

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ
С ЖЕСТКИМИ ВСТАВКАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
(ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)

НАЗАРЕНКО А. М., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

Задачи дифракции упругих волн на прямолинейном туннельном разрезе в неограниченном пространстве рассматривались, например, в [1, 2]. Динамическая задача для плоскости с круговым включением исследовалась в [3]. Взаимодействие волн напряжений с криволинейной туннельной вставкой в полупространстве в условиях продольного сдвига изучалось в [4]. В публикуемой работе предлагается схема решения динамической краевой задачи о дифракции упругих волн на криволинейной вставке в полуплоскости.

1. Рассмотрим действие плоской гармонической волны расширения

$$\varphi_1 = \text{Re} \{ \tau_1 \exp(-i\omega t - i\gamma_1 x_2) \}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \tau_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

или волны сдвига

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \text{Re} \{ \tau_2 \exp(-i\omega t - i\gamma_2 x_2) \}, \quad \tau_2 = \text{const} \quad (1.2)$$

на тонкую жесткую вставку, расположенную вдоль криволинейной дуги L и впаянную в упругую полуплоскость $x_2 > 0$ (массой вставки пренебрегаем) (фиг. 1). Взаимодействуя со вставкой, падающая и отраженная от границы $x_2 = 0$ волны порождают сингулярное волновое поле в ее окрестности.

Суммарные амплитуды волновых полей перемещений и напряжений имеют вид

$$U_k = V_k + U_k^{(0)} - A U_k^{(1)} \quad (k=1, 2) \quad (1.3)$$

$$\tau_{mn} = S_{mn} + \tau_{mn}^{(0)} - A \tau_{mn}^{(1)} \quad (m, n=1, 2)$$

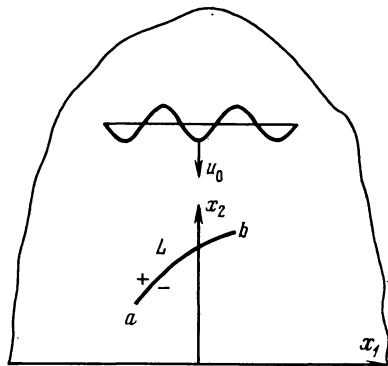
Здесь V_k , $U_k^{(0)}$, $U_k^{(1)}$ и S_{mn} , $\tau_{mn}^{(0)}$, $\tau_{mn}^{(1)}$ —

амплитуды компонент вектора перемещения и тензора напряжения возмущенного поля в падающей и отраженной от границы $x_2 = 0$ (при отсутствии дефекта) волнах соответственно, $A = 1$ для защемленной границы, $A = -1$ для границы, свободной от сил, и $A = 0$ в случае неограниченной среды.

Считаем, что вставка перемещается как абсолютно жесткое тело и граничные условия на L имеют вид

$$U_1^\pm = B_1 - \omega_0 \eta, \quad U_2^\pm = B_2 + \omega_0 \xi \quad (\xi = \xi + i\eta \in L) \quad (1.4)$$

где B_1 , B_2 и ω_0 — амплитуды поступательного движения и жесткого поворота вставки; верхний знак соответствует левому берегу вставки при движении от его начала a к концу b .



Фиг. 1

2. В случае установившихся волновых движений упругого тела амплитуды перемещений U_k и напряжений τ_{mn} удовлетворяют соотношениям

$$L_{mk}U_k=0, \quad \tau_{mn}=\lambda\delta_{mn}(U_{1,1}+U_{2,2})+\mu(U_{m,n}+U_{n,m}) \quad (2.1)$$

$$L_{11}=\mu\partial^2/\partial x_1^2+(\lambda+2\mu)\partial^2/\partial x_2^2+\rho\omega^2$$

$$L_{12}=L_{21}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, \quad L_{22}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\rho\omega^2$$

Здесь λ , μ — коэффициенты Ламе, ρ — плотность среды, δ_{mn} — символ Кронекера.

