

Исследование режимов движения наночастиц в рамках стохастической системы

О.В. Ющенко*, А.Ю. Бадалян

Сумской государственной университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы, Украина

(Получено 02.07.2012; опубликована online 29.10.2012)

На основе стохастической системы уравнений, описывающей поведение средней скорости движения наночастиц, напряженности внешнего поля и внутренней энергии частиц, построена синергетическая модель, позволяющая самосогласованным образом представить режимы движения взвешенных наночастиц. Учитывая соотношения между временами изменения указанных степеней свободы, получено уравнение Фоккера-Планка и соответствующее уравнение Ланжевена. Построена фазовая диаграмма системы и найдена зависимость стационарного значения средней скорости от внешних условий. В рамках метода фазовой плоскости исследована кинетика переходов между режимами движения наночастиц.

Ключевые слова: Самоорганизация, уравнение Фоккера-Планка, Уравнение Ланжевена, Метод фазовой плоскости.

PACS numbers: 05.40.Jc, 02.50. – r

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием нанотехнологий особое внимание ученых в последнее время вызывает контроль и управление движением наночастиц. Решение подобной проблемы может быть применимо к широкому спектру технологических задач, в том числе к задачам нано- и микрофлюидики [1], к аспектам создания новейших сенсоров [2], а также к разработке наномоторов и реакторных устройств [3-8]. При этом основным является доставка частиц в определенную точку, где они необходимы, например, для адресной доставки лекарственных средств или в промышленных реакторах.

Известно, что для некоторых существующих реакторов используют каталитические частицы, размер которых определяется допустимыми техническими условиями, когда поток реагентов пропускают сквозь слой катализатора [9]. При этом необходимая для катализаторов высокая активность в ряде случаев достигается благодаря увеличению площади поверхности активной фазы (от 25 до 500 м² на мл), что становится возможным только для очень маленьких каталитических частиц (порядка 50 нм) [10].

В результате задача управления режимами движения активных наночастиц является на данный момент достаточно актуальной [11-16]. Наиболее простым механизмом при этом является использование различного рода излучения [11, 12]. Например, для достаточно плотного потока жидкости находящиеся в нем взвешенные частицы могут контролироваться изменяющимся во времени излучением. Кроме того, анализируя распределение концентрации взвешенных частиц, можно судить об интенсивности падающего излучения, в результате чего возможно создание нового класса датчиков излучения на основе жидкости.

Поскольку до этого речь шла о взвешенных частицах, то целесообразно будет обратиться к описанию броуновского движения [11, 12, 17]. Несмотря на то, что теоретические основы такого движения были исследованы А. Эйнштейном в самом начале прошлого века, некоторые наблюдавшиеся при этом эф-

фекты удалось объяснить лишь сейчас, основываясь на исследовании так называемого «горячего» броуновского движения [11-13]. Оно отличается от обычного броуновского движения тем, что наночастицы (в работах [11, 12] использовались наночастицы золота), нагретые сфокусированным лазерным излучением, имеют запас внутренней энергии, которая затем преобразуется в механическую энергию. В результате этого движение наночастиц обусловлено не только спонтанными толчками молекул окружающей их жидкости, но и преобразованием имеющегося запаса внутренней энергии в энергию движения.

Очевидно, что описанные выше системы являются открытыми и далеки от термодинамического равновесия, поэтому могут поддерживать свою упорядоченность только тогда, когда процессы, определяющие их поведение, являются нелинейными.

В результате целью данной работы является моделирование режимов движения взвешенных наночастиц в рамках модели «горячего» броуновского движения [11, 12, 17].

2. СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Согласно работе [17] основой такого описания является синергетическая система уравнений, определяющая самосогласованное поведение трех степеней свободы:

- параметра порядка, который сводится к средней скорости движения наночастиц v ;
- сопряженного поля, представляющего собой напряженность внешнего поля h (в случае явления хемотаксиса [15], когда наночастицы совершают направленное движение согласно распределению концентрации химических реагентов, данный параметр отвечает градиенту концентрации соответствующих химических веществ);
- управляющего параметра, который можно ассоциировать с внутренней энергией частиц ε .

