Павленко І.В.
Сумський державний університет

УДК 519.2 + 531.19

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ АВТОМАТИЧНИХ ВРІВНОВАЖУВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ БАГАТОСТУПЕНЕВИХ ВІДЦЕНТРОВИХ НАСОСІВ

Изложена методика расчёта автоматических уравновешивающих устройств, которая учитывает вероятностную природу изменения параметров. В результате статистического моделирования построены частотные характеристики.

The method of automatic balancing device calculation was stated. Herewith probabilistic nature of system parameter change is taken into account. As a result of statistical modeling frequency features are built.

ВСТУП

В багатоступеневих відцентрових насосах на ротор діє складна система силових факторів, переважаючим з яких є осьова сила, що досягає кількох десятків тон. Для розвантаження осьового зусилля на роторі багатоступеневих відцентрових насосів успішно застосовуються автоматичні розвантажувальні пристрої – гідроп'яти. При проектуванні вузла авторозвантаження необхідним є точний розрахунок вібраційного стану системи. Динамічний розрахунок гідроп'яти базується на дослідженні диференціальних рівнянь коливань ротора з урахуванням руху рідини в торцевому і циліндричному дроселях.

На етапі проектування неможливо точно визначити основні параметри [2], [3] системи «ротор – розвантажувальний пристрій». У зв'язку з цим набуває актуальності проблема урахування імовірнісної природи зміни фізичних параметрів. Ця проблема ефективно розв'язується із застосуванням статистичного моделювання, при якому можна отримати основні характеристики динамічної системи як результат обробки достатньо великої кількості чисельних експериментів.

Останнім часом є загальновизнаним використання статистичного моделювання на базі імовірнісних методів. Це дозволяє підвищити якість проектування складних систем стосовно не лише проектування конструкцій, а також й інших областей техніки, таких як гідротехніка, машинобудування, електротехніка, біомедицина, хімічні технології тощо [1].

ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК

Динамічний розрахунок системи «ротор – гідроп'ята» зводиться до дослідження системи диференціальних рівнянь, що описують рух ротора в осьовому напрямку, а також рівняння балансу витрат робочої рідини (рисунок 1):

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F - T; \\ Q_{Ц} = Q_T + Q_c + Q_в; \end{cases} \quad (1)$$

де m – маса ротора;
c, k – коефіцієнти демпфірування та жорсткості;
T – сумарна осьова сила, що діє на ротор;
F – врівноважуюче зусилля:

$$F = s_e p_1, \quad (2)$$

s_e – ефективна площина:

$$s_e = s_1 + \frac{1}{2} s_2; \quad (3)$$

p_1 – тиск в камері гідроп'яти;
$Q_Ц$, Q_T – витрати рідини через циліндричний і торцевий дроселі:

$$Q_{Ц} = g_{Ц} \sqrt{p_0 - p_1}; \quad (4)$$

$$Q_T = \frac{g_{ТБ}}{z_{ТБ}^{3/2}} z^{3/2} \sqrt{p_1}; \quad (5)$$

$g_Ц$, $g_{ТБ}$ – провідності циліндричного та торцевого дроселя при базовому значенні зазору $z_{ТБ}$;
p_0 – тиск за останнім робочим колесом;
z – осьове зміщення ротора;
Q_c, $Q_в$ – витрати стиснення і витіснення, які визначаються за формулами:

$$Q_c = \frac{V_1}{E}\dot{p}_1; \tag{6}$$

$$Q_в = s_1\dot{z}; \tag{7}$$

E – модуль пружності робочої рідини;
s_1, s_2 – площина розвантажувального диску під торцевим пояском та торцева площина.

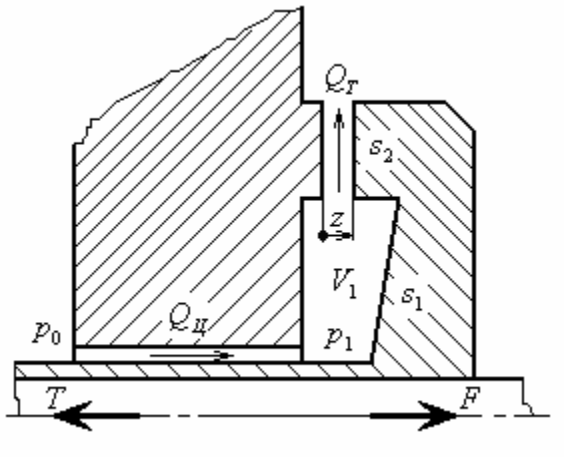

Рисунок 1 – Розрахункова схема

Оскільки система (1) з урахуванням виразів (2) – (7) є нелінійною, то для подальшого її дослідження перейдемо до системи диференціальних рівнянь у варіаціях, поклавши:

$$\begin{cases} z = z_0 + \delta z; \\ p_1 = p_{10} + \delta p_1; \\ T = T_0 + \delta T. \end{cases} \tag{8}$$

де z_0, p_{10}, T_0 – стаціонарні значення торцевого зазору, тиску в камері гідроп'яти і сумарного осьового зусилля;
δz, δp_1, δT – варіації відповідних величин.

