

УДК 539.3

В. А. Любчак, Л. А. Фильштинский

## ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Изгибу изотропных и анизотропных бесконечных пластин с трещинами посвящены многие работы [1, 4, 7]. Ниже рассмотрена задача об изгибе защемленной полубесконечной анизотропной пластины, ослабленной криволинейными трещинами.

Исследуется влияние анизотропии, кривизны трещины, а также влияние границы на сингулярные поля изгибающих моментов в окрестности трещины. Приводятся представления решений для случая изотропной пластины, полученные при помощи предельного перехода из соответствующих соотношений для анизотропной среды.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим полубесконечную анизотропную пластину, ослабленную  $n$  криволинейными разрезами  $L_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Предполагаем, что  $L_j$  — простые, непересекающиеся разомкнутые дуги Ляпунова с кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера.

Пусть пластина защемлена вдоль границы  $y=0$  (рис. 1). На берегах разрезов зададим изгибающие моменты  $m^\pm(t)$  и обобщенную перерезывающую силу  $q^\pm(t)$  так, чтобы главный момент и главный вектор нагрузки, действующей на обоих берегах, были равны нулю (знак «+» относится к левому берегу  $L_j$  при движении от начала разреза  $a_j$  к концу  $b_j$ ).

Дифференцируя краевое условие в форме Лехницкого [3] по направлению  $s$ , касательному к  $L_j$ , получаем краевые условия на берегах разрезов

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{\mu_k} a_k(\psi) W_k''(t_k) = -m \cos \psi +$$

$$+ (f + C) \sin \psi; \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 B_k a_k(\psi) W_k''(t_k) = m \times$$

$$\times \sin \psi + (f + C) \cos \psi; \quad A_k = D_{11} + D_{12} \mu_k^2 + 2D_{16} \mu_k;$$

$$B_k = D_{12} + D_{22} \mu_k^2 + 2D_{26} \mu_k; \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi; \quad f = \int_0^s q(s_0) ds_0;$$

$$t_k = \operatorname{Re} t + \mu_k \operatorname{Im} t; \quad t \in L = \bigcup_{j=1}^n L_j \quad (k=1, 2). \quad (1.1)$$

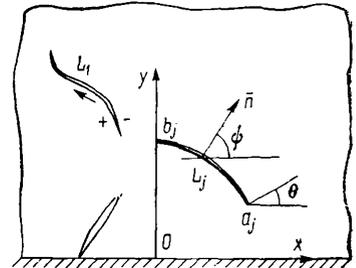


Рис. 1

Здесь  $D_{ij}$  — соответствующие цилиндрические жесткости;  $\mu_k$  ( $k=1, 2$ ) — комплексные параметры [3];  $\psi \equiv \psi(t)$  — угол между внешней нормалью к левому берегу разреза и осью  $Ox$ ;  $s, s_0$  — натуральные координаты дуг;  $C = \{C_j, t \in L_j\}$  — постоянные интегрирования.

Можно показать, что функция Грина для верхней полуплоскости  $y \geq 0$  (в условиях поперечного изгиба) имеет вид

$$G(x, y; x_0, y_0) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 G_k(z_k; x_0, y_0); \quad G_k^m = \frac{A_k}{z_k - z_{k0}} + \sum_{m=1}^2 \alpha_{km} \frac{\bar{A}_m}{z_k - z_{m0}};$$

$$z_k = x + \mu_k y; \quad z_{k0} = x_0 + \mu_k y_0; \quad G_k''' = \frac{d^3 G_k}{dz_k^3} \quad (m, k = 1, 2). \quad (1.2)$$

Здесь  $G$  — прогиб пластины;  $A_k$  — известные постоянные [3]. Константы  $\alpha_{km}$  можно определить из краевых условий на границе полуплоскости  $y=0$ . Например, для заземленной полуплоскости имеем

$$\alpha_{1m} = \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_m}{\mu_1 - \mu_2}; \quad \alpha_{2m} = \frac{\bar{\mu}_m - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \quad (m = 1, 2). \quad (1.3)$$