В результате задача сводится к выражению скоростей изменения указанных степеней свободы через их значения v , h , ε . Поскольку для прямолинейного

* yushchenko@phe.sumdu.edu.ua

движения наночастиц в основном существует одно выделенное направление, то уместно будет далее анализировать одномерный случай. Кроме того, из работ [11, 12, 17-19] известно, что для коллективного движения наночастиц характерны несколько типов движения: направленное движение с определенной скоростью, вращательное движение и чередование указанных режимов движения.

В отличие от работы [17] нас интересует случай жесткого режима самоорганизации, когда скорость движения наночастиц изменяется не плавно, а скачком. Для этого учтем простейшую аппроксимацию [20] для времени изменения параметра порядка, которое зависит от значения скорости v .

В результате выражение для среднего ускорения записывается в виде

$$\dot{v} = -\frac{v}{t_v} \left(1 + \frac{\eta}{1 + v^2/v_\eta^2} \right) + a_v h. \quad (1)$$

Здесь t_v – характерное время изменения средней скорости наночастиц, η – константа дисперсии времени релаксации средней скорости, v_η – масштаб дисперсии, $a_v > 0$ – положительная константа линейной реакции ускорения \dot{v} на возрастание поля h .

Уравнение для сопряженного поля принимаем в стандартном виде

$$\dot{h} = -\frac{h}{t_h} + a_h v \varepsilon, \quad (2)$$

где первое слагаемое имеет релаксационную природу с характерным временем t_h , второе представляет положительную обратную связь средней скорости движения и внутренней энергии со скоростью изменения поля ($a_h > 0$ – положительная константа связи). Именно последнее обуславливает нарастание поля, которое является причиной самоорганизации.

Уравнение эволюции внутренней энергии

$$\dot{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon)}{t_\varepsilon} - a_\varepsilon v h + \zeta(t), \quad (3)$$

отличается от (1) – (2) тем, что релаксация параметра ε происходит не до нуля, а до конечного значения ε_e , которое задается внешними условиями, например, температурой жидкости, в которой находятся взвешенные наночастицы (t_ε – соответствующее время релаксации, константа $a_\varepsilon > 0$). Также в соответствии с принципом Ле-Шателье в уравнении (3) учтена отрицательная обратная связь внешнего поля и скорости движения наночастиц со скоростью изменения внутренней энергии. Кроме того, учитывая случайное воздействие внешней среды, в уравнение (3) добавлен стохастический источник, представляющий процесс Орнштейна-Уленбека

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t), \zeta(t') \rangle = \frac{I}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right). \quad (4)$$

Здесь I задает интенсивность флуктуаций, а τ – время их релаксации.

Согласно [20] система синергетических уравнений (1) – (3) представляет простейшую полевую схему,

описывающую эффект самоорганизации. Для анализа этой системы удобно воспользоваться безразмерными переменными, относя время t , среднюю скорость v , поле h , внутреннюю энергию ε и интенсивность флуктуаций I к соответствующим масштабам.

$$t_v, (a_h a_\varepsilon t_h t_\varepsilon)^{-1/2}, (a_v^2 t_v^2 a_h a_\varepsilon t_h t_\varepsilon)^{-1/2}, (a_h t_h a_v t_v)^{-1}, (t_\varepsilon a_h t_h a_v t_v)^{-2}.$$

В результате поведение группы активных наночастиц представляется безразмерной системой уравнений

$$\dot{v} = -v \left(1 + \frac{\eta}{1 + v^2/v_\eta^2} \right) + h, \quad (5)$$

$$\sigma^{-1} \dot{h} = -h + v \varepsilon, \quad (6)$$

$$\delta^{-1} \dot{\varepsilon} = (\varepsilon_e - \varepsilon) - v h + \zeta(t), \quad (7)$$

где введены соотношения $\sigma^{-1} \equiv t_h/t_v, \delta^{-1} \equiv t_\varepsilon/t_v$.

