.

Теорема доказана.

Теорема 3 (О свойствах движения)

При движениях в R выполняются условия:

1. Интервал (a,b) переходит в интервал (a',b'), где $a'=\varphi(a),b'=\varphi(b)$.

2. Ограниченные множества переходят в ограниченные.

3. Замкнутые множества переходят в замкнутые.

4. Открытые множества переходят в открытые.

Эти свойства очевидны из формулы движения $\varphi(x)=\pm x+d$.

Теорема 4

Функция, обратная к движению, есть движение.

Действительно, если $y=\pm x+d$, то $x=\pm y\mp d$.

Определение

Если множества A,B получаются друг из друга движением, то они называются конгруэнтными между собой.

Запись $A\eqsim B$ (есть и другие обозначения).

Очевидны свойства конгруэнтности:

1°. Рефлексивность: $\forall A\subset R\left[A\eqsim A\right]$.

2°. Симметричность: $\forall A,B\subset R\left[A\eqsim B\Rightarrow B\eqsim A\right]$.

3°. Транзитивность: $\forall A,B,C\subset R\left[A\eqsim B\wedge B\eqsim C\Rightarrow A\eqsim C\right]$.

Отсюда получаем, что конгруэнтность множеств есть эквивалентность на булеане $\beta(R)$.

Движения имеют большое значение в теории меры. Перейдем теперь к постановке основных задач.

§ 2. Проблемы построения меры

Понятие меры множеств есть обобщение геометрических понятий длины отрезка, площади фигуры на плоскости, площади поверхности в пространстве, объема тела в пространстве, даже гиперобъема гипертела в R^n. Понятие меры множества необходимо распространить на широкий класс множеств. Скажем, в геометрии измеряют длины отрезков, а о «длине» интервала как-то не принято говорить. Необходимо каждому ограниченному множеству $X \subset R^n$ (а далее, и более общих множеств) поставить в соответствие некоторое вещественное число $\mu\left(X\right)$ – его меру. При этом, естественно, требуется выполнение некоторых аксиом. В зависимости от «жесткости» этой системы аксиом различают два случая, две задачи.

I. «Трудная» задача теории меры.

М.1. Неотрицательность. $\forall X \subset R^n$, X – ограничено $\Rightarrow \mu\left(X\right) \geq 0$.

М.2. Нормированность. $E = \left[0;1\right]^n \Rightarrow \mu\left(E\right) = 1$.

М.3. Инвариантность. $X \eqsim Y \Rightarrow \mu\left(X\right) = \mu\left(Y\right)$.

М.4. Полная аддитивность

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \overline{\overline{I}} \leq IC_0, i \neq j \Rightarrow X_i \bigcap X_j = \varnothing$$

влечет $\sum_{i \in I} \mu\left(X_i\right) = \mu\left(X\right)$.

Теорема 1

«Трудная» задача теории меры неразрешима даже в пространстве R^1.

Эта теорема вытекает из существования ограниченных неизмеримых множеств в R. Существует дизъюнктное семейство $\{A_k\}_{k\in N_0}$, что $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subset\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$, $A_k\approx A_i$. (Далее этот пример мы рассмотрим подробнее). В случае разрешимости «трудной» задачи теории меры было бы $\mu\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\le\sum_{k=0}^{\infty}\mu A_k\le\mu\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\approx[0;1]\Rightarrow\mu\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]=1$. Множество $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$ ограничено. Обозначим $\mu A_k=\sigma$. Получаем $1\le\sigma+\sigma+\sigma+...<+\infty$. А это невозможно. В связи с этим рассматривается более легкая проблема.

II. «Легкая» задача теории меры.

Условие М4 полной (не более чем счетной) аддитивности заменяется условием конечной аддитивности.

М 4*. $X=\bigcup_{i=1}^{m}X_i,\ i\ne j\Rightarrow X_i\cap X_j=\varnothing$.

Тогда $\mu(X)=\sum_{i=1}^{m}\mu(X_i)$.

Теорема 2 (С. Банах)

В пространствах R^1 и R^2 (прямая и плоскость) «легкая» задача теории меры разрешима, но не однозначно.

Теорема 3 (С. Хаусдорф)

В пространстве R^n при $n\ge3$ «легкая» задача теории меры неразрешима.

Примем эти теоремы без доказательства.

Трудность $R^n,\ n\ge3$ состоит в том, что группа движений в $R^n,\ n\ge3$ намного обширней, чем в R^1 и R^2, и получить инвариант этой группы (аксиома М 3) намного труднее.

§ 3. Мера Жордана

Проблема построения теории меры важна и сама по себе, и в теоретическом, и в практическом плане. Но особенно она важна в теории интеграла. Необходимость обобщения интеграла Римана и заставила математиков заниматься теорией меры (хотя не только это). Французский математик Камиль Эдмон Мари Жордан, Jordan (1838–1922) разработал теорию меры множеств, обобщающую геометрические понятия. Изложим основные положения этой теории в обзорном порядке.

Пусть $X \subset R,\ X \neq \varnothing,\ X$ –ограничено.

Тогда $\exists a,b \in R : X \subset [a,b]$. Выберем $a,b \in Z$, это всегда возможно. Пусть $b-a=k \in N$. Разобьем $[a,b]$ на k равных частей. Это сегменты ранга 1. Относительно множества X они есть двух типов.

1. Заполненные сегменты. Состоят исключительно из точек из X. Обозначим сумму их длин через l_1.

2. Включающие сегменты. Имеют хотя бы одну точку из X. Их сумму длин обозначим L_1.

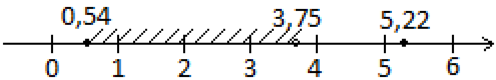
Очевидно, $l_1 \leq L_1$. Разделим каждый сегмент ранга 1 на S равных частей. Например, $S=10$. Определим заполненные и включающие сегменты ранга 2. Вычислим l_2 и L_2. Продолжим процесс. Получим две последовательности неотрицательных чисел: $(l_n)_{n\in N}$, $(L_n)_{n\in N}$. Они имеют названия: нижняя и верхняя последовательности Жордана для X. Очевидно, они монотонны: $(l_n)_{n\in N}$ неубывающая, $(L_n)_{n\in N}$ невозрастающая. $(l_n)_{n\in N}$ ограничена сверху, например, числом $b-a$; $(L_n)_{n\in N}$ ограничена снизу, например, нулем. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} l_n = l_0 \in R,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} L_n = L_0 \in R$. l_0 называется внутренней или нижней мерой Жордана множества X и обозначается $mes_* X$;

L_0 – внешняя или верхняя мера, $mes^* X$. Итак, поскольку $l_n \le L_n \forall n \in N$, то $mes_* X = mes^* X$.

Если $mes_* X \le mes^* X$, то X называется измеримым по Жордану, а общие значения его внутренней и внешней мер называются мерой Жордана множества X. Запись: $mesX$.

Примеры

1. $X = [0,54;3,75) \cup \{5,22\}$.



Здесь $[a,b] = [0,6], k = 6$. Сегменты 1-го ранга заполненные: $[1,2]$ и $[2,3]$, $l_1 = 1+1 = 2$. Включающие сегменты 1-го ранга: $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4],[5,6]$, $L_2 = 5$. Примем $S = 10$.

Определяем сегменты 2-го ранга (до десятых). Заполненные: $[0,6;3,7]$ – в сумме, $l_2 = 3,1$. Включающие (в сумме): $[0,5;3,75] \cup [5,2;5,3]$ $L_2 = 3,25 + 0,1 = 3,26$.

Переходим к сегментам ранга 3. Заполненные: $[0,540;3,749]$, $l_3 = 3,209$. Включающие: $[0,540;3,750] \cup [5,220;5,221]$, $L_3 = 3,21 + 0,001 = 3,211$.

Продолжим процесс. Сегменты ранга n: $\left[0,54;3,75 - 10^{-n}\right]$ – заполненные, $l_n = 3,21 - 10^{-n}$;

$[0,54;3,750] \cup \left[5,22 - 10^{-n};5,22 + 10^{-n}\right]$ – включающие,

$L_n = 3,21 + 2 \times 10^{-n}$.

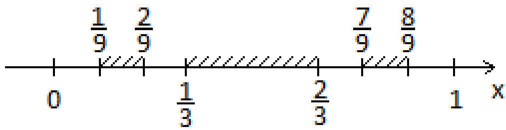
$mes_* X = \lim\limits_{n \to \infty}\left(3,21 - 10^{-n}\right) = 3,21$,

$mes^* X = \lim\limits_{n \to \infty}\left(3,21 + 2 \times 10^{-n}\right) = 3,21$.

Итак, X измеримо по Жордану, $mesX = 3,21$.

2. Канторово множество F_0.

Сегментом ранга 1 есть $[0,1]$. Заполненных сегментов ранга 1 нет, включающих – $[0,1]$ $l_1=0,\ L_1=1$. Возьмем $S=3$.



Ранга 2: заполненных нет, включающих – 2. $l_2=0,\ L_2=\dfrac{2}{3}$.

Продолжим для $S=3$.

Ранга 3: $l_3=0,\ L_3=\dfrac{4}{9}:\left[0,\dfrac{1}{9}\right],\left[\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{3}\right],\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{9}\right],\left[\dfrac{8}{9},1\right]$.

и т. д. $l_n=0,\ L_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Тогда $mes_*F_0=0,\ mes^*F_0=0$. F_0 измеримо по Жордану. $mesF_0=0$.

3. $Q_{[0,1]}$. Поскольку любой промежуток $[a,b]$ сколь угодно малый, содержит как рациональные, так и иррациональные числа, то $l_n=0,\ L_n=1$. С этого следует, что $mes_*Q_{[0,1]}=0,\ mes^*Q_{[0,1]}=1$ и это множество неизмеримо по Жордану.

4. Аналогично для множества иррациональных чисел отрезка $[0,1]$: $I_{[0,1]}:mes_*I_{[0,1]}=0,\ \ mes^*I_{[0,1]}=1$.

$I_{[0,1]}$ неизмеримо по Жордану.

Замечание

Обозначим A_n – включающие сегменты, B_n – заполненные, ранга n. Множество $A_n \setminus B_n$ состоит из промежутков, содержащих F_rX. Общая длина промежутов, составляющих

$A_n \setminus B_n$, равна $L_n - l_n$. При $n \to +\infty$, $L_n - l_n \to mes^* F_r X$. Итак, X измеримо тогда и только тогда, когда $mes^* F_r X = 0$.

Отметим без доказательства простейшие свойства меры Жордана:

1°. Если X, Y измеримы, $X \subset Y$, то $mesX \le mesY$.

2°. Если X, Y измеримы, то также измеримы $X \bigcup Y,\ X \bigcap Y,\ X \setminus Y$.

3°. Если X, Y измеримы, $X \bigcap Y = \varnothing$, то $mes\left(X \bigcup Y\right) = mesX + mesY$.

4°. Конечная аддитивность меры Жордана. Если $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i,\ i \ne j \Rightarrow X_i \bigcap X_j = \varnothing,\ X_i$ – измеримы, то X измеримо и $mesX = \sum\limits_{i=1}^{n} mesX_i$.

5°. Если X, Y измеримы, $X \subset Y$, то $mes\left(Y \setminus X\right) = mesY - mesX$.

Построение меры Жордана в $R^n, n > 1$ аналогично R. Рассматриваются заполненные и включающие n-мерные прямоугольники $\prod\limits_{i=1}^{n}\left[a_i, b_i\right]$. Измеримые по Жордану множества на прямой называются спрямляемыми, на плоскости – квадрируемыми, в пространстве – кубируемыми.

Этим мы и ограничимся в рассмотрении меры Жордана и перейдем к более совершенной мере – мере Лебега.

§ 4. Построение меры Лебега

Пусть имеется некоторое решение «легкой» задачи теории меры на прямой или плоскости. Если $A \subset B$, то $B = A \bigcup \left(B \setminus A\right),\ A \bigcap \left(B \setminus A\right) = \varnothing$. Следовательно, должно быть

$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)$. Итак, $A\subset B\Rightarrow\mu(A)\le\mu(B)$ – принцип монотонности.

Отсюда следует, что $\forall a,\, b\in R, (\{a\})=0$, т. к. на $[0,1]$ имеется континуум множеств, конгруэнтных $\{a\}$. Далее, по М 4*, мера конечного множества равна нулю.

Следовательно, $(a,b)=[a,b)=[a,b)=[a,b]$.

Поскольку $[0,1]=\left[0,\frac{1}{n}\right)\cup\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\cup\ldots\cup\left[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}\right)\cup\left[\frac{n-1}{n},1\right]$, то $\left[0,\frac{1}{n}\right)=\left[0,\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{n}$. Далее это дает? что $[a,b]=b-a$ при $b-a\in Q\Rightarrow(a,b)=b-a$.

По принципу монотонности $[a,b]=b-a\,\forall a,\, b\in R,\, a\le b$.

Наиболее естественным решением «легкой» задачи теории меры на прямой будет такое, что $\mu G, G$ – открытое непустое ограниченное множество, есть сумма мер его составляющих интервалов. Меру замкнутых множеств можно определить исходя из их структуры через их дополнения – открытые множества. Произвольные ограниченные множества можно «приближать» «изнутри» и «снаружи» замкнутыми и открытыми множествами. Такой способ построения меры и реализовал французский математик Анри Луи Лебег, Lebeque (1875–1941). Перейдем к изложению этой теории.

§ 5. Мера открытых множеств

Определение

Мерой интервала (a,b) называется число $m(a,b)=b-a$. Мерой $\varnothing$ называется 0.

Пусть G открыто. Если G неограничено, то принимаем $mG::=+\infty$. Пусть $G\ne\varnothing$ ограничено. Известно, что G есть не более чем счетное объединение дизъюнктного семейства своих составляющих интервалов.

$G = \bigcup_{i \in I} (a_i; b_i)$, $\overline{\overline{I}} \le IC_0$, $i \ne j \Rightarrow (a_i; b_i) \cap (a_j; b_j) = \varnothing$. Если I конечно, то число $\sum_{i=1}^{n} m(a_i, b_i)$ конечно.

Естественно, в этом случае считать мерой G это число.

Хотелось бы распространить такой подход и на счетный случай. Но здесь уже имеем ряд, и надо быть уверенным, что он сходится.

Теорема 1

Если $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, (a_i, b_i) – составляющие интервалы G, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$ сходится.

Доказательство

Ряд знакоположительный, частичные суммы S_n возрастают, G ограничено, $G \subset (a_0; b_0)$. По свойству монотонности, $S_n < b_0 - a_0$. S_n ограничены сверху, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n < +\infty$.

Теорема доказана.

Итак, мы можем дать следующее:

Определение

Мерой непустого ограниченного открытого множества называется сумма мер его составляющих интервалов $mG = \sum_i m(a_i, b_i) = \sum_i (b_i - a_i)$.

Пример. Канторово множество G_0.

Оно открыто и ограниченно.

$$G_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \ldots, \quad mG_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = 1.$$

Свойства меры открытых ограниченных множеств:

1°. Монотонность: $G_1 \subset G_2 \Rightarrow mG_1 \subset mG_2$.

► Следует из того, что каждый составляющий интервал G_1 входит в один и только один интервал G_2 ◄.

2°. Неотрицательность: $mG \geq 0$.

► Очевидно ◄.

3°. $mG = \inf\limits_{G_i \supset G} mG_i$.

► Из 1° ◄.

4°. Полная (счетная) аддитивность.

► $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$, $i \neq j \Rightarrow G_i \bigcap G_j = \varnothing$. Тогда $mG = \sum\limits_{i \in I} mG_i$.

Действительно, обозначим $\delta_i^{(k)}$ как составляющие интервалы множества G_k. Все $\delta_i^{(k)} \subset G$. Покажем, что их концы не входят в G. Допустим противное. Пусть, например, правый конец $\delta_i^{(k)}$ входит в G. Тогда это число $\beta \in G_{K_0}$ где $K_0 \neq K$.

G_{K_0} открыто $\Rightarrow \beta \subset (\alpha, \gamma) \subset G_{K_0} \Rightarrow \beta \in \delta_j^{(k_0)} \Rightarrow G_k \bigcap G_k \neq \varnothing$, что невозможно по условию ◄.

5°. Если $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$, $\overline{\overline{I}} \leq IC_0$, то $mG \leq \sum\limits_{i \in I} mG_i$.

► Это свойство, очевидно, выполнено для дизъюнктного семейства множеств, а для недизъюнктного – по монотонности меры ◄.

Перейдем к другому «хорошему» классу ограниченных множеств – замкнутых.

§ 6. Мера замкнутых множеств

Пусть множество $F \neq \varnothing$ замкнуто и ограничено, $[a_0, b_0]$ – наименьший сегмент, содержащий F. Обозначим $G = [a_0; b_0] \setminus F$. Тогда G открыто и ограничено.

Определение

Мерой множества F называется число $mF = (b_0 - a_0) - mG$.

Примеры

1) $F = [a,b],\ a_0 = a,\ b_0 = b,\ G = \varnothing.\ m = [a;b] = b - a - 0 = b - a$;

2) $F = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i;b_i],\ i \neq j \Rightarrow [a_i;b_i] \cap [a_j;b_j] = \varnothing$;

Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Тогда $a_{k+1} > b_k$. Следовательно, наименьший сегмент, содержащий F, будет $[a_1;b_n]$.

$G = (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup ... \cup (b_{n-1}, a_n)$.

$mF = b_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n} m[a,b]$.

3) $F = F_0$ – канторово совершенное множество.

$F_0 = [0;1] \setminus G_0$. $mF_0 = (1-0) - mG_0 = 1 - 1 = 0$.

Интересно сопоставить этот результат с тем, что $\overline{\overline{F_0}} = c$.

Свойства меры ограниченных замкнутых множеств:

1°. $mF \geq 0$.

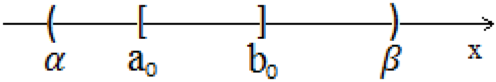
► Поскольку $G \subset (a_0, b_0)$, то $mG \leq b_0 - a_0$. Тогда $mF = (b_0 - a_0) - mG \geq 0$ ◄.

2°. Если $F \subset (\alpha, \beta)$, $G^* = (\alpha, \beta) \setminus F$, то $mF = m(\alpha;\beta) - mG^*$.

► Действительно, $G^* = (\alpha, \beta) \cap_{c_R} F$ – открыто $\Rightarrow$ имеет меру.

Как всегда, $[a_0;b_0]$ означает наименьший сегмент, содержащий F. Тогда $(\alpha;\beta) \setminus F = ((\alpha;\beta) \setminus [a_0;b_0]) \cup G$, $G = [a_0, b_0] | F$, т. е. $G^* = ((\alpha;\beta) \setminus [a_0;b_0]) \cup G$. Эти два множества открыты и не пересекаются. По свойству аддитивности меры $mG^* = m\left(\left(\alpha;\beta\right)\setminus F_0\right) + mG$, где $F_0 = \left[a_0, b_0\right]$.

Проиллюстрируем наглядно эту ситуацию.



Очевидно, $\left(\alpha;\beta\right)\setminus F_0 = \left(\alpha, a_0\right)\cup\left(b_0, \beta\right)$.

Значит, $m\left(\left(\alpha,\beta\right) | F_0\right) = \left(a_0 - \alpha\right) + \left(\beta - b_0\right) = \left(\beta - \alpha\right) - \left(b_0 - a_0\right)$.

Тогда

$mG^* = \left(\beta-\alpha\right) - \left(b_0 - a_0\right) + mG = \left(\beta - \alpha\right) - \left(\left(b_0 - a_0\right) - mG\right) =$
$= \left(\beta - \alpha\right) = mG^*$, и поскольку $mF = \left(\beta - \alpha\right) - mG^*$ ◄.

3°. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow mF_1 \le mF_2$.

► Пусть $\left(\alpha;\beta\right) \supset F_2$. Тогда $\left(\alpha;\beta\right)\setminus F_1 \supset \left(\alpha;\beta\right)\setminus F_2$. Эти множества открыты, первое имеет меру не меньше, чем второе, и остается применить 2° ◄.

4°. $F \subset G \Rightarrow mF \le mG$.

► Пусть $\left(\alpha;\beta\right) \supset G$. $\left(\alpha;\beta\right) = G \cup \left(\left(\alpha;\beta\right)\setminus F\right)$.

Тогда $m\left(\alpha;\beta\right) \le mG + m\left(\left(\alpha;\beta\right)\setminus F\right)$ и 2° ◄.

5°. $mG = \sup\limits_{F_i \subset G} mF_i$.

► По 4° mG есть верхняя грань $\left\{mF_i\right\}$. Остается показать, что $\forall\varepsilon > 0 \exists F_{i_0} \subset G : mF_{i_0} > mG - \varepsilon$.

Известно, что $mG = \sum\limits_i m\left(a_i; b_i\right)$, $\left(a_i; b_i\right)$ – составляющие интервалы множества G.

Выберем $n \in N : \sum_{i=1}^{n} m\left(a_i; b_i\right) > mG - \frac{\varepsilon}{2}$. Для $i = 1, 2, ..., n$ возьмем $\left[\gamma_i; \delta_i\right] \subset \left(a_i, b_i\right)$ так, чтобы $m\left[y_i; \delta_i\right] > m\left(a_i; b_i\right) - \frac{\varepsilon}{2n}$. Это возможно.

Положим $F_{i_0} = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\gamma_i; \delta_i\right]$, оно замкнуто. Также $F_{i_0} \subset G$. Вычислим mF_{i_0}:

$$mF_{i_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_i - \gamma_i\right) > \sum_{i=1}^{n} m\left(a_i; b_i\right) - n\frac{\varepsilon}{2n} > mG - \varepsilon .$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, $mG = \sup\limits_{F_i \subset G} mF_i$ ◄.

6°. $mF = \inf\limits_{G_i \supset F} mG_i$.

► Возьмем $(\alpha; \beta) \supset F$, $G^* = (\alpha; \beta) \setminus F$ – открыто. По 5° $\forall \varepsilon > 0$, найдем $F_\varepsilon \subset G^* : mF_\varepsilon > mG^* - \varepsilon$. Обозначим $G_0 = (\alpha; \beta) \setminus F_\varepsilon$. G_0 – открыто, $G_0 \supset F$.

$mG_0 = m(\alpha; \beta) - mF_\varepsilon < m(\alpha; \beta) - m\big((\alpha; \beta) \setminus F\big) + \varepsilon = mF + \varepsilon$ ◄.

7°. $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing$. Тогда $mF = \sum_{i=1}^{n} mF_i$.

► Достаточно рассмотреть $F = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. $\forall \varepsilon > 0$, возьмем G_1, G_2 такие, что $mG_1 < mF_1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $mG_2 < mF_2 + \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $C = G_1 \cup G_2$. $G \supset F$.

$mF \le mG \le mG_1 + mG_2 < mF_1 + mF_2 + \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, $mF \le mF_1 + mF_2$.

Поскольку F_1, F_2 замкнуты и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то существуют G^* и G^{**} открытые, такие, что $G^* \supset F_1$, $G^{**} \supset F_2$, $G^* \cap G^{**} = \varnothing$.

Найдем $G_0 \supset F : mG_0 \subset mF + \varepsilon$. Тогда $G_0 \bigcap G^{**}$ открыты, ограничены и содержат F_1, F_2. Соответственно они не пересекаются. С этого следует, что $mF_1 + mF_2 \le m\left(G_0 \bigcap G^*\right) +$ $+ m\left(G_0 \bigcap G^{**}\right) = m\left(\left(G_0 \bigcap G^*\right) \bigcup \left(G_0 \bigcap G^{**}\right)\right)$.

Поскольку $\left(G_0 \bigcap G^*\right) \bigcup \left(G_0 \bigcap G^{**}\right) \subset G$, то $mF_1 + mF_2 \le mG < mF + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $mF_1 + mF_2 \le mG < mF$. Окончательно, $mF = mF_1 + mF_2$ ◄.

§ 7. Внутренняя и внешняя меры

Пусть множество $A \subset R$ ограничено. Меру мы пока ввели только для открытых и замкнутых множеств. Способ введения меры произвольного множества указывает 5° и 6° предыдущего параграфа. Это способ приближения «вписанными» и «описанными» замкнутыми и открытыми множествами, мера которых уже определена.

Определение

Внутренней, или нижней, мерой ограниченного множества A называется число $m_* A = \sup\limits_{F_i \subset A} mF_i$. Внешней, или верхней, мерой называется число $m^* A = \inf\limits_{G_i \supset A} mG_i$.

По результатам предыдущих исследований для ограниченных открытых и замкнутых множеств имеем: $m_* G = m^* G = mG$, $m_* F = m^* F = mF$.

Свойства внутренней и внешней мер:

1°. $m_* A \le m^* A$.

► Пусть $F \subset A,\ G \supset A$. Тогда $F \subset G$ и $mF \le mG$. Следовательно, в силу произвольности F и G $\{mF : F \subset A\}$ ограничено сверху числом mG. А тогда $\sup_{F \subset A} mF = m_* A \le mG$ $\{mF : F \subset A\}$. Множество $\{mG : G \subset A\}$ ограничено снизу числом $m_* A$. А тогда $\inf\limits_{G \supset A} mG = m^* A \ge m_* A$ ◄.

2°. Если $A \subset B$, то $m_* A \le m_* B,\ m^* A \le m^* B$.

► Действительно, $F \subset A \Rightarrow F \subset B$.

Тогда $\{mF : F \subset A\} \subset \{mF : F \subset B\}$.

Значит, $\sup\limits_{F \subset A}\{mF\} \le \sup\limits_{F \subset B}\{mF\}$, т. е. $m^* A \le m^* B$.

