

УДК 539.3

О. А. Иваненко, Л. А. Фильштинский

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНЫ И ВКЛЮЧЕНИЯ В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Механика разрушения пьезокерамических материалов с трещинами рассматривалась в [3]. Там же решалась задача с прямолинейных туннельных трещинах на границе с проводником. Постановка корректных краевых условий на берегах трещины в пьезокерамической среде обсуждалась в [6]. В [1] рассматривалась краевая задача электроупругости для криволинейной трещины в неограниченной среде.

Ниже дается решение краевой задачи о взаимодействии трещин и тонкого включения в пьезокерамическом полупространстве. С использованием функции Грина для полупространства краевая задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая реализуется численно. Приводятся результаты расчетов, характеризующие влияние границы полупространства, взаимного положения трещины и включения, а также кривизны трещины на сингулярные части сопряженных полей механических и электрических величин.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к кристаллофизической системе координат xuz полубесконечную матрицу, ограниченную

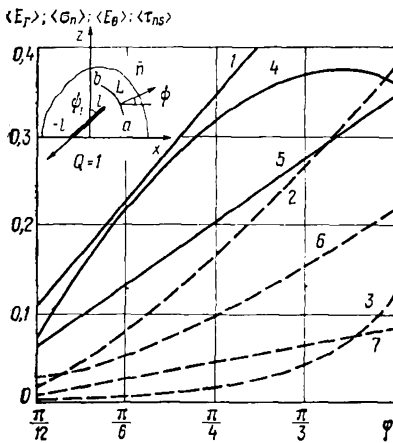


Рис. 1

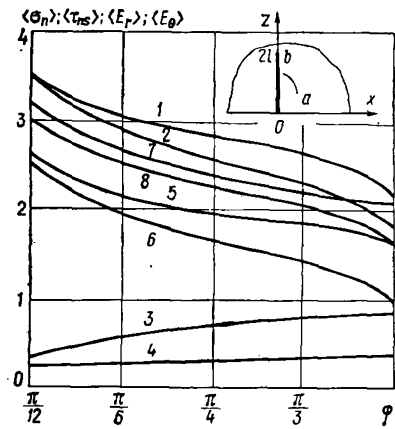


Рис. 2

плоскостью $z=0$. Пусть в матрице имеется непрерывно скрепленное с ней ленточное включение (диэлектрик) и туннельный разрез, ориентированные вдоль оси y (рис. 1).

Контур разреза в плоскости xoz обозначим через L . Будем предполагать, что L — простая разомкнутая дуга Ляпунова с кривизной, удовлетворяющей условию H [4], а поперечное сечение включения есть ориентированный под углом ϕ_1 к оси z отрезок длиной $2l$.

К берегам трещины приложим усилия X_n^\pm, Z_n^\pm , а к торцу включения — постоянную вдоль оси y нагрузку интенсивности Q .

Согласно [1], компоненты механических и электрических величин в пьезокерамической среде (кристалл гексагональной системы 6_{mm} [5],

поляризованная вдоль оси z керамика типа PZT-4, PZT-5 [2]) определяются формулами

$$\begin{aligned}
 u &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k); \quad \omega = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k); \quad \sigma_x = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k^2 \Phi_k'(z_k); \\
 \sigma_z &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_k'(z_k); \quad \tau_{xz} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k \Phi_k'(z_k); \quad z_k = x + \mu_k z; \quad (1.1) \\
 E_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k'(z_k); \quad E_z = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \Phi_k'(z_k); \quad D_x = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \mu_k \Phi_k'(z_k); \\
 D_z &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k'(z_k); \quad \Phi_k'(z_k) = d\Phi_k(z_k)/dz_k \quad (k = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_k(z_k)$ — произвольные аналитические функции от z_k ; входящие в (1.1) константы p_k, q_k, \dots, r_k определены в [1]; μ_k — характеристические числа, например, для пьезокерамики PZT-5 в условиях плоской деформации они таковы:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= 1,078896 i; \quad \mu_2 = 0,256965 + 1,075232 i; \quad \mu_3 = -0,256965 + \\
 &+ 1,075232 i.
 \end{aligned}$$

Для плоского напряженного состояния μ_k имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= 1,023777 i; \quad \mu_2 = 0,214682 + 1,038069 i; \quad \mu_3 = -0,214682 + \\
 &+ 1,038069 i.
 \end{aligned}$$

Электрические граничные условия на берегах разреза, а также включения, таковы:

$$E_s^+ = E_s^-; \quad D_n^+ = D_n^-, \quad (1.2)$$

где E_s и D_n — соответственно касательная компонента вектора напряженности электрического поля и нормальная компонента вектора электрической индукции.