В общем случае система (5)-(6) не имеет аналитического решения, поэтому воспользуемся приближением

$$t_h \approx t_v \gg t_\varepsilon, \quad (8)$$

которое показывает, что в ходе эволюции системы наиболее быстро изменяется внутренняя энергия частицы. При этом $\sigma = 1$, а $\delta \gg 1$. Последнее условие позволяет пренебречь левой частью уравнения (7). В результате, система трех дифференциальных уравнений сводится к двум.

$$\dot{v} = -v \left(1 + \frac{\eta}{1 + v^2/v_\eta^2} \right) + h, \quad (9)$$

$$\dot{h} = -\sigma h + \sigma v [\varepsilon_e - v h + \xi(t)]. \quad (10)$$

Подставляя выражения для h и \dot{h} , полученные из (9), в уравнение (10), мы приходим к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{v} + \gamma(v) \dot{v} = f(v) + g(v) \zeta(t), \quad (11)$$

имеющему канонический вид уравнения движения для нелинейного стохастического осциллятора Ван дер Поля [17,20-23]. В нашем случае коэффициент трения $\gamma(v)$, сила $f(v)$ и амплитуда шума $g(v)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= 1 + \eta \left(\frac{1 - v^2/v_\eta^2}{(1 + v^2/v_\eta^2)^2} \right) + \sigma(1 + v^2), \\ f(v) &= \sigma(\varepsilon_e - 1)v - \sigma v^3 - \sigma \eta \frac{v(1 + v^2)}{1 + v^2/v_\eta^2}, \\ g(v) &= \sigma v. \end{aligned} \quad (12)$$

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Далее наша задача состоит в нахождении функции распределения $P(v, a, t)$ системы в фазовом про-

странстве, образованном скоростью v и ускорением a [17, 21, 24].

Для этой цели представим уравнение Эйлера (11) в рамках формализма Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{v} &= a, \\ \dot{a} &= -\gamma(v)a + f(v) + g(v)\zeta(t). \end{aligned} \quad (13)$$

В результате, необходимая плотность вероятности $P(v, a, t)$ сводится к функции распределения $\rho(v, a, t)$ решений системы (13)

$$P(v, a, t) = \langle \rho(v, a, t) \rangle_{\zeta}. \quad (14)$$

Здесь $\langle \dots \rangle_{\zeta}$ отвечает усреднению по шуму ζ .

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(v, a) \right] \langle \rho(v, a, t) \rangle = -\frac{\partial}{\partial a} g(v) \times \int_0^t \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle e^{-\hat{L}(t-t')} g(v) \frac{\partial}{\partial a} \langle \rho(v, a, t) \rangle dt'. \quad (17)$$

Далее переходим к исходному распределению $P(v, a, t)$, заменяя оператор в левой части уравнения (17) на \hat{N}

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(v, a) \right\} p(v, a, t) = \hat{N}(v, a, t) p(v, a, t). \quad (18)$$

Поскольку мы рассматриваем систему на больших временных масштабах, то в соответствии с [24], уравнение (11) можно представить в виде

$$\ddot{v}_i + \gamma(v_i) \dot{v}_i = f(v_i) + g(v_i) \zeta_i(t), \quad (19)$$

для набора переменных v_1, v_2, \dots, v_n и $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Анализируя выражение (19), вместо интегрально-дифференциального оператора \hat{N} мы получаем сумму

$$\hat{N}(v, a, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{N}_n = g(v) \frac{\partial}{\partial a} \sum_{n=0}^{\infty} M_n \hat{L}_n(v, a), \quad (20)$$

где моменты корреляционной функции определяют следующим образом

$$M_n(t) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n \langle \zeta(t) \zeta(0) \rangle dt. \quad (21)$$

Используя представление (4), получим соотношения для нулевого и первого моментов

$$M_0(t) = I, \quad M_1(t) = I\tau. \quad (22)$$

Операторы \hat{L}_n определяются по правилу [17, 21, 24]

$$\hat{L}_n = [\hat{L}_{n-1}, \hat{L}], \quad \hat{L}_0 = g(v) \frac{\partial}{\partial a}, \quad (23)$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор $[A, B] = AB - BA$.

Выражения для \hat{N}_0 и \hat{N}_1 позволяют придать выражению (18) вид уравнения Крамерса [26], решени-

Уравнение непрерывности строится стандартным образом [20, 24].