Для внутренней меры аналогично ◄.

3°. $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i,\ \overline{\overline{I}} \le IC_0$, тогда $m^* A \le \sum\limits_{i \in I} m^* A_i$.

► Если $\sum\limits_{i} m^* A_i = +\infty$, то очевидно.

Пусть $\sum_i m^* A_i \subset +\infty\ \forall \varepsilon > 0$.

Найдем $G_i : G_i \supset A_i,\ mG_i < m^* A_i + \dfrac{\varepsilon}{2i},\ i = 1, 2, 3...$

Пусть Δ – интервал, содержащий множество A.

Тогда $A \subset \Delta \bigcap \left(\bigcup G_i \right)$, отсюда $m^* A \le m\left(\Delta \bigcap \left(\bigcup\limits_i G_i \right) \right) =$

$$= m\left(\bigcup_i \left(\Delta \bigcap G_i \right) \right) \le \sum_i mG_i \le \sum_i m^* A_i + \varepsilon .$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ требуемое неравенство выполняется ◄.

4°. $A=\bigcup_{i\in I} A_i$, $\overline{\overline{I}} \le IC_0$, $i\ne j \Rightarrow A_i \bigcap A_j = \varnothing$.

Тогда $m_* A \ge \sum_i m_* A_i$.

► Действительно, $\forall \varepsilon > 0$, $i=1,2,...,n$, выберем $F_i : F_i \subset A_i$, $mF_i > m_* A_i - \dfrac{\varepsilon}{n}$. Поскольку $F_i \bigcap F_j = \varnothing$, $i \ne j$, то $m_* A \ge m\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} F_i > \sum_{i=1}^{n} m_* A_i - \varepsilon$.

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, $m_* A \ge \sum_i m_* A_k$.

Если $\overline{\overline{I}} = IC_0$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем: $\sum_i m_* A_i \le m_* A$ ◄.

Замечание

Это свойство не выполняется для недизъюнктного семейства множеств.

Пример

$A_1 = [0;1]$, $A_2 = [0;1]$. $A_1 \bigcup A_2 = A$. $m_* A = 1$, $m_* A_1 + m_* A_2 = 1+1 = 2$.

5°. Пусть интервал $\Delta \supset A$. Тогда $m^* A + m_*\left(c_\Delta A\right) = m\Delta$, $c_\Delta A = B$.

► Возьмем $F \subset B : mF > m_* B - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – произвольно. Обозначим $\widetilde{G} = c_\Delta F$, это открытое множество, оно содержит A.

Тогда $m^* A \le m\widetilde{G} = m\Delta - mF < m\Delta - m_* B - \varepsilon$.

Из произвольности ε, $m^* A + m_* B \le m\Delta$.

Установим обратное неравенство. $\forall \varepsilon > 0$ найдем $G_0 \supset A$ открытое, такое, что $mG_0 < m^* A + \dfrac{\varepsilon}{3}$. Пусть $\Delta = (\alpha;\beta)$. Возьмем интервал $(a;b) \subset (\alpha;\beta)$, такой, что $\alpha < a < \alpha + \dfrac{\varepsilon}{3}$. Множество $F_1 = c_\Delta G_1$ замкнуто. $F_1 = c_\Delta A$, тогда $m_*(c_\Delta a) \geq\geq mF_1 = = m\Delta - mG_1 > m\Delta - m^* A - \varepsilon$.

Ввиду произвольности ε имеем обратное неравенство, а значит, и нужное равенство ◄.

Следствие

$$m^*(c_\Delta A) - m_*(c_\Delta A) = m^* A - m_* A.$$

§ 8. Измеримость множеств

Определение

Множество A называется измеримым, если $m^* A - m_* A$. Их общее значение называется мерой множества A и обозначается mA.

Таким образом, ограниченные открытые и закрытые множества измеримы, а их меры равны ранее введенным. Из следствия §7 вытекает, что если интервал $\Delta \supset A$, то множества A и $c_\Delta A$ одновременно измеримы или нет.

Свойства измеримых множеств:

1°. $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, $\overline{\overline{I}} \leq IC_0$, $i \neq j \Rightarrow A_i \bigcap A_j = \varnothing$, A_i измеримы. Тогда A измеримо.

► Действительно,

$$\sum_i mA_i = \sum_i m_* A_i \leq m_* A \leq m^* A \leq \sum_i m^* A_i = \sum_i mA \Rightarrow m_* A = m^* A \text{ ◄.}$$

2°. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ измеримы, то $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ измеримо.

► Действительно, $\forall\varepsilon>0,\ \forall i=1,2,...,n$ возьмем ограниченные $F_i\subset A_i\subset G_i$, такие, что $mG_1-mF_i<\dfrac{\varepsilon}{n}$. Обозначим $F=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i,\quad G=\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i$.

Тогда $F\subset A\subset G$, отсюда $mF\le m_*A\le m^*A\le mG$. Множество $G\setminus F$ открыто и ограничено, значит, измеримо. Также $G=F\bigcup\left(G\setminus F\right)$, причем $F\bigcap G\setminus F=\varnothing$.

Тогда $m\left(G\setminus F\right)=mG-mF$. Также $m\left(G_i\setminus F_i\right)=mG_i-mF_i$. Поскольку $G\setminus F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(G_i\setminus F_i\right)$, то $m\left(G\setminus F\right)\le\sum\limits_{i=1}^{n}m\left(G_1\setminus F_i\right)=$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}mG_1-mF<\varepsilon$.

Отсюда $m^*A-m_*A<\varepsilon\Rightarrow m^*A=m_*A$ ◄.

3°. Если $A_1,A_2,...A_n$ измеримы, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ измеримо.

► Действительно, пусть $\Delta-$ интервал, содержащий все A_i. Тогда $c_\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{n}c_\Delta A_i$ (по законам де Моргана). $c_\Delta A_i$ измеримы одновременно с множествами A_i, отсюда имеем измеримость $c_\Delta A$ и значит, A ◄.

4°. A_1,A_2 – измеримы $\Rightarrow A=A_1\setminus A_2$ измеримо.

► Действительно, пусть интервал Δ содержит A_1,A_2. Тогда $A=A_1\bigcap c_\Delta A_2$ и 3° ◄.

5°. Если в 4° дополнительно $A_1\supset A_2$, то $mA=mA_1-mA_2$.

► Поскольку $A_1\bigcap A_2$, $A_1=A\bigcup A_2$, то $mA_1=mA+mA_2$ ◄.

6°. $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, A_i – измеримы, тогда A измеримо.

► Введем множества $B_1 = A_i,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{-1} A_i$, тогда $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Все B_i измеримы и попарно не пересекаются, можно использовать 1° ◄.

7°. $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, A_i – измеримы. Тогда A измеримо.

► Пусть Δ– интервал, содержащий A. Обозначим $B_k = \Delta \setminus A_k$, тогда $A = \Delta \setminus A = \Delta \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (\Delta \setminus A_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Поскольку $c_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} c_\Delta B_i$, то по ранее установленным свойствам A – измеримо ◄.

8°. Пусть $A_i, i \in N$ – измеримы, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$. Если $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ограничена, то $mA = \lim\limits_{n\to\infty}(mA_n)$.

► Действительно,
$A = A_1 \bigcup (A_2 \setminus A_1) \bigcup (A_3 \setminus A_2) \bigcup (A_4 \setminus A_3) \ldots$. Слагаемые попарно не пересекаются. Тогда по 1° и 4°

$$mA = mA_1 + \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{i+1} \setminus A_i) = mA_1 + (mA_2 - mA_1) + (mA_3 - mA_2) + \ldots$$

Отсюда $mA = \lim\limits_{n\to\infty}\left(mA_1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(mA_{i+1} - mA_i)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(mA_n)$ ◄.

9°. Пусть $A_i, i \in N$ измеримы, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ Тогда $mA = \lim\limits_{n\to\infty} (mA_n)$.

► Это свойство сводится к предыдущему стандартному способу введения интеграла $\Delta \supset A_i$. Очевидно, $c_\Delta A_1 \subset c_\Delta A_2 \subset c_\Delta A_3 \subset \ldots$ и примем 8° ◄.

§ 9. Класс измеримых множеств

Здесь мы укажем на измеримость ещё некоторых типов множеств, в дополнение к уже известным замкнутым и открытым.

Теорема 1

Ограниченное счетное множество измеримо и имеет меру нуль.

Доказательство

Обозначим $A_k = \{x_k\}$. A_k измеримо и $mA_k = 0$.

$A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \bigcap A_i = \varnothing$ при $k \neq i$. Тогда $mA = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 2

Ограниченное множество типа G_δ или F_σ измеримо.

Доказательство

Если A есть множества типа F_σ и ограничено, то слагаемые F_i ограничены и замкнуты $\Rightarrow$ измеримы. А тогда измеримо и A.

Для G_δ можно ввести интервал $\Delta \supset A$, тогда $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\left(\Delta \cap G_i\right)$, $\Delta \cap G_i$ – измеримы и A – измеримо.

Теорема доказана.

Теорема 3

Семейство всех ограниченных измеримых множеств имеет мощность $f = 2^c$.

Доказательство

$f = 2^c$ есть мощность булеана $\beta(R)$, поэтому $\overline{\overline{X}} \le 2^c$. Обратно, возьмем Канторово множество F_0. Его мощность равна c, мера нуль. Обозначим $S = \beta(F_0)$. Подмножество множеств меры нуль имеет, во всяком случае, внешнюю меру нуль $\Rightarrow$ оно измеримо. Тогда $S \subset X$, но $\overline{\overline{S}} = c$, тогда $\overline{\overline{X}} \le 2^c$. В итоге $\overline{\overline{X}} = 2^c$.

Теорема доказана.

Построенная таким образом мера была введена А. Лебегом и называется мерой Лебега. Теория меры по Лебегу не решила всех вопросов, т. к. можно построить ограниченное неизмеримое множество.

Пример

Возьмем $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ и введем на нем бинарное отношение $E: xEy \Leftrightarrow x - y \in Q$. Легко проверить, что это эквивалентность. Возьмем фактор – множество $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]/E$ и из каждого класса эквивалентности возьмем одно и только одно число. Обозначим полученное множество через A.

Перенумеруем точки множества $Q_{[-1;1]} = (r_n)_{n\in N}$, $r_0 = 0$.

Обозначим $A_k = A + r_k$ (сдвиг). $A_k \bigcap A_i = \varnothing$ при $k \neq i$. A_k конгруэнтны между собой $\Rightarrow$ внутренние и внешние меры их одинаковы соответственно. Обозначим $m_* A_k = m_* A = \alpha,\ m^* A_k = m^* A = \beta$. Тогда $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, отсюда

$$1 = m^*\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \le \sum_{k=0}^{\infty} m^* A_k = \beta + \beta + \beta + \ldots \Rightarrow \beta > 0.$$

С другой стороны, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$. Отсюда

$$3 = m_*\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] \ge \sum_{k=1}^{\infty} m_* A_k = \alpha + \alpha + \_\alpha + \ldots \Rightarrow \alpha = 0.$$

$\alpha > \beta$. Значит, $m_* A < m^* A$ и A неизмеримо. Следовательно, имеет место следующий результат.

Теорема 4

Существуют ограниченные неизмеримые множества (аналогично поступают с произвольным ограниченным множеством A, таким, что $mA > 0$).

Теорема 5

Каждое измеримое множество положительной меры имеет неизмеримое подмножество.

Отсюда можно сделать вывод, что Лебеговская мера не решила всех проблем, и это верно. Но, с другой стороны, построение меры такое, что $mG = \sum_i m(\alpha_i;\beta_i)$ его составляющих интервалов называется регулярным. Можно доказать, что всякое регулярное построение меры («легким» способом) приводит к тому, что $\mu A = mA$ для всякого измеримого A. И это, очевидно, оправдывает лебеговскую теорию меры.

§ 10. Сходимость почти всюду

Мы уже рассматривали два вида сходимости функциональных последовательностей: простая поточечная и равномерная. Введем следующий тип сходимости.

Пусть $X \subset R$, $X \neq \varnothing$, на X задана функциональная последовательность $\left(f_n\left(x\right)\right)_{n\in N}$, X измеримо по Лебегу. Говорят, что некоторое свойство $P\left(x\right)$ выполнено почти всюду на X, если мера множества $Y = \left\{x \in X : \overline{P\left(x\right)}\right\}$ равна нулю.

Пример

$x^2 > 0$ почти всюду на $[-1;1] : Y = \{0\}$, $mY = 0$. В частности, применим это понятие к сходимости последовательностей.

Определение

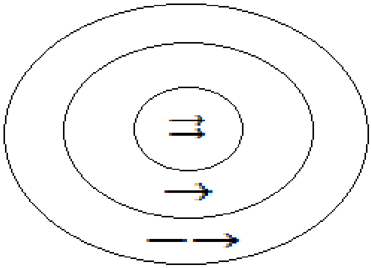
Последовательность $(f_n(x))_{n\in N}$ называется сходящейся к $f_0(x)$ почти всюду на X, если $Y = \left\{x_0 \in X : f_n(x_0) \not\to_{n\to\infty} f_0(x_0)\right\}$ имеет меру нуль. Запись: $f_n - \to f_0$.

Пример

$$X = [-1;1],\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n}, x \neq 0 \\ 1,\ x = 0 \end{cases}.$$ Тогда $f_n - \to 0$, т. к. $Y = \{0\}$ и $mY = 0$.

Очевидно, имеет место такое соотношение трех типов сходимости функциональных последовательностей: равномерная простая поточечная почти всюду.

Или на диаграмме:



Таким образом, «самая сильная» – это равномерная, «средняя» – простая поточечная, «самая слабая» – почти всюду. Далее мы введем ещё некоторые виды сходимости.

§ 11. Мера Лебега в пространстве R^n

При построении меры Лебега в R^n за основу берут параллелепипеды $\Pi = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i ; b_i \rangle$. Особую роль играют ячейки – полуоткрытые параллелепипеды: $\Pi_c = \prod_{i=1}^{n} [a_i ; b_i)$. Их роль заключается в том, что каждое непустое открытое множество $G \subset R^n$ есть не более чем счетное объединение дизъюнктного семейства ячеек с конечными «ребрами». Мерой параллелепипеда $\Pi = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i ; b_i \rangle$ называется число $m\Pi = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Мера открытого множества: $mG = \sum_{i=1}^{S} m\Pi_{c_i}$, Π_{c_i} попарно не имеют общих внутренних точек.

Если F замкнуто, $F \subset \Pi$ – открытый, $G = \Pi \setminus F$, то $mF ::= m\Pi - mG$. Для $X \subset R^n$ ограниченного, вводится внутренняя и внешняя меры: $m_*X = \sup\limits_{F_i \subset X} mF_i$, $m^*X = \inf\limits_{G_i \supset X} G_i$. Если $m_*X = m^*X$, то X называется измеримым. За подробностями отсылаем к литературе $[9],[10]$.

§ 12. Связь мер Жордана и Лебега

Установим основные соотношения указанных мер.

Теорема 1

Если $X \subset R$ ограничено, то $mes_*X \le m_*X \le m^*X \le mes^*X$.

Доказательство

Рассмотрим два случая:

1. $X \ne \varnothing, mes_*X = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$, l_n – сумма длин заполненных отрезков ранга n. Поскольку $(l_n)_{n\in N}$ не убывает, то $mes_*X = \sup\limits_{n\in N}\{l_n\}$. Заполненные отрезки есть замкнутые множества, входящие в X и составляющие часть семейства $F_i \subset X$. Тогда $mes_*X = \sup\limits_{n\in N}\{l_n\} \le \sup\limits_{F_i \subset X} mF_1 = m_*X$. $mes^*X = \inf\limits_{n\in N}\{L_n\}$. Включающие отрезки входят в открытые множества, содержащие X.
Поэтому $mes^*X \ge \inf\limits_{G_i \supset X} G_i = m^*X$.

2. $X = \varnothing$ верно.

Теорема доказана.

Теорема 2

Если множество X измеримо по Жордану, то оно измеримо по Лебегу и $mesX = mX$.

Доказательство

$$\exists mesX = mes_* X = mes^* X = m_* X = m^* X ,$$

т. е. $m_* X = m^* X$, X измеримо по Лебегу, при этом $mesX = mes_* X = mes^* X = m_* X = m^* X = mX$.

Теорема доказана.

Замечание

Обратное включение неверно: существуют множества, измеримые по Лебегу, но не измеримые по Жордану.

Пример

$X = Q_{[a;b]}$. $mes_* X = 0, mes^* X = b - a$. $mX = 0$ как счетного ограниченного множества.

§ 13. Мера абстрактных множеств

Дальнейшее развитие математики потребовало распространить понятие измеримости и на абстрактные множества. Изложим в обзорном порядке один из подходов к построению меры на абстрактных множествах.

Пусть $X \neq \varnothing, S \subset \beta(x), S = \{A_i\}_{i \in I}$.

Определение

Семейство S называется аддитивным классом множеств, если выполняются условия:

1. $\varnothing \in S$.
2. $X \in S$.
3. $A \notin S \Rightarrow cA \in S$.

4. $A_n \in S \forall n \in N \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Эти условия показывают, что S есть (σ) – алгебра множеств.

Примеры

1) $\beta(x)$ есть аддитивный класс множеств (АКМ);

2) на $[a;b]$ возьмем последовательности множеств $(G_n)_{n\in N}$ открытых, $(F_n)_{n\in N}$ – замкнутых. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ открыто, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ замкнуто.

Множества, полученные из F_i, G_i применением действий $\bigcup$ и $\bigcap$ не более, чем счетное число раз, образуют борелевскую систему множеств B. Она есть АМК.

Пусть имеем $(A_n)_{n\in N}$. Введем понятие наибольшего и наименьшего пределов последовательности множеств:

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \ \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Если они совпадают, то последовательности называются сходящимися, а общее значение этих пределов называется пределом последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. В частности, возрастающая и убывающая последовательности имеют пределы $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Если A_n входят в АКМ, то $\overline{\lim} A_n$ и $\underline{\lim} A_n$ тоже входят в S.

Если S – АКМ, то множества $A \in S$ называются S – измеримыми.

Пусть на S задана функция $\varphi : S \to R$. Она называется аддитивной функцией множеств, если $A \bigcap B = \varnothing \Rightarrow \varphi(A \bigcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Если $(A_n)_{n\in N}$ – дизъюнктное, и $\varphi\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$, то φ называется вполне аддитивной функцией.

Вполне аддитивная неотрицательная функция на классе S – измеримых множеств называется мерой этих множеств. Запись: $\mu(A)$.

Свойства меры

1°. $A,B\in S,\ A\subset B\Rightarrow\mu(A)\le\mu(B)$.

2°. $\mu(\varnothing)=0$.

3°. Если $(A_n)_{n\in N}$ монотонна, то $\mu\left(\lim\limits_{n\to\infty}A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

4°. $\mu(\underline{\lim}A_n)=\underline{\lim}(\mu A_n)$.

5°. $\mu\left(\overline{\lim}A_n\right)\ge\overline{\lim}\mu(A_n)$.

6°. Если $(A_n)_{n\in N}$ сходящаяся, то $\mu\left(\lim\limits_{n\to\infty}\mu A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

Мера называется конечной, если $\mu(A)<+\infty$ для всех $A\in S$. Мера называется (σ) конечной, если $\forall A\in S\exists(A_n)_{n\in N},\ A_n\in S: A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\wedge\mu(A_n)<+\infty\forall n\in N$.

Этим мы и ограничимся в рассмотрении вопросов теории меры и перейдем к измеримым функциям.

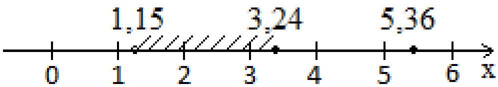
Решение типовых задач к главе 1

Задача 1

Выяснить измеримость множества $X=(1{,}15;3{,}24]\cup\{5{,}3\}$ по Жордану.

Решение

$[a,b]=[1;6]$, $k=5$.



1. Отрезки ранга 1. Заполненные: $[2;3]$. $l_1=1$. Включающие: $[1;2],[2;3],[3;4],[5;6]$. $L_1=4$. Примем $S=10$.

2. Отрезки ранга 2. Заполненные: $[1{,}2;3{,}2]$. $L_2=2$. Включающие: $[1{,}1;3{,}3]$, $[5{,}2;5{,}4]$. $L_2=2{,}2+0{,}4=2{,}6$.

3. Отрезки ранга 3. Заполненные: $[1{,}16;3{,}24]$. $l_3=3{,}08$. Включающие: $[1{,}15;3{,}24],[5{,}29;5{,}31]$. $L_3=3{,}09+0{,}02=3{,}11$.

4. Отрезки ранга $(n-1)$. Заполненные: $[1{,}15-10^{-n};3{,}24]$.

$l_n=3{,}09+10^{-n}$. Включающие:

$[1{,}15;3{,}24],[5{,}3-10^{-n};5{,}3+10^{-n}]$. $L_n=3{,}09+2*10^{-n}$.

$\exists\lim\limits_{n\to+\infty}l_n=3{,}09$, $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}l_n=3{,}09$. Итак,

$mes_*X=3{,}09$, $mes^*X=3{,}09$. Множество X измеримо по Жордану и $mesX=3{,}09$.

Задача 2

Найти по определению m_*X, m^*X для $X=(1;2]\cup\{5\}$.

Решение

$m_*X=\sup\limits_{F_i\subset X}mF_i$. Исходя из структуры замкнутых множеств, на прямой можно брать F_i, состоящие из отрезков и точек.

Возьмем $F_n = \left[1-10^{-n};2\right] \bigcup \left\{5\right\}$. $F_n \subset X$, $mF_n = 1+10^{-n}+0$. $\sup_{F_n \subset X} mF_n = \sup_{n\in N} \left\{1+10^{-n}\right\} = 1$.

В качестве $G_i \supset X$ будем брать множества, состоящие из интервалов. $G_n = \left(1;2+10^{-n}\right) \bigcup \left(5-10^{-n};5+10^{-n}\right)$. $mG_n = 1+10^{-n}+2*10^{-n}$. $\inf_{n\in N} mG_n = \inf_{n\in N} \left\{1+3*10^{-n}\right\} = 1$.

Итак, $m_* X = 1$, $m^* X = 1$ и X измеримо по Лебегу.

Задача 3

Верно ли, что $f_n(x) -\to 0$ на X, где

$$X = [2;4],\quad f_n(x) = \begin{cases} 5, & x = 2, \\ \dfrac{x^2}{n+2}, & 2 < x < 4, \\ 7, & x = 4? \end{cases}$$

Решение. При $2 < x < 4$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n+2} \to 0$. При $x = 2$, $f_n(x) \to 5$. При $x = 4$, $f_n(x) \to 7$. Итак, $Y = \left\{2,4\right\}$, $mY = 0$, утверждение верно.

Задачи к главе 1

1. Найти меру Жордана множества $X = (-1{,}12; 3{,}15] \bigcup \{4{,}51\}$.

2. Найти по определению $m_* X$, $m^* X$,
где $X = (0{,}1) \bigcup [3{,}4) \bigcup \{5\}$.

3. Найти меру Лебега множества чисел $(0{,}1)$, в десятичной записи которых нет ни одной цифры 5.

4. Сходится ли почти всюду на $X = (1;3]$ последовательность $(f_n(x))_{n \in N}$ к некоторой функции $f_0(x)$, если

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{n}, & x \in Q, \\ 2 - \dfrac{x^2+1}{n^2+1} \end{cases}?$$

5. Найти меру Лебега множества

$$X = \left\{ 1 + \frac{1}{n},\ 3 + \frac{n}{n^2+1},\ 5 + \frac{n^3}{n^4+5} \right\},\ n \in N .$$

ГЛАВА 2. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Измеримость функции

Пусть $X \neq \varnothing$, $X \subset R$, на X задана вещественная функция f. В некоторых точках из X допускаются и бесконечные значения (правила действия с несобственными вещественными числами $(-\infty)$ и $(+\infty)$ – обычные). Как уже мы рассматривали ранее, $X(f > a)$ означает множество $\{x \in X : f(x) > a\}, a \in R$. Аналогичный смысл имеют $X(f \geq a), X(f < a), X(f \leq a)$. Теперь введем понятие измеримой функции.

Определение

Функция f, заданная на множестве X, называется измеримой, если выполнены условия:

1. Множество X измеримо.
2. Для всех $a \in R$ множества $X(f > a)$ измеримы.

Пример

$f(x) = const$ на X измерима.

Действительно, пусть $f(x) \equiv b$. Тогда $X(f > a) = \begin{cases} X; a < b, \\ \varnothing; a \geq b, \end{cases}$

X и $\varnothing$ – измеримы.

Свойства измеримых функций:

1^0. Если $mX = 0$, то каждая f на X измерима. $Y \subset X \Rightarrow mY = 0$.

2^0. Если $Y \subset X$ измеримо, то f измерима на X, f измерима на Y.

Действительно, $Y(f > a) = X(f > a) \bigcap Y$ – измеримо.

3^0. Пусть $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, $\overline{\overline{I}} \le IC_0$, X_i измеримы, f измерима на всех X_i. Тогда f измерима на X.

Действительно, $X(f > a) = \bigcup\limits_{i \in I} X_i(f > a) -$ измеримо.

Введем теперь новое, очень важное понятие.

Определение

Пусть на множестве X заданы функции f и g. Они называются эквивалентными на X, если $mX(f \ne g) = 0$. Запись: $f \sim g$.