Используя (1.1), механические и электрические краевые условия на берегах разреза L представляем в форме

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k a_k(\psi) [\Phi_k'(t_k)]^{\pm} &= \pm X_n^{\pm}; \quad t \in L; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k a_k(\psi) [\Phi_k'(t_k)]^{\pm} = \\
 = \mp Z_n^{\pm}; \quad t_k &= \operatorname{Re} t + \mu_k \operatorname{Im} t; \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k(\psi) \{[\Phi_k'(t_k)]^+ - [\Phi_k'(t_k)]^-\} = 0; \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k a_k(\psi) \{[\Phi_k'(t_k)]^+ - [\Phi_k'(t_k)]^-\} &= 0; \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi \\
 &(k = 1, 2, 3). \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза при движении от его начала a к концу b ; ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу и осью x .

Электрические граничные условия на берегах включения имеют такой же вид, как и два последних соотношения в (1.3). К указанным

соотношениям необходимо присоединить условие совместности деформаций матрицы и волокна в точке s_0

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 R_k(\psi_1) a_k(\psi_1) \frac{1}{2} \{[\Phi'_k(\tau_k)]^+ + [\Phi'_k(\tau_k)]^-\} =$$

$$= - \frac{(1 + \mu_0)(1 - 2\mu_0)}{(1 - \mu_0)E_0\delta_0} \int_{s_0}^l g(s) ds \quad (k = 1, 2, 3); \quad R_k(\psi_1) = q_k \cos \psi_1 -$$

$$- p_k \sin \psi_1; \quad \tau_k = \mu_k l \cos \psi_1 + s a_k(\psi_1).$$

Здесь $g(s)$ — интенсивность касательных усилий взаимодействия волокна и матрицы; μ_0 , E_0 , δ_0 и l — коэффициент Пуассона, модуль упругости, ширина и полудлина волокна соответственно; ψ_1 — угол между волокном и осью z .

При составлении условия совместности (1.4) учитывалось, что толщина волокна весьма мала, поэтому в (1.4) входит полусумма деформаций матрицы на берегах включения.

§ 2. Функция Грина для полуплоскости. Основные представления краевой задачи (1.3) — (1.4). Пусть в точке $(x_0; z_0)$ верхней полуплоскости $z > 0$ действует сосредоточенная сила $\bar{P} = (P \cos \omega; P \sin \omega)$, а граница $z = 0$ свободна от сил ($\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$). Если граница покрыта тонким электродом, то $E_x = 0$, в противном случае на границе с вакуумом приближенно считаем $D_z = 0$.

Решение поставленной задачи назовем функцией Грина для полуплоскости. Можно показать, что она имеет вид

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{A_k i}{z_k - z_{k0}} + \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{km} \bar{A}_m i}{z_k - z_{m0}}; \quad (2.1)$$

$$z_{k0} = x_0 + \mu_k z_0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Матрица $\alpha = \|\alpha_{km}\|$ и постоянные A_k определяются следующим образом:

$$\alpha = C^{-1} \bar{C}; \quad C = \|c_{mk}\|; \quad c_{1k} = \gamma_k; \quad c_{2k} = \gamma_k \mu_k; \quad \det C \neq 0;$$

$$\operatorname{Im} \mu_k > 0 \quad (k = 1, 2, 3); \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_k \mu_k^{n-1} = B_n \quad (n = 0, 1, \dots, 5);$$

$$B_0 = - \frac{P \cos \omega}{2\pi \Delta_1 a_{10} a_{20}} [a_{10} a_{22} a_{23} + 0,5 (a_{12} - s_{44}) \Delta_1]; \quad B_1 = \frac{P \sin \omega}{2\pi \Delta_1 a_{20}} \times$$

$$\times (d_{15} a_{22} - a_{20} a_{23}); \quad B_2 = \frac{P \cos \omega}{2\pi \Delta_1} a_{23}; \quad \Delta_1 = a_{20} a_{23} - a_{21} a_{22}; \quad (2.2)$$

$$B_3 = \frac{P \sin \omega}{2\pi \Delta_1} (a_{21} - d_{15}); \quad \Delta_2 = a_{14} a_{22} - a_{23}^2; \quad B_4 = - \frac{P \cos \omega}{2\pi \Delta_1} a_{21};$$

$$\Delta_3 = a_{21} a_{23} - a_{14} a_{20}; \quad B_5 = \frac{P \sin \omega}{2\pi \Delta_1 \Delta_2} [\Delta_3 (a_{21} - d_{15}) + 0,5 (a_{12} - s_{44}) \Delta_1].$$

Здесь C^{-1} и \bar{C} — соответственно обратная и комплексно сопряженная к C матрицы, $c_{3k} = \lambda_k$ в случае электродированной границы, $c_{3k} = r_k$, если она свободна от электродов.