Рассмотрим колебание полуплоскости под действием гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta=\xi+i\eta$ и направленной вдоль оси x_1 (первое состояние) или вдоль оси x_2 (второе состояние). Уравнения k -го состояния имеют вид

$$\begin{aligned} V_{kk}=L_{kk}g_k, \quad V_{kn}=-L_{12}g_k, \quad (n \neq k, k, m, n=1, 2) \quad (2.2) \\ g_k=(g_{k1}-g_{k2})/(\gamma_2^2-\gamma_1^2), \quad (\Delta+\gamma_m^2)g_{km}=c\delta(x_1-\xi, x_2-\eta) \\ \gamma_k=\omega/c_k, \quad c=-[\mu(\lambda+2\mu)]^{-1} \\ S_{kmn}=\lambda\delta_{mn}(V_{k1,1}+V_{k2,2})+\mu(V_{km,n}+V_{kn,m}) \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 — скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно, $\delta(x_1, x_2)$ — дельта-функция Дирака.

Фундаментальные решения уравнений Гельмгольца выражаются формулой [5]:

$$\psi(\gamma_m r)=(c/4i)H_0^{(1)}(\gamma_m r), \quad r=|z-\zeta|, \quad z=x_1+ix_2 \quad (m=1, 2) \quad (2.3)$$

Положим

$$g_{km}(x_1, x_2, \xi, \eta)=\psi(\gamma_m r)+A_{km}(x_1, x_2, \xi, \eta) \quad (2.4)$$

Для определения неизвестных функций A_{km} перейдем в пространство трансформант Фурье F . Преобразования Фурье функций $H_0^{(1)}(\gamma_m r)$ имеют вид [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\gamma_m r) \exp[-ip|x_1-\xi|] dx_1 = -2i \frac{\exp[-\mu_m|x_2-\eta|]}{\mu_m} \quad (m=1, 2) \quad (2.5)$$

Для выделения однозначных ветвей радикалов $(p^2-\gamma^2)^{1/2}$ в плоскости p проводится разрез от точек $\pm\gamma$ до бесконечности вдоль лучей $\arg p=\pm\pi$, при этом принимается, что при $p=0$ имеем $(p^2-\gamma^2)^{1/2}=-i\gamma$.

Пусть W_{km} , R_{kmn} , B_{km} — трансформанты Фурье функций V_{km} , S_{kmn} , A_{km} соответственно. В пространстве F граничные условия на линии $x_2=0$ приобретают вид: в случае заземленной границы

$$W_{k1}(0, \eta)=W_{k2}(0, \eta)=0 \quad (2.6)$$

для границы $x_2=0$, свободной от сил

$$R_{k12}(0, \eta)=R_{k22}(0, \eta)=0 \quad (2.7)$$

Для придания физического смысла обратным преобразованиям Фурье введем в среду малое затухание с последующим предельным переходом при его исчезновении. Законность такого предельного перехода составляет содержание принципа предельного поглощения [7].

Введение затухания приводит к тому, что волновые числа для гармонических волн становятся комплексными, причем

$$\gamma_m^*=\gamma_m'+i\gamma_m'', \quad \gamma_m''>0, \quad |\gamma_m'| \gg \gamma_m'' \quad (m=1, 2) \quad (2.8)$$

Здесь и в дальнейшем звездочка над функцией означает, что эта функция зависит от комплексного волнового числа. В противном случае предполагается, что волновое число действительное и соответствует устранению демпфирования в среде. Учитывая (2.3) и (2.5), ищем $B_{km}^*(x_2, \eta)$ в виде

$$B_{km}^* = C_{km}^*(\eta) \exp(-\mu_m^* x_2) c / \mu_m^* \quad (2.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.6) или (2.7) для каждого состояния, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решая эти системы, находим

$$C_{1m}^*(\eta) = (-1)^m [e_3^* \exp(-\mu_m^* \eta) - e_n^* \exp(-\mu_n^* \eta)] / \Delta_0^* \quad (2.10)$$

$(m, n=1, 2; n \neq m)$

При $A=1$ имеем $e_1^* = 2p^2$, $e_2^* = 2\lambda_3^*$, $e_3^* = p^2 + \lambda_3^*$, $\Delta_0^* = p^2 - \lambda_3^*$. При $A=-1$ получим $e_1^* = 2p^2 \lambda_2^*$, $e_2^* = 2\lambda_2^* \lambda_3^*$, $e_3^* = \lambda_2^{*2} + p^2 \lambda_3^*$, $\Delta_0^* = \lambda_2^{*2} - p^2 \lambda_3^*$.