Пример

Функция Дирихле $Di(x) = \begin{cases} 1; x \in Q, \\ 0; x \notin Q, \end{cases}$ эквивалентна нулевой функции на данном промежутке, ибо $X(Di(x) \ne 0)$ есть некоторое множество рациональных чисел, $Q_{<a,b>} -$ счетно и имеет меру нуль.

Очевидно, эквивалентность функций есть отношение эквивалентности.

В этой терминологии эквивалентность функций означает их равенство почти всюду на X. Продолжим изучение свойств измеримых функций.

4^0. Если f измерима на X, $f \sim g$, то g измерима на X. Действительно, обозначим $Y = X(f \ne g)$, $mY = 0$, т. е. Y измеримо. Пусть $D = X \setminus Y$, D – измеримо. На множестве D $f \equiv g$ и g измерима на D. Тогда g измерима на $D \bigcup Y = X$.

5^0. Если f измерима на X, то $\forall a \in R$ измеримые множества: $X(f \ge a)$, $X(f = a)$, $X(f < a)$, $X(f \le a)$.

Действительно, измеримость указанных множеств следует из соотношений:

$$X(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X\left(f > a - \frac{1}{n}\right);$$
$$X(f = a) = X(f \geq a) \setminus X(f > a);$$
$$X(f < a) = X \setminus X(f \geq a);$$
$$X(f \leq a) = X \setminus X(f > a)$$
и свойств измеримых множеств.

В определении измеримой функции можно использовать любое из 4 множеств:

$$X(f > a),\ X(f \geq a),\ X(f < a),\ X(f \leq a),$$
поскольку они выражаются через другие из них и измеримые множества.

6^0. Если f измеримы на X, то измеримыми будут такие функции: $f(x)+\lambda$, $\lambda f(x)$, $|f(x)|$, $f^2(x)$, $\dfrac{1}{f(x)}$, где $(f(x) \neq 0)$, $\lambda \in R$.

Действительно, рассмотрим множества $X(g > a)$ для указанных функций.

1. $X(f+\lambda > a) = X(f > a-\lambda)$.
2. $\lambda f \equiv 0$ при $\lambda = 0$ – измеримо.

При $\lambda > 0$, $X(\lambda f > a) = X\left(f > \dfrac{a}{\lambda}\right)$.

При $\lambda < 0$, $X(\lambda f > a) = X\left(f < \dfrac{a}{\lambda}\right)$.

3. $X(|f| > a) = \begin{cases} X; a < 0, \\ X(f > a) \cup X(f < -a),\ a \geq 0. \end{cases}$
4. $X(f^2 > a) = \begin{cases} X; a < 0, \\ X(|f| > \sqrt{a}); a \geq 0. \end{cases}$

$$5.\quad X\left(\frac{1}{f}>a\right)=\begin{cases} X(f>0);\ \ a=0, \\ X(f>0)\bigcap X\left(f<\dfrac{1}{a}\right);\ a>0, \\ X(f>0)\bigcup X(f<0)\bigcap X\left(f<\dfrac{1}{a}\right);\ a<0. \end{cases}$$

7^0. f непрерывная на отрезке $[c;d]$ измерима на нем.

Покажем, что $F=X(f\le a)$ замкнуто. Если x_0 – предельная точка F и $x_n\in F$, $x_n\to x_0$, то $f(x_n)\le a$ и по непрерывности f будет $f(x_0)\le a\Rightarrow x_0\in F\Rightarrow F$ замкнуто $\Rightarrow$ измеримо.

Тогда $X(f>a)=X\setminus F$ – измеримо.

Введем функцию, характеризующую данные множества.

Определение

Пусть $X\subset[c;d]$. Функция $\varphi_x(x)=\begin{cases}1;\ x\in X, \\ 0;\ x\in[c;d]\setminus X,\end{cases}$ называется характеристической функцией множества X.

8^0. Множество и его характеристическая функция одновременно измеримы или неизмеримы.

Действительно:

1. Пусть $\varphi_x(x)$ измерима, то тогда

$X=Y(\varphi_x>0)$ измеримо, где $Y=[c;d]$.

2. Пусть X измеримо. Тогда $Y(\varphi_x>a)=\begin{cases}\varnothing;\ a\ge 1, \\ X;\ 0\le a<1, \\ Y;\ a<0,\end{cases}$ измеримы.

9^0. Если f и g измеримы на X, то $X(f>g)$ измеримо.

Действительно, перенумеруем рациональные числа: $Q=(r_n)_{n\in N}$. Тогда $X(f>g)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(X(f>r_k)\bigcap(g<r_k))$ измеримо как объединение счетного семейства измеряемых множеств.

10^0. Пусть f и g конечнозначные измеримые функции на X. Тогда измеримы функции $f-g$; $f+g$; fg; $\frac{f}{g}(g\neq 0)$.

Действительно:

1) $a+g(x)$ измерима $\forall a\in R$. В силу 9°, $X(f>a+g)$ измеримо, а оно равно $X(f-g>a)$, а значит, $f-g$ измеримо;

2) $f+g=f-(-g)$ и 6°, $10^\circ.1$;

3) $fg=\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$ и 6°, $10^\circ.1$, $10^\circ.2$;

4) $\frac{f}{g}=f\frac{1}{g}$ и 6°, $10^\circ.3$.

Таким образом, арифметические действия дают снова измеримую функцию. В сочетании с 6° это будет важно в дальнейшем.

§ 2. Последовательности измеримых функций

Теорема 1

Если функция $f_0(x)$ есть простой поточечный предел последовательности $(f_n(x))_{n\in N}$ измеримых на X функций, то $f_0(x)$ измерима на X.

Доказательство

Введем обозначения:

$$A_m^{(k)} = X\left(f_k > a + \frac{1}{m}\right), \; B_m^{(n)} = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_m^{(k)}.$$

Эти множества измеримы в силу измеримости $f_n(x)$. Покажем, что $X(f_0 > a) = \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}$.

Пусть $x_0 \in X(f_0 > a)$, тогда

$$f_0(x_0) > a \Rightarrow \exists m \in N : f_0(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

В силу сходимости

$$f_k(x) \to f_0(x) \exists n_0 : k > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

Итак, при $k > n_0 \Rightarrow x_0 \in A_m^{(k)} \Rightarrow x_0 \in B_m^{(n)} \Rightarrow x_0 \in \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}$. Это означает, что

$$X(f > a) \subset \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}.$$

Обратно, пусть $x_0 \in \bigcup_n \bigcup_m B_n^{(m)} \Rightarrow x_0 \in B_m^{(n)}$ при некоторых m и n. Таким образом, $x \in A_m^{(k)}$ при $k \geq n$, тогда будет $f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}$. Перейдем к пределу при $k \to \infty$ $f_0(x_0) \geq a + \frac{1}{m}$. В силу произвольности $m \in N$, $f_0(x_0) > a$ и $x_0 \in X(f > a)$.

Значит, $\bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)} \subset X(f_0 > a)$. В итоге указанные множества равны и f_0 измерима на X.

Теорема доказана.

Теорема 2

Если $f_n(x)$ измеримы на X и $f_n(x) - \to f_0(x)$ почти всюду на X, то $f_0(x)$ измерима на X.

Доказательство

Обозначим $A=\{x_0 \in X : f_n(x_0) \not\to f_0(x_0)\}$.

По условию $mA=0 \Rightarrow f_0(x)$ измерима на A. На $X \setminus A$ f_0 измерима по теореме 2. Тогда она измерима на $A \bigcup (X \setminus A) = X$.

Теорема доказана.

Теорема 3 (А. Лебег)

Пусть $(f_n)_{n\in N}$ измерима на X, $f_n \to f_0$ почти всюду на X и f_0 почти всюду конечна на X. Тогда $\forall \delta > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} mX(|f_n - f_0| \geq \delta) = 0$.

Доказательство

В силу теоремы 2 f_0 измерима на X. Тогда множества $X(|f_n - f_0| \geq \delta)$ измеримы. Введем обозначение:

$$A = X\left(|f| = +\infty\right),\ A_n = X\left(|f_n| = +\infty\right),$$

$$B = X\left(f_n \not\to f_0\right).\ D = A \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup B.$$

Ясно, что $mD = 0$. Еще обозначения:

$$X_k(\delta) = X\left(|f_k - f_0| \geq \delta\right),\ X_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} X_k(\delta),\ U = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n(\delta).$$

Все они измеримы.

Поскольку $Y_1(\delta) \supset Y_2(\delta) \supset ... \supset Y_n(\delta) \supset ...$, то $mY(\delta) \to mU$. Также $U \subset D$. Действительно, если $x_0 \notin D$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0) = f_0(x_0)$ и при этом $f_i(x_0)$, $f_0(x_0)$ – конечные вещественные числа. Тогда $\exists n_0 : k > n_0 \Rightarrow |f_k(x_0) - f_0(x_0)| < \delta$, т.е. $x_0 \notin X_k(\delta)$, а значит, $x_0 \notin Y_n(\delta) \Rightarrow x_0 \notin U$, получаем

$cU \supseteq cD \Rightarrow U \subset D$. Но тогда $mU = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m(Y(\delta)) = 0$, а раз $X_n(\delta) \subset Y_n(\delta)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} m(Y_n(\delta)) = 0$.

Теорема доказана.

Венгерский математик Ф. Рисс взял результат А. Лебега как определение нового вида сходимости функциональной последовательности.

Определение

Пусть функции последовательности $\left(f_n\right)_{n\in N}$ измеримы и почти всюду конечны на множестве X. Говорят, что последовательность сходится на X по мере к функции f_0, если $\lim\limits_{n\to\infty} mX\left(\left|f_n - f_0\right| \geq \delta\right) = 0$, $\forall \delta > 0$.

Запись: $f_n(x) \Rightarrow f_0(x)$ (символ Г. М. Фихтенгольца). Таким образом, теорему А. Лебега можно сформулировать так:

Теорема 3* (А. Лебег)

Сходимость почти всюду влечет сходимость по мере.

Итак, мы уже имеем 4 вида сходимости функциональных последовательностей: равномерная $\Rightarrow$ простая поточечная $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ почти всюду $\Rightarrow$ по мере.

Как известно, первые две импликации необратимы. Необратима и третья.

Пример

$X = [0;1)$. $\forall k \in N$, определим семейство к функции:

$$f_{ik}(x) = \begin{cases} 1;\ x \in \left[\dfrac{i-1}{k}; \dfrac{i}{k}\right), \\ 0;\ x \notin \left[\dfrac{i-1}{k}; \dfrac{i}{k}\right). \end{cases}$$

Все построенные функции дают счетное множество. Расположим их в последовательность:

$$g_1(x) = f_{11}(x),\ g_2(x) = f_{12}(x),\ g_3(x) = f_{22}(x),$$

$$g_4(x) = f_{13}(x),\ \ldots$$

$g_n(x) \Rightarrow 0$, т. к. $X\left(|g_n| \geq \delta\right) = \left[\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}\right)$ и его мере $\to 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, $\varphi_n \not\to 0$ в $\forall x \in X$. Действительно, $\forall x_0 \in [0;1)\, \forall k \in N \exists i \in N : x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}\right)$, тогда $f_{ik}(x_0) = 1$.

При $\forall n \in N$ можно найти $n' > n_0 : \varphi_{n'}(x_0) = 1$ и $\varphi_n(x) \not\to 0$.

Таким образом, мы получаем цепочку 4 расширяющихся видов сходимости (как принято говорить, все более слабых: чем сильнее сходимость, тем меньше в ней последовательностей).

Характерной особенностью сходимости по мере является возможность замены предельной функции.

Теорема 4

$$f_n \Rightarrow g,\ g \sim h \Rightarrow f_n \Rightarrow h.$$

Доказательство

$\forall \delta > 0$ будет:

$$X\left(|f_n - h| \geq \delta\right) \subset X\left(g \neq h\right) \cup X\left(|f_n - g| \geq \delta\right).$$

Первое множество в первой части имеет меру нуль, поэтому $mX\left(|f_n - h| \geq \delta\right) \leq mX\left(|f_n - g| \geq \delta\right) \Rightarrow f_n \Rightarrow h$.

Теорема доказана.

Это означает, что сходимость по мере характеризуется некоторой неоднозначностью результата. Но эта неоднозначность в вопросах меры несущественна и эквивалентные функции вообще отождествляют. Это дает много удобств и теоретического и практического характера. Особенно ярко это проявится в теории интеграла.

Теорема 5

$f_n \Rightarrow g \wedge f_n \Rightarrow h \Rightarrow g \sim h$.

Доказательство

$\forall \delta > 0$ будет:

$X\left(|g-h| \ge \delta\right) \subset X\left(\,|f_n - g| \ge \dfrac{\delta}{2}\right) \cup X\left(\,|f_n - h| \ge \dfrac{\delta}{2}\right)$ (легко проверить по дополнениям множеств).

При $n \to \infty$ мера правого множества $\to 0$. Тогда $mX\left(|g-h| \ge \delta\right) = 0$. В силу произвольности $\delta > 0$ $mX\left(g \ne h\right) = 0$ и $g \sim h$.

Теорема доказана.

Вернемся к 4 видам сходимости. Хотя импликации там необратимы, все же «обратная связь» существует.

Теорема 6 (Ф. Рисс)

Если $f_n \Rightarrow f_0$, то $\exists \left(f_{n_k}\right)_{k \in N} : f_{n_k} \longrightarrow f_0$ почти всюду.

Доказательство

Возьмем строго убывающую и сходящуюся к нулю $\left(\delta_n\right)_{n \in N}$ положительных чисел.

Возьмем также сходящийся знакоположительный числовой ряд: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k < +\infty$. Строим последовательность $\left(n_k\right)_{k \in N}$.

n_1 – такое натуральное, что $mX\left(\left|f_{n_1} - f_0\right| \ge \sigma_1\right) < \alpha_1$.

n_2 – $mX\left(\left|f_{n_2} - f_0\right| \ge \sigma_2\right) < \alpha_2$ и $n_2 > n_1$, и т. д.

Покажем, что $f_{n_k} \to f_0$ почти всюду на X.

Обозначим $A_i = \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} X\left(\left|f_{n_k} - f_0\right| \ge \delta_k\right)$, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow mA_i \to mB$. Поскольку $mA_i < \sum\limits_{k=i}^{\infty} \alpha_k$, то

$mA_i \to 0 \Rightarrow mB = 0$. Пусть $x_0 \in X \setminus B \Rightarrow x_0 \notin A_{i_0}$, т. е. при $k > i_0$ будет

$$x_0 \notin X\left(\left| f_{n_k} - f_0 \right| \ge \alpha_k\right) \Rightarrow \left| f_{n_k} - f_0 \right| < \alpha_k,\ k > i_0;$$

т. к. $\alpha_k \to 0$, то

$$f_{n_k}\left(x_0\right) \to f_0\left(x_0\right)\ \ \forall x_0 \in X \setminus B.$$

Теорема доказана.

«Обратную связь» сходимости по мере с равномерной сходимостью дает:

Теорема 7 (Д. Ф. Егоров)

Пусть $f_n \dashrightarrow f_0$ почти всюду на X, f_n и f_0 – измеримы и почти всюду конечны. Тогда $\forall \delta > 0\ \ \exists X_\delta \subset X$ измеримое, такое, что:

1) $mX_\delta > mX - \delta$;

2) на X_δ $f_n \rightrightarrows f_0$.

Доказательство

Возьмем знакоположительный сходящуюся ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty$ и последовательность $\left(\beta_n\right)_{n \in N}$, сходящийся к нулю, строго убывающую и $\beta_n > 0$.

При доказательстве теоремы Лебега было получено, что $mY_n\left(\beta\right) \to 0$, $Y_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k\left(\left| f_k - f_0 \right| \ge \beta\right)$ $\forall i \in N$ можно взять $n_i \in N : mY_{n_i}\left(\beta_i\right) < \alpha_i$.

Далее найдем $i_0 : \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} \alpha_i < \delta$.

Обозначим $E = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} Y_{n_i(\beta_i)}$.

Тогда $mE < \delta$.

Положим $X_\delta = X \setminus E$. Ясно, что $mX_\delta > mX - \delta$.

Покажем, что на X, $f_n \rightrightarrows f_0$.

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$.

Найдем $i > i_0$, $\beta_i < \varepsilon$.

Установим, что при $k > n_i$ и $\forall x \in X_\delta$ будет $\left| f_k(x) - f_0(x) \right| < \varepsilon$

$x \in X_\delta \Rightarrow x \notin E$. Тогда $x \notin Y_{n_i}(\beta_i)$.

Значит, при $k > n_i$

$$x \notin X\left(\left| f_k - f \right| \geq \beta_i\right) \Rightarrow \left| f_k(x) - f_0(x) \right| < \beta_i < \varepsilon,\ \forall x \in X_\delta .$$

Значит, $f_n \rightrightarrows f_0$ на X_δ.

Теорема доказана.

§ 3. Структура измеримых функций

Здесь мы рассмотрим приближения измеримых функций другими важными классами функций.

Теорема 1

Если f измеримая и почти всюду конечная на X, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g(x)$ измеримая и ограниченная на X, такая, что $mX(f \neq g) < \varepsilon$.

Доказательство

Введем множества: $A_k = X\left(\left| f \right| > k\right)$, $k \in N$, $B = X\left(\left| f \right| = +\infty\right)$.

По условию теоремы $mB = 0$.

Поскольку очевидно, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, то $mA_k \to mB = 0$ при $k \to \infty$. Найдем $K_0 : mA_{k_0} < \varepsilon$. Определим на X функцию:

$$g(x) = \begin{cases} f(x); x \in X \setminus A_{k_0}, \\ 0; x \in A_{k_0}, \end{cases}$$

$g(x)$ измерима и ограничена: $|g| \le k_0$. Также $X(f \neq g) = A_{k_0}$.
Теорема доказана.

Смысл этой теоремы в следующем. Измеримая и почти всюду конечная на X становится ограниченной, если отбросить от X множество сколь угодно малой меры.

Рассмотрим без доказательства два вспомогательных результата.

Лемма 1

Пусть множества $F_1, F_2, \ldots, F_n$ замкнуты и попарно не пересекаются. Если функция $\varphi(x)$ на каждом множестве F_i постоянна, то на $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ она непрерывна.

Лемма 2

Пусть $F \subset [a;b]$ – замкнуто. Функцию $\varphi(x)$, непрерывную на F, можно непрерывно продолжить с сохранением $\max$ модуля на $[a;b]$.

Доказательство есть в [1].

Теорема 2 (Э. Борель)

Пусть на $[a;b]$ задана измеримая и почти всюду конечная функция $f(x)$. Тогда $\forall\varepsilon>0\wedge\forall\delta>0$ существует непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $g(x)$, такая, что $mX\left(\left|f-g\right|\geq\delta\right)<\varepsilon$. Если $\left|f(x)\right|\leq K$, то $g(x)$ можно выбрать так, что $\left|g(x)\right|\leq K$.

Доказательство

Рассмотрим 2 возможных случая:

1. $\left|f(x)\right|\leq K \quad \forall x\in[a;b]$.

Для заданных $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ найдем $m\in N:\dfrac{K}{m}<\delta$ и введем множества:

$$E_i=X\left(\frac{i-1}{m}K\leq f<\frac{i}{m}K\right), i=1,2,...,m-1;$$

$$E_m=X\left(\frac{m-1}{m}K\leq f<K\right).$$

Они измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i=[a;b]$. Для E_i построим замкнутое $F_i\subset E_i$, такое, что $mF_i-\dfrac{\varepsilon}{2m}$, $F=\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_i$. Тогда $[a;b]\setminus F=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\left(E_i\setminus F_i\right)$, отсюда $m[a;b]-mF<\varepsilon$. Определим на F функцию: $\varphi(x)=\dfrac{i}{m}K$ при $x\in F_i$. По лемме 1 она непрерывна на F, $\left|\varphi(x)\right|\leq K$, $\left|f(x)-\varphi(x)\right|<\delta$ при $x\in F$.

По лемме 2 распространим на $\varphi(x)$ отрезке $[a;b]$, получим непрерывную на $[a;b]$ $g(x)$. Причем $\max\left|\varphi(x)\right|=\max\left|g(x)\right|$, тогда $\max\left|g(x)\right|\leq K$.

$X\left(\left|f-g\right|\geq\delta\right)\subset\left[a;b\right]\setminus F$, так что $g\left(x\right)$ – требуемая.

2. $f\left(x\right)$ не ограничена. По теореме 1 построим ограниченную $h\left(x\right):mX\left(f\neq h\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. По функции $h\left(x\right)$ построим непрерывную $\psi\left(x\right):mX\left(h-\psi\right)\geq\dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $X\left(\left|f-\psi\right|\geq\delta\right)\subset X\left(f\neq h\right)\cup X\left(\left|h-\psi\right|\geq\sigma\right)$, то $\psi\left(x\right)$ требуемая.

Теорема доказана.

Отсюда мы получим 2 интересных результата о сходимостях функциональных последовательностей.

Теорема 3

Для каждой измеримой и почти всюду конечной на отрезке $\left[a;b\right]$ функции $f\left(x\right)$ существует $\left(\psi_n\right)_{n\in N}$ непрерывных, таких, что $\psi_n\Rightarrow f$.

Доказательство

Возьмем две последовательности:

$\delta_1>\delta_2>\delta_3>,...,\delta_n\to 0,$

$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3>,...,\varepsilon_n\to 0.$

$\forall n\in N$ построим непрерывную $\psi_n\left(x\right)$, что $mX\left(\left|f-\psi_n\right|\geq\delta_n\right)<\varepsilon_m$. Тогда $X\ \psi_n\Rightarrow f$, т. к. $\forall\delta>0$ при достаточно больших n будет $\delta_n<\delta$, значит, $X\left(\left|f-\psi_n\right|\geq\delta\right)\subset X\left(\left|f-\psi\right|\geq\delta_n\right)$.

Теорема доказана.

Применив к $\left(\psi_n\right)_{n\in N}$ теорему Ф. Рисса о последовательности, получаем второй результат о сходимостях.

Теорема 4 (М. Фреше)

Для каждой измеримой и почти всюду конечной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ $\exists(\varphi_n)_{n\in N}$ непрерывных, $(\varphi_n) \dashrightarrow f$ почти всюду.

Наконец, установим результат о приближении $f(x)$ непрерывными функциями.

Теорема 5 (Н. Н. Лузин)

Если $f(x)$ измерима и почти повсюду конечна на отрезке $[a;b]$, то $\forall\delta>0$ существует такая непрерывная $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$, что $mX(f\neq\varphi)<\delta$. Если при этом $|f(x)|\leq K$, то и $|\varphi(x)|\leq K$.

Доказательство

По теореме М. Фреше построим $(\varphi_n)_{n\in N}$. По теореме Д. Ф. Егорова найдем $X_\delta : mX_\delta > b-a-\dfrac{\delta}{2}$ и на X_δ $\varphi_n \rightrightarrows f$. Тогда (теорема анализа) f непрерывна на X_δ. Найдем $F\subset X_\delta$ замкнутое: $mF > mX_\delta - \dfrac{\delta}{2}$. $f(x)$ непрерывна на F. По лемме 2 распространим f на отрезке $[a;b]$. Получим функцию φ, непрерывную и совпадающую с f на F.

Тогда $X(f\neq\varphi)\subset[a;b]\setminus F$, мера множества меньше δ.

$|f(x)| = x^2+1$, значит, $X=(-1;1]$, $\varphi(x)$ требуемая.

Если $|f(x)|\leq K$, то это $[a;b]$ будет и на F, а тогда по лемме 2, $|\varphi(x)|\leq K$.

Теорема доказана.

Смысл такой: измеримая и почти всюду конечная на отрезке $[a;b]$ функция становится непрерывной, если от отрезка $[a;b]$ отбросить множество сколь угодно малой меры.

Можно далее рассматривать аппроксимацию (приближение) измеримых функций более специальными классами непрерывных функций, в частности алгебраическими и тригонометрическими полиномами. Об этом можно прочитать в [1].

Решение типовых задач к главе 2

Задача 1

Проверим измеримость функции $f(x)=5x+3$ на множестве $X=(1,3]$.

Решение

X измеримо. Рассмотрим множества $X(f>a)$, $a\in R$, $5x+3>a$, $x>\dfrac{a-3}{5}$. Рассмотрим множество $\left(\dfrac{a-3}{5},+\infty\right)\bigcap(1,3]$, для чего переберем соответствующие значения для a.

1) $\dfrac{a-3}{5}\le 1$. Тогда $X(f>a)=\left(\dfrac{a-3}{5},+\infty\right)\bigcap(1,3]=(1,3]$ – измеримо;

2) $\dfrac{a-3}{5}>1$, но $\dfrac{a-3}{5}<3$. $X(f>a)=\left(\dfrac{a-3}{5},3\right]$ – измеримо;

3) $\dfrac{a-3}{5}=3$, $X(f>a)=\{3\}$ – измеримо;

4) $\dfrac{a-3}{5}>3$, $X(f>a)=\varnothing$ – измеримо.

Итак, $X(f>a)$ измеримо $\forall a\in R$ и f измерима на X.

Задача 2

Доказать, что если $f^3(x)$ измерима на X, то $f(x)$ измерима на X.

Решение

X по условию измеримо.

$X(f>a)=X\left(f^3>a^3\right)$. Поскольку второе множество измеримо $\forall a\in R$, то и первое измеримо $\forall a\in R$. Следовательно, $f(x)$ измерима на X.

Задача 3

Измерима ли функция Дирихле на $[c;b]$?