Враховуючи рівняння статики

$$\begin{cases} F = T; \\ Q_Ц = Q_T; \end{cases} \tag{9}$$

в результаті лінеаризації нелінійних членів отримаємо:

$$\begin{cases} m\delta\ddot{z} + c\delta\dot{z} + k\delta z = s_e - \delta T; \\ -\dfrac{g_Ц}{2\sqrt{p_0 - p_{10}}}\delta p_1 = \dfrac{3}{2}\dfrac{g_{ТБ}}{z_{ТБ}}\sqrt{p_{10}}\,\delta z + \\ \qquad + \dfrac{g_{ТБ}}{2\sqrt{p_{10}}}\delta p_1 + \dfrac{V_1}{E}\delta\dot{p}_1 + s_1\delta\dot{z}; \end{cases} \tag{10}$$

або в операторній формі:

$$[D(p)]\{X\} = \{F\}, \tag{11}$$

де $[D(p)]$ – матриця операторів p:

$$[D] = \begin{bmatrix} mp^2 + cp + k & -s_e \\ s_1 p + \dfrac{3}{2}\dfrac{g_{ТБ}}{z_{ТБ}}\sqrt{p_{10}} & \dfrac{V_1}{E} + \dfrac{g_Ц}{2\sqrt{p_0 - p_{10}}} + \dfrac{g_{ТБ}}{2\sqrt{p_{10}}} \end{bmatrix}; \tag{12}$$

$\{X\}$ – вектор варіацій невідомих параметрів:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \delta z \\ \delta p_1 \end{Bmatrix}; \tag{13}$$

$\{F\}$ – вектор зовнішнього зусилля:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -\delta T \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{14}$$

Передаточна функція системи:

$$W(p) = \left[\frac{1}{\{X\}_1}[D(p)]^{-1}\{F\}\right]_1, \tag{15}$$

Амплітудно-частотна та фазова частотна характеристики системи (АЧХ і ФЧХ) визначаються за наступними формулами:

$$A(\omega) = |W(i\omega)|; \tag{16}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[W(i\omega)]; \tag{17}$$

де $i = \sqrt{-1}$ – мнима одиниця;
ω – кругова частота коливань системи.

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

При статистичному моделюванні застосовуються два підходи. Перший з них стосується випадків, коли функція розподілу випадкової величини невідома. В другому випадку функція густини розподілу ймовірностей наперед задана.

Проблема реалізації імовірнісних підходів постає не тільки у виборі методів досліджень, а й в обранні функцій розподілу випадкових величин, діапазону їх зміни, необхідної кількості

випробувань, адекватності статистичної моделі до даних експериментальних досліджень.

Існує велика кількість функцій розподілу випадкових величин [1], основні з яких наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Статистичні розподіли

Тип розподілу	Функція густини розподілу
Нормальний розподіл	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-M)}{2\sigma^2}}$
Логарифмічний нормальний розподіл	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-M)}{2\sigma^2}}$
Гамма-розподіл	$f(x)=\frac{a^r x^{r+1}e^{-ax}}{\Gamma(r)}$
Розподіл Вейбулла	$f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$
Розподіл Фреше	$f(x)=\frac{k}{v}\left(\frac{v}{x}\right)^{k+1}e^{-\left(\frac{v}{x}\right)^{k}}$

Для статистичного моделювання даної задачі параметри системи вважатимемо змінними за нормальним законом розподілу, оскільки на їх значення впливають значна кількість рівно значимих факторів [4], таких як фізичні властивості рідини та включень, механічні властивості поверхонь, можливий ексцентриситет та перекіс вісі ротора, температура тощо. При цьому генерація значень випадкових величин *X* (таблиця 2) здійснюється за схемою, наведеною на рисунку 2.