Функции $C_{2m}^*(\eta)$ (второе состояние) получаются из $C_{1m}^*(\eta)$, если в выражениях (2.10) поменять местами μ_1^* и μ_2^* . При этом C_{22}^* соответствует C_{11}^* , а $C_{21}^* = -C_{12}^*$.

Возвращаясь в основное пространство посредством обратного преобразования Фурье и используя (2.2), получаем следующие выражения для функций V_{km}^* — амплитуд перемещений k -го состояния в полуплоскости с малым затуханием:

$$V_{km}^* = E_{km}^* + F_{km}^*, \quad E_{km}^* = L_{mk} \theta^* \quad (2.11)$$

$$\theta^* = [\psi(\gamma_1^* r) - \psi(\gamma_2^* r)] / (\gamma_2^{*2} - \gamma_1^{*2})$$

$$F_{km}^* = \frac{1}{4\pi \mu \gamma_2^{*2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{km}^*(p, x_2, \eta)}{\Delta_0^*} e^{iu} dp, \quad u = p |x_1 - \xi|$$

$$D_{11}^* = -e_3^* [(p^2/\mu_1^*) Y_{11}^* + \mu_2^* Y_{22}^*] + \mu_2^* e_1^* [Y_{12}^* + Y_{21}^*]$$

$$D_{12}^* = -i\alpha_1 \{e_3^* [Y_{11}^* + Y_{22}^*] - e_2^* Y_{12}^* - e_1^* Y_{21}^*\}$$

$$D_{21}^* = i\alpha_1 \{e_3^* [Y_{11}^* + Y_{22}^*] - e_1^* Y_{12}^* - e_2^* Y_{21}^*\}$$

$$D_{22}^* = -e_3^* [\mu_1^* Y_{11}^* + (p^2/\mu_2^*) Y_{22}^*] + \mu_1^* e_1^* [Y_{12}^* + Y_{21}^*]$$

$$\alpha_1 = p \operatorname{sign}(x_1 - \xi), \quad Y_{jl}^* = \exp(-\mu_j^* x_2 - \mu_l^* \eta) \quad (j, l=1, 2)$$

Искомые функции V_{km} в (2.2) могут быть найдены непосредственно из (2.11) при стремлении параметра затухания к нулю.

Для заземленной границы в этом случае величина $\Delta_0 = p^2 - \mu_1 \mu_2$ не обращается в нуль ни при каких значениях p , т. е. при $A=1$ каждая из падающих волн (продольная или поперечная) при взаимодействии с границей полуплоскости порождает отраженные волны обоих типов, причем другие типы волн не возникают.

Выбор значений многозначных функций μ_1 и μ_2 определяется требованием о раздельном удовлетворении условий излучения для каждого типа волн. Поскольку в среде с затуханием перемещение обращается в нуль на бесконечности ($x_2 \rightarrow \infty$), то, как следует из (2.11), при отсутствии демпфирования отраженные волны должны быть убывающими по x_2 (неоднородные волны). Отсюда вытекает, что

$$\mu_m = \sqrt{p^2 - \gamma_m^2} \quad (|p| > \gamma_m), \quad \mu_m = -i\sqrt{\gamma_m^2 - p^2} \quad (|p| < \gamma_m) \quad (2.12)$$

Если граница полуплоскости свободна от сил ($A=-1$), то уравнение $\Delta_0 = \lambda_2^2 - p^2 \mu_1 \mu_2 = 0$ имеет два действительных корня $\pm \gamma_R$, противоположных по знаку. При условии (2.12) других корней нет [8].

Однозначное определение функций V_{km} сводится к указанию способа вычисления несобственных интегралов в (2.11). Физически неоднозначность амплитуд перемещений V_{km} связана с тем, что суперпозиция неоднородных продольных и поперечных волн вблизи границы полуплоскости

образует поверхностную волну Релея с произвольной амплитудой [9], вклад которой в суммарное волновое поле определяется при помощи метода контурного интегрирования в комплексной плоскости [10].