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(v, a) \right] \rho(v, a, t) = -g(v) \zeta(t) \frac{\partial}{\partial a} \rho(v, a, t), \quad (15)$$

где введен оператор

$$\hat{L}(v, a) = -\gamma(v) \frac{\partial}{\partial a} a + a \frac{\partial}{\partial v} + f(v) \frac{\partial}{\partial a}. \quad (16)$$

В соответствии с методом разложения по кумулянтам Ван Кампена [24, 25], выражение для усредненной функции $\rho(v, a, t)$ принимает вид интегрально-дифференциального уравнения

ем которого является функция $P(v, a, t)$.

Поскольку интеграл

$$p(v, t) = \int_a P(v, a, t) da, \quad (24)$$

представляет больший практический интерес, нежели функция $P(v, a, t)$, то далее рассмотрим моменты начального распределения

$$p_n(v, t) = \int_a a^n P(v, a, t) da. \quad (25)$$

В этом случае искомым [20, 24] будет нулевой момент $p_0(v, t) \equiv p(v, t)$.

После умножения на a^n уравнения Крамерса и интегрирования по ускорению a , получаем рекуррентные отношения [20, 24], которые приводят к замкнутой иерархической системе уравнений для моментов функции распределения

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial v}, \\ \gamma p_1 &= f p - \frac{\partial p_2}{\partial v} - M_1 \left[g \frac{\partial g}{\partial v} p + g^2 \frac{\partial p}{\partial v} \right], \\ \gamma p_2 &= g^2 (M_0 - M_1 \gamma) p. \end{aligned} \quad (26)$$

Для краткости, зависимость от скорости v здесь и далее будет опущена.

Решая циклическую систему уравнений (26), мы приходим к уравнению Фоккера-Планка [27].

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} (D_1 p) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (D_2 p), \quad (27)$$

где

$$D_1 = \frac{1}{\gamma} \left[f - M_0 \frac{g^2}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial v} + M_1 g \frac{\partial g}{\partial v} \right], \quad (28)$$

$$D_2 = M_0 \frac{g^2}{\gamma^2}, \quad (29)$$

коэффициенты дрейфа и диффузии соответственно.

4. УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА

Уравнению Фоккера-Планка (27) можно поставить в соответствие [20, 27] уравнение Ланжевена, описывающее эволюцию параметра порядка,

$$\dot{v} = D_1 + \sqrt{2D_2}\xi(t) \tag{30}$$

где $\xi(t)$ представляет собой белый шум со стандартными свойствами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t), \xi(t') \rangle = \delta(t-t'). \tag{31}$$

При исследовании переходов между режимами движения наночастиц воспользуемся стандартным подходом [28]. Для этого запишем уравнение Ланжевена (30) в виде стохастического дифференциального уравнения

$$dv = D_1 dt + \sqrt{2D_2} dw \tag{32}$$

где $dw = \xi(t)dt$ представляет Виннеровский процесс [27]. Это позволяет ввести новый процесс $z(t)$ с якобианом перехода $dz/dv = \sqrt{2D_2}^{-1}$.

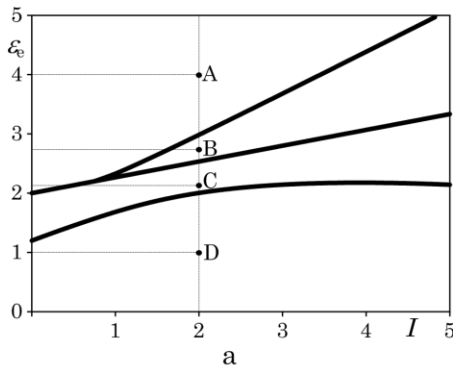
Поскольку изначально использовался белый шум, то для переменной $z(t)$ стохастический оператор дифференцирования может быть записан в виде [21].

$$dz = \frac{dz}{dv} dz + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dz^2} dz^2. \tag{33}$$

Построив подобным образом уравнение эволюции для процесса $z(t)$, мы приходим к выражению для белого шума

$$\xi z t = \frac{\dot{v} - D_1 + \frac{1}{2} D_2'}{\sqrt{2D_2}}, \tag{34}$$

где штрих означает дифференцирование по скорости v . Учитывая, плотность вероятности $p \xi t \propto \exp -1/2 \int \xi^2 t dt$ и соотношение $p(v) = p(\xi)J$ между распределениями (J – якобиан перехода от переменной ξ к переменной v), согласно [29] получаем выражение