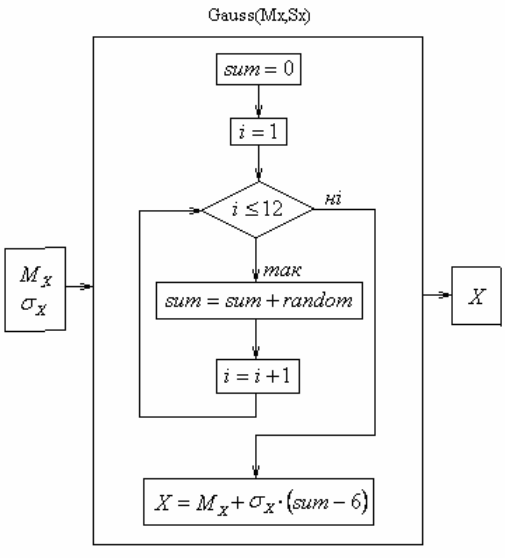

Рисунок 2 – Генерація вхідних параметрів за нормальним законом розподілу

Таблиця 2 – Вхідні параметри

Параметр	M*	σ**	Розмірність
m	*mm* = 250	*sm* = 5	*кг*
c	$mc = 4\cdot10^{4}$	$sc = 8\cdot10^{3}$	*кг/с*
k	$mk = 1\cdot10^{8}$	$sk = 2\cdot10^{7}$	*Н/с*
$g_{Ц}$	$mgc = 2{,}9\cdot10^{-6}$	$sgc = 6\cdot10^{-7}$	$м^3/(Па^{1/2}\cdot с)$
$g_{ТБ}$	$mgtb = 1{,}5\cdot10^{-6}$	$sgtb = 3\cdot10^{-7}$	$м^3/(Па^{1/2}\cdot с)$
s_e	*mse* = 0,03	$sse = 6\cdot10^{-3}$	$м^2$
s_1	*ms*1 = 0,02	*ss*1 = 0	$м^2$
V_1	*mV*1 = 0,001	$sV1 = 2\cdot10^{-4}$	$м^3$
p_0	$mp0 = 5\cdot10^{6}$	$sp0 = 1\cdot10^{6}$	*Па*
p_{10}	$mp10 = 5\cdot10^{6}$	$sp0 = 1\cdot10^{6}$	*Па*
E	$mE = 2\cdot10^{9}$	$sE = 4\cdot10^{8}$	$Н/м^2$

*M – математичне очікування;
**σ – середньоквадратичне відхилення.

Статистична модель передбачає проведення значної кількості математичних експериментів (в даному випадку 50 000), в результаті обробки яких отримуємо частотні характеристики системи (рисунок 5, 6).

З метою проведення математичного експерименту складена комп'ютерна програма за допомогою пакета MathCAD, подана на рисунку 4. Програма повертає вектори значень математичних очікувань, а також середньоквадратичних відхилень АЧХ і ФЧХ системи «ротор – гідроп'ята» (рисунки 3, 5, 6).