При переходе от (2.11) к контурным интегралам замыкание контура производится в верхней полуплоскости. Поскольку подынтегральные функции в (2.11) например при $x_1 - \xi = 0$, не удовлетворяют условиям леммы Жордана, запишем функции $e_\nu(W)/\Delta_0(W)$ в виде

$$e_\nu(W)/\Delta_0(W) = \psi_\nu(W) + \theta_\nu(W) \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (2.13)$$

где $\psi_\nu(W)$ — некоторые функции комплексного переменного $W = p + iy$, не имеющие полюсов ни на оси p , ни на оси y и обладающие тем свойством, что функции $\theta_\nu(W)$ стремятся к нулю быстрее, чем $1/\psi_\nu(W)$, когда $|W|$ неограниченно возрастает.

Построение $\psi_\nu(W)$ основано на разложении функций $e_\nu(W)$, $\Delta_0(W)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и следующих асимптотических формулах:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2} &= W^2 \frac{W^4 + 1}{W^8 + W^4 + 1} + O(|W|^{-10}) \\ \frac{1}{W^6} &= \frac{W^2}{W^8 + W^4 + 1} + O(|W|^{-10}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Представление (2.13) позволяет каждый из интегралов в (2.11) разбить на два. В первом, содержащем $\psi_\nu(W)$, подынтегральная функция уже не имеет полюсов на действительной оси, и он сходится ввиду наличия экспоненциально убывающего множителя. Во втором, содержащем $\theta_\nu(W)$, подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана и, следовательно, возможен переход к контурным интегралам.

Окончательно выражения для амплитуд перемещений k -го состояния V_{km} в полуплоскости с границей, свободной от сил, приобретают вид

$$V_{km} = E_{km} + F_{km}, \quad E_{km} = L_{mk} \theta, \quad \theta = [\psi(\gamma_1 r) - \psi(\gamma_2 r)] / (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \quad (2.15)$$

$$F_{1m} = \frac{1}{2\pi\mu\gamma_2^2} \sum_{i=1}^4 f_{1m5}, \quad f_{1m1} = \pi i \sum_{n=1}^5 \frac{d_{1mn}(x_2, \eta)}{d_n} \exp(ip_n |x_1 - \xi|)$$

$$f_{1m2} = \int_0^\infty T_{1m}(p, x_1, x_2, \xi, \eta) dp, \quad f_{1m3} = \int_0^\infty Z_{1m}(p, x_2, \eta) e^{-u} dp$$

$$f_{114} = i \int_0^{r_2} \text{Im} \left\{ \frac{G_{11}(p, x_2, \eta)}{\Delta_0(p)} \right\} e^{iu} dp, \quad f_{124} = \int_0^{r_2} \text{Re} \left\{ \frac{G_{12}(p, x_2, \eta)}{\Delta_0(p)} \right\} e^{iu} dp$$

$$d_5 = d\Delta_0/dp|_{p=p_5=r_2}, \quad d_n = -df/dp|_{p=p_n} \quad (n=1, 4); \quad f(p) = p^8 + p^4 + 1$$

$$d_{1m5} = D_{1m}(\gamma_R, x_2, \eta), \quad T_{11} = [\mu_2(Y_{12} + Y_{21})\psi_1 - (p^2 Y_{11}/\mu_1 + \mu_2 Y_{22})\psi_3] \cos u$$

$$T_{12} = [(Y_{11} + Y_{22})\psi_3 - Y_{12}\psi_2 - Y_{21}\psi_1] p \sin u, \quad \psi_\nu = \psi_\nu(p)$$

$$Z_{11} = -r_2 T_1 (\cos y_{12} + \cos y_{21}) + T_3 [(p^2/r_1) \cos y_{11} + r_2 \cos y_{22}]$$

$$Z_{12} = \alpha_1 [-T_2 \sin y_{12} - T_1 \sin y_{21} + T_3 (\sin y_{11} + \sin y_{22})]$$

$$T_\nu = \theta_\nu(ip), \quad r_k = \sqrt{p^2 + \gamma_k^2}, \quad y_{jl} = r_j x_2 + r_l \eta \quad (\nu=1, 3; j, l=1, 2)$$