где L играет роль лагранжиана в евклидовой теории поля

$$p v, \dot{v}, t \propto \exp \left(-\frac{1}{2} L dt \right), \tag{35}$$

$$L = \frac{1}{2D_2} \left(\dot{v} - D_1 + \frac{1}{2} D_2' \right)^2. \tag{36}$$

В стационарном состоянии ускорение частиц $\dot{v} = 0$, и условие экстремума для функции Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial v} = 0$ приводит к системе уравнений.

$$\begin{aligned} D_1 - D_2' &= 0, \\ 2D_2 D_2'' - D - D_2'^2 + D_1 D_2' &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Подставляя в (37) зависимости (12), (22), (28) и (29), получим фазовую диаграмму системы (Рис.1а) и зависимость стационарного значения средней скорости движения наночастиц от значения внутренней энергии, задаваемого внешними условиями (Рис.1б).

Как видно из Рис.1а, для исследуемой системы характерно наличие четырех областей A, B, C и D на фазовой диаграмме. Чтобы охарактеризовать режимы движения, присущие каждой области рассмотрим более детально Рис.1б, где сплошной жирной кривой изображено решение первого уравнения (37), лучи A, B, C и D отвечают соответствующим точкам фазовой диаграммы, а прямые 1, 2 представляют дополнительные решения, возникающие при анализе второго уравнения (37). При этом точки R отвечающие $v = 0$, характеризуют вращательное движение частиц; для точек M, T средняя скорость $v \neq 0$, поэтому имеет место направленное прямолинейное движение; точки N не имеют физического значения и отвечают дополнительным экстремумам, разделяющим стационарные состояния системы; точки K, L – также являются дополнительными решениями, полученными из второго уравнения (37).

Кроме анализа стационарных состояний системы далее нам необходимо рассмотреть кинетику перехода из одного состояния в другое

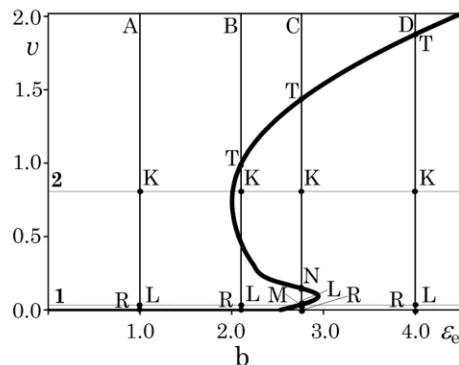


Рис. 1 – Диаграмма состояний системы (а) и зависимость стационарного значения средней скорости движения (б) при $I = 2$, $\tau = 0.4$, $v_\eta = 0.1$

5. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СИСТЕМЫ

Для анализа кинетики системы рассмотрим уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial R}{\partial v} \tag{38}$$

Поскольку в рассматриваемой нами системе необходимо учесть диссипацию энергии, то в уравнении (37) учтена диссипативная функция, имеющая стандартный вид $R = \dot{v}^2/2$. В результате приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{v} + \dot{v}D_2 - \frac{D_2'}{2D_2} [\dot{v}^2 - D_2 - D_2'^2] + D_1 - D_2' \cdot D_2'' - D_1' = 0, \tag{39}$$

которое можно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Данное преобразование позволяет использовать метод фазовой плоскости для рассмотрения кинетики системы на основе фазовых портретов на плоскости \dot{v}, v .

Фазовые портреты системы приведены на Рис.2 и отвечают соответствующим областям фазовой диаграммы (штрихами обозначены точки, отвечающие обратному направлению скорости v).