Решение

$X=[c;b]$ измеримо, $X(f>a)$ представляет собой также множества для различных значений $a\in R$:

1) $a<0$, $X(f>0)=[c;b]$ – измеримо;

2) $0\le a<1$, $X(f>a)=Q_{[c;b]}$ – измеримо;

3) $a\ge 1$, $X(f>a)=\varnothing$ – измеримо.

Следовательно, функция Дирихле измерима на $[c;b]$.

Задачи к главе 2

1. Проверить измеримость функции $f(x)=x^2+1$ на множестве $X=(-1;1]$.

2. Доказать, что если $f(x)$ измерима на X, то $f^2(x)$ измерима на X. Верно ли обратное?

3. Доказать, что если $f(x)$ измерима на X, то $|f(x)|$ измерима на X. Верно ли обратное?

4. Доказать, что функция ограниченной вариации измерима на $[a;b]$.

ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛ

§ 1. Интеграл Римана

Это тот определенный интеграл, который изучался в курсе математического анализа. Он введен О. Коши и обобщен Б. Риманом.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Сделаем (T)– разбиение $[a;b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Выберем $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Составим интегральную сумму Римана для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ по данному (T) – разбиению: $S_R(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$.

Обозначим $\lambda(T) = \max\limits_{k=0\div(n-1)} \Delta x_k$ (параметр разбиения).

Если $\exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_R(T) = I_R$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |S_R(T) - I_R| < \varepsilon$, то число I_R называется интегралом Римана для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Запись: $I_R = (R)\int\limits_a^b f(x)dx.$

Множество функций, интегрируемых по Риману на $[a;b]$, обозначается $Ri[a;b]$.

Каковы условия интегрируемости по Риману?

Необходимым условием является ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Это практически очевидно. Если $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$, то она не ограничена хотя бы на одном частичном сегменте $[x_k; x_{k+1}]$. Зафиксировав c_i при $i \neq k$ за счет выбора c_k, можно сделать $|S_R(T)|$ сколь угодно большим.

Это условие недостаточно. Функция Дирихле $Di(x)$ ограничена на любом отрезке $[a;b]$. Выбираем все $c_k \in Q$, имеем

$$S_R(T_1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = b - a .$$

Выбираем все $c_k \bar{\in} Q$, получаем $S_R(T_2) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot \Delta x_k = 0$. Значит, $\bar{\exists} \lim\limits_{\lambda(T) \to 0} S(T)$.

Пусть $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$. Обозначим:

$\underline{m}_k = \inf\limits_{[x_k;x_{k+1}]} f(x)$, $\overline{m}_k = \sup\limits_{[x_k;x_{k+1}]} f(x)$, $\omega_k = \overline{m}_k - \underline{m}_k$. Вводятся интегральные суммы Дарбу, верхняя и нижняя: $\overline{S}(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \overline{m}_k \Delta x_k$, $\underline{S}(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \underline{m}_k \Delta x_k$. Всегда $\underline{S}(T) \le S(T) \le \overline{S}(T)$. При $\lambda(T) \to 0$, $\underline{S}(T) \to \underline{I}$, $\overline{S}(T) \to \overline{I}$ – нижний и верхний интегралы Дарбу. Всегда $\underline{S}(T) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}(T)$. Равенство $\underline{I} = \overline{I}$ есть необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x)$. Его можно также записать в виде $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0.$

Кроме этих двух, известных из классического анализа, укажем еще 2 критерия интегрируемости функции по Риману.

Первый из них связан с мерой Жордана.

Теорема 1 (Дюбуа-Реймон)

Ограниченная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ по Риману тогда и только тогда, когда $\forall \delta > 0$ множество $A_\delta = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \ge \delta\}$ измеримо по Жордану и $mesA_\delta = 0.$

Доказательство

1. Необходимость

Пусть $f(x) \in Ri[a;b]$. Допустим противное: $\exists \delta_0 > 0 : mes^* A_{\delta_0} = \gamma > 0$. Тогда для отрезков ранга n, $L_n \geq \gamma$. Рассмотрим $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$. Отрезки (T) – разбиения есть 2 видов.

1. $[x_k,\ x_{k+1}] \cap A_{\delta_0} = \varnothing$.
2. $[x_k, x_{k+1}] \cap A_{\delta_0} \neq \varnothing$.

Тогда вторая часть суммы $\sum^{(2)} \omega_k \Delta x_k \geq \delta_0 \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \geq \delta_0 \gamma > 0 \Rightarrow f(x) \,\overline{\in}\, Ri[a,b]$. Противоречие.

2. Достаточность

Пусть $\forall \delta > 0\ mes^* A_\delta = 0$. Покажем, что при выполнении этого условия интеграл существует. Пусть δ и γ – произвольные положительные сколь угодно малые числа и Ω – некоторая система интегралов, покрывающая множество A_δ, сумма длин которых меньше γ. По условию такая система интегралов существует. A_δ замкнуто, выберем из Ω конечное подпокрытие K. Сумма длин интервалов семейства К тем более меньше γ. Построим также (T)-разбиение $[a;b]$, чтобы точками деления были все концы интегралов из K и чтобы часть $[a;b]$, оставшаяся вне покрытия K (она замкнута и $f(x)$ на ней непрерывна), была разбита новыми точками деления так, чтобы на $[x_k, x_{k+1}]$ включающем x_i, x_{i+1}, ко 2-й части – все остальные. $\sum^{/} \omega_i \Delta x_i < \delta(b-a)$, $\sum^{//} \omega_i \Delta x_i < \omega(f)\gamma$.

Имеем: $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \delta(b-a)+\omega(f)\gamma$, и может быть сделана сколь угодно малой, тогда $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$ и интеграл Римана существует.
Теорема доказана.

Второй результат связан с мерой Лебега и представляет собой самый удобный критерий интегрируемости по Риману.

Теорема 2 (А. Лебег)

Ограниченная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она на $[a;b]$ непрерывна почти всюду.

Доказательство

1. Необходимость

Пусть $f(x)\in Ri[a,b]$. Множество точек разрыва $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{\frac{1}{n}}$. По теореме 1 $mesA_{\frac{1}{n}}=0 \Rightarrow mes^{*}A_{\frac{1}{n}}=0$. Значит, каждое множество $A_{\frac{1}{n}}$ можно покрыть системой включающих отрезков общей длины $\frac{\varepsilon}{2^n}, \forall\varepsilon>0$. Тогда все множество A покрывается не более чем счетной системой отрезков общей длиной $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$. Это означает, что $mA\le\varepsilon \;\; \forall\varepsilon>0 \Rightarrow mA=0.$

2. Достаточность

Пусть $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна почти всюду. Тогда $mA=0$ и A покрывается системой отрезков с общей длинной $\le\varepsilon, \forall\varepsilon>0$. Тогда $\forall A_{\frac{1}{n}}$ покрывается системой отрезков со сколь угодно малой общей длиной. Значит, $mes^* A_{\frac{1}{n}} = 0$, тогда $A_{\frac{1}{n}}$ измеримы по Жордану и $mesA_{\frac{1}{n}} = 0$. Тогда и $mesA_\delta = 0 \ \ \forall\delta > 0$. В силу теоремы 1 $f(x) \in Ri[a,b]$.

Теорема доказана.

Перейдем к простому обобщению интеграла Римана.

§ 2. Интеграл Стилтьеса

Т. Стилтьес (1854–1894) – голландский математик.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на отрезке $[a;b]$. Выполним (T)-разбиение $[a;b]$. Обозначим $\Delta g_k = g(x_{k+1}) - g(x_k)$. Выберем $c_k \in [x_k;\ x_{k+1}]$. Составим интегральную сумму Стилтьеса:

$$S_S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta g_k.$$

Если при $\lambda(T) \to 0 \exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_S(T) = I_S$, то число I_S называется интегралом Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a;b]$. Запись: $I_S = (S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

Аналогично интегралу Римана вводятся суммы Дарбу-Стилтьеса и интегралы Дарбу-Стилтьеса. Интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса при $g(x) = x$.

Свойства интеграла Стилтьеса:

1^0. $(S)\int\limits_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$.

2^0. $(S)\int\limits_a^b (f(x)\pm\varphi(x))dg(x)=(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)\pm(S)\int\limits_a^b \varphi(x)dg(x)$.

3^0. $(S)\int\limits_a^b f(x)d(g_1(x)\pm g_2(x))=(S)\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)\pm(S)\int\limits_a^b f(x)dg_2(x)$.

4^0. $(S)\int\limits_a^b \alpha f(x)dg(x)=\alpha(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

5^0. $(S)\int\limits_a^b f(x)d(\beta g(x))=\beta(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

6^0. $g(x)\equiv const$ на отрезке $[a;b]\Rightarrow(S)\int\limits_a^b f(x)fg(x)=0$.

7^0. $a<c<b\Rightarrow(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)=(S)\int\limits_a^c f(x)dg(x)+(S)\int\limits_c^b f(x)dg(x)$.

8^0. Если $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|=M(f)$, $g(x)-$ ФОВ на отрезке $[a;b]$, то $\left|(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)\right|\le M(f)\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$.

Доказательства аналогичны интегралу Римана и получаются легко из рассмотрения соответствующих интегральных сумм.

Рассмотрим проблемы существования и вычисления интеграла Стилтьеса.

Теорема 1

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а $g(x)$ есть ФОВ на отрезке $[a;b]$, то $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ существует.

Доказательство

В силу того что ФОВ есть разность возрастающих функций и свойств интеграла Стилтьеса, достаточно считать, что $g(x)$

возрастает на отрезке $[a;b]$. Выполним (T) – разбиение $[a;b]$. $\underline{m}_k$ и $\overline{m}_k$ имеют тот же смысл, что и для интеграла Римана. Составим нижнюю и верхнюю интегральные суммы Дарбу-Стилтьеса. $\underline{S}(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\underline{m}_k\Delta g_k$, $\overline{S}(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\overline{m}_k\Delta g_k$. Они имеют свойства, аналогичные свойствам сумм Дарбу для интеграла Римана. Обозначим $\underline{I}=\sup\limits_{T}\{\underline{S}(T)\}$.

Поскольку $\underline{S}(T)\le\underline{I}\le\overline{S}(T)$ и $\underline{S}(T)\le S(T)\le\overline{S}(T)$, то $\left|S(T)-\underline{I}\right|\le\overline{S}(T)-\underline{S}(T)$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, для $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\left|x^{**}-x^{*}\right|<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow\left|f(x^{**})-f(x^{*})\right|<\varepsilon.$

Следовательно, при $\lambda(T)<\delta$ будет $\omega_k=\overline{m}_k-\underline{m}_k<\varepsilon$. Значит, $\overline{S}(T)-\underline{S}(T)<\varepsilon(g(b)-g(a))$.

Получаем: $\left|S(T)-\underline{I}\right|<\varepsilon(g(b)-g(a))$; это означает, что $\exists\lim\limits_{\lambda(T)\to0}S(T)=\underline{I}$, т. е. $\underline{I}=(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

Теорема доказана.

Теорема 2

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $g(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$, а $g'(x)$ интегрируема по Риману, то интеграл Стилтьеса существует, причем $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)=(R)\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx.$

Доказательство

В силу интегрируемости $g'(x)$ она ограничена на отрезке $[a;b]$. Следовательно, $g(x)$ есть функция с условием Липшица, а значит, есть ФОВ. $f(x)g'(x)$ на отрезке $[a;b]$ почти всюду непрерывна. Следовательно, оба интеграла существуют. Покажем, что они равны.

Для произвольного (T) – разбиения $[a;b]$ к $\Delta g_k = g(x_{k+1}) - g(x_k)$ применим формулу Лагранжа: $\Delta g_k = g'(x_k^*)\Delta x_k$, $x_k < x_k^* < x_{k+1}$.

Поскольку интегралы существуют, то можно брать c_k произвольно из $[x_k;\, x_{k+1}]$. Положим $c_k = x_k^*$.

Тогда $S_S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta g_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)g'(x_k^*)\Delta x_k = S_R(T)$ для функции $\varphi(x) = f(x)g'(x)$. Переходя к пределу $\lambda(T) \to 0$, получаем требуемое равенство.

Теорема доказана.

Эта теорема дает возможность во многих случаях сводить вычисления интеграла Стилтьеса к вычислению интеграла Римана. Нередко встречается специальный случай для $g(x)$.

Теорема 3

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а $g(x)$ – ступенчатая (кусочно-постоянная) с точками перехода $a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b.$ Тогда

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)(g(a+0) - g(a)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} f(c_k)(\,g(c_k+0) - g(c_k-0)) + f(b)(g(b) - g(b-0))\,.$$

Эта формула устанавливается непосредственным рассмотрением $S_S(T)$.

В некоторых случаях целесообразно поменять местами $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4 (интегрирование по частям)

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - (S)\int_a^b g(x)df(x).$$

Доказательство

Пусть существует $(S)\int_a^b f(x)dg(x).$

Рассмотрим интегральную сумму:

$$S_S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)g(x_k).$$

Отсюда

$$S(T) = -\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)(f(c_k) - f(c_{k-1})) +$$

$$+ f(c_{n-1})g(x_n) - f(c_0)g(x_0).$$

Прибавим и вычтем в правой части $f(x)g(x)\Big|_a^b = g(b)f(b) - g(a)f(a).$

Тогда

$$S(T) = f(x)g(x)\Big|_a^b - (g(a)(f(c_0) - f(a)) + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)(f(c_k) -$$

$$- f(c_{k-1})) + g(b)(f(b) - f(c_{n-1}))).$$

Это интегральная сумма для $\int_a^b g(x)df(x)$ с (T_1) – разбиением $a \le c_0 \le c_1 \le ... \le c_{n-1} \le b.$

Точки $a, x_1, ..., x_{n\text{-}1}, b$ входят в соответствующие частичные сегменты. Если $\Delta x_k \to 0$, то и $\Delta c_k \to 0$. Переходя к пределу, получаем требуемое равенство.

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса.

Теорема 5

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f_0(x)$ на отрезке $[a;b]$, $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, $g(x)$ – ФОВ на отрезке $[a;b]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(S)\int\limits_a^b f_n(x)dg(x) = (S)\int\limits_a^b f(x)dg(x).$

Доказательство

Обозначим $M_n = \max\limits_{[a;b]}|f_n(x) - f_0(x)|$. По 8^0

$\left|(S)\int\limits_a^b f_n(x)dg(x) - (S)\int\limits_a^b f_0(x)dg(x)\right| \le M_n \mathop{V}\limits_a^b(g).$ Поскольку $M_n \to 0$, при $n \to \infty$, то имеем требуемое соотношение.

Теорема доказана.

Теорема 6 (Э. Хелли, E. Helli)

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $g_n(x) \to g(x)$, $\mathop{V}\limits_a^b(g_n) \le V < +\infty \ \forall n \in N.$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(S)\int\limits_a^b f(x)dg_n(x) = (S)\int\limits_a^b f(x)dg(x).$

Доказательство

Вначале покажем, что $\mathop{V}\limits_a^b(g) \le V$. Выполним (T)–разбиение $[a;b]$ и рассмотрим $\sum\limits_{k=0}^{m-1}|g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \le V$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем: $\sum\limits_{k=0}^{m-1}|g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \le V$. Значит,

$g(x)$ –ФОВ на отрезке $[a;b]$. Далее $\forall\varepsilon>0$. Выполним такое (T)-разбиение $[a;b]$, что на каждом $[x_k;\, x_{k+1}]$ $\omega_k(f)<\dfrac{\varepsilon}{3V}$. Рассмотрим

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=0}^{m-1}(S)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dg(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(S)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x\ \ ))dg(x)+\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(S)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x).$$

Последние интегралы равны $g(x_{k+1})-g(x_k)$. На частичных сегментах $[x_k;\, x_{k+1}]$ будет $|f(x)-f(x_k)|<\dfrac{\varepsilon}{3V}$. Отсюда

$$\left|(S)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))dg(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{3V}\mathop{V}_{x_k}^{x_{k+1}}(g).$$

Складывая такие выражения, получаем, что первое слагаемое в (*) по модулю не превышает $\dfrac{\varepsilon}{3V}\mathop{V}_a^b(g)\le\dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)(g(x_{k+1})-g(x_k))+\frac{\gamma\varepsilon}{3},\qquad\text{где}\qquad |\gamma|\le 1.$$

Аналогично $(S)\int_a^b f(x)dg_n(x)=\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)(g_n(x_{k+1})-g(x_k))+\dfrac{\gamma_n\varepsilon}{3}$, где $|\gamma_n|\le 1$.

В силу сходимости $g_n(x)\to g(x)$ при $n>n_0$ будет: $\left|\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)(g_n(x_{k+1})-g_n(x_k))-\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)(g(x_{k+1})-g(x_k))\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда при $n>n_0$ имеем $\left|(S)\int_a^b f(x)dg_n(x)-(S)\int_a^b f(x)dg(x)<\varepsilon\right|$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Интеграл Стилтьеса применяется в теории вероятности, механике и других науках. Наглядным представлением этого интеграла является площадь трапеции с нелинейным масштабом по горизонтальной оси.

§ 3. Интеграл Лебега

Как следует из теоремы Лебега, интеграл Римана может интегрировать «не очень разрывные» функции, почти всюду непрерывные. Необходима иная конструкция интеграла. Её и ввел Лебег.

Пусть на измеримом множестве X задана измеримая ограниченная функция $f(x)$, причем $A < f(x) < B$. Сделаем (T) - разбиение $[A;B]$: $A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$.

Обозначим $e_k = X(y_k \le f(x) < y_{k+1})$, $k = 0,1,..., n$ -1. Множества e_k измеримы, попарно не пересекаются, $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_k = X, \sum\limits_{k=0}^{n-1} me_k = mX$. Выберем $y_k^* \in [y_k;\, y_{k+1})$. Составим интегральную сумму Лебега: $S_L(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* me_k$. Обозначим $\lambda(T) = \max\limits_k \Delta y_k$, где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Если $\exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_L(T) = I_{L,}$ то число I_L называется интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству X. Запись: $I_L = (L)\int\limits_x f(x)dx.$ Если $X = [a;b]$, то пишут $I_L = (L)\int\limits_a^b f(x)dx.$ Условия существования интеграла Лебега оказываются значительно менее ограниченными по сравнению с интегралом Римана.

Теорема 1

Каждая ограниченная измеримая на X функция, интегрируема по Лебегу на X .

Доказательство

Введем в рассмотрение функцию $g(y) = mX(f(x) < y)$. Покажем, что она монотонна на отрезке $[A;B]$. Пусть $y_1,\ y_2 \in [A;B]$ и $y_1 < y_2$.

Рассмотрим $g(y_2) - g(y_1) = mX(f < y_2) - mX(f < y_1) = = mX(y_1 \le f < y_2) \ge 0 \Rightarrow g(y_2) \ge g(y_1)$ и $g(y)$ монотонна.

Рассмотрим $S_L(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* me_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* mX(y_k \le f < y_{k+1}) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^*(g(y_{k+1}) - g(y_k)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* \Delta g_k$. Это интегральная сумма Стилтьеса для функции $\varphi(x) = y$, непрерывной на $[A;B]$ по функции $g(y)$, неубывающей $\Rightarrow$ФОВ на $[A;B]$. При $\lambda(T) = \max\limits_k \Delta y_k \to 0$ последняя сумма стремится к $(S)\int\limits_A^B ydg(y)$.

Следовательно, при $\lambda(T) \to 0$, $S_L(T)$ имеет предел $(L)\int\limits_X f(x)dx$ и он равен $(S)\int\limits_A^B ydy(y)$.

Теорема доказана.

Замечание

В определении интеграла Лебега есть некоторый произвол, связанный с выбором чисел A и B. На самом деле неоднозначности здесь не происходит.

Теорема 2

Если $A < A_1 < f(x) < B_1 < B,$ то значение интеграла Лебега не зависит от выбора A, B или A_1, B_1 .

Доказательство

Функция $g(y)$ из теоремы 1 на $[A;A_1]$ равна нулю. На $[B_1;B]$ она постоянна и равна mX. Тогда

$$(S)\int_A^B ydg(y) = (S)\int_A^{A_1} yd(y) + (S)\int_{A_1}^{B_1} ydg(y) + (S)\int_{B_1}^{B} ydg(y) =$$

$$= 0 + (S)\int_{A_1}^{B_1} ydg(y) + 0 = (S)\int_{A_1}^{B_1} ydg(y).$$

Теорема доказана.

Приступим к изучению свойств интеграла Лебега. Рассматриваемые функции считаем ограниченными и измеримыми на соответствующих множествах.

1^0. $\alpha \le f(x) \le \beta \ \forall x \in X \Rightarrow \alpha mX \le (L)\int_X f(x)dx \le \beta mX$.

Действительно, $\forall n \in N$ рассмотрим $\alpha_n = \alpha - \frac{1}{n}, \beta_n = \beta + \frac{1}{n}$. Тогда $\alpha_n \le f(x) \le \beta_n \quad \forall x \in X$. Очевидно, $\alpha_n mX \le S(T) \le \beta_n mX$. При $\lambda(T) \to 0$ получаем:

$$\alpha_n mX \le (L)\int_X f(x)dx \le \beta_n mX.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, имеем: $\alpha mX \le (L)\int_a^b f(x)dx \le \beta mX$.

2^0. $mX = 0 \Rightarrow (L)\int_X f(x)dx = 0$. Вытекает из 1^0.

3^0. $f(x) \ge 0$ на $X \Rightarrow (L)\int_X f(x)dx \ge 0$. Из 1^0.

4^0. $f(x) \equiv c$ на $X \Rightarrow (L)\int\limits_X f(x)dx = cmX$.

5^0. (Полная аддитивность интеграла Лебега):

$X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i, \overline{\overline{I}} \le IC_0$, $i \ne j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$.

Тогда $(L)\int\limits_X f(x)dx = \sum\limits_{i \in I}(L)\int\limits_{X_i} f(x)dx.$

Доказательство

Рассмотрим вначале случай $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Обозначим $e_k^* = X_1(y_k \le f < y_{k+1}), e_k^{**} = X_2(y_k \le f < y_{k+1})$.

Тогда $e_k^* \cup e_k^{**} = e_k$. Следовательно, $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* me_k =$ $= \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* me_k^* + \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k^* me_k^{**}$. Переходя к пределу при $\lambda(T) \to 0$, имеем: $(L)\int\limits_X = (L)\int\limits_{X_1} + (L)\int\limits_{X_2}$. По индукции это свойство распространяется на любое конечное дизъюнктное семейство $\{X_i\}$. Пусть теперь $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Обозначим $H_p = \bigcup\limits_{i=p+1}^{\infty} X_i$. Тогда $X = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i\right) \cup H_p$. При этом $mH_p = \sum\limits_{i=p+1}^{\infty} mX_i \to 0$ при $p \to \infty.$

По уже доказанному $(L)\int\limits_X = \sum\limits_{i=1}^{p}(L)\int\limits_{X_i} + (L)\int\limits_{H_p}$. По 1^0, $(L)\int\limits_{H_p} f(x)dx \to 0$ при $p \to \infty.$ Получаем: $(L)\int\limits_X f(x)dx =$ $= \lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{p}(L)\int\limits_{X_i} f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(L)\int\limits_{X_i} f(x)dx,$ что и требовалось.

6^0. $\left|(L)\int\limits_X f(x)dx\right| \le (L)\int\limits_X |f(x)|dx.$

Действительно, $|f|$ измерима на X. Введем обозначения: $X_1 = X(f \ge 0), X_2 = X(f < 0)$. X_1 и X_2 измеримы, $X_1 \bigcup X_2 = X, X_1 \bigcap X_2 = \varnothing$. Тогда

$$(L)\int\limits_X f(x)dx = (L)\int\limits_{X_1} f(x)dx + (L)\int\limits_{X_2} f(x)dx =$$

$$= (L)\int\limits_{X_1} |f(x)|dx - (L)\int\limits_{X_2} |f(x)|dx.$$

По свойствам модуля $\left|(L)\int\limits_X f(x)dx\right| \le (L)\int\limits_{X_1} |f(x)|dx +$ $+(L)\int\limits_{X_2} |f(x)|dx = \int\limits_X |f(x)|dx,$ что и требовалось.

7^0. $f(x) \sim \varphi(x)$ на $X \Rightarrow (L)\int\limits_X f(x)dx = (L)\int\limits_X \varphi(x)dx.$

Введем обозначения: $X_1 = X(f \ne g), X_2 = X \setminus X_1.$

Тогда $mX_1 = 0, X_2$ измеримо как разность измеримых множеств $X_1 \bigcup X_2 = X$, $X_1 \bigcap X_2 = \varnothing$. Следовательно, $(L)\int\limits_X f(x)dx = (L)\int\limits_{X_1} f(x)dx + (L)\int\limits_{X_2} f(x)dx$. Поскольку $mX_1 = 0,$ то $(L)\int\limits_{X_1} f(x)dx = (L)\int\limits_{X_1} \varphi(x)dx.$ На X_2, $f(x) = \varphi(x) \Rightarrow (L)\int\limits_{X_2} f(x)dx =$ $= (L)\int\limits_{X_2} \varphi(x)dx.$

Тогда $(L)\int\limits_X f(x)dx = (L)\int\limits_{X_1} \varphi(x)dx + (L)\int\limits_{X_2} \varphi(x)dx = (L)\int\limits_X \varphi(x)dx.$

Это свойство часто применяется для вычисления интегралов Лебега.