Функции G_{1m} принимают вид D_{1m} , фигурирующих в (2.11), при условии, что в выражениях для последних e_ν/Δ_0 заменены на $e_\nu/\Delta_0 - \psi_\nu$ ($\psi_\nu(p) = t_\nu(p)/f(p)$); при $n=1, 4$ функции d_{1mn} получаются из $C_{1m}(p_n, x_2, \eta)$ заменой $e_\nu(p_n)$ на $t_\nu(p_n)$; p_n — корни уравнения $f(p) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости. Амплитуды перемещений второго состояния могут быть

получены из выражений для амплитуд перемещений первого состояния. Для этого в представлениях функций f_{1m} необходимо поменять местами μ_1 и μ_2 , r_1 и r_2 ; при этом функции f_{22} соответствует функция f_{11} , а $f_{21}-f_{12}$, взятая с обратным знаком.

3. Запишем следующие представления для амплитуд перемещений и напряжений возмущенного волнового поля поставленной краевой задачи. В предположении, что кривизна L удовлетворяет условию Гельдера [11]:

$$V_m(x_1, x_2) = \int_L Q_k(s) V_{km}(x_1, x_2, \xi, \eta) ds \quad (m, k=1, 2) \quad (3.1)$$

$$S_{mn}(x_1, x_2) = \int_L Q_k(s) S_{kmn}(x_1, x_2, \xi, \eta) ds$$

Здесь $Q_k(s) = [S_k]$ — амплитуды скачков напряжений на L .

При таком выборе представлений разность краевых значений (1.4) автоматически обращается в нуль, а их сумма приводит к уравнению Фредгольма первого рода, численная реализация которых затруднительна. Поэтому целесообразно продифференцировать каждое условие (1.4) по дуговой координате s . Соответствующие производные от амплитуд перемещений (3.1) на L имеют вид (суммирование по k):

$$\frac{dV_m}{ds_0} = -\frac{\beta_1}{2} \int_L [h_{km} + H_{km}] Q_k(s) ds \quad (m, k=1, 2) \quad (3.2)$$

$$h_{km} = 2\kappa \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} \delta_{km}, \quad H_{12} = E + \frac{\partial F_{12}}{\partial s_0}$$

$$H_{21} = E + \frac{\partial F_{21}}{\partial s_0}, \quad H_{kk} = (-1)^{k+1} \operatorname{Re} g + R_{kk} + \frac{\partial F_{kk}}{\partial s_0}$$

$$\begin{aligned} g &= [\exp(i\varphi_0 - 2i\alpha_0) - \exp(-i\varphi_0)] / (\zeta - \zeta_0) \\ E &= -\operatorname{Im} g + R_{12}, \quad R_{kk} = (\pi i/2) \{ (-1)^{k+1} \Phi_{33} \cos(3\alpha_0 - \varphi_0) + \\ &+ \Phi_{31} [2\kappa \cos(\alpha_0 - \varphi_0) - \cos(\alpha_0 + \varphi_0)] - 2\gamma_2^2 (\kappa - 1) \Phi_{11} \cos(\alpha_0 - \varphi_0) \} \\ R_{12} &= R_{21} = (\pi i/2) [\Phi_{33} \sin(3\alpha_0 - \varphi_0) - \Phi_{31} \sin(\alpha_0 + \varphi_0)] \\ \kappa &= \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \quad \Phi_{km} = \frac{\gamma_1^k H_m(\gamma_1 r_0) - \gamma_2^k H_m(\gamma_2 r_0)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \end{aligned}$$

$$H_1(x) = 2i/(\pi x) + H_1^{(1)}(x), \quad H_3(x) = 16i/(\pi x^3) + 2i/(\pi x) + H_3^{(1)}(x)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta \in L, \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L \\ \zeta - \zeta_0 &= r_0 e^{i\alpha_0}, \quad \beta_1 = (\lambda + \mu) c / (4\pi) \end{aligned}$$

Здесь h_{kk} — сингулярное ядро, H_{km} — регулярные ядра, φ_0 — угол наклона касательной к L в точке ζ_0 , ν — коэффициент Пуассона, функции F_{km} имеют вид (2.11) в случае закрепленной границы (звездочка опускается) и (2.15) для границы $x_2=0$, свободной от сил.