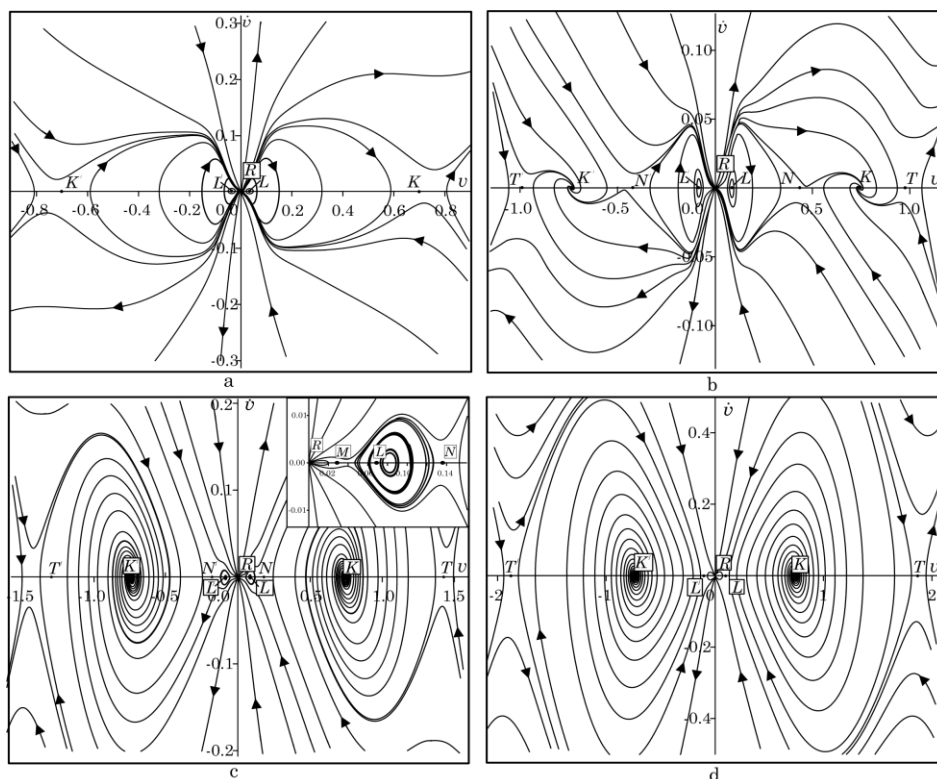


Рис. 2 – Фазовые портреты системы для параметров, обозначенных точками A, B, C и D на фазовой диаграмме (Рис.1а)

Анализируя фазовые портреты, можно сделать вывод о достаточно сложной кинетике исследуемой стохастической системы. При этом направленное движение взвешенных наночастиц возможно с различными средними скоростями $v \neq 0$ (седла M и T на Рис.2b, c, d); для вращательного движения (особая точка R на Рис.2a-d) характерно нестандартное кинетическое поведение.

Кроме того, можно сказать, что для области A фазовой диаграммы реализуется только вращательное движение; для области B характерно сосуществование вращательного и направленного типов движения; в третьей области C возможно два вида направленного движения с разными значениями скорости v ; в последней области D фазовой диаграммы реализуется только направленное движение наночастиц.

6. ВЫВОДЫ

В результате проделанного исследования была построена самосогласованная модель, позволяющая описать возможные типы движения взвешенных на-

ночастиц. Рассматривая влияние внешней среды, которое отражается на значениях ϵ внутренней энергии, задаваемой температурой окружающей жидкости, были исследованы возможные комбинации существующих режимов движения. При этом для небольших значений внутренней энергии ϵ и для большого диапазона интенсивности флуктуаций внутренней энергии I , возможно только вращательное движение наночастиц. В обратном случае малой интенсивности флуктуаций и большого значения внутренней энергии ϵ реализуется единственное направленное движение с достаточной средней скоростью. В промежуточных случаях возможно два режима сосуществования: вращательного и направленного движения; направленного движения с разными скоростями (одна из которых принимает весьма незначительные значения).

Данные результаты могут быть полезны как при решении некоторых физических задач, например, при контроле движения наночастиц в каталитических реакторах, так и медицинских, где адресная доставка лекарственных средств в заданную точку организма достаточно актуальна на сегодняшний момент.

Investigation of the Nanoparticles Motion Modes within the Framework of Stochastic System

O.V. Yushchenko, A.Yu. Badalyan

Sumy State University, 2, Rimsky-Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

On the basis of a stochastic system of equations, describing the behavior of the average velocity of nanoparticles, the external field and the internal energy, a synergetic model, which allows in a self-consistent manner to present the modes of the suspended nanoparticles motion, was constructed. Considering the correlation between the times of change of the degrees of freedom the Fokker-Planck equation was obtained, and the corresponding Langevin equation was found. Phase diagram of the system was built and the dependence of steady-state average velocity on the external conditions was found. Within the framework of the phase-plane method the kinetics of the transition between the modes of the nanoparticles motion was investigated.