Используя функцию Грина (2.1), записываем общее представление решений краевой задачи (1.3) — (1.4) в виде

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) &= \frac{b_k}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{g(s) ds}{\tau_k - z_k} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^3 \alpha_{km} \bar{b}_m \int_{-l}^l \frac{g(s) ds}{\bar{\tau}_m - z_k} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_k(t) dt_k}{t_k - z_k} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^3 \alpha_{km} \int_L \frac{\overline{\omega_m(t)} d\bar{t}_m}{\bar{t}_m - z_k}; \quad b_k = 2\pi A_k/P \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $g(s)$ и $\omega_k(t)$ — искомые функции.

Представления (2.3) автоматически удовлетворяют механическим и электрическим краевым условиям на границе полупространства.

§ 3. Основная система интегральных уравнений. Подставляя предельные значения функции (2.3) в краевые условия на разрезе и включении, а также в условие совместности деформаций (1.4), приходим к смешанной системе алгебраических и сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\int_{-l}^l g(s) H(\tau, t_0) ds + 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_{kj}(\psi_0)}{2\pi i} \left[\int_L \frac{\omega_k(t) dt_k}{t_k - t_{k0}} + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^3 \alpha_{km} \int_L \frac{\overline{\omega_m(t)} d\bar{t}_m}{\bar{t}_m - t_{k0}} \right] = F_j(t_0) \quad (j = 1, 2); \quad \int_{-l}^l g(s) H^*(\tau, \tau_0) ds + \\ &+ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{R_k(\psi_1) a_k(\psi_1)}{2\pi i} \left[\int_L \frac{\omega_k(t) dt_k}{t_k - \tau_{k0}} + \sum_{m=1}^3 \alpha_{km} \int_L \frac{\overline{\omega_m(t)} d\bar{t}_m}{\bar{t}_m - \tau_{k0}} \right] = \\ &= -\lambda \int_{s_0}^l g(s) ds; \quad 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \beta_{kj}(\psi_0) \omega_k(t_0) = W_j(t_0) \quad (j = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} H(\tau, t_0) &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_{kj}(\psi_0)}{2\pi i} \left(\frac{b_k}{\tau_k - t_{k0}} + \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{km} \bar{b}_m}{\bar{\tau}_m - t_{k0}} \right); \quad H^*(\tau, \tau_0) = \\ &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{R_k(\psi_1) a_k(\psi_1)}{2\pi i} \left(\frac{b_k}{\tau_k - \tau_{k0}} + \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{km} \bar{b}_m}{\bar{\tau}_m - \tau_{k0}} \right); \quad \beta_{k1}(\psi_0) = \gamma_k a_k(\psi_0); \end{aligned}$$

$$\beta_{k2}(\psi_0) = \gamma_k \mu_k a_k(\psi_0); \quad \beta_{k3}(\psi_0) = \lambda_k a_k(\psi_0); \quad \beta_{k4}(\psi_0) = r_k a_k(\psi_0);$$

$$F_1(t_0) = -0,5(Z_n^+ - Z_n^-); \quad F_2(t_0) = 0,5(X_n^+ - X_n^-); \quad W_1(t_0) = -(Z_n^+ + Z_n^-);$$

$$W_2(t_0) = (X_n^+ + X_n^-); \quad W_j(t_0) = 0 \quad (j = 3, 4);$$

$$\lambda = \frac{(1 + \mu_0)(1 - 2\mu_0)}{(1 - \mu_0) E_0 \delta_0}.$$

Для замыкания системы (3.1) присоединим к ней дополнительные условия однозначности перемещений u , w и статическое условие для включения

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 p_{kj} \int_L \omega_k(t) dt_k &= 0 \quad (j = 1, 2); \quad \int_{-l}^l g(s) ds = Q; \\ p_{k1} &= p_k; \quad p_{k2} = q_k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение этой системы будем разыскивать в классе h_0 функций, неограниченных на концах линии интегрирования [4].