Пример

$(L)\int\limits_a^b Di(x)dx.$ Поскольку $Di(x) \sim 0$ на $[a;b]$, то получаем $(L)\int\limits_a^b 0dx = 0 \cdot m[a;b] = 0.$

8^0. $(L)\int\limits_X \alpha f(x)dx = \alpha(L)\int\limits_X f(x)dx.$

Доказательство

1. При $\alpha = 0$ обе части равны нулю.
2. Пусть $\alpha > 0$, $A < f(x) < B.$ Для произвольного (T) – разбиения, на $[y_k;\, y_{k+1})\alpha y_k \le \alpha f(x) \le \alpha y_{k+1.}$ По 1^0 $\alpha y_k me_k \le (L)\int\limits_{e_k} \alpha f(x)dx \le \alpha y_{k+1} me_k.$

Складывая, имеем: $\alpha \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k me_k \le (L)\int\limits_X \alpha f(x)dx \le \alpha \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_{k+1} me_k.$
В силу интегрируемости $f(x)$ обе суммы при $\lambda(T) \to 0$ стремятся к $(L)\int\limits_X f(x)dx,$ что и доказывает равенство.

3. $\alpha < 0.$ Аналогично.

9^0. $(L)(f(x) \ne \varphi(x))dx = (L)\int\limits_X f(x)dx \ne (L)\int\limits_X \varphi(x)dx.$

Выберем A и B так, чтобы на X, $A < f(x) < B$ и $A < \varphi(x) < B.$
Сделаем (T) – разбиение $[A;B]$.
Обозначим: $e_k^* = X(y_k \le f < y_{k+1})$, $e_k^{**} = X(y_k \le \varphi < y_{k+1})$, $e_{ij} = e_i^* \cap e_j^{**}$
Тогда $y_i + y_j \le f + \varphi < y_{i+1} + y_{j+1}\ \forall x \in e_{ij}.$

$\bigcup_{j=0}^{n-1} e_{ij} = e_i^*, \bigcup_{i=0}^{n-1} e_{ij} = e_j^{**}, \ \bigcup_i \bigcup_j e_{ij} = X \ e_{ij}$ попарно не пересекаются.

По 1^0 $(y_i + y_j)me_{ij} \le (L)\int_{e_{ij}} (f+\varphi)dx \le (y_{i+1} + y_{j+1})me_{ij}$.

Также $(L)\int_X (f+\varphi)dx = \sum_i \sum_j (L)\int_{e_{ij}} (f+\varphi)dx.$

Получаем:

$$\sum_i \sum_j (y_i + y_j)me_{ij} \le (L)\int_X (f+\varphi)dx \le \sum_i \sum_j (y_{i+1} + y_{j+1})me_{ij}, \quad (*)$$

$$\sum_i \sum_j (y_i + y_j)me_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{j=0}^{n-1} me_{ij} + \sum_{j=0}^{n-1} y_j \sum_{i=0}^{n-1} me_{ij} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_i me_i^* + \sum_{j=0}^{n-1} y_j me_j^{**} \to (L)\int_X f dx + (L)\int_X \varphi dx \text{ при } \lambda(T) \to 0.$$

Аналогично сумма справа в (*) при $\lambda(T) \to 0$ стремится к тому же пределу.

Окончательно: $(L)\int_X (f+\varphi)dx = (L)\int_X f dx + (L)\int_X \varphi dx.$

Для разности имеем: $f - \varphi = f + (-1)\varphi$ и свойства 8^0, 9^0.

10^0. Если $f \le \varphi$ почти всюду на X, то $(L)\int_X f dx \le (L)\int_X \varphi dx.$

Действительно, $h(x) = \varphi(x) - f(x) \ge 0$ почти всюду на X.

$(L)\int_X \varphi dx - (L)\int_X f dx = \int_X (\varphi - f)dx \ge 0.$ Рассмотрим еще проблему предельного перехода под знаком интеграла Лебега.

Теорема 3 (А. Лебег)

Пусть функции $f_n(x)$ ограничены и измеримы на множестве X, $f_n(x) \rightrightarrows f_0(x), f_0(x)$ – ограничена и измерима на X, функции последовательности равномерно ограничены на $X (|f_n(x)| < K \forall x \in X \forall n \in N).$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int\limits_X f_n(x)dx=(L)\int\limits_X f_0(x)dx.$

Доказательство

Покажем, что $|f_0(x)|\le K$ почти всюду на X. Из $(f_n(x))_{n\in N}$ можно выделить подпоследовательность $f_{n_k}(x)$ по теореме Рисса, сходящуюся к $f_0(x)$, почти всюду на X. Переходя к пределу в $|f_{n_k}(x)|<K$ при $K\to\infty$, получаем $|f_0(x)|\le K$. Пусть $\delta>0$.

Обозначим:

$A_n(\delta)=X(|f_n-f_0|\ge\delta), B_n(\delta)=X(|f_n-f_0|<\delta).$

Тогда $(L)\int\limits_X f_n dx-\int\limits_X f_0 dx\le(L)\int\limits_X|f_n-f_0|dx=(L)\int\limits_{A_n(\delta)}|f_n-f_0|dx+$ $+(L)\int\limits_{B_n(\delta)}|f_n-f_0|\,dx.$ Поскольку $|f_n-f_0|\le|f_n|+|f_0|,$ то почти всюду на $A_n(\delta)$ будет $|f_n-f_0|<2K.$

Тогда по 1^0 $(L)\int\limits_{A_n(\delta)}|f_n-f_0|dx\le 2KmA_n(\delta).$

Аналогично $\int\limits_{B_n(\delta)}|f_n-f_0|\,dx\le\delta mB_n(\delta)\le\delta mX.$

Имеем: $|(L)\int\limits_X f_n dx-(L)\int\limits_X f_0 dx|\le 2KmA_n(\delta)+\delta mX$ $\forall\varepsilon>0$ найдем $\delta>0:\delta mX<\dfrac{\varepsilon}{2}.$ Тогда $mA_n(\delta)\to 0$ и при достаточно больших $n, 2K\cdot mA_n(\delta)<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

Получаем: $|(L)\int\limits_X f_n dx-(L)\int\limits_X f_0 dx|<\varepsilon,$ что и доказывает предельный переход.

Теорема доказана.

Замечание 1

Теорема остается верной и в случае, когда неравенство $|f_n(x)| < K$ выполняется почти всюду на X.

Замечание 2

Поскольку сходимость по мере шире, чем сходимость почти всюду, тем более простой поточечной, тем более равномерной, то и в этих случаях предельный переход под знаком интеграла Лебега является законным.

§ 4. Сравнение интегралов Римана и Лебега

При вычислении интеграла Лебега точки $x \in X$ объединяют по признаку их близости по оси *Ox*. Значения $f(x)$ при этом могут сильно отличаться. Для непрерывных и почти непрерывных функций при близких x_1, x_2 значения y_1 и y_2 тоже достаточно близки. Это обеспечивает существование $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_R(T)$ и интегрируемость по Риману. По достаточно «сильной» разрывности $f(x)$ значения y_1 и y_2 могут очень отличаться, хотя и x_1 близко к x_2. Это приводит к тому, что выбор других c_k сильно меняет $S_R(T)$ и $\overline{\exists} \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_R(T)$. В этом причина того, что интеграл Римана не берет более-менее существенно разрывные функции.

В интеграле Лебега значения x объединяются во множестве e_k как раз по близости значений y. Это позволяет мало менять $S_L(T)$ при малых изменениях y_k^*. В результате (L) – интегрируемых функций значительно больше, чем (R) – интегрируемы те и только те, что почти всюду непрерывны, а (L) – интегрируемы все измеримые.

Соотношение интегралов Римана и Лебега дает следующая теорема.

Теорема

Если $f(x)$ (R) – интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она (L) – интегрируема и $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (R)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство

Пусть $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема по Риману. Покажем, что она измерима на отрезке $[a;b]$.

Введем обозначения: $S=[a;b], M=S(f\geq\alpha), \alpha\in R$. Покажем, что M измеримо. Выполняется равенство:

$$M=(M\bigcup M')\setminus M'\bigcap(S\setminus M). \qquad (*)$$

Поскольку, как известно, S замкнуто, $M\subset S$, то $M'\subset S$. Ясно, что $M'\supset M'\bigcap(S\setminus M)$.
Тогда $M\subset(M\bigcup M')\setminus M'\bigcap(S\setminus M)$.
Обратно, $\forall x\in(M\bigcup M')\setminus M'\bigcap(S\setminus M)$. Это означает, что $x\in M\bigcup M'$ и $x\overline{\in} M'\bigcap(S\setminus M)$. Отсюда $x\in M$, то $x\in S\setminus M\Rightarrow x\in M'\Rightarrow x\in M'\bigcap(S\setminus M)$ что не выполняется. Тогда множества из $(*)$ равны.

$M\bigcup M'=\overline{M}$ – замкнуто $\Rightarrow$ измеримо. Для измеримости M нужна измеримость $M'\bigcap(S\setminus M)$. Покажем, что $M'\bigcap(S\setminus M)\subset E$ – множество точек разрыва $f(x)$, тогда теорема Лебега об интеграле Римана, дает $mE=0$.

Допустим противное: $\exists x_0\overline{\in} E: x_0\in M'\bigcap(S\setminus M)$ Тогда $x_0\in M', x_0\overline{\in} M$. В точке x_0 $f(x)$ непрерывна. Так как $x_0\overline{\in} M$, то $f(x_0)<\alpha$. x_0 – предельная точка $M\Rightarrow\exists(x_n)_{n\in N}\subset M: x_n\to x_0. x_n\in M\Rightarrow f(x_n)\geq\alpha$. Вследствие непрерывности $f(x)$ в точке x_0, переходя к пределу при $n\to\infty$, имеем $f(x_0)\geq\alpha$. Противоречие.

Итак, $M' \bigcap (S \setminus M) \subset E \Rightarrow M' \bigcap (S \setminus M)$ измеримо и имеет меру нуль. Тогда M измеримо, $f(x)$ измерима на отрезке $[a;b]$, значит, интегрируема по Лебегу.

Покажем, что $I_R = I_L$. Для любого (T) – разбиения $[a;b]$

$\underline{m}_k \Delta x_k \le (L) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \le \overline{m}_k \Delta x_k$ по 1^0.

Суммируем по k, имеем $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \underline{m}_k \Delta x_k \le I_L \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} \overline{m}_k \Delta x_k$. При $\lambda(T) \to 0$ суммы стремятся к интегралам Дарбу $\underline{I}_R$ и $\overline{I}_R$. Поскольку $\exists I_R$, то $\underline{I}_R = \overline{I}_R = I_R$. Получаем $(R)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_a^b f(x)dx.$

Теорема доказана.

Этот результат удобно использовать для вычисления интегралов Римана, сводя их к интегралам Лебега и возвращаясь опять к интегралу Римана по эквивалентной функции. Этот метод особенно хорош тогда, когда обычными способами интеграл Римана вычислить неудобно.

Пример

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \ne \dfrac{1}{n}, \\ -x^2; & x = \dfrac{1}{n}, \end{cases} \quad n \in N, \text{ на отрезке } [0;1].$$

$f(x)$ имеет разрывы в точках $x = \dfrac{1}{n}$. Множество точек разрыва имеет меру нуль, поскольку счетно и ограничено. Следовательно, $f(x)$ интегрируема по Риману. Формула Ньютона-Лейбница неприменима, по определению вычислить сложно.

Используем теорему:

$$(R)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 f(x)dx,$$

$f(x)$~1 на отрезке [0;1].

Тогда $(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 1dx = (R)\int_0^1 dx = 1.$

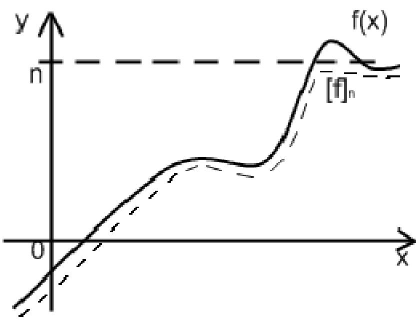
Следовательно, $(R)\int_0^1 f(x)dx = 1.$

§ 5. Обобщенный интеграл Лебега от неотрицательной функции

Здесь мы обобщим понятие интеграла Лебега на некоторые неограниченные функции. Пусть сначала функция неотрицательна и измерима на X. $\forall n \in N$, определим на X новую функцию:

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), \ \textit{если}\ f(x) \le n, \\ n, \quad \textit{если}\ f(x) > n. \end{cases}$$

Эта функция называется срезом, или срезкой, $f(x)$ по уровню $n \in N$.



Срезка также измерима на X: $X([f]_n > a) = \begin{cases} X(f(a)), a < n, \\ \varnothing, \quad a \geq n. \end{cases}$

$[f]_n$ измерима и ограничена $\Rightarrow$ интегрируема на X.

Поскольку $[f]_1 \leq [f]_2 \leq \ldots \leq [f]_n \leq \ldots$, то $(L)\int\limits_X [f]_1 dx \leq \ldots \leq \int\limits_X [f]_n dx \leq \ldots$ Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X [f]_n dx$ конечный или равный $+\infty$. Это значение называется обобщенным интегралом от $f(x)$ по X.

Запись: $[L]\int\limits_X f(x)dx.$ Для ограниченной измеримой функции при достаточно больших $n \in N$ будет $[f(x)]_n \equiv f(x)$ и для нее $[L]\int\limits_X f(x)dx = (L)\int\limits_X f(x)dx.$

Если обобщенный интеграл конечен, то $f(x)$ называется суммируемой на X. Множество таких функций обозначается $L(X)$.

СВОЙСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ:

1^0. Суммируемая функция почти всюду конечна.

Доказательство

Обозначим $A = X(f = +\infty)$. На множестве $A, [f(x)]_n \equiv n.$ $(L)\int\limits_X [f]_n dx \geq (L)\int\limits_A [f]_n dx = n \cdot mA.$ При $mA > 0$ будет $(L)\int\limits_X [f]_n dx = +\infty,$ что противоречит суммируемости $f(x)$.

Теорема доказана.

2^0. На множестве меры нуль каждая неотрицательная функция суммируема, причем $[L]\int\limits_X f(x)dx = 0$.

Доказательство

$$(L)\int_X [f]_n\,dx = 0 \Rightarrow [L]\int_X f(x)dx = 0\,.$$

3^0. $f \sim g \Rightarrow [L]\int_X f(x)dx = [L]\int_X g(x)dx\,.$

Доказательство

$f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow [f]_n(x_0) = [g]_n(x_0) \Rightarrow [f]_n \sim [g]_n\,.$

4^0. $Y \subset X$ – измеримо $\Rightarrow [L]\int_Y f(x)dx \le [L]\int_X f(x)dx\,.$

5^0. $f \le g$ на $X \Rightarrow [L]\int_X f(x)dx \le [L]\int_X g(x)dx\,.$

Эти свойства получаются рассмотрением интегралов от срезок и предельным переходом при $n \to +\infty$.

6^0. $[L]\int_X f(x)dx = 0 \Rightarrow f \sim 0\,.$

Доказательство

Поскольку $0 \le (L)\int_X [f]_1\,dx \le [L]\int_X f(x)dx,$ то $[f]_1 \sim 0$. $[f]_1$ принимает только 2 значения: 1 и $f(x)$. Значит, $[f]_1 \sim 0$.

7^0. $[L]\int_X (f+g)dx = [L]\int_X f(x)dx + [L]\int_X g(x)dx\,.$

Доказательство

С одной стороны, $[f]_n + [g]_n \le f + g$, следовательно, $(L)\int_X [f]_n dx + (L)\int_X [g]_n dx \le [L]\int_X (f+g)dx.$ С другой стороны, $[f+g]_n \le [f]_n + [g]_n$. Это легко установить, рассмотрев случай для $f(x_0), g(x_0)$ относительно $n \in N$. Интегрируя это неравенство и переходя к пределу при $n \to +\infty$, имеем $[L]\int\limits_X (f+g)dx \le [L]\int\limits_X fdx + [L]\int\limits_X gdx.$ Отсюда получаем требуемое равенство.

8^0. $\alpha \in R, \alpha \ge 0 \Rightarrow [L]\int\limits_X \alpha fdx = \alpha[L]\int\limits_X fdx$.

Доказательство

При $\alpha = 0$ очевидно.

При $\alpha = n \in N$ вытекает из свойства 7^0.

При $\alpha = \dfrac{1}{m}, m \in N$ из 7^0 следует $[L]\int\limits_X fdx = m[L]\int\limits_X \dfrac{1}{m} fdx \Rightarrow$

$\Rightarrow [L]\int\limits_X \dfrac{1}{m} fdx = \dfrac{1}{m}[L]\int\limits_X fdx.$

Отсюда и из свойства 7^0 получаем равенство для $\alpha \in Q.$ Пусть $\bar{\alpha} \in Q.$ Выбираем $r_1, r_2 \in Q, r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 < \alpha < r_2.$
По 5^0, $r_1[L]\int\limits_X fdx \le [L]\int\limits_X \alpha fdx \le r_2[L]\int\limits_X fdx.$ В пределе при $r_{1,2} \to \alpha$ получаем нужное равенство.

9^0. Если при $x = x_0 \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f_0(x_0)$ то $\forall k \in N, \lim\limits_{n\to+\infty} [f_n]_k(x_0) = [f_0]_k(x_0).$

Доказательство

Рассмотрим возможные случаи.

1. $f_0(x_0) > k$. Тогда при достаточно больших n, будет $f_n(x_0) > k$ и для таких n, $[f_n]_k = k = [f_0(x_0)]_k$.

2. $f_0(x_0) < k$. При достаточно больших n, будет $f_n(x_0) < k$ и $[f_n(x_0)]_k = [f_n(x_0)] \to f_0(x_0) = [f_0(x_0)]_k$.

3. $f_0(x_0) = k$. $\forall \varepsilon > \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) > k - \varepsilon$ значит $k - \varepsilon < [f_n(x_0)]_k \le k \Rightarrow \left|[f_0(x_0)]_k - [f_n(x_0)]_k\right| < \varepsilon.$

10^0. ***(Теорема П. Фату).*** Пусть $(f_n(x))_{n\in N}$ задана на X. Функции последовательности неотрицательны и измеримы на X, $f_n \dashrightarrow f_0$. Тогда $[L]\int\limits_X f_0 dx \le \sup\limits_n\{[L]\int\limits_X f_n dx\}$.

Доказательство

По свойству 9^0 имеем $[f_n(x)]_k \dashrightarrow [f_0(x)]_k$ при $n \to +\infty$. Применим теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $(L)\int\limits_X [f_0]_k dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_X [f_n]_k dx.$ При любом $n \in N$ выполняется неравенство: $(L)\int\limits_X [f_n]_k dx \le (L)\int\limits_X f_n dx \le \sup\limits_n\{(L)\int\limits_X f_n dx\}.$

Перейдя к пределу при $n \to +\infty$, имеем: $(L)\int\limits_X [f_0]_k dx \le \sup\limits_n\{(L)\int\limits_X f_n dx\}.$

Перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получаем нужное равенство. В частности, если все f_n суммируемы, то и f_0 суммируема.

11^0. Если в условиях свойства 10^0, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n dx$, то

$[L]\int\limits_X f_0(dx) \le \lim\limits_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)dx$.

Доказательство

Если этот предел равен $+\infty$, то очевидно. Пусть он равен $l < +\infty$. Тогда $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow [L]\int\limits_X f_n dx < l + \varepsilon$.

Применив свойство 10^0 к $f_m(x), m > n_0$ имеем:

$[L]\int\limits_X f_0 dx \le l + \varepsilon \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow [L]\int\limits_X f_0 dx \le l$.

12^0. ***(Теорема Б. Леви)***

Пусть функции $f_n(x), n \in N$,
$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$ измеримы на X, причем $f_n(x) \to f_0(x)$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)dx = [L]\int\limits_X f_0(dx)$.

Доказательство

Предел существует в силу свойства 11^0, причем $[L]\int\limits_X f_0(dx) \leq \lim\limits_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)dx$. Поскольку также $f_n(x) \leq f_0(x) \forall n \in N$, то $[L]\int\limits_X f_n(x)dx \leq [L]\int\limits_X f_0(dx)$. В пределе $\lim\limits_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)dx \leq [L]\int\limits_X f_0(dx)$. Отсюда равенство.

13^0. Если $U_k(x) \geq 0$ – измеримы на X и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(x) = f_0(x)$, то и $[L]\int\limits_X f_0(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}[L]\int\limits_X U_k(x)dx$.

Доказательство

Достаточно применить свойство 12^0 к частичным суммам ряда.

14^0. Если в условиях свойства 13^0, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[L]\int\limits_X U_k(x)dx < +\infty$, то почти всюду на X, $\lim\limits_{k\to\infty} U_k(x) = 0$.

Доказательство

В этом случае $f_0(x)$ суммируема $\Rightarrow$ почти всюду конечна. Значит, ряд сходится почти всюду на X, а в этих точках $x_0 \in X$, $\lim\limits_{k\to\infty} U_k(x_0) = 0$ обязательно.

15^0. ***(Полная аддитивность обобщенного интеграла Лебега).***

Пусть $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, $\overline{\overline{I}} \le IC_0$, X, X_i – измеримы, $i \ne j \Rightarrow X_i \bigcap X_j = \varnothing$.

Тогда $\forall f(x)$ на X, измеримой и неотрицательной, будет $[L]\int\limits_X f(x)dx = \sum\limits_{i\in I}[L]\int\limits_{X_i} f(x)dx$.

Доказательство

Введем функции $U_k(x), k \in N : U_k(x) = \begin{cases} f(x), x \in X_k, \\ 0, x \in X \setminus X_k. \end{cases}$

Тогда $f(x) = \sum\limits_k U_k(x)$ и в силу свойства 7^0 или свойства 14^0

$$[L]\int\limits_X f(x)dx = \sum\limits_k [L]\int\limits_X U_k(x)dx. \qquad (*)$$

Вычислим последние интегралы.

$$[U_k(x)]_n = \begin{cases} [f(x)]_n, \ x \in X_k, \\ 0, \ x \in X \setminus X_k. \end{cases}$$

Отсюда $(L)\int\limits_X [U_k(x)]_n dx = (L)\int\limits_X [f]_n dx$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя (*), получаем нужное равенство.

§ 6. Обобщенный интеграл Лебега от функций произвольных знаков

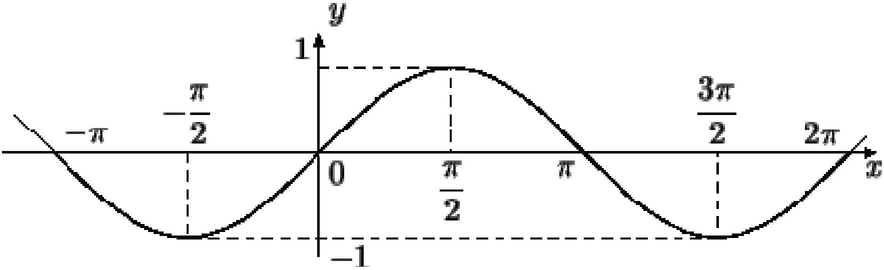
Пусть $f(x)$ измерима на X. Введем понятия положительной и отрицательной частей функции.

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), \ \ f(x) \ge 0, \\ 0, \ \ f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_{=}(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Пример

$$f(x) = \sin x, \quad X = [0, 2\pi].$$



$$f_{+}(x) = \begin{cases} \sin x, x \in [0, \pi], x = 2\pi, \\ 0, x \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

$$f_{-}(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0, \pi], \ x = 2\pi, \\ -\sin x, \ x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Очевидно, $f(x) = f_{+}(x) - f_{-}(x), \ \left| f(x) \right| = f_{+}(x) + f_{=}(x).$

Поскольку $f_{+}(x), f_{-}(x)$ неотрицательны, то можно рассматривать $[L]\int\limits_X f_{+}(x)dx,$ $[L]\int\limits_X f_{-}(x)dx,$ поскольку $f_{+}(x), f_{-}(x)$, очевидно, измеримы. Если хотя один из указанных интегралов конечен, то обобщенным интегралом Лебега для $f(x)$ называется $[L]\int\limits_X f_{+}(x)dx - [L]\int\limits_X f_{-}(x)dx.$ Это значение конечно или равно $\pm\infty$. Запись: $[L]\int\limits_X f(x)dx.$

Таким образом, $\exists [L]\int\limits_X f(x)dx$ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций $f_{+}(x), f_{-}(x)$ суммируема. Если обе они суммируемы, то интеграл конечен и $f(x)$ называется суммируемой на X. Множество этих функций обозначается $L(X)$. В частности, можно рассматривать $L[a,b]$. Вопрос о суммируемости функции можно свести к рассмотрению неотрицательной функции.

Теорема

Измеримая $f(x)$ суммируема тогда и только тогда, когда суммируема $|f(x)|$, при этом, $\left|[L]\int\limits_X f(x)dx\right| \le [L]\int\limits_X |f(x)|dx.$

Доказательство

Поскольку $|f| = f_+ + f_-$, то и $[L]\int\limits_X |f|dx = [L]\int\limits_X f_+ dx + [L]\int\limits_X f_- dx.$

Конечность левой и правой частей имеет место одновременно. Неравенство следует из условий:

$|f| = |f_+ + f_-| \le |f_+| + |f_-| = f_+ + f_- = |f|.$

Теорема доказана.

Как и для неотрицательных функций, измеримая ограниченная функция суммируема и $[L]\int\limits_X f(x)dx = (L)\int\limits_X f(x)dx.$

Свойства суммируемых функций:

1^0. Суммируемая функция почти всюду конечна.

2^0. На множестве меры нуль суммируема любая функция и интеграл равен нулю.

3^0. $f(x) \in L(X), Y \subset X$ - измеримо $\Rightarrow f(x) \in L(Y)$.