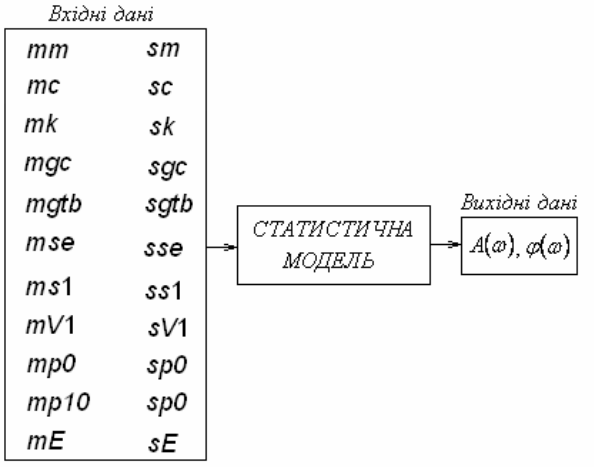

Рисунок 3 – Розрахункова модель

$M :=$ ORIGIN $\leftarrow 1$

for $r \in 1..max+1$

$\omega_r \leftarrow om\_min + \frac{om\_max - om\_min}{max} \cdot (r-1)$

$sa_r \leftarrow 0$

$sa2_r \leftarrow 0$

$sfi_r \leftarrow 0$

$sfi2_r \leftarrow 0$

for $j \in 1..N$

$m \leftarrow gauss(mm, sm)$

$c \leftarrow gauss(mc, sc)$

$k \leftarrow gauss(mk, sk)$

$f \leftarrow gauss(mf, sf)$

$gc \leftarrow gauss(mgc, sgc)$

$gtb \leftarrow gauss(mgtb, sgtb)$

$se \leftarrow gauss(mse, sse)$

$p0 \leftarrow gauss(mp0, sp0)$

$p10 \leftarrow gauss(mp10, sp10)$

$V1 \leftarrow gauss(mV1, sV1)$

$E \leftarrow gauss(mE, sE)$

$$W_r \leftarrow \left[\begin{pmatrix} m\cdot(i\cdot\omega_r)^2 + c\cdot i\cdot\omega_r + k & -se \\ s1\cdot i\cdot\omega_r + \frac{3}{2}\cdot\frac{gtb}{ztb}\cdot\sqrt{p10} & \frac{V1}{E}\cdot i\cdot\omega_r + \frac{gtb}{2\cdot\sqrt{p10}} + \frac{gc}{2\cdot\sqrt{p0-p10}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_1$$

$a_r \leftarrow |W_r|$

$sa_r \leftarrow sa_r + a_r$

$sa2_r \leftarrow sa2_r + (a_r)^2$

$fi_r \leftarrow |\arg(Re(W_r) + i\cdot Im(W_r))|$

$sfi_r \leftarrow sfi_r + fi_r$

$sfi2_r \leftarrow sfi2_r + (fi_r)^2$

$ma_r \leftarrow \frac{sa_r}{N}$

$$sa_r \leftarrow \frac{\sqrt{sa2_r - \frac{(sa_r)^2}{N}}}{N-1}$$

$mfi_r \leftarrow \frac{sfi_r}{N}$

$$sfi_r \leftarrow \frac{\sqrt{sfi2_r - \frac{(sfi_r)^2}{N}}}{N-1}$$

$M \leftarrow augment(\omega, ma, sa, mfi, sfi)$

Рисунок 4 – Скріншот комп'ютерної програми статистичного моделювання

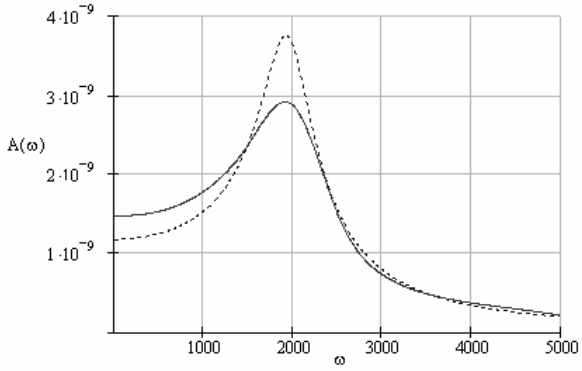

Рисунок 5 – АЧХ динамічної системи

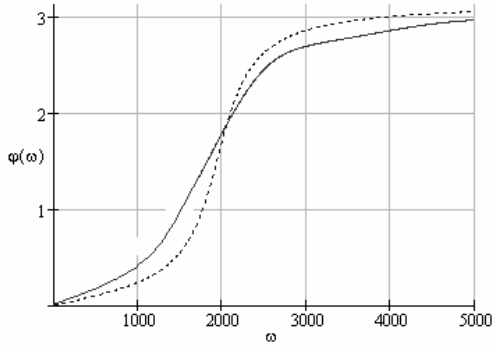

Рисунок 6 – ФЧХ динамічної системи

На рисунках 5 та 6 пунктиром показані частотні характеристики системи для незмінних параметрів (середньоквадратичні відхилення дорівнюю нулю).

ВИСНОВКИ

Розглянута динамічна система «ротор – гідроп'ята» з урахуванням імовірнісної зміни одинадцяти фізичних і геометричних параметрів. Створена комп'ютерна програма розрахунку та побудови частотних характеристик системи за допомогою програми MathCAD.

Встановлено, що урахування імовірнісної природи фізичних параметрів розглянутої динамічної системи призводить до кількісної зміни амплітудно-частотної характеристики в області резонансної частоти.

Подана методика може бути застосована для попередніх розрахунків динаміки автоматичних врівноважу вальних пристроїв зі змінними параметрами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Виршинг П. О свойствах статистических моделей, используемых при проектировании.– Хьюстон: ASME, 1975.– С. 232 – 238.
2. Кислий О., Дубчак Б., Римарук Т. Знаходження змінних параметрів за наперед заданим законом коливального руху.– Львів: МСУІМЛ-8, 2007.– С. 23 – 24.
3. Лиз С. Неопределённость и неточность.– Хьюстон: ASME.– 1975.– С. 78 – 92.
4. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З. Надёжность машин.– М.: Высшая школа, 1988.– 240 с.