Модифицированное краевое условие приводит к системе сингулярных интегральных уравнений (суммирование по k):

$$\int_L (h_{km} + H_{km}) Q_k(s) ds = N_m \omega_0 + M_m \quad (m, k=1, 2) \quad (3.3)$$

$$N_1 = 2 \sin \varphi_0 / \beta_1, \quad N_2 = -2 \cos \varphi_0 / \beta_1$$

Здесь первое слагаемое в правой части характеризует поворот вставки как жесткого целого, второе — представляет собой результат наложения падающей $U_m^{(0)}$ и отраженной $U_m^{(1)}$ волн.

Если из бесконечности излучается продольная волна (1.1), то

$$U_1^{(0)}=0, \quad U_2^{(0)}=-i\gamma_1\tau_1 \exp(-i\gamma_1\eta_0) \quad (3.4)$$

$$U_1^{(1)}=0, \quad U_2^{(1)}=i\gamma_1\tau_1 \exp(i\gamma_1\eta_0), \quad M_1=0$$

$$M_2=-(2/\beta_1)\gamma_1^2\tau_1[\exp(-i\gamma_1\eta_0)+A \exp(i\gamma_1\eta_0)] \sin \varphi_0$$

Для падающей волны сдвига (1.2) имеем

$$U_1^{(0)}=-i\gamma_2\tau_2 \exp(-i\gamma_2\eta_0), \quad U_2^{(0)}=0 \quad (3.5)$$

$$U_1^{(1)}=i\gamma_2\tau_2 \exp(i\gamma_2\eta_0), \quad U_2^{(1)}=0, \quad M_2=0$$

$$M_1=-(2/\beta_1)\gamma_2^2\tau_2[\exp(-i\gamma_2\eta_0)+A \exp(i\gamma_2\eta_0)] \sin \varphi_0$$

К системе (3.3) необходимо присоединить условие равенства нулю главного вектора сил, возникающих на обоих берегах L :

$$\int_L Q_k(s) ds = 0 \quad (k=1, 2) \quad (3.6)$$

Условие равенства нулю главного момента сил, возникающих на L , имеет вид

$$M = \int_L [Q_1(s) \operatorname{Im}(\zeta - a) - Q_2(s) \operatorname{Re}(\zeta - a)] ds = 0 \quad (3.7)$$

Соотношения (3.3), (3.6), (3.7) однозначно определяют функции $Q_k(s)$ в классе h_0 [11] и жесткий поворот ω_0 .

Решение интегральных уравнений (3.3) представим в виде

$$Q_k(s) = Q_k^0(s) / \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)} = \Omega_k(\beta) / (s'(\beta) \sqrt{1 - \beta^2}) \quad (3.8)$$

При этом контур L записывается в параметрической форме $\zeta = \zeta(\beta)$, $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$, $-1 \leq \beta$, $\beta_0 \leq 1$.

4. Произведем асимптотический анализ компонент тензора напряжений. Для этого воспользуемся представлением интеграла типа Коши в окрестности концов линии интегрирования [11], а также асимптотической формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L Q_k(s) \frac{\zeta - z}{(\zeta - \bar{z})^2} ds = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \begin{matrix} -1 \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\Omega_k(\mp 1)}{\sqrt{\rho_0 s'(\mp 1)}} [1 + \exp(2i\alpha_c)] \exp[i(\alpha_c/2 + 3\varphi_c)] + O(\rho_0)$$

$$z - c = \rho_0 e^{i\theta_c}, \quad \alpha_c = \theta_c - \varphi_c \quad (4.1)$$

Здесь ρ_0 — расстояние от рассматриваемой точки до вершины c ($c = a$ при $\beta = -1$, $c = b$ при $\beta = 1$), φ_c — угол между касательной в точке c и осью x_1 ; верхние значения соответствуют вершине $\beta = -1$, нижние — $\beta = 1$.