4^0. $f(x),\ g(x) \in L(X),\ |f(x)| \le |g(x)| \Rightarrow$
$\Rightarrow [L]\int\limits_X |f|dx \le [L]\int\limits_X |g|dx$.

Эти свойства вытекают из теоремы и свойств неотрицательных суммируемых функций.

5^0. Если $f(x), g(x)$ измеримы на X, $|f(x)| \le g(x), x \in X$, и $g(x) \in L(X)$, то $f(x) \in L(X)$.

Вытекает из свойств §5 (см. стр.180).

6^0. Если $f(x) \sim \mathrm{g(x)}$, то $\exists [L] \int\limits_X f dx \Leftrightarrow \exists [L] \int\limits_X g dx$, причем эти интегралы равны.

Доказательство

Очевидно, $f(x) \sim \mathrm{g(x)} \Rightarrow \mathrm{f}_+(x) \sim \mathrm{g}_+(x)$ и $f_-(x) \sim g_-(x)$.

Отсюда вытекает утверждение. В частности, $f(x) \in L(X) \Leftrightarrow g(x) \in L(X)$.

7^0. ***(Конечная аддитивность интеграла).***

Пусть $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $i \ne j \Rightarrow X_i \bigcap X_j = \varnothing$, X_i измеримы.

Тогда $f(x) \in L(X_i), i = 1 \div n \Rightarrow f(x) \in L(X)$, причем $[L] \int\limits_X f(x) dx = \sum\limits_{i=1}^{n} [L] \int\limits_{X_i} f(x) dx.$

Доказательство

По свойствам суммируемых неотрицательных функций

$f_+(x) \in L(X), f_-(x) \in L(X)$

и $[L] \int\limits_X f_+(x) dx = \sum\limits_{i=1}^{n} [L] \int\limits_{X_i} f_+(x) dx, [L] \int\limits_X f_-(x) dx = \sum\limits_{i=1}^{n} [L] \int\limits_{X_i} f_-(x) dx.$

Вычитая эти равенства, получаем нужное соотношение.

Замечание

Счетная аддитивность не выполняется:

$$f(x)\in L(X_i) \quad \not\Rightarrow \quad f(x)\in L(X).$$

Пример

$$X=[0,1],\ X_n=\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],$$

$$f(x)=\begin{cases} n, \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}<x\le\dfrac{1}{n}, \\ -n, \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}, \end{cases} \quad n\in N$$

$f(x)\in L\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\ [L]\int\limits_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} f(x)=0,$ но на $(0,1]$ $f(x)$

несуммируема:

$$[L]\int\limits_{(0,1]}|f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}[L]\int\limits_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]}|f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.$$

Полная аддитивность имеет место «в обратную сторону».

8^0. Если $f(x)\in L(X), X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n,\ i\ne j\Rightarrow X_i\bigcap X_j=\varnothing,\ X_i$ – измеримы, то $[L]\int\limits_X f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[L]\int\limits_{X_n} f(x)dx.$

Доказательство

Суммируемость $f(x)$ на X_n вытекает из 3^0, равенство – из свойств неотрицательных суммируемых функций и представления $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$.

При выполнении простого дополнительного условия можно обеспечить полную аддитивность интеграла.

9^0. Если $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n, i\neq j\Rightarrow X_i\bigcap X_j=\varnothing, X_n$ – измеримы, $f(x)\in L(X_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[L]\int\limits_{X_n}|f(x)|dx<+\infty$, то $f(x)\in L(X)$ и $[L]\int\limits_X f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[L]\int\limits_{X_n}f(x)dx$.

Доказательство

В силу полной аддитивности интеграла для неотрицательных функций,

$$[L]\int\limits_X|f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}[L]\int\limits_{X_n}|f(x)|dx<+\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(x)|\in L(x)\overset{T}{\Rightarrow}f(x)\in L(x).$$

Остается применить 8^0.

Рассмотрим свойства, связанные с арифметическими операциями над функциями.

10^0. $f(x)\in L(X),\lambda\in R\Rightarrow\lambda f\in L(X),[L]\int\limits_X\lambda f(x)dx=\lambda[L]\int\limits_X f(x)dx$.

Доказательство

1. При $\lambda=0$, очевидно, что это свойство верно.

2. $\lambda>0$. Очевидно, $(\lambda f)_+=\lambda f_+,(\lambda f)_-=\lambda f_-$. Интегрируя эти равенста и вычитая из первого второе, получаем требуемое.

3. $\lambda=-1$. Очевидно, $(-f)_+=f_-,(-f)_-=f_+$. Отсюда $[L]\int\limits_X(-f)dx=[L]\int\limits_X f_-dx-[L]\int\limits_X f_+dx=-[L]\int\limits_X fdx$. Для $\lambda=-1$ верно.

4. $\lambda<0$. $[L]\int\limits_X\lambda fdx=-[L]\int\limits_X(-\lambda)fdx=-(-\lambda)[L]\int\limits_X fdx=\lambda[L]\int\limits_X fdx$.

11^0. $f(x) \in L(X), g(x)$ измерима и ограничена на $X \Rightarrow f(x)g(x) \in L(X)$.

Доказательство

Известно, что тогда fg измерима. Также $|g(x)| \le \lambda \forall x \in X$. Отсюда $|fg| \le \lambda |f|$. Следовательно, $fg \in L(X)$.

12^0. $f(x) \in L(X)$, $g(x) \in L(X) \Rightarrow f+g \in L(X)$ и $[L]\int\limits_X (f+g)dx = [L]\int\limits_X fdx + [L]\int\limits_X gdx$.

Доказательство

Поскольку $|f+g| \le |f| + |g|$, то $f+g \in L(X)$ (по свойствам §5 (см. стр. 180). Введем множества X_i, $i = 1 \div 6$ по распределению знаков для $f(x), g(x)$ на $X: X_1 = X(f \ge 0 \wedge g \ge 0)$ и т. д.

Тогда $X = \bigcup\limits_{i=1}^{6} X_i, i \ne j \Rightarrow X_i \bigcap X_j = \varnothing$. Для каждого $i = 1 \div 6$ доказывается, что $[L]\int\limits_{X_i} (f+g)dx = [L]\int\limits_{X_i} fdx + [L]\int\limits_{X_i} gdx$.

Например, для $i = 1$ следует из свойств §5 (см. стр. 180). Для других случаев к функции $f + g \ge 0$ применим свойство 10^0.

13^0. $f(x) \in L(X), g(x) \in L(X) \Rightarrow (f-g) \in L(X)$.

Доказательство

Следует из свойств 12^0, 10^0.

Наконец, упомянем о предельном переходе под знаком обобщенного интеграла. Для этого рассмотрим свойство обобщенного интеграла, называемое его абсолютной непрерывностью.

14^0. Если $f(x) \in L(X)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : Y \subset X$ – измеримо, $mY < \delta \Rightarrow \left| [L]\int\limits_Y f(x)dx \right| < \varepsilon.$

Доказательство

$f \in L(X) \Leftrightarrow |f| \in L(X).$

Из понятия обобщенного интеграла для неотрицательной функции имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N : [L]\int\limits_X |f|dx - (L)\int\limits_X [|f|]_{n_0} dx < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ – искомое.

Действительно, $|f| - [|f|]_{n0} \geq 0 \forall x \in X$. $\forall Y \subset X$ - измеримого $\Rightarrow [L]\int\limits_Y (|f| - [|f|]_{n_0})dx \leq [L]\int\limits_X (|f| - [|f|]_{n_0})dx.$

Отсюда имеем:

$$[L]\int\limits_Y |f|dx - (L)\int\limits_Y [|f|]_{n_0} dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [L]\int\limits_Y |f|dx < \frac{\varepsilon}{2} + [L]\int\limits_Y [|f|]_{n_0} dx.$$

Поскольку $[|f|]_{n_0} \leq n_0$, то $[L]\int\limits_Y [|f|]_{n_0} dx \leq n_0 \times mY.$

Тогда $[L]\int\limits_Y |f|dx < \dfrac{\varepsilon}{2} + n_0 \times mY.$

При $mY < \delta$ будет $[L]\int\limits_Y |f|dx < \varepsilon \Rightarrow \left| [L]\int\limits_Y fdx \right| < \varepsilon.$

15^0. ***(Теорема А. Лебега о предельном переходе под знаком обобщенного интеграла).***

Пусть $(f_n(x))_{n\in N}$ заданы на X, $f_n(x)$ измеримы на X, $f_n \Rightarrow f_0(x)$.

Если $\exists g(x)$ суммируема на X: $\forall n\in N \forall x\in X\ [|f_n(x)|\le g(x)]$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)dx = [L]\int\limits_X f_0(x)dx.$

Доказательство

Неравенство $|f_n(x)|\le g(x)$ дает $f_n(x)\in L(X)\forall n\in N$.

Покажем, что $|f_0(x)|\le g(x)$ почти всюду на X. По теореме Ф. Рисса, $\exists(f_{n_k}(x))_{k\in N} : f_{n_k}(x) - \to g(x).$ Перейдем к пределу при $k\to+\infty$ в неравенстве $|f_{n_k}(x)|\le g(x)$ получим $|f_0(x)|\le g(x)$ почти всюду на X. Изменив значение $f_0(x)$.

На $Y\subset X, mY=0,$ можно обеспечить $|f_0(x)|\le g(x)\forall x\in X$. Получим $f_0(x)\in L(X)$.

$\forall T>0$ введем обозначение:

$A_n(T)=X(|f_n - f_0|\ge T),\ B_n(T)=X(|f_n - f_0|<\varepsilon).$

Очевидно, $X=A_n(T)\bigcup B_n(T),$ $A_n(T)\bigcap B_n(T)=\varnothing,$ при $n\to+\infty, mA_n(T)\to 0.$

Рассмотрим $\left|[L]\int\limits_X f_n dx - [L]\int\limits_X f_0 dx\right| \le [L]\int\limits_X |f_0 - f_n|dx =$

$= [L]\int\limits_{A_n(T)} |f_n - f_0|dx + [L]\int\limits_{B_n(T)} |f_n - f_0 dx|.$

На $B_n(T), |f_n - f_0|<T,$ следовательно, второй интеграл не превышает $TmB_n(T)\le TmX$. Также $|f_n - f_0|\le 2g(x),$ поэтому

первый интеграл не превышает $2[L]\int\limits_{A_n(T)} g(x)dx.$ Получаем: $\left|[L]\int\limits_X f_n dx - [L]\int\limits_X f_0 dx\right| \le 2[L]\int\limits_{A_n(T)} g(x)dx + TmX$.

Зададим $\forall\varepsilon > 0.$ Выберем $T > 0 : Tm\ X < \frac{\varepsilon}{2}.$ Используя абсолютную непрерывность интеграла от $g(x)$, найдем $\delta > 0 : \forall Y \subset X$ – измеримого: $mY < \delta$ будет $[L]\int\limits_Y g(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

При данном $T > 0$ и при $n > n_0, n_0$ – такое, что при $n > n_0\ mA_n(T) < \delta,$ будет $2[L]\int\limits_{A_n(T)} g(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$ В итоге при $n > n_0$ будет $\left|[L]\int\limits_X f_n(x)dx - [L]\int\limits_X f_0(x)dx\right| < \varepsilon,$ что и требовалось.

Из последнего свойства получаем, что при выполнении его условий будет: $\lim\limits_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)\varphi(x)dx = [L]\int\limits_X f_0(x)\varphi(x)dx$ для измеримой ограниченной функции $\varphi(x).$ Действительно, если $|\varphi(x)| \le K,$ то $|f_n(x)\varphi(x)| \le Kg(x).$ Также $f_n(x)\varphi(x) \Rightarrow f_0(x)\varphi(x).$ Это следует из $X(|f_n\varphi - f_0\varphi| \ge T) \subset X(|f_n - f_0| \ge \frac{T}{K}).$

Дальнейшие, более глубокие свойства, связанные с предельным переходом под знаком интеграла, можно найти в [1, с. 144-153].

Решение типовых задач к главе 3

Задача 1

Вычислить по определению $(R)\int_a^b cdx, c = const.$

Решение

Выполним произвольное (T)- разбиение $[a,b]$.

Выберем произвольно $c_k \in [x_k, x_{k+1}]. f(c_k) = c.$

$S_R(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} c\Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = c(b-a).$ Тогда $\exists \lim_{\lambda(T)\to 0} S_R(T) = c(b-a) = (R)\int_a^b cdx.$

Задача 2

Вычислить по определению $(R)\int_a^b xdx.$

Решение

Выполним произвольное (T)- разбиение $[a,b]$.

Поскольку $f(x) = x$ непрерывна на $[a,b]$, то $\exists (R)\int_a^b xdx$ и $\lim_{\lambda(T)\to 0} f(T)$ не зависят от выбора точек $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Возьмем $c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$

$$S_R(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} + x_k}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Задача 3

Вычислить $(S)\int\limits_0^1 x^2 d(x^3+1).$

Решение

Поскольку $f(x)=x^2$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(x)=x^3+1$ монотонна $\Rightarrow$ФОВ, то интеграл существует.

$\exists g'(x)=x^2$, которая интегрируема по Риману на $[0,1]$.

Имеем:

$$(S)\int\limits_0^1 x^2 d(x^3+1)=(R)\int\limits_0^1 x^2\cdot(x^3+1)'_x dx=$$

$$=(R)\int\limits_0^1 x^2\cdot x^2 dx=(R)\int\limits_0^1 x^4 dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{1}{5}.$$

Задача 4

Интегрируема ли по Риману на $[a,b]$ функция ограниченной вариации?

Решение

ФОВ имеет на $[a,b]$ не более чем счетное множество точек разрыва. Это множество имеет меру Лебега нуль. Следовательно, ФОВ непрерывна почти всюду на $[a,b]$ и в силу теоремы Лебега, интегрируема по Риману.

Задача 5

$f(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ -1, x\in \bar{Q},\end{cases}$ где $x\in[0,1]$. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx.$

Решение

$f(x)$ измерима на $[0,1]$ и ограничена. Действительно, $|f(x)| \le 1 \forall x \in [0,1]$.

$$X(f > a) = \begin{cases} [0,1], a < -1, \\ Q_{[0,1]}, a = -1, \\ Q_{[0,1]}, -1 < a < 1, \\ \varnothing, a \ge 1. \end{cases} \text{–измеримо.}$$

Поэтому $\exists (L)\int_0^1 f(x)dx.$ $f(x) \sim (\text{-}1)$ на $[0,1]$. Имеем:

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 (-1)dx = (R)\int_0^1 (-1)dx = -x\Big|_0^1 = -1.$$

Задача 6

Суммируема ли на $X = (1,2)$ функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$?

Решение

$\lim\limits_{ч \to 1+0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty,$ $f(x)$ неограниченна на X. Она также неотрицательна. Рассмотрим срезку.

$$[f(x)]_n = \begin{cases} n, x \in \left(1, 1 + \dfrac{1}{n^3}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, x \in \left[1 + \dfrac{1}{n^3}, 2\right). \end{cases}$$

Интегралы от срезок:

$$(L)\int_X [f(x)]_n dx = (n(1+\frac{1}{n^3}) - n) + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2n^2}) = \frac{3}{2} - \frac{2}{n^2};$$

$$\exists \lim_{n \to +\infty} (L)\int_X [f(x)]_n dx = \lim_{n \to +\infty} (\frac{3}{2} - \frac{2}{n^3}) = \frac{3}{2} = [L]\int_X f(x)dx.$$

Таким образом, $f(x) \in L(1,2)$.

Задачи к главе 3

1. Вычислить по определению $(R)\int\limits_a^b x^2dx.$

2. Вычислить по определению $(R)\int\limits_a^b \cos xdx.$

3. Вычислить $(S)\int\limits_{-1}^{3} xdg(x), g(x)=\begin{cases}0, & x=-1,\\ 1, & -1<x<2,\\ -1, & 2\le x\le 3.\end{cases}$

4. Интегрируема ли по Риману на [0,1] функция:
$f(x)=\begin{cases}2, & x\in Q,\\ -x, & x\overline{\in} Q?\end{cases}$

5. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\overline{\in} Q,\\ x^3, & x\in Q.\end{cases}$

6. Суммируема ли на [0,1], $f(x)=\dfrac{1}{x}$?

7. Вычислить $(L)\int\limits_X x^3dx, X=\{1\}$.

8. Суммируема ли на (-1,8), $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\ne 0?\end{cases}$

9. Вычислить $[L]\int\limits_{(0,1)}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

ГЛАВА 4. ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы будем изучать суммируемые функции с более общей точки зрения – рассматривать их множество в целом с точки зрения тех операций и отношений, которые в этом множестве вводятся. Поскольку эквивалентные функции имеют много общих свойств, в частности, одинаковые значения интеграла Лебега, то мы не будем различать их, а считать различными формами представления одной и той же суммируемой функции. С формальной точки зрения рассматривается фактор – множество $L(X)/E$, где E – отношение эквивалентности функций. Это не создает трудностей, а наоборот, дает удобства: можно выбрать форму представления данной функции, наиболее подходящую в данной задаче. Ситуация чем-то напоминает ситуацию с обыкновенными дробями: $\frac{1}{2}, \frac{5}{10}, \frac{50}{100}, \ldots$ формы представления одного и того же рационального числа и мы можем выбрать любую.

Вначале мы напомним некоторые сведения из курса алгебры и геометрии, а также введем некоторые новые понятия из современного анализа, необходимые для полноценной характеристики множеств суммируемых функций, ограничиваясь необходимым минимумом.

§ 1. Линейные пространства

Линейным, или векторным, пространством называется множество $X \neq \varnothing$, на котором заданы действия сложения его элементов и умножения их на числа, эти действия (операции) неограниченно выполнимы, однозначны и замкнуты на X, и выполнены аксиомы:

1.1. Сложение ассоциативно:

$\forall a,b,c\in X[(a+b)+c=a+(b+c)]$.

1.2. Существует нулевой элемент сложения:

$\exists\theta\in X:\forall a\in X[a+\theta=\theta+a=a]$.

1.3. Все элементы X имеют себе противоположные:

$\forall a\in X\exists(-a)\in X:a+(-a)=-a+a=\theta$.

1.4. Сложение коммутативно:

$\forall a,b\in X(a+b=b+a)$.

2.1. Внешняя ассоциативность:

$\forall a,b\in P\forall a\in X\cdots[(\alpha\beta)a=a(\beta\alpha)]$.

2.2. Внешняя унитарность:

$\forall a\in X\cdots[1a=a]$.

2.3. Внешняя дистрибутивность для суммы чисел:

$\forall\alpha,\beta\in P\cdots\forall a\in X[(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a]$.

3.1. Внешняя дистрибутивность для суммы элементов из X:

$\forall\alpha\in P\cdots\forall a,b\in X\cdots[\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b]$.

Здесь P означает множество вещественных R или комплексных C чисел. Если умножение производится на вещественные числа, то X называется вещественным линейным пространством, на комплексные – комплексным.

Примеры

I. Вещественные линейные пространства.

1. Нулевое пространство: $0=\{\theta\},\theta+\theta=\theta,-\theta=\theta,\lambda\theta=\theta$.

2. $R^n=\{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\forall\alpha_k\in R\}$. Действия покомпонентные.

3. $R[x]$, полиномы от x.

4. $R[x]$, алгебраические дроби.

5. $\mathrm{M}_{m,n}(R)$, матрицы размера $m\times n$.

6. $C[a,b]$, непрерывные на $[a,b]$ функции, действия поточечные.

7. Λ или R^{∞}, последовательности $(a_n)_{n\in N}, a_n \in R$ действия покомпонентные.

II. Комплексные линейные пространства

1. Нулевое пространство 0.

2. $C^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \forall \alpha_k \in C\}$.

3. $C[x]$, полиномы.

4. $C(x)$, алгебраические дроби.

5. $\mathrm{M}_{m,n}(C)$, матрицы.

6. C^{∞}, последовательности.

В линейных пространствах рассматривается вычитание векторов: $a - b :: a + (-b)$. Эта операция неограниченно выполнима, однозначна, замкнута на X. Линейной комбинаций данных векторов $a_1, a_2, ..., a_m$ называется вектор $b = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m$. Если $b = \theta \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то векторы называются линейно-независимыми. Если $S \subset X$, то множество $\mathrm{lin}S$ линейных комбинаций векторов из S называется линейной оболочкой множества S. Если $\mathrm{lin}S = X$, то S называется системой образующих пространства X. Линейно независимая система образующих называется базисом. Запись: $BasX$. Мощность базиса называется размерностью пространства: $\dim X$. Корректность этого понятия следует из того, что кардинальные числа любых двух базисов данного пространства равны. Если $\dim X < IC_0$, то X называется конечномерным, в противном случае бесконечномерным.

Линейным (векторным) подпространством пространства X называется такое подмножество $Y \subset X$, которое является линейным пространством относительно сужений операций пространства X на Y. Критерий подпространства:

1. $\forall a,b \in Y [a + b \in Y]$.

2. $\forall \alpha \in P \cdot \forall \alpha \in Y [\alpha a \in Y]$.

Функция $f : X_1 \to X_2$ называется линейной, если:

1) $\forall a_1, a_2 \in X_1 [f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)]$ – аддитивность;

2) $\forall \alpha \in P \forall a \in X_1 [f(\alpha a) = \alpha f(a)]$ – однородность.

Множество линейных функций обозначается $L(X_1, X_2)$. В частности, рассматривают линейные функционалы – линейные функции из X в R (или C). Их множество само образует линейное пространство относительно обычных действий сложения функций и их умножения на числа. Это пространство называется алгебраически сопряженным к X и обозначается X^*. Изоморфизмом линейных пространств называется линейная биекция X_1 на X_2. Запись: $X_1 \cong X_2$. Если $\dim X = n < \infty$, то $X^* \cong X$.

§ 2. Нормированные линейные пространства

Нормированным линейным пространством называется вещественное или комплексное линейное пространство, на котором задана норма, т. е. функция $\|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{:X^2} \to R$, удовлетворяющая аксиомам:

Н1. Неотрицательность:

$\forall x \in X [\|x\| \geq 0]$.

Н2. Отделимость:

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Н3. Абсолютная однородность:

$\forall x \in X \forall \lambda \in P [\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|]$.

Н4. Субаддитивность (неравенство треугольника):

$\forall x, y \in X [\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|]$.

Функция $\rho(x,y)=\|x-y\|$ является метрикой на X, поэтому нормированное линейное является метрическим линейным пространством. Отсюда следует, что в нормированных линейных пространствах имеют место понятия и результаты, касающиеся окрестностей, специальных точек множеств, открытых и замкнутых множеств, сходимости, непрерывности и т. п. Как и в общих метрических, в линейных нормированных пространствах сходимость по данной норме дает единственный предел. Может иметь место сравнимость сходимостей: сильнее – слабее. Рассматриваются также полные по данной норме пространства, которые называются банаховыми в честь С. Банаха. Как и метрика, норма является непрерывной функцией:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|} x_0 \Rightarrow \|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{R} \|x_0\|.$$

В нормированных линейных пространствах на ряду со сходимостью по данной норме также рассматривается так называемая слабая сходимость:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{W} x_0 ::= l(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{R} l(x_0)\,\forall l\in X'\,x_0.$$

Здесь l означает непрерывный линейный функционал на X, а X' – множество всех таких l топологически сопряженное к X пространство. Сходимость по норме также называется сильной сходимостью. Всегда из сильной следует слабая сходимость. Аналогично метрическим пространством, задавая на линейном пространстве различные нормы, мы получаем различные нормированные линейные пространства.

Примеры

I. $X=R^n$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.

1. $\|x\|=\max\limits_{k=1\div n}|x_k|$. Это пространство обозначается R_0^n, банахово. Другое обозначение: m_n.

2. $\|x\|=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$Обозначение: R_1^n, банахово.

3. $\| x \| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ Это E^n, или R_2^n, банахово.

II. $X = C[a,b]$

1. $\| x(t) \| = \max_{t \in [a,b]} | x(t) |$ Обозначение: $C[a,b]$, банахово.

2. $\| x(t) \| = (R)\int_a^b | x(t) | dt$. Обозначение: $C_L[a,b], C_1[a,b]$

3. $\| x(t) \| = \sqrt{(R)\int_a^b x^2(t)dt}$. Обозначение: $C_E[a,b], C_2[a,b]$

Неполно по этой норме.

III. Пространства последовательностей

1. Ограниченных последовательностей, m или l^{∞}.

$\| x \| = \sup_{k \in N} | x_k |$.

2. Сходящихся последовательностей, c.

Норма, как в m.

3. Сходящихся к нулю, c_0.

Норма, как в m.

§ 3. Эвклидовы и унитарные пространства

Специальным классом линейных пространств являются пространства со скалярным умножением, позволяющие перенести на общий случай линейных пространств некоторые геометрические понятия и результаты.

Скалярным произведением на линейном пространстве X называется функция $X^2 \to R(C), (a,b) \to ab \in R(C)$, удовлетворяющая аксиомам:

СУ1. Инволютивность.

$\forall a, b \in X\left[ba = \overline{ab} \right]$.

СУ2. Левая аддитивность.

$\forall a_1, a_2, b \in X\,[\,(a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b\,]$.

СУ3. Левая однородность.

$\forall \alpha \in R(C) \forall a, b \in X[(\alpha a)b = \alpha(ab)]$.

Число $ab \in R$ называется скалярным произведением векторов $a, b \in R$. $a \cdot a$ называется скалярным квадратом и обозначается a^2. Если $\forall a \neq \theta \Rightarrow a^2 \neq 0$, то скалярное умножение называется невырожденным. Если $\forall a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$, то скалярное умножение называется положительно определенным. Вещественное линейное пространство с положительно определенным скалярным умножением называется эвклидовым пространством, комплексное – унитарным пространством.