Исходя из функций Грина (1.1), представления искомых функций  $W_k^*(z_k)$  возьмем в виде

$$W_k^*(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(t) dt_k}{t_k - z_k} - \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{km}}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{P_m(t)} \bar{dt}_m}{\bar{t}_m - z_k};$$

$$p_k(t) = \{p_{kj}(t), t \in L_j\} \quad (k = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

§ 2. Основная система уравнений. Подставляя предельные значения (1.4) на  $L$  в (1.1), приходим к следующей системе уравнений:

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^2 Q_{kl}(\psi_0) \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(t) dt_k}{t_k - t_{k0}} - \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{km}}{\pi i} \int_L \frac{\overline{P_m(t)} \bar{dt}_m}{\bar{t}_m - t_{k0}} \right\} = F_{1l}(t_0);$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^2 Q_{kl}(\psi) p_k(t) = F_{2l}(t) \quad (l = 1, 2); \quad Q_{k1}(\psi) = \frac{A_k}{\mu_k} a_k(\psi);$$

$$Q_{k2}(\psi) = B_k a_k(\psi); \quad F_{11}(t) = -m_2 \cos \psi + f_2 \sin \psi + 2C \sin \psi;$$

$$F_{12}(t) = m_2 \sin \psi + f_2 \cos \psi + 2C \cos \psi; \quad F_{21}(t) = -m_1 \cos \psi + f_1 \sin \psi;$$

$$f_1 = f^+ - f^-; \quad F_{22}(t) = m_1 \sin \psi + f_1 \cos \psi; \quad f_2 = f^+ + f^-;$$

$$m_1 = m^+ - m^-; \quad m_2 = m^+ + m^-; \quad t_{k0} = \text{Re } t_0 + \mu_k \text{Im } t_0;$$

$$t_0 \in L \quad (k = 1, 2). \quad (2.1)$$

К основной системе уравнений надо присовокупить условия однозначности функций перемещений и прогиба

$$\int_{L_j} p_j(t) dt_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad \text{Re} \sum_{k=1}^2 \int_{L_j} p_k(t) t_k dt_k = 0. \quad (2.2)$$

Дополнительные условия (2.2) удовлетворяются за счет постоянных интегрирования  $C$ , фигурирующих в (1.1), и произволов в функциях  $p_k(t)$  [5].

Полагая в функциях (1.4) и системе уравнений (2.1)  $\alpha_{km} = 0$  ( $k, m = 1, 2$ ), приходим к задаче изгиба бесконечной пластины с криволинейными разрезами [7].

§ 3. Предельный переход к изотропной среде. Совершая предельный переход по описанной ранее схеме [6], получаем представления функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , описывающих усилия и моменты в изотропной полубесконечной пластине с разрезами

$$M_x + M_y = -8D(1 + \nu) \text{Re } \Phi(z); \quad M_y - M_x + 2iH_{xy} = 4D(1 - \nu) \times$$

$$\times [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \quad \Phi(z) = -\frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\omega(t) dt}{t - z} - \frac{\kappa}{4\pi i} \int_L \frac{\omega(t) dt}{\bar{t} - z} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\overline{\omega(t)} \text{Im} t \, \bar{d}t}{(\bar{t}-z)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{M_1(t)} \, \bar{d}t}{\bar{t}-z}; \quad \Psi(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \omega(t) K_1(t, z) \, dt + \\
 & + \frac{1}{4\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} K_2(t, z) \, \bar{d}t + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{M_1(t) \, dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{M_1(t)} \, \bar{t} \, \bar{d}t}{(\bar{t}-z)^2}; \\
 & K_1(t, z) = \frac{\bar{t}}{(t-z)^2} + \frac{\kappa \bar{t}}{(\bar{t}-z)^2}; \quad z = x + iy; \quad t \in L; \\
 & K_2(t, z) = -\frac{\kappa}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} + \frac{2i \text{Im} t}{(\bar{t}-z)^2} - \frac{4i \bar{t} \text{Im} t}{(\bar{t}-z)^3}; \\
 & M_1(t) = -\frac{e^{-2t\psi}}{2D(1-\nu)} (m_1 - if_1); \quad \kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $D$  — цилиндрическая жесткость;  $\omega(t)$  — искомая плотность.