Выделим сингулярные члены в выражениях для S_{kmn} :

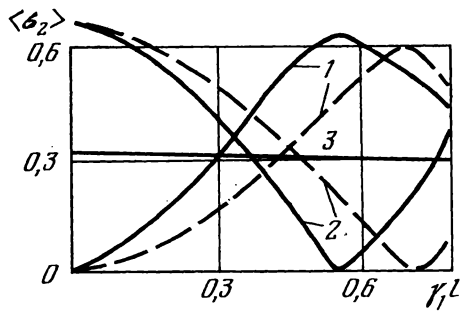
$$S_{111} = \beta_2(G_1 + a_2 R_1) + \alpha_{111}, \quad S_{112} = -\beta_2(G_2 + \kappa R_2) + \alpha_{112}$$

$$S_{122} = -\beta_2(G_1 + a_3 R_1) + \alpha_{122}, \quad S_{211} = -\beta_2(G_2 - a_3 R_2) + \alpha_{211}$$

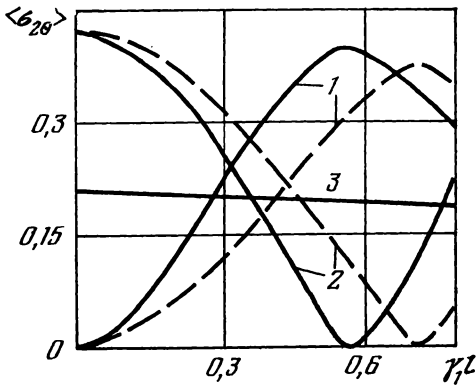
$$S_{212} = -\beta_2(G_1 - \kappa R_1) + \alpha_{212}, \quad S_{222} = \beta_2(G_2 - a_2 R_2) + \alpha_{222} \quad (4.2)$$

$$G = G_1 + iG_2 = \frac{\exp(-2i\alpha)}{r - \tau}, \quad R = R_1 + iR_2 = \frac{1}{r - \tau}$$

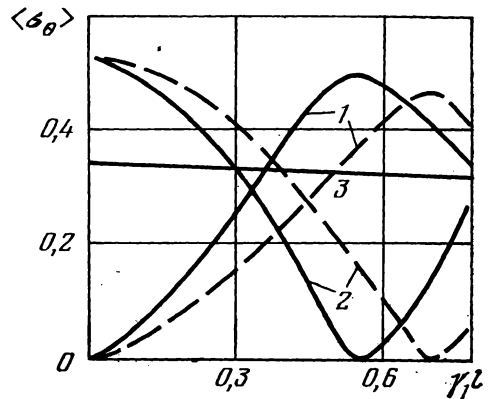
$$z - \zeta = r e^{i\alpha}, \quad \beta_2 = 2\mu\beta_1, \quad a_1 = 2\kappa - 1, \quad a_2 = \kappa + 2, \quad a_3 = \kappa - 2$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

где G_k, R_k — действительные функции, α_{kmn} — регулярные члены, выражения для которых в силу громоздкости не приводятся.

Учитывая (4.1), (4.2), приходим к следующим асимптотическим формулам для S_{mn} ($S_{11}=\sigma_1, S_{12}=\sigma_2, S_{22}=\sigma_3$):

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{\sigma_j}{P_0} \sqrt{\frac{2\rho_0}{l}} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{l} s'(\mp 1)} [\bar{b}_1 Z_1(\mp 1) \pm (-1)^j b_1 Z_2(\mp 1)] \quad (4.3)$$

$$Z_1 = \Omega_1 + i\Omega_2, \quad Z_2 = \Omega_1 - i\Omega_2,$$

$$b_1 = \sqrt{\bar{b}_2} [4(2-j)b_3 + b_3^3(1+b_2^2) \pm 2\kappa(-1)^j \bar{b}_3],$$

$$b_2 = e^{i\alpha_c}, \quad b_3 = e^{i\varphi_c} \quad (j=1, 2, 3)$$

где P_0 — максимальное значение амплитуды напряжений в падающей волне, $2l$ — длина дуги L .

5. При проведении расчетов уравнения (3.3), (3.6), (3.7) сводились к системе линейных алгебраических уравнений по схеме [12]. Интегралы Фурье в ядрах системы (3.3) вычислялись по правилу трапеций с экстраполяцией по методу Ричардсона [13].