§ 4. Асимптотические значения электрических и механических величин в окрестности вершин трещины. Контур разреза L параметризуем по формуле $t=t(\beta)$, $-1 \leq \beta \leq 1$. Соответственно этому

$$\omega_k(t) = \Omega_k(\beta) = \frac{\Omega_{k0}(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в интегральные представления (2.3) и вычисляя их асимптотические значения в окрестности концов линии интегриро-

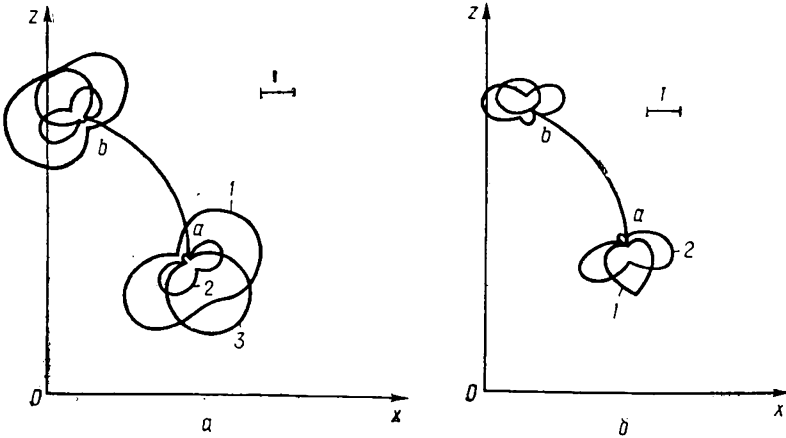


Рис. 3

вания [4], находим из (1.1) сингулярные части электрических и механических величин в окрестности вершин трещины

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{G_{mk}(\theta)}{\sqrt{\mu_k \sin \theta + \cos \theta}} \Omega_{k0}(\pm 1) \sqrt{\mp t'_k(\pm 1)}$$

$$(m = 1, 2, \dots, 5); \quad \sigma_1 = \sigma_r; \quad \sigma_2 = \tau_{r\theta}; \quad \sigma_3 = \sigma_\theta; \quad \sigma_4 = E_r; \quad \sigma_5 = E_\theta;$$

$$G_{2k}(\theta) = \gamma_k \left(\frac{1 - \mu_k^2}{2} \sin 2\theta - \mu_k \cos 2\theta \right); \quad G_{1k}(\theta) = \gamma_k (\mu_k \cos \theta - \sin \theta)^2;$$

$$G_{3k}(\theta) = \gamma_k (\mu_k \sin \theta + \cos \theta)^2; \quad G_{4k}(\theta) = \lambda_k (\mu_k \sin \theta + \cos \theta); \quad (4.2)$$

$$G_{5k}(\theta) = \lambda_k (\mu_k \cos \theta - \sin \theta); \quad t'_k(\pm 1) = (dt_k/d\beta)|_{\beta=\pm 1} \quad (k = 1, 2, 3).$$

§ 5. Расчет примеров. Рассмотрим пьезокерамическое полупространство (PZT-5), ослабленное свободной от нагрузки туннельной трещиной, поперечное сечение которой представляет собой дугу эллипса $x = R_1 \cos \frac{1+\beta}{2} \varphi$; $z = R_2 \sin \frac{1+\beta}{2} \varphi + z_1$; $-1 \leq \beta \leq 1$.

Внешняя нагрузка передается через включение, ориентированное под углом 45° к оси z . В расчетах принималось $\lambda = 0,3$.

На рис. 1 изображены кривые относительных коэффициентов интенсивности механических напряжений в функции от параметра φ , характеризующего длину трещины $2l_1$, при $R_1/R_2 = 1$, $z_1 = l \cos \psi_1$ (σ_n — разрывающее, а τ_{ns} — сдвигающее напряжения на продолжении за вершину трещины)

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{2\sigma_n}{Q} \sqrt{\rho l_1}; \quad \langle \tau_{ns} \rangle = \frac{2\tau_{ns}}{Q} \sqrt{\rho l_1}.$$

Кривые 1—3 соответствуют значению полудлины включения $l=0,2$, кривые 4—7 — значению $l=0,8$. Сплошные кривые характеризуют изменение $\langle \sigma_n \rangle$, штриховые — изменение $\langle \tau_{ns} \rangle$. Кривые изменения $\langle \sigma_n \rangle$ для концов a и b при $l=0,2$ практически совпадают (кривая 1), кривые 2, 5, 6 соответствуют концу a , кривые 3, 4, 7 — концу b .