Примеры эвклидовых пространств

1. Геометрические пространства, D^2, D^3.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}).$$

2. $R^n, a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$,

$$ab = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + ... + \alpha_n \beta_n$$

3. $C[\,a, b\,]$.

$$x(t)\,y(t) = (R)\int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Примером унитарного пространства является C^n со скалярным произведением $ab = \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \alpha_2 \overline{\beta}_2 + ... + \alpha_n \overline{\beta}_n$. В частности, $a^2 = \alpha_1 \overline{\alpha}_1 + \alpha_2 \overline{\alpha}_2 + ... + \alpha_n \overline{\alpha}_n$.

Простейшие свойства эвклидовых пространств

1. $\forall a \in X\,[\,a\theta = \theta a = \theta\theta = 0\,]$.

2. $ab = \theta\ \forall a \in X \Leftrightarrow b = \theta$.

3. Правая аддитивность:

$\forall a_1, b_1, b_2 \in X\,[\,a(\,b_1 + b_2\,) = ab_1 + ab_2\,]$.

4. Правая однородность:

$\forall a, b \in X\ \forall \beta \in R[\,a(\,\beta b\,) = \beta(\,ab\,)\,]$.

5. Дистрибутивность для разностей:

$\forall a, b, c \in X\,[\,(\,a - b\,)c = ac - bc \wedge a(\,b - c\,) = ab - ac\,]$.

Свойства унитарных пространств аналогичны эвклидовым, кроме свойств, связанных с умножением второго вектора на число:

$a(\,\beta b\,) \overset{СУ1}{=} \overline{(\beta b)a} = \overline{\beta ba} = \overline{\beta} \cdot \overline{ba} = \overline{\beta} ab$ и т. д.

Важной отличительной особенностью эвклидовых и унитарных пространств является рассмотрение ортогональности векторов, являющейся обобщением геометрической перпендикулярности: $a \perp b ::= ab = 0$.

Примеры

1) $D^2,\ D^3\ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}\ \hat{,}\ \vec{b}\right) = 90^\circ$.

2) $R^n,\ a \perp b \Leftrightarrow \alpha_1\beta_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0$.

3) $C^n,\ a \perp b \Leftrightarrow \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n} = 0$.

4) $C[\,a,b\,],\ x(\,t\,) \perp y(\,t\,) \Leftrightarrow (\,R\,)\int\limits_a^b x(\,t\,)\,y(\,t\,)\,dt = 0$.

Свойства ортогональности

1. $a \perp b \Leftrightarrow b \perp a$.

2. $a \perp b \forall a \in X \Leftrightarrow b = \theta$.

3. $a \perp a \Leftrightarrow a = \theta$.

4. $a \perp b \Rightarrow \alpha a \perp \beta b$.

5. $a \perp b_k, k = 1 \div m \Rightarrow a \perp \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + ... + \beta_m b_m$.

Пусть $S = \{a_k\}_{k \in I}$ – не более чем счетное множество векторов. Если $k \neq j \Rightarrow a_k \perp a_j$, то $S ::=$ ортогональная. Известно, что ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Линейно независимое множество векторов можно ортогонализовать процессом ортогонализации Грамма - Шмидта.

Пусть $S = \{a_k\}_{k \in I}$ линейно независима. Необходимо построить по S систему $T = \{b_k\}_{k \in I}$ ортогональную. Принимаем $b_1 = a_1$. $b_2 = a_2 - \dfrac{a_2 b_1}{b_1^2} b_1$, $b_3 = a_3 - \dfrac{a_3 b_1}{b_1^2} b_1 - \dfrac{a_3 b_2}{b_2^2} b_2$ и т. д.

Если $\dim X \leq IC_0$, то ортогонализовав $\operatorname{Bas} X$, получим ортогональный $Bas^{\perp} X$. $a \perp S$ означает $a \perp b$, $\forall b \in S$. $S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow a \perp b \forall a \in S_1,\ \forall b \in S_2$.

В эвклидовых и унитарных пространствах выполняется важное неравенство.

Теорема 1 (Неравенство Коши – Буняковского – Шварца)

$$\forall a, b \in X \left[|ab| \leq \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} \right].$$

Доказательство 1

При $b = \theta,\ ab = a\theta = 0$, $\sqrt{b^2} = \sqrt{\theta^2} = \sqrt{0} = 0$, $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = 0,\ 0 = 0$.

$b \neq 0$. Рассмотрим скалярный квадрат $(a - \lambda b)^2 \geq 0, \forall \lambda \in R(C)$.

$(a - \lambda b)^2 - (a - \lambda b)(a - \lambda b) = aa - a(\lambda b) - (\lambda b)a + (\lambda b)(\lambda b) =$

$= a^2 - \bar{\lambda} ab - \lambda \overline{ab} + \lambda \bar{\lambda} b^2 \geq 0.$

Положим $\lambda = \dfrac{ab}{b^2}$ (при $b \neq \theta \Rightarrow b^2 > 0$),

$a^2 - \dfrac{\overline{ab}}{b^2} ab - \dfrac{ab}{b^2} \overline{ab} + \lambda \bar{\lambda} b^2 \geq 0.$

Умножим на $b^2 > 0$ $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = \dfrac{|ab|^2}{(b^2)^2}$.

Имеем:

$$a^2b^2 - (\overline{ab})(ab) - (ab)(\overline{ab}) + |ab|^2 = a^2b^2 - |ab|^2 - |ab|^2 + |ab|^2 =$$
$$= a^2b^2 - |ab|^2 \geq 0 \Rightarrow |ab|^2 \leq a^2b^2.$$

Поскольку обе части неотрицательны, то $|ab| \leq \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$.

Теорема доказана.

Наличие положительно определенного скалярного произведения позволяет ввести норму.

Теорема 2

Функция $V(a) = \sqrt{a^2}$ есть норма на X.

Доказательство

Проверим выполнение аксиом нормы.

1. Неотрицательность. $V(a) = +\sqrt{a^2} \geq 0 \quad \forall a \in X$.

2. Отделимость. $V(\theta) = \sqrt{\theta^2} = \sqrt{0} = 0$.

$V(a) = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 = 0 => a = \theta$.

3. Абсолютная однородность.

$$V(\lambda a) = \sqrt{(\lambda a)^2} = \sqrt{(\lambda a)(\overline{\lambda a})} = \sqrt{(\lambda\bar{\lambda})a^2} = \sqrt{|\lambda|^2 a^2} =$$
$$= |\lambda|\sqrt{a^2} = |\lambda| V(a).$$

4. Субаддитивность.

$V(a+b) = \sqrt{(a+b)^2}, V(a) + V(b) = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}.$ Эти числа неотрицательны.

Сравним квадраты.

$$V^2(a+b) = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + bc + b^2 =$$
$$= a^2 + ab + \overline{ab} + b^2.$$

Если $ab = \alpha + \beta i$, то $\overline{ab} = \alpha - \beta i$.

$$ab + \overline{ab} = 2\alpha \in R.$$

$$(V(a)+V(b))^2 = (\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2})^2 = a^2+b^2+2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}.$$

$$2\alpha \le 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2\,|\,ab\,|.$$

По теореме 1: $2\,|\,ab\,| \le 2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$.

Тогда $V^2(a+b) \le (V(a)+V(b))^2 \Rightarrow V(a+b) \le V(a)+V(b)$.
Теорема доказана.

Эта норма называется эвклидовой.

X становится линейным нормированным пространством.

Примеры

1. $R^n, \|x\|_E = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$.
2. $C^n, \|x\|_E = \sqrt{x_1\overline{x}_1+x_2\overline{x}_2+\ldots+x_n\overline{x}_{1n}}$.
3. $C[a,b], \|x(t)\|_E = \sqrt{(R)\int\limits_a^b x^2(t)dt}$.

Неравенство Коши - Буняковского - Шварца запишется так:

$|\,ab\,| \le \|a\|_E \|b\|_E$.

Тот случай, когда исходная норма является именно эвклидовой, дает важный класс линейных нормированных пространств.

§ 4. Гильбертовы пространства

Если X – линейное нормированное и одновременно эвклидово или унитарное пространство, а его норма именно эвклидова, то X называется предгильбертовым пространством. Если X банахово, т. е. полно по эвклидовой норме, то X называется гильбертовым пространством (в честь Гильберта, David Hilbert, 1862 – 1943, Германия).

Примеры

1. E^n.
2. C^n.
3. $C_{\boldsymbol{E}}[a,b]$ – не гильбертово, т. к. неполно по $\|x(t)\|_E$.

В гильбертовых пространствах рассматриваются вопросы, связанные с ортогональностью и нормой. В частности, рассматриваются обобщенные ряды Фурье.

Пусть $\Phi=\{a_k\}_{k\in I}$ – ортогональная система элементов. Φ называется полной, если ее невозможно расширить как ортонормальную систему: $\bar{\exists} b\neq\theta : b \bar{\in} \Phi,\ b\perp\Phi$. По ортогональной системе строится ряд Фурье для данного элемента b из X : $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{\boldsymbol{n}}a_n$, где $\alpha_n=a_nb.$ Если $\forall b\in X$ этот ряд сходится по эвклидовой норме к b, то система Φ называется замкнутой.

Это фактически означает, что Φ есть топологический базис (базис Шаудера) пространства X. Замкнутая ортонормальная система является полной. Обратное не всегда верно. По замкнутой или полной ортонормальной системе $\forall b\in X$, его обобщенный ряд Фурье определяется однозначно.

Пусть $\dim X = IC_0$, $\Phi=\{\,a_n\,\}_{n\in N}$ – ортонормальна. $\forall b\in X$ определим коэффициенты Фурье: $\alpha_n=a_nb.$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}}$ сходится, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leq\|b\|^2$. Это неравенство Бесселя. Если имеет место равенство, то оно называется равенством Парсеваля – Стеклова. Его выполнение является критерием замкнутости Φ. (М. А. Парсеваль, Parseval, 1755 – 1836, Франция; В. А. Стеклов, 1864 – 1926, Харьков).

Выполняется также теорема Рисса – Фишера:

Если $\Phi = \{a_n\}_{n\in N}$ – ортонормальная система в гильбертовом пространстве и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 < +\infty$, то существует $b \in X : \alpha_n$ – его коэффициенты Фурье по Φ, т. е. $\alpha_n = ba_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 = \|b\|^2$.

Очень важен следующий результат:

Каждый линейный функционал в гильбертовом пространстве имеет вид $l(x) = xa$, $a \in X$.

§ 5. Пространство суммируемых функций $L(X)$

Пусть $X \subset R, X \neq \varnothing, X$ измеримо. Ранее мы обозначали множество всех суммируемых функций на X через $L(X)$. Поскольку, как известно, $f(x), g(x) \in L(X) \Rightarrow f(x) \pm g(x) \in L(X)$, $\lambda f(x) \in L(X)$, $\lambda \in R$, то $L(X)$ есть вещественное линейное пространство. Рассмотрим функционал $V(f) = [L]\int_X |f(x)|\,dx.$

Далее считаем, что $X = \langle a,b \rangle$, $a,b \in R$.

Теорема 1

$V(f)$ есть норма на $L(X)$.

Доказательство

Проверим выполнение аксиом нормы.

1. Положительная определенность.

$V(f) = [L]\int_X |f(x)|\,dx \geq 0,$ т.к. $|f(x)| \geq 0.$

2. Отделимость. $[L]\int\limits_X |f(x)|\,dx = 0$ влечет, как известно, $f \sim 0$, т. е. f есть нулевая функция (с точностью до эквивалентности). Обратно, если $f \sim 0$, то $[L]\int\limits_X |f(x)|\,dx = [L]\int\limits_X 0dx = 0$.

3. Абсолютная однородность.

$V(\lambda f) = [L]\int\limits_X |\lambda f(x)|\,dx = |\lambda|\,[L]\int\limits_X |f(x)|\,dx = |\lambda|\,V(f)$ (по свойствам неотрицательных суммируемых функций).

4. Субаддитивность.

$$V(f+g) = [L]\int\limits_X |f(x)+g(x)|\,dx \le [L]\int\limits_X (|f(x)|+|g(x)|)dx =$$

$$= [L]\int\limits_X |f(x)|\,dx + [L]\int\limits_X |g(x)|\,dx = V(f)+V(g).$$

Теорема доказана.

Полученную норму будем обозначать $\|f\|$ или $\|f(x)\|$. Наличие нормы позволяет рассматривать сходимость по этой норме. Она называется сходимостью в среднем (иногда добавляют: порядка 1). Можно рассматривать фундаментальные последовательности. Сходимость в среднем означает:

$$\lim_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X |f_n(x) - f_0(x)|\,dx = 0.$$

Фундаментальность:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists n_0(\varepsilon) : m,l > n_0 \Rightarrow [L]\int\limits_X |f_m(x) - f_l(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Как и всюду в нормированных пространствах, X, из сходимости по норме следует фундаментальность.

Также $L(X)$ является эвклидовым пространством.

Теорема 2

Функционал $\varphi(f,g)=[l]\int\limits_X f(x)g(x)dx$ является положительно определенным скалярным умножением на $L(X)$.

Доказательство

Проверим выполнение соответствующих аксиом.

1. Симметричность (коммутативность).

$\forall f(x), g(x)\in L(X), \varphi(g,f)=[L]\int\limits_X g(x)f(x)dx=$

$[L]\int\limits_X f(x)g(x)dx=\varphi(f,g)$.

2. Левая аддитивность.

$\forall f(x), h(x), g(x)\in L(X)$,

$\varphi(f+h,g)=[L]\int\limits_X (f(x)+h(x))g(x)dx=$

$=[L]\int\limits_X (f(x)g(x)+h(x)g(x))dx=$ (В силу 12° §6 главы 3)=

$=[L]\int\limits_X f(x)g(x)dx+[L]\int\limits_X h(x)g(x)dx=\varphi(f,g)+\varphi(h,g)$.

3. Левая однородность.

$\forall\lambda\in R\ \ \forall f(x), g(x)\in L(X)$,

$\varphi(\lambda f,g)=[L]\int\limits_X (\lambda f(x))g(x)dx=[L]\int\limits_X \lambda(f(x)g(x))dx=$

= (В силу 10° §6 главы 3) $=\lambda[L]\int\limits_X f(x)g(x)dx=\lambda\varphi(f,g)$.

4. Положительная определенность.

Пусть $f(x)$ – ненулевая функция. В пространстве $L(X)$ это означает, что $f(x)\not\sim 0$. $f^2(x)\neq 0$ на множестве меры 0, тогда и $f(x)\neq 0$ на множестве меры 0, т. е. $f(x)\sim 0$, что невозможно.

Теорема доказана.

Итак, в $L(X)$, $fg = [L]\int_X f(x)g(x)dX$ – скалярное произведение. Это дает возможность рассматривать ортогональность и связанные с ней вопросы.

Однако норма в $L(X)$ не эвклидова, т. е. $L(X)$ не является гильбертовым пространством. Тем не менее выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца:

$$\left([L]\int_X f(x)g(x)dx\right)^2 \le [L]\int_X f^2(x)dx \cdot [L]\int_X g^2(x)dx.$$

Непрерывные линейные функционалы в $L(X)$ имеют вид $l(f) = [L]\int f(x)h(x)dx$, где $h(x)$ – измеримая и почти всюду ограниченная на X функция. Топологически сопряженным к $L(X)$ является пространство $M(X)$ измеримых и почти всюду ограниченных на X функций. Это пространство также обозначается $L^\infty(X)$. Как и в любом нормированном пространстве, сходимость в среднем (по мере) влечет слабую сходимость.

§ 6. ПРОСТРАНСТВО ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМЫМ КВАДРАТОМ

$f(x)$ называется функцией с суммируемым квадратом или функцией, суммируемой с квадратом на множестве X, если $f^2(x)$ суммируема на X, т. е. $\exists [L]\int_X f^2(x)dx < +\infty$.

Множество этих функций обозначается $L^2(X)$.

Каково соотношение $L(x)$ и $L^2(X)$?

Теорема 1

$L^2(X) \subset L(X)$.

Доказательство

Имеет место очевидное неравенство: $|f(x)| \le \frac{1}{2}\left(1+f^2(x)\right)$. Таким образом, если $f^2(x)$ суммируема, то и $|f(x)|$ суммируема, значит, и $f(x)$ суммируема, т. е. $L^2(X) \subset L(X)$.

Теорема 2

$f(x), g(x) \in L^2(X) \Rightarrow fg \in L^2(X)$.

Доказательство

Указанное свойство выполняется в силу очевидного неравенства

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}\left(f^2(x)+g^2(x)\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3

$f(x) \in L^2(X) \Rightarrow \lambda f(x) \in L^2(X), \lambda \in R$.

Очевидно, вытекает из теоремы 2.

Теорема 4

$f(x), g(x) \in L^2(X) \Rightarrow f(x) \pm g(x) \in L^2(X)$.

Вытекает из очевидного равенства $(f(x) \pm g(x))^2 =$ $= f^2(x) \pm 2f(x)g(x) + g^2(x)$.

Отсюда получается исключительно важный результат.

Теорема 5

$L^2(X)$ есть линейное подпространство в $L(x)$.

Действительно, теоремы 3, 4 показывают выполнение критерия подпространства.

Поскольку при $f(x),\ g(x) \in L^2(X),\ f(x)g(x) \in L^2(X)$, то скалярное произведение этих функций, как элементов пространства $L(X)$, может рассматриваться и в пространстве $L^2(X)$, которое будет эквклидовым подпространством эвклидового пространства $L(x)$.

Таким образом, в $L^2(X)$ можно рассматривать ортогональность функций и связанные с ней вопросы, выполняется неравенство $\left(\left([L]\int_X f(x)g(x)dx\right)^2 \le [L]\int_X f^2(x)dx \cdot [L]\int_X g^2(x)dx\right)$, которое в $L^2(X)$ имеет название неравенства Буняковского. Если взять $g(x) \equiv 1$, $f(x)$ заменить на $|f(x)|$, то из этого неравенства получим еще одно:

$$[L]\int_X |f(x)|dx \le \sqrt{mX} \times \sqrt{[L]\int_X f^2(x)dx}\,. \qquad (*)$$

Как определить норму в $L^2(X)$? Поскольку оно эвклидово, то можно вводить эвклидову норму:

$$\| f(x)\|_E = \sqrt{f^2} = \sqrt{[L]\int_X f^2(x)dx}\,.$$

$L^2(X)$ – подпространство $L(x)$. Норму $L(x)$ можно записать так:

$\| f(x)\| = [L]\int_X |f(x)|dx = \left([L]\int_X |f(x)|^1 dx\right)^{\frac{1}{1}}$. Тогда, по аналогии, в $L^2(X)$ надо норму вводить так: $\| f(x)\| = \left([L]\int_X |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Но это и есть эвклидова норма. В $L(x)$ тоже можно вводить эвклидову норму, но она отличается от ранее введенной. Это будет другое нормированное пространство. А $L(X)$ понимается именно как пространство с нормой $[L]\int\limits_X |f(x)|dx$.

Итак, $L^2(X)$ есть предгильбертово пространство. Неравенство треугольника в $L^2(X)$ имеет название неравенство Коши:

$$\sqrt{[L]\int\limits_X (f(x)+g(x))^2\,dx} \le \sqrt{[L]\int\limits_X f^2(x)dx} + \sqrt{[L]\int\limits_X g^2(x)dx}.$$

Сходимость по норме в $L^2(X)$ называется сходимостью в среднем порядке 2:

$$f_n(x) \xrightarrow{c2} f_0(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X (f_n(x)-f_0(x))^2\,dx = 0.$$

Как обычно, сходящаяся в среднем последовательность фундаментальна в среднем. Верно и обратное.

Теорема 6 (Э. Фишер)

Фундаментальная последовательность в $L^2(X)$ является сходящейся в этом пространстве.

Доказательство

Практически полностью повторяется доказательство полноты $L(x)$. Пусть $(f_n(x))_{n\in N}$ фундаментальна. $\forall K\in N$ выберем $n_K\in N : n>n_K, m>n_K \Rightarrow \| f_n - f_m \| < \frac{1}{2^K}$. Поскольку $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2^K} < +\infty$, то и $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\| f_{n_{K+1}} - f_{n_K} \| < +\infty$. Поскольку $[L]\int\limits_X | f_{n_{K+1}} - f_{n_K} |\,dx \le mX \| f_{n_{K+1}} - f_{n_K} \|$ (из (*)), то в силу 13°, №5, главы 3 почти всюду сходится ряд $|f_{n1}(x)| + \sum\limits_{K=1}^{\infty}\left| f_{n_{K+1}}(x) - f_{n_K}(x)\right|$, т. е. ряд $f_{n1}(x)+\sum_{K=1}^{\infty}(f_{n_{K+1}}(x)-f_{n_K})$ абсолютно сходится почти всюду на X, его частичные суммы $S_m(x)=f_{n_m}(x)$. Это означает, что $(f_n(x))_{n\in N}$ сходится почти всюду на X при $n\to+\infty$.

Построим функцию:

$$f_0(x)=\begin{cases}\lim\limits_{K\to+\infty} f_{n_K}(x), \textit{ где предел есть и конечен,}\\ 0, \textit{ где предела нет, или он бесконечен.}\end{cases}$$

$f_0(x)$ измерима на X. $f_{n_K}(x)-\to f_0(x)$. Покажем, что $f_0(x)\in L^2(x)$. $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0(\varepsilon)$; $n>n_0, k>k_0$ будет $\| f_n-f_{n_K}\|<\varepsilon$, т.е. $[L]\int\limits_X (f_n(x)-f_{n_K}(x))^2<\varepsilon$. Применим теорему Фату к последовательности $f_n-f_{n_K}, k>k_0$, имеем $[L]\int\limits_X (f_n-f_0)^2\le\varepsilon^2$, тогда $f_0(x)\in L^2(x)$, причем $f_n(x)\xrightarrow{c2} f_0(x)$.

Теорема доказана

Итак, $L^2(X)$ – гильбертово пространство. Поэтому общий вид непрерывного линейного функционала будет $l(f)=fg=[L]\int\limits_X f(x)g(x)dx$, $g(x)\in L^2(X)$. Сопряженным к $L^2(X)$ есть оно само. Слабая сходимость имеет вид:

$$f_n(x)\xrightarrow{w} f_0(x)\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}[L]\int\limits_X f_n(x)g(x)dx=$$
$$=[L]\int\limits_X f_0(x)g(x)dx,\ \forall g(x)\in L^2(x).$$

Как обычно, сходимость по норме влечет слабую сходимость. Установим соотношение сходимостей в среднем и по мере.

Теорема 7

$f_n(x) \xrightarrow{c2} f_0(x)$ влечет $f_n(x) \Rightarrow f_0(x)$.

Доказательство

$\forall \sigma > 0$ обозначим $A_n(\sigma) = X(|f_n - f_0| \geq \sigma)$.

$$[L]\int_X (f_n - f_0)^2 dx \geq [L]\int_{A_n(\sigma)} (f_n - f_0)^2 dx \geq \sigma^2 mA_n(\sigma).$$

При фиксированном $\sigma > 0$ при $f_n(x) \xrightarrow{c2} f_0(x)$, $[L]\int_X (f_n - f_0)^2 dx \to 0$, следовательно, $mA_n(\sigma) \to 0$, т. е. $f_n(x) \Rightarrow f_0(x)$.

Теорема доказана.

Как связана сходимость в среднем со сходимостями почти всюду и поточечной?

Во-первых, из сходимости в среднем не следует сходимость почти всюду.

Пример

$\forall k \in N \quad \forall i = 1 \div k$ *на* $[0,1)$ построим k функций:

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right), \\ 0, & x \overline{\in} \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right). \end{cases}$$

Это семейство функций счетно, расположим его в последовательность:

$g_1(x) = f_{11}(x),\ g_2(x) = f_{21}(x),\ g_3(x) = f_{22}(x)$.

При $n \to +\infty, k \to +\infty$. $m\left[\dfrac{c-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right) = \dfrac{1}{k} \to 0$.

Следовательно,

$$[L]\int_{[0,1)} g_n^2 dx = [L]\int_{[0,1)} g_n(x)dx = (L)\int_{[0,1)} g_n(x)dx = (L)\int_{\left[\frac{c-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} dx =$$

$$= (R) \int\limits_{\left[\frac{c-1}{k},\frac{i}{k}\right]} dx = \frac{1}{k} \to 0,\ т.е.\ [L] \int\limits_{[0,1)} (\, g_n(x) - 0\,)^2\, dx \to 0 \text{ и}$$

$g_n(x) \xrightarrow{c2} 0$.

Но $\quad g_n(x) \not\to 0 \quad \forall x \in [0,1] : \forall x_0 \in [0,1)\ \forall k\ \ \exists i:\ x_0 \in \left[\dfrac{c-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right)$,

$f_{ki}(x_0) = 1$.

Это означает, что сколько угодно далеко в последовательности $(\, g_n(x_0)\,)_{n\in N}$ есть элементы, отличные от нуля, а именно, единицы. Итак, $g_n(x) - \not\to 0$.

Во-вторых, простая поточечная сходимость не влечет сходимости в среднем.

Пример

$$X = [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} n,\ 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0,\ x \notin (0;\dfrac{1}{n}) \end{cases}. \quad \forall x_0 \in X,$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = 0,\ f_n(x) \to 0$.