С ростом коэффициента Пуассона ν от $\nu=0$ ($\gamma_2/\gamma_R=0,874$) до $\nu=0,5$ ($\gamma_2/\gamma_R=0,955$) значение γ_2/γ_R меняется почти по линейному закону. Для приближенного вычисления γ_2/γ_R использовалась аппроксимация [10]: $\gamma_2/\gamma_R = (0,87+1,12\nu)/(1+\nu)$. Сравнение значений γ_R , определяемых по данной формуле, с точным решением уравнения $\Delta_0(p) = \lambda_2^2 - p^2 \mu_1 \mu_2 = 0$ показывает, что погрешность аппроксимации не превышает 0,5%.

В качестве примера рассматривалась параболическая вставка $\xi = s_1 \beta$, $\eta = H + s_2 \xi^2$ ($-1 \leq \beta \leq 1$). На фиг. 2–4 представлены результаты расчетов максимальных значений величин $\langle \sigma_r \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \cos^2 \psi_b + \langle \sigma_2 \rangle \sin 2\psi_b + \langle \sigma_3 \rangle \sin^2 \psi_b$, $\langle \sigma_{r\theta} \rangle = \langle \sigma_2 \rangle \cos 2\psi_b + (1/2)(\langle \sigma_1 \rangle - \langle \sigma_3 \rangle) \sin 2\psi_b$, $\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \sin^2 \psi_b - \langle \sigma_2 \rangle \sin 2\psi_b + \langle \sigma_3 \rangle \cos^2 \psi_b$.

В качестве действующей нагрузки рассматривалась волна расширения (1.1). Сплошные линии соответствуют случаю $s_2=0,5$, штриховые — $s_2=-0,5$. Кривые 1–3

построены в функции параметра $l_1 = \gamma_1 l$ при $s_1 = 1$, $H = 3$, $\nu = 0,1$ для свободной ($A = -1$), закрепленной ($A = 1$) полуплоскости и неограниченной среды ($A = 0$) соответственно. Углы ψ_b , при которых $\langle \sigma_r \rangle$, $\langle \sigma_{r\theta} \rangle$, $\langle \sigma_\theta \rangle$ достигают своих максимальных значений для данных конфигураций вставки, соответственно, равны 150 , 330 , 30° при $s_2 = 0,5$ и 210 , 30 , 330° при $s_2 = -0,5$.

Результаты расчетов показывают, что при $A = 0$ величины $\langle \sigma_r \rangle$, $\langle \sigma_{r\theta} \rangle$, $\langle \sigma_\theta \rangle$ почти не изменяются с увеличением частоты. В полуплоскости ($A \neq 0$) для заданной конфигурации дефекта и его расположения относительно границы, как и в продольном сдвиге [4], существуют такие волновые числа, для которых сингулярные части напряжений близки к нулю или достигают своих максимальных значений, причем максимальным значениям напряжений для свободной полуплоскости приблизительно соответствуют минимальные значения напряжений для закрепленной полуплоскости и наоборот.

Следует отметить, что используемая численная схема оказывается эффективной при $(1/2)H/l \geq 1$. В этом случае для достижения точности в 1% достаточно взять число узлов разбиения $N = 19$. Если же вставка расположена близко к границе, то погрешности резко возрастают, причем наблюдаются неустойчивости в счете. Так, при $H/l = 0,5$ для достижения точности в двух значащих цифрах необходимо (граница свободна от сил) брать $N = 67$. При этом на расчет одного варианта затрачивается около 30 мин на ЭВМ ЕС-1022.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паргон В. З., Морозов Е. Н. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
2. Sih G. C., Loeber J. F. Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity of finite crack.— Quart. Appl. Math., 1969, v. 27, No. 2, p. 193–213.
3. Паргон В. З., Кудрявцев Б. А. Динамическая задача механики разрушения для плоскости с включением.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 379–384.
4. Назаренко А. М., Фильштинский Л. А. Дифракция волны продольного сдвига на туннельной жесткой криволинейной вставке в упругом полупространстве.— Проблемы прочности, 1983, № 4, с. 26–28.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
8. Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
10. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
11. Мухомлишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
12. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
13. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. М.: Мир, 1977. 584 с.

Сумы

Поступила в редакцию
29.XI.1983