На рис. 2 изображены кривые $\langle \sigma_n \rangle = \frac{\sigma_n}{P} \sqrt{\frac{\rho}{l_1}}$; $\langle \tau_{ns} \rangle = \frac{\tau_{ns}}{P} \sqrt{\frac{\rho}{l_1}}$ в зависимости от φ для случая $Q = 0$, $R_1/R_2 = 1$, $z_1 = 1$, когда на берегах трещины действует равномерная нормальная распирающая нагрузка интенсивности P , а включение длиной $2l = 3$ ориентировано вдоль оси z .

Кривые 1, 2 характеризуют значения $\langle \sigma_n \rangle$, кривые 3, 4 — $\langle \tau_{ns} \rangle$. Кривые 1, 3 и 2, 4 отвечают точкам a и b соответственно. Остальные графика характеризуют асимптотические значения электрических величин

$$(E_r = E_x \cos \theta + E_z \sin \theta; \quad E_\theta = -E_x \sin \theta + E_z \cos \theta)$$

$$\langle E_r \rangle = \frac{E_r}{P} \sqrt{\frac{\rho}{l_1} \frac{\epsilon_{11}}{d_{33}}}; \quad \langle E_\theta \rangle = \frac{E_\theta}{P} \sqrt{\frac{\rho}{l_1} \frac{\epsilon_{11}}{d_{33}}}.$$

Кривые 5, 6 характеризуют изменение $\max \langle E_r \rangle$, а кривые 7, 8 — $\max \langle E_\theta \rangle$ на концах a и b соответственно.

На рис. 3, a показаны эпюры распределения $\langle \sigma_r \rangle$, $\langle \tau_{r\theta} \rangle$, $\langle \sigma_\theta \rangle$ (кривые 1—3 соответственно) в окрестности вершин круговой трещины при $\varphi = 75^\circ$ (остальные параметры те же, что и для рис. 2).

На рис. 3, b для того же случая изображены эпюры асимптотических значений электрических величин $\langle E_r \rangle$, $\langle E_\theta \rangle$ (кривые 1, 2 соответственно).

Представляет интерес определение контактных усилий взаимодействия включения и матрицы, а также распределение усилий во включении. Соответствующие результаты приведены на рис. 4.

На кривых 1—3 представлены эпюры контактных усилий $g(s)$ вдоль включения (кривые 1, 3 отвечают $Q=1$, $P=0$, $\varphi=75^\circ$, $\psi_1=45^\circ$, $l=0,2$ и $0,8$ соответственно, кривая 2 построена при $Q=0$, $P=1$, $\varphi=75^\circ$, $\psi_1=0$, $l=1,5$; остальные параметры те же, что и выше). Графики 4—6 описывают распределение усилий вдоль волокна (кривые 4, 6 соответствуют тем же параметрам, что и кривые 2, 3, кривая 5 — тем же параметрам, что и 2): $N(s) = - \int_s^l g(s) ds$.

Можно показать, что контактные усилия $g(s)$ на выходящем к краю полуплоскости конце включения ограничены в диапазоне $0 \leq \psi_1 \leq 51^\circ$. В соответствии с этим кривые 1—3 в точке $-l$ имеют конечное значение. На внутреннем конце включения контактные усилия имеют особенность типа квадратного корня.

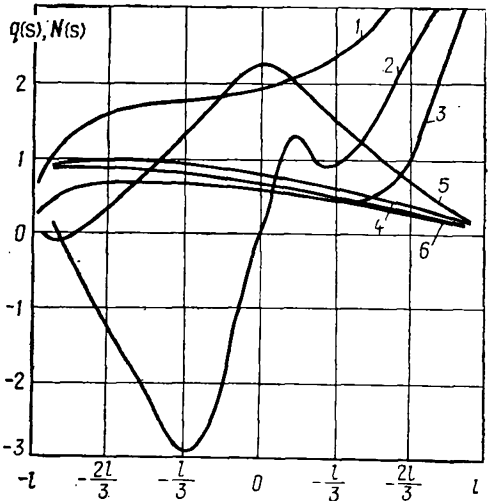


Рис. 4

1. Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А. Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами.— Прикл. математика и механика, 1979, 43, № 1, с. 138—143.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.— В кн.: Физическая акустика. М.: Мир, 1966, т. 1, ч. А, с. 204—326.
3. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником.— Прикл. математика и механика, 1975, 39, № 1, с. 149—159.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.— М.: Наука, 1968.—511 с.
5. Най Д. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.—385 с.
6. Половинкина И. Б., Улитко А. Ф. К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1978, № 18, с. 10—17.

Сум. филиал Харьков. политехн. ин-та

Поступила 26.11.81