§ 4. Асимптотические выражения для моментов в окрестности вершин трещины. Вычисляя значения функций (1.4) в окрестности

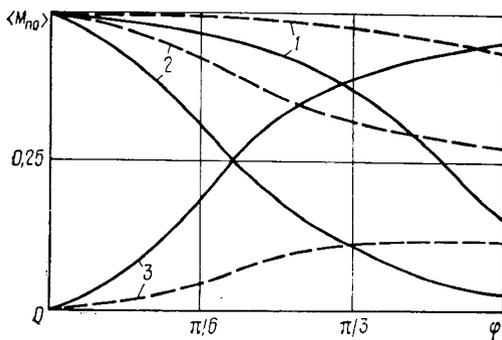


Рис. 2

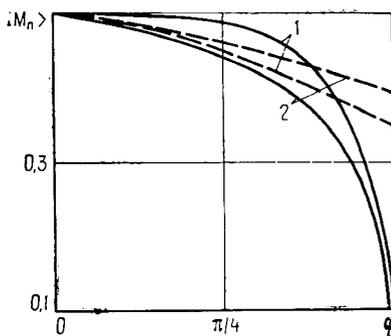


Рис. 3

концевых точек разреза  $L_j$  [5] и используя выражения для моментов [3], находим (ниже индекс  $j$  опущен)

$$\begin{aligned}
 M_l &= \pm \text{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{R_{kl} \Gamma_k}{\sqrt{\mp}(z_k - c_k)} \quad (l = 1, 3); \quad \Gamma_k = \Omega_{k0} (\pm 1) \times \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} t_k (\pm 1) \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \rho_k(t) = \Omega_k(\beta) = \frac{\Omega_{k0}(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad M_1 = M_x; \quad M_2 = M_y; \\
 M_3 &= H_{xy}; \quad c_k = \text{Re} c + \mu_k \text{Im} c; \quad R_{k1} = A_k; \quad R_{k2} = B_k; \quad R_{k3} = D_{10} + \\
 & + D_{26} \mu_k^2 + 2D_{66} \mu_k; \quad z_k = \text{Re} z + \mu_k \text{Im} z; \quad z \in O(c_k) \quad (k = 1, 2). \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует концу  $c=b$ , нижний — началу  $c=a$ ;  $t=t(\beta)$  — параметрическое представление  $L_j$  ( $-1 \leq \beta \leq 1$ ).

§ 5. Примеры расчета. Рассмотрим пластину из стеклопластика АГ-4С с характеристиками  $E_1 = 2,1 \cdot 10^4$  МН/м<sup>2</sup>;

$$E_2 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ МН/м}^2; \quad G = 4,1 \cdot 10^3 \text{ МН/м}^2; \quad \nu_2 = 0,07; \quad \mu_1 = 0,517 + 0,937i;$$

$$\mu_2 = -0,517 + 0,937i,$$

ослабленную трещиной вдоль дуги эллипса

$$x = R_1 \sin \frac{\beta + 1}{2} \varphi; \quad y = R_2 \cos \frac{\beta + 1}{2} \varphi \quad (-1 \leq \beta \leq 1).$$

При решении системы уравнений (2.1) и (2.2) применялась процедура типа Мультиптопа [2]. Полученная система алгебраических уравнений численно реализована на ЭВМ ЕС—1022.