Но $[L] \int\limits_{[0,1]} f_n^2(x)dx = [L] \int\limits_{(0,\frac{1}{n})} n^2 dx = (L) \int\limits_{(0,\frac{1}{n})} n^2 dx =$

$$= (L) \int\limits_{[0;\frac{1}{n}]} n^2 dx = (R)\int\limits_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n \to +\infty \ \ f_n(x) \overset{C2}{\not\to} 0.$$

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с ортогональностью. Поскольку $L^2(X)$ – гильбертово, то метрическая структура, определяемая скалярным умножением, и есть исходная метрическая структура пространства. Поэтому ортонормальные системы функций являются естественной структурой в $L^2(X)$. Ортонормальность

$\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k\in N}$ означает:

$$[L]\int_X \varphi_k^2(x)dx = 1,\ [L]\int_X \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad \text{при} \qquad m \neq k.$$

Коэффициенты Фурье для $f(x) \in L^2(X)$ по φ определяются формулой: $C_k = [L]\int_X f(x)\varphi_k(x)dx$. Обобщенный ряд Фурье для $f(x)$ по $\varphi: \sum_{k=1}^{\infty} C_k\varphi_k(x)$. Пусть $S_n(x)$ – частичная сума этого ряда. Рассмотрим $\| f - S_n \|$. Вычислим сначала $[L]\int_X f(x)S_n(x)$ и $[L]\int_X S_n^2(x)dx$.

$$[L]\int f(x)S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k [L]\int_X f(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k^2 .$$

$$[L]\int_X S_n^2(x)dx = \sum_i \sum_k [L]\int \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k^2 .$$

Тогда $\| f - f_n \|^2 = [L]\int_X (f^2 - 2fS_n \_ S_n^2)dx =$

$$= [L]\int_X f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 .$$

Это тождество Бесселя. Из него: $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq \| f \|^2$ – неравенство Бесселя. Ввиду произвольности $n \in N; \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \| f \|^2$ – предельное неравенство Бесселя. В случае равенства, $\sum_{k}^{\infty} C_k^2 = \| f \|^2$ получаем Равенство Парсеваля, которое также называется формулой замкнутости. Это условие означает, что $\| f - f_n \| \to 0$, т. е. $S_n(x) \xrightarrow{C2} f(x)$. Аналогично могут быть непосредственно доказаны другие факты в $L^2(X)$, относящиеся к их свойствам как гильбертовых пространств.

Замкнутость ортонормальной системы означает выполнение формулы замкнутости для $\forall f(x) \in L^2(X)$.

Теорема 8

Если D – замкнута, то $fg = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$,

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье для $f(x)$, $g(x)$ соответственно по системе Φ.

Доказательство

$a_k [L]\int_X f(x)\varphi_k(x)dx \quad b_k = [L]\int_X g(x)\varphi_k(x)dx$.

Для $h(x) = f(x) + g(x)$, коэффициенты Фурье $c_k = a_k + b_k$. В силу замкнутости Φ, получаем $\| f + g \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2$. Отсюда

$\| f + g \|^2 = (f + g)(f + g) = f^2 + 2fg + g^2 =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = f^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + g^2 \Rightarrow fg = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Теорема доказана.

Естественно, в $L^2(X)$ выполняется теорема Рисса-Фишера. Важной особенностью $L^2(X)$ является эквивалентность условий замкнутости и полноты ортонормальной системы.

Теорема 9

Ортонормальная система функций $\Phi = \{\varphi_{n(x)}\}_{n \in N}$ замкнута тогда и только тогда, когда она полная.

Доказательство

1. Если Φ – замкнута и $f(x) \perp \Phi$, то $C_k = f\varphi_k = 0$. Из формулы замкнутости $\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

2. Пусть Φ полная. Допустим противное: Φ – не замкнутая $\exists g(x) : \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \| g \|^2$. По теореме Рисса-Фишера: $\exists f(x) : [L]\int_X f(x)\varphi_k(x)dx = C_k$, $\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$.

Тогда $h(x) = f(x) - g(x) \perp \Phi \overset{полн}{\Rightarrow} f(x) = g(x)$, но также $\| f \| < \| g \|$. Противоречие.

Теорема доказана.

Особая роль пространства $L^2(X)$ выясниться немного позже. Перейдем к другим пространствам суммируемых функций.

§ 7. Пространства функций, суммируемых с данной степенью

Пусть $p \in R, p \geq 1, L^p(x)$ означает множество всех функций, для которых $[L]\int_X | f(x)|^p dx < +\infty$. При $p = 1$ имеем, что $L^1(X) = L(X)$. В эту шкалу входит и $L^2(X)$. Сразу же возникает вопрос, суммируемы ли на X функции $L^p(X)$ при $p > 1$?

Теорема 1

При $p > 1$, $L^p(X) \subset L(X)$.

Доказательство

Обозначим $A = X(| f | < 1, B = X \setminus A)$. Суммируемость $f(x)$ на A следует из того, что при $| f | < 1, p > 1$ будет $| f(x)|^p < 1$. Суммируемость на B – из неравенства $| f(x)| \leq | f(x)|^p$. Теорема доказана.

Ранее мы установили, что $L^2(X)$ есть подпространство в $L(X)$. Верно ли это при других $p>1$? Установим ряд результатов в этом направлении.

Теорема 2

$$f(x), g(x) \in L^p(X) \Rightarrow f(x)+g(x) \in L^p(X).$$

Доказательство

Обозначим: $A = X(|f| \le |g|), B = X \setminus A$. При $x \in A$ будет

$|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le 2^p |g|^p$, тогда

$$[L]\int_A |f(x)+g(x)|^p dx \le 2^p [L]\int_A |g(x)|^p dx < +\infty.$$

Аналогично, для

$$x \in B, [L]\int_B |f(x)+g(x)|^p dx, 2^p [L]\int_B |f(x)|^p dx < +\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 3

$$\lambda \in R,\ f(x) \in L^p(X) \Rightarrow \lambda f(X) \in L^p(X).$$

Доказательство

$$[L]\int_X |\lambda f(x)|^p dx = \lambda [L]\int_X |f(x)|^p < +\infty.$$

Теорема доказана.

Итак, для $L^p(X) \subset L(X)$ выполнен критерий линейного пространства. Таким образом, верна.

Теорема 4

$L^p(X)$ – линейное подпространство $L(X)$. Тогда $L^p(X)$ – эвклидово пространство со скалярным произведением $f_g = [L]\int_X f(x)g(x)dx$. Можно на нем рассматривать эвклидову норму. Однако в $L^p(X)$ принято вводить норму по-другому. Для ее введения подготовим необходимые результаты.

Пусть $p>1$. Если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то q называется показателем, сопряженным с p.

$q>1$, и можно наряду с $L^p(X)$ рассматривать $L^q(X)$. Сопряженным с q есть p.
p и q – взаимносопряженные.

Теорема 5

Выполняется неравенство Гёльдера:
если p, q – сопряжены, $f(x)\in L^p(X)$, то

$$\left|[L]\int_X f(x)g(x)dx\right| \le \left([L]\int_X |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left([L]\int_X |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$f(x)g(x)\in L^p(X)$.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(x)=x^{\alpha}-\alpha x$, $0<\alpha<1$, $0<x<+\infty$.

$\psi'(x)=\alpha(x^{a-1}-1)$, тогда $\psi'(x)>0$ при $0<x<1$,
$\psi'(x)<0$ при $x>1$.

Тогда $\psi \max=\psi(1)=1-\alpha$. Значит $\psi(x)\le 1-\alpha$, при $x>0$. Отсюда $x^{\alpha}\le \alpha x+(1-\alpha)$, $x>0$. Если $A>0$, $B>0$, $x=\frac{A}{B}$, то получим $A^{\alpha}B^{1-\alpha}=\alpha A+(1-\alpha)B$.

Пусть p, q – данные сопряженные показатели.

Положим $\alpha=\frac{1}{p}$, $1-\alpha=\frac{1}{q}$, тогда $A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\le \frac{A}{p}+\frac{B}{q}$. Это будет верно при $A\ge 0$, $B\ge 0$.

Рассмотрим теперь данные функции $f(x)$, $g(x)$.

Если $f \sim 0 \vee g \sim 0$, то неравенство теоремы выполнено. Пусть $f(x) \sim 0 \wedge g(x) \sim 0$. При этом $[L]\int\limits_X |f(x)|^p\, dx > 0$, $[L]\int\limits_X |g(x)|^q\, dx > 0$.

Введем функции:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[p]{[L]\int\limits_X |f(x)|^p dx}},\ h(x) = \frac{g(x)}{\sqrt[q]{[L]\int\limits_X |g(x)|^q dx}}.$$

Положим $A = \varphi(x)^p$, $B = \varphi(x)^q$.

Получим $|\varphi(x)h(x)| \le \frac{|\varphi(x)|^p}{p} + \frac{|h(x)|^q}{q}$. Отсюда $\varphi(x)h(x) \in L(X)$, тогда и $f(x)g(x) \in L(X)$. Очевидно, $[L]\int\limits_X |\varphi(x)|^p\, dx = [L]\int\limits_X |h(x)|^q dx = 1$. Интегрируя последнее неравенство по X, имеем: $[L]\int\limits_X |\varphi(x)h(x)|\, dx \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отсюда получится:

$$[L]\int\limits_X |f(x)g(x)| dx \le \left([L]\int\limits_X |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left([L]\int\limits_X |g(x)|^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

поскольку $|[L]\int\limits_X (f(x)g(x))dx| \le [L]\int\limits_X |f(x)g(x)| dx$, то искомое неравенство выполняется.

Теорема доказана.

При $p = 2 \Rightarrow q = 2$ неравенство Гёльдера превращается в известное неравенство Буняковского.

Теорема 6

В пространстве $L^p(X)$ выполняется неравенство Минковского.

$$([L]\int_X |\, f(x)+g(x)\,|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} \le ([L]\int_X |\, f(x)\,|^p dx)^{\frac{1}{p}} + ([L]\int_X |\, g(x)\,|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство

При $p=1$ неравенство, очевидно, верно. Пусть $p>1, q$ – сопряженный показатель к p. Известно, что $f(x)g(x) \in L^p(X) \Rightarrow f(x)+g(x) \in L^p(x)$. Тогда $|\, f(x)+g(x)\,|^{\frac{p}{q}}$ входит в $L^p(X)$. В неравенстве Гёльдера заменим $f(x)$ на $|\, f(x)\,|$, $g(x)$ на $|\, f(x)+g(x)\,|^{\frac{p}{q}}$.

Получаем $[L]\int_X |\, f(x)\,||\, f(x)+g(x)\,|^{\frac{p}{q}} \, dx \le$

$$\le ([L]\int_X |\, f(x)\,|^p dx)^{\frac{1}{p}} ([L]\int_X |\, f(x)+g(x)\,|^p dx)^{\frac{1}{q}}.$$

Аналогично $[L]\int_X |\, g(x)\,||\, f(x)+g(x)\,|^{\frac{p}{q}} \, dx \le$

$$\le ([L]\int_X |\, g(x)\,|^p dx)^{\frac{1}{p}} ([L]\int_X |\, f(x)+g(x)\,|^p dx)^{\frac{1}{q}}.$$

Поскольку $p = 1 + \dfrac{p}{q}$,

то $|\, f+g\,|^p = |\, f+g\,||\, f+g\,|^{\frac{p}{q}} \le |\, f\,||\, f+g\,|^{\frac{p}{q}} + |\, g\,||\, f+g\,|^{\frac{p}{q}}$, получаем:

$$[L]\int_X |\, f+g\,|^p \, dx \le \left([L]\int_X |\, f\,|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left([L]\int_X |g|^p dx)^{\frac{1}{p}}([L]\int_X |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Если последний интеграл равен нулю, то $|f+g|^p \sim 0$, левая и правая части равны нулю. Если он не равен 0, то деля на него, получаем в левой части $([L]\int_X |f+g|^p\ dx)^{1-\frac{1}{q}} = ([L]\int_X |f+g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

Также $[L]\int_X |f+g|^p\ dx \le \left([L]\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} +$

$$+\left([L]\int_X |g|^p dx)^{\frac{1}{p}}([L]\int_X |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Имеем требуемое неравенство.

Теорема доказана.

При $p=2$ получаем неравенство Коши в $L^2(X)$. Доказанные неравенства дают возможность ввести норму в $L^p(X)$.

Теорема 7

Функционал $\varphi(f(x)) = ([L]\int_X |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ есть норма в $L^p(X)$.

Доказательство

1.Неотрицательность. $|f(x)| \ge 0 \Rightarrow \varphi(f) \ge 0, \forall f \in L^p(X)$.

2. Отделимость. Если $f(x) \sim 0$, то $|f(x)| \sim 0$, $|f(x)|^p \sim 0$ и $\varphi(f)=0$. Если $\varphi(f)=0$, то $|f(x)|^p \sim 0 \Rightarrow f(x) \sim 0$.

3. Абсолютная однородность.

$$\varphi(\lambda f) = \left([L]\int_X |\lambda + (x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left([L]\int_X |\lambda|^p \ |f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(|\lambda|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left([L]\int_X | \ f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \varphi(f).$$

4. Субаддитивность.

$\varphi(f+g) \le \varphi(f) + \varphi(g)$ и есть неравенство Минковского. *Теорема доказана.*

Итак, $\| f(x) \| = ([L]\int_X | \ f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

Аналогично $L^2(X)$, можно доказать, что $L^p(X)$ банахово. Сходимость по этой норме называется сходимостью в среднем порядка p. Запись: $f_n(x) \xrightarrow{cp} f_0(x)$. Эта норма не эвклидова.

Непрерывный линейный функционал в $L^p(X)$, при $p > 1$ имеем вид

$$l(f(x)) = [L]\int_X f(x)g(x),$$

где $g(x)$ – любая функция из $L^p(X)$; q – сопряжено с p.

Слабая сходимость имеет вид:

$$f_n(x) \xrightarrow{w} f_0(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}[L]\int_X f_n(x)g(x)dx =$$

$$= [L]\int_X f(x)g(x)dx, g(x) \in L^q(x).$$

Сопряженным пространством к $L^p(X), p > 1$ является $L^q(x), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Таким образом, имеем целую шкалу пространств, суммируемых функций: $L^p(X), 1 \le p < +\infty$.

В этой шкале особое место занимают $L^1(X) = L(X)$ и $L^2(X)$. Для $p = 1, q = +\infty$, для $p = 2, q = 2$. Пространство $L^2(X)$ самосопряженное: $(L^2(X))' = L^2(X)$. Для $L^1(X)$ сопряженного среди $L^p(X)$ нет, $(L^1(X))' = L^\infty(X)$ – пространство измеримых ограниченных функций. Интересно, что аналогичная шкала существует среди пространств последовательностей.

§ 8. Пространства последовательностей l_p

Пусть $p \in R, p \geq 1$. Обозначим через l_p множество последовательностей. l_p представляет собой вещественное линейное пространство относительно обычных действий сложения последовательностей и их умножения на числа.

l_p также является эвклидовым пространством: если $a = (a_n), n \in N, b = (b_n), n \in N,$ то $ab = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ является положительно определенным скалярным умножением. $a \perp b \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = 0$. Рассматриваются все условия, связанные с ортогональностью.

Норма в l_p вводится по формуле $\| x \| = (\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p)^{\frac{1}{p}}$. Пространства l_p – банаховы.

Из них гильбертовым есть только l_2 - его норма эвклидова. Общий вид непрерывно линейного функционала в пространствах l_p, при $p > 1$, будет $l(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, где

$b=(b_n)_{n\in N}\in L^q$, здесь q – сопряженный показатель для p. Сопряженным к l_p есть l_q.

Общий вид линейного непрерывного функционала в l_1: $l(a)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, $b=(b_n)_{n\in N}$ – ограниченная последовательность. Сопряженным с l_1 является пространство m ограниченных последовательностей.

Пространство l_2, как и $L^2(X)$, самосопряженное.

Имеем две шкалы банаховых пространств, $L^p(X)$ и l_p. В них $L^2(X)$ и l_2 – особые, они гильбертовы.

Оказывается, эти пространства очень тесно связаны между собой.

§ 9. Пространства $L^2(X)$ и l_2

Пусть Y_1, Y_2 – линейные нормированные пространства, оба вещественные или комплексные. Напомним, что алгебраическим изоморфизмом называется линейная биекция $\varphi: Y_1 \leftrightarrow Y_2$. Если функция φ взаимно непрерывна (т. е. φ и φ^{-1} непрерывны), то φ называется топологическим изоморфизмом. В терминах норм взаимная непрерывность выражается условием $C_1 \|\varphi(x)\|_{Y_2} \le \|x\|_{Y_1} \le C_2 \|\varphi(x)\|_{Y_2}$. Взаимно непрерывные биекции также называются *гомеоморфизм*. Таким образом, топологический изоморфизм есть линейный гомеоморфизм. Еще более сильным условием является линейная изометрия, т. е. алгебраический изоморфизм, сохраняющий норму $\forall x \in Y_1 [\|\varphi(x)\|_{Y_2} = \|x\|_{Y_1}]$. Другое название – изометрический изоморфизм. Это редкая ситуация.

Алгебраический изоморфизм обеспечивает одинаковые линейные алгебраические свойства. Такие пространства, как линейные пространства, имеют совершенно одинаковые алгебраические линейные свойства. Их можно рассматривать, как и делает современная алгебра, как разные экземпляры одного и того же пространства в разных обозначениях.

Топологический изоморфизм добавляет одинаковость топологических свойств, связанных с пределом, непрерывностью, замкнутостью и т. п.

Изометрический изоморфизм еще дает и одинаковость метрических свойств – метрике, норме.

Следует иметь в виду, что все эти изоморфизмы дают одинаковость только по «своим» направлениям. Другие соотношения, сюда не входящие, могут очень сильно отличаться.

Установим, что $L^2(X)$ и l_2 линейно изометричны. Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k\in N}$ – полная ортонормальная система функций в $L^2(X)$. $\forall f(x) \in L^2(x)$, вычислим ее коэффициенты Фурье по системе $\Phi : c_k = [L]\int\limits_X f(x)\varphi_k(x)dx$. В силу формулы замкнутости

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k{}^2 = \| f(x) \|^2 < +\infty .$$

Поставим в соответствие функции $f(x) \in L^2(X)$ последовательность $c = (c_k)_{k\in N} \in l_2$.

1. Указанное отображение $\psi : L^2(X) \to l_2$ есть биекция. Действительно, $\forall f(x) \in L^2(X)$, можно вычислить ее коэффициенты Фурье по Φ и получить последовательность $c = (c_k)_{k\in N}$. В силу формулы замкнутости, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k{}^2 < +\infty$, т. е. $c \in l_2$. Обратно в силу теоремы Рисса-Фишера $\forall c \in l_2$ есть последовательность коэффициентов Фурье для некоторой

функции $f(x) \in L^2(X)$. В силу полноты Φ разным функциям из $L^2(X)$ отвечают разные последовательности $c = (c_k)_{k\in N} \in l_2$.

2. Отображение ψ сохраняет скалярное произведение: $[L]\int\limits_X f(x)g(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k = ab$ в силу обобщенной формулы замкнутости.

3. Тогда $\| f(x) \|_{L^2(X)} = \sqrt{[L]\int\limits_X f^2(x)dx} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k{}^2} = \| c \|_{l_2}$.

Итак, ψ – линейная изометрия.

Следует отметить, что этот результат хорошо иллюстрирует сказанное об изоморфизмах: одинаковость только по тем соотношениям, которые он покрывает, далее могут быть сильные различия, как и здесь – природа элементов $L^2(X)$ и l_2 совершенно различна: суммируемые функции и последовательности.

Пространства $L^p(X)$ попарно неизоморфны. Так же и для l_p. $L^{p_1}(X)$ и l_{p_2} неизоморфны при $p_1 \neq 2, p_2 \neq 2$, т. е. кроме $p_1 = p_2 = 2$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 4

Задача 1

Выяснить линейную зависимость системы векторов $S=\left\{t+1, t+2, t^2\right\}$ в пространстве $C[0,1]$.

Решение

Составим линейную комбинацию данных векторов и приравняем ее к нулевому вектору пространства:

$$\lambda_1(t+1)+\lambda_2(t+2)+\lambda_3 t^2=\lambda_3 t^2+(\lambda_1+\lambda_2)t+(\lambda_1+2\lambda_2)\equiv 0$$

$\forall t\in[0,1]$.

Поскольку этот квадратный трехчлен имеет бесконечное множество корней, то он нулевой.

$\begin{cases}\lambda_3=0,\\ \lambda+\lambda_2=0,\\ \lambda_1+2\lambda_2=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda_3=0.\end{cases}$ Система векторов линейно независима.

Задача 2

Является ли нормой в R функция $\varphi(x)=|\sin x|$?

Решение

Аксиома неотрицательности, очевидно, выполняется. Аксиома отделимости не выполняется: $|\sin x|=0\Rightarrow x=K\pi$, $K\in Z$. Данная функция нормой на R не является.

Задача 3

Найти скалярное произведение векторов $x(t)=t$, $y(t)=t+2$ в пространстве $C[0,1]$. Векторы ортогональны?

Решение

По формуле скалярного произведения в $C[a,b]$.

$$xy=(R)\int_0^1 t(t+2)dt=(R)\int_0^1(t^2+2t)dt=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\neq 0.$$

Векторы неортогональны.

Задача 4

Принадлежит ли функция $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\neq 0\end{cases}$ пространству $L[-1,8]$? Если принадлежит, то найти ее норму в этом пространстве.

Решение

Функция принимает и положительные, и отрицательные значения. Найдем ее положительную и отрицательную части:

$$f_+(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & 0<x\le 8,\\ 0, & -1\le x\le 0.\end{cases},\quad f_-(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & 1\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le 8.\end{cases}$$

Рассмотрим срезку:

$$[f_+(x)]_n=\begin{cases}n, & 0<x<\dfrac{1}{n^3},\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \dfrac{1}{n^3}\le x\le 8,\\ 0, & -1\le x\le 0.\end{cases}$$

Она интегрируема на [-1,8]. Вычисляем интеграл:

$$(L)\int_{-1}^{8}[f_+(x)]_n\,dx=(L)\int_{0}^{\frac{1}{n^3}}n\,dx+(L)\int_{\frac{1}{n^3}}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=6-\frac{1}{2n^3}.$$

Тогда $[L]\int_{-1}^{8}f_+(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\dfrac{1}{2n^3}\right)=6$.

Аналогично $(L)\int_{-1}^{8}[f_-(x)]_n dx=-\int_{-1}^{-\frac{1}{n^3}}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}+n\int_{-\frac{1}{n^3}}^{0}dx=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n^2}$,

$$[L]\int_{-1}^{8} f_{-}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^3}\right)=\frac{3}{2}.$$

Поскольку оба интеграла конечны, то функция суммируема и входит в $L[-1,8]$:

$$[L]\int_{-1}^{8} f(x)dx = 6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

Поскольку $\| f(x)\| = [L]\int_X | f(x)|dx$, а $| f(x)| = f_{+}(x)+ f_{-}(x)$,

то $\| f(x)\|_{L[-1,8]} = 6+\frac{3}{2}=\frac{15}{12}$.

Задачи к главе 4

1. Выяснить линейную зависимость векторов $x(t)=\sin 2t, y(t)=\cos t, z(t)=\sin t$ в пространстве $C\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Является ли нормой в R функция $\varphi(x)=\sqrt[3]{|x|}$?

3. Вычислить скалярное произведение векторов $a=(i,1-i,2i)$ и $b=(-1,2+i,1+i)$ В пространстве C^3.

4. Ортогонализовать систему векторов $\{t,t+1,t+2\}$ в пространстве $C[0,1]$.

5. Входит ли функция $f(x)=\begin{cases}0, x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x\neq 0\end{cases}$ в пространство $L^1[0,1]$ и $L^2[0,1]$?

6. Найти норму функции $f(x)=\begin{cases}0, x=\pm 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\neq \pm 1\end{cases}$ в $L^1[-1,1]$.

Заключение

В нашем курсе лекций мы, естественно, коснулись далеко не всех понятий и результатов теории функций вещественной переменной. Эта наука весьма объемна, продолжает развиваться и представляет собой важный и глубокий этап развития математического анализа как большой системы математических наук, исследующих проблемы, связанные с идеей предела и непрерывности. Мы совсем не рассматривали конструктивную теорию функций, неопределенный интеграл Лебега, интеграл Лебега-Стилтьеса, обобщения интеграла Лебега, измеримые функции нескольких переменных и их интегрирование, функции множеств, функции с неограниченными областями определения и многое другое. Но и обсужденные вопросы достаточно характеризуют предмет, методы и значение теории функций.

Следующими этапами развития анализа являются общая топология и функциональный анализ.

Общая топология есть наиболее общее учение о пределе и непрерывности, даже в тех пространствах, где невозможно ввести метрику. Соединением линейной алгебры и общей топологии является функциональный анализ, изучающий линейные пространства, в которых имеется топологическая структура или другие структуры, порождающие топологическую (например, порядок). Функциональный анализ будет изучаться в следующем семестре.

В современном анализе возникают новые направления, получают новые результаты, его развитие продолжается.

Учебное издание

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для студентов специальности
6.04030101 «Прикладная математика»
всех форм обучения

Ответственный за выпуск зав. кафедры прикладной и вычислительной математики д-р. физ.-мат. наук, проф. Л. А. Фильштинский
Редактор Т. Г. Чернышова
Компьютерная верстка А. О. Кладиенко

Подписано к печати 17.04.2012, поз.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 13,72. Уч.-изд. л. 8,72. Тираж 30 экз. Зак. №
Себестоимость издания грн к.

Издатель и изготовитель
Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, 40007
Свидетельство субъекта издательского дела ДК № 3062 от 17.12.2007.