Keywords: Self-organization, The Fokker-Planck equation, Langevin equation, The phase-plane method.

Дослідження режимів руху наночастинок в рамках стохастичної системи

О.В. Ющенко, А.Ю. Бадалян

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна

На основі стохастичної системи рівнянь, що описує поведінку середньої швидкості руху наночастинок, напруженості зовнішнього поля і внутрішньої енергії частинок, побудована синергетична модель, що дозволяє самоузгодженим чином представити режими руху зважених наночастинок. Враховуючи співвідношення між часом зміни зазначених ступенів вільності, отримано рівняння Фоккера-Планка і відповідне рівняння Ланжевена. Побудована фазова діаграма системи, і знайдена залежність стаціонарного значення середньої швидкості від зовнішніх умов. В рамках методу фазової площини досліджена кінетика переходів між режимами руху наночастинок.

Ключові слова: Самоорганізація, Рівняння Фоккера-Планка, Рівняння Ланжевена, Метод фазової площини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- M. Bazant, O. Vinogradova, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026001 (2009).
- C. Moreau, J. Dupuis, J. Revilloud, K. Arumugam, M. Vivaudou, *Nat. Nanotechnol.* **3**, 620 (2008).
- U. Demirok, R. Laocharoensuk, K. Manesh, J. Wang, *Angew. Chem.* **120**, 9489 (2008).
- J. Gibbs, Y. Zhao, *Phys. Lett.* **94**, 163104 (2009).
- N. Kovtyukhova, *J. Phys. Chem. C* **112**, 6049 (2008).
- R. Laocharoensuk, J. Burdick, J. Wang, *ACS Nano* **2**, 1069 (2008).
- W. Paxton, K. Kistler, C. Olmeda, A. Sen, S. Angelo, Y. Cao, T. Mallouk, P. Lammert, V. Crespi, *J. Am. Chem. Soc.* **126**, 13424 (2004).
- Y. Wang, R. Hernandez, D. Bartlett, J. Bingham, T. Kline, A. Sen, T. Mallouk, *Langmuir* **22**, 10451 (2006).
- P. Ramachandran, R. Chaudhari, *Three phase catalytic reactors* (London: Gordon and Breach: 1983).
- J. Enterkin, K. Pöppelmeier, L. Marks, *Nano Lett.* **11**, 993 (2011).
- D. Rings, R. Schachoff, M. Selmke, F. Cichos, K. Kroy, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 090604 (2010).
- P. Radtke, L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **85**, 051110 (2012).
- L. Joly, S. Merabia, J.-L. Barrat, *EPL* **94**, 50007 (2011).
- R. Golestanian, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 188305 (2009).
- Y. Hong, N. Blackman, N. Корп, A. Sen, D. Velegol, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 178103 (2007).
- J. Howse, R. Jones, A. Ryan, T. Gough, R. Vafabakhsh, R. Golestanian, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 048102 (2007).
- O. Yushchenko, A. Badalyan, *Phys. Rev. E* **85**, 051127 (2012).
- G. Ivanitskii, A. Medvinskii, M. Tsyganov, *Phys. Usp.* **37**, 961 (1994).
- G. Ivanitskii, A. Medvinskii, M. Tsyganov, *Phys. Usp.* **34**, 289 (1991).
- A. Олемской, *Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория* (Москва: КРАСАНД: 2009).
- A. Хоменко, Д. Харченко, О. Ющенко, *Вісник Львівського державного університету* **37**, 44 (2004).
- C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Berlin: Springer: 2004).
- A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, O. Sosnovtseva. *Synchronization. From Simple to Complex* (Verlag Berlin Heidelberg: Springer: 2009).
- V. Shapiro, *Phys. Rev. E* **48**, 109 (1993).
- N. Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: Elsevier: 2007).
- H. Kramers, *Physica* **7**, 284 (1940).
- H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Berlin: Springer: 1989).
- Z. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press: 1994).
- Г. Рёпке, *Неравновесная статистическая механика* (Москва: Мир: 1990).