Для бесконечной пластины на рис. 2 показаны графики изменения величины  $\langle M_{n0} \rangle = M_n (\rho/2l)^{1/2} / M_0$  ( $\rho = |z - c|$ ;  $2l$  — длина трещины;  $M_n$  — изгибающий момент на продолжении трещины за вершину) в функции от угла  $\varphi$ . Пластина подвергается изгибу равномерно распределенными

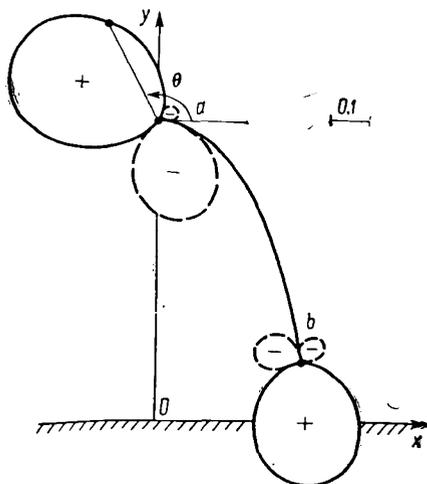


Рис. 4

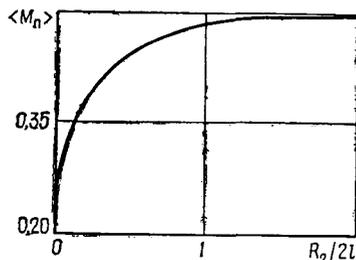


Рис. 5

моментами  $M_0$  на бесконечности. Штриховые линии соответствуют началу ( $c = a$ ), сплошные — концу трещины ( $c = b$ ). Кривые 1, 2 отвечают нагрузке  $M_x^\infty = 0$ ,  $M_y^\infty = M_0 = 1$  и отношению полуосей  $R_1/R_2$ , равным 2 и 0,5 соответственно. Кривые 3 построены для случая действия на бесконечности моментов  $M_x^\infty = M_0 = 1$ ;  $M_y^\infty = 0$  и  $R_1/R_2 = 0,5$ .

Рассмотрим защемленную полубесконечную пластину. Зададим на берегах трещины распределенные изгибающие моменты интенсивности  $m = 1$ .

Зависимость величины  $\langle M_n \rangle = M_n (\rho/2l)^{1/2} / m$  от параметра  $\varphi$  для значений  $R_1/R_2 = 0,5$  (кривые 1) и  $R_1/R_2 = 2$  (кривые 2) показана на рис. 3. Здесь штриховые линии соответствуют  $c = a$ , сплошные —  $c = b$ . На рис. 4 изо-

бражены эпюры величин  $M_n (\rho/2l)^{1/2} / m$  в функции полярного угла  $\theta$  для начала ( $c = a$ ) и конца трещины ( $c = b$ ). Эпюры построены для значений параметров  $R_1/R_2 = 0,5$ ;  $\varphi = 80^\circ$ ;  $m = 1$ .

Для этого же случая нагружения ( $m = 1$ ) рассмотрим горизонтальную прямолинейную трещину, расположенную на расстоянии  $R_2$  от защемления ( $y = 0$ ). С приближением трещины к защемленной границе значения величины  $\langle M_n \rangle = M_n (\rho/2L)^{1/2} / m$  (на продолжении трещины за вершину) изменяются, как показано на рис. 5.

Из анализа полученных результатов следует, что влияние границы на асимптотику моментов начинает заметно сказываться на расстояниях порядка длины трещины. При приближении к границе защемленной полуплоскости величина  $\langle M_n \rangle$  на продолжении за вершину существенно уменьшается.

Кривизна трещины заметно влияет на симметрию эпюры относительно продолжения трещины. Поэтому траектория распространения трещины может оказаться негладкой.

1. Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. — Киев: Наук. думка, 1979.—400 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. — М.: Наука, 1973.—304 с.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.: Гостехиздат, 1957.—355 с.
4. Линьков А. М., Меркулов В. А. Задачи об изгибе пластин с разрезами. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 1, с. 111—119.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.—512 с.
6. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 91—97.
7. Фильштинский Л. А., Хандогин В. А. Изгиб анизотропной пластины, ослабленной криволинейными разрезами. — Прикл. механика, 1980, 16, № 1, с. 120—124.

Сумский филиал  
Харьковского политехнического института

Поступила  
07.04.80

---

Фильштинский, Л.А. Изгиб полубесконечной анизотропной пластины, ослабленной криволинейными разрезами [Текст] / В.А. Любчак, Л.А. Фильштинский // Прикладная механика. — 1982. — Т. 18, №10. — С. 63-67.