

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,  
ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ ИЛИ РАЗРЕЗОМ

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Сумы)

Рассматриваются краевые задачи о растяжении свободной или защемленной вдоль края анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или криволинейным разрезом. Общие представления решений строятся при помощи полученных ниже фундаментальных решений, соответствующих действию в полуплоскости со свободным или защемленным краем сосредоточенных сил. Краевые задачи для полуплоскости с отверстием сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, для полуплоскости с разрезом — к сингулярному интегральному уравнению.

Полученные алгоритмы реализованы численно, приведены графики, иллюстрирующие влияние геометрии трещины и края полуплоскости на коэффициенты интенсивности напряжений. Различные результаты для случаев когда прямолинейная трещина выходит на границу области содержатся в [1].

1. Сосредоточенная сила в защемленной по краю и свободной полуплоскости. Напряжения и смещения в анизотропной среде выражаются через аналитические функции  $\Phi_1(z_1)$  и  $\Phi_2(z_2)$  по формулам [2]:

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)], \quad z_\nu = x + \mu_\nu y \quad (1.1)$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)], \quad \operatorname{Im} \mu_\nu > 0$$

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2(z_2)] \quad (\nu=1, 2)$$

$$u = 2 \operatorname{Re}[p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)], \quad p_\nu = a_{11} \mu_\nu^2 + a_{12} - a_{16} \mu_\nu$$

$$v = 2 \operatorname{Re}[q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2)], \quad q_\nu = a_{12} \mu_\nu^2 + \frac{a_{22}}{\mu_\nu} - a_{26}$$

$$\Phi_\nu(z_\nu) = d\varphi_\nu(z_\nu)/dz_\nu$$

Здесь  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  и  $u$ ,  $v$  — соответственно компоненты тензора напряжений и вектора смещения,  $a_{ik}$  — коэффициенты закона Гука,  $\mu_\nu$  — характеристические числа.

Предположим, что в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  ( $y_0 > 0$ ) верхней полуплоскости, защемленной вдоль границы  $y=0$ , действует сосредоточенная сила с компонентами  $P \cos \omega$ ,  $P \sin \omega$ . Требуется найти аналитические функции  $\varphi_\nu(z_\nu)$ , удовлетворяющие при  $y=0$  краевым условиям  $u=v=0$ , двум условиям однозначности смещений и двум статическим условиям [2].

Целесообразно предварительно продифференцировать краевые условия по  $x$ . Тогда получим, учитывая (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \operatorname{Re}[p_1 \Phi_1(x) + p_2 \Phi_2(x)] = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2 \operatorname{Re}[q_1 \Phi_1(x) + q_2 \Phi_2(x)] = 0$$

При построении искомых функций будем исходить из решения задачи о сосредоточенной силе в анизотропной плоскости. Положим

$$\Phi_{\nu}(z_{\nu}) = \Phi_{\nu}'(z_{\nu}) = \Phi_{\nu}^{\circ}(z_{\nu}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{\nu}(x)}{x-z_{\nu}} dx \quad (\nu=1,2) \quad (1.3)$$

$$\Phi_{\nu}^{\circ}(z_{\nu}) = \frac{A_{\nu}}{z_{\nu}-z_{\nu 0}}, \quad z_{\nu 0} = x_0 + \mu_{\nu} y_0, \quad \text{Im } \omega_{\nu} = 0$$

Здесь функции  $\Phi_{\nu}^{\circ}(z_{\nu})$  соответствуют сосредоточенной силе ( $P \cos \omega$ ,  $P \sin \omega$ ), приложенной в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  анизотропной плоскости. Постоянные  $A_{\nu}$  выражаются через  $p$  и  $\omega$  из четырех указанных выше дополнительных условий [2]. Ниже считаем их известными.

Подставляя предельные значения функции (1.3) в краевые условия (1.2) при  $z_{\nu} = x_0$  и исключая затем функцию  $\omega_2(x)$ , приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно функции  $\omega_1(x)$ :

$$A\omega_1(x_0) + \frac{B}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(x)}{x-x_0} dx = f(x_0) \quad (1.4)$$

$$A = \text{Re } \Delta, \quad B = i \text{Im } \Delta, \quad \Delta = p_2 q_1 - p_1 q_2 \neq 0$$

$$f(x_0) = f_2(x_0) \text{Re } p_2 - f_1(x_0) \text{Re } q_2 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_3(x)}{x-x_0} dx$$

$$f_1(x) = 2 \text{Re} \left( \frac{p_1 A_1}{x-z_{10}} + \frac{p_2 A_2}{x-z_{20}} \right)$$

$$f_2(x) = 2 \text{Re} \left( \frac{q_1 A_1}{x-z_{10}} + \frac{q_2 A_2}{x-z_{20}} \right)$$

$$f_3(x) = f_1(x) \text{Im } q_2 - f_2(x) \text{Im } p_2$$

Функция  $\omega_2(x)$  определяется через  $\omega_1(x)$  формулой

$$\text{Im}(\bar{p}_2 q_2) \omega_2(x_0) = f_3(x_0) - \alpha \omega_1(x_0) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(x)}{x-x_0} dx \quad (1.5)$$

$$\alpha = \text{Re } p_1 \text{Im } q_2 - \text{Re } q_1 \text{Im } p_2, \quad \beta = \text{Im } p_1 \text{Im } q_2 - \text{Im } q_1 \text{Im } p_2$$

Решение уравнения (1.4) дает

$$(A^2 - B^2) \omega_1(x_0) = A f(x_0) - \frac{B}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \quad (1.6)$$

Подставляя сюда выражение  $f(x)$  из (1.4) и выполняя необходимые квадратуры, находим после преобразований

$$\omega_1(x) = 2 \text{Re} \left[ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{A_1 \Delta_{12}}{x-z_{10}} + \frac{A_2 \Delta_2}{x-z_{20}} \right) \right] \quad (1.7)$$

$$\Delta_{12} = p_1 \bar{q}_2 - q_1 \bar{p}_2, \quad \Delta_2 = p_2 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 q_2$$

Функцию  $\omega_2(x)$  находим из (1.5) с учетом (1.7). Имеем

$$\omega_2(x) = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\bar{\Delta}} \left( \frac{A_1 \Delta_1}{x - z_{10}} + \frac{A_2 \bar{\Delta}_{12}}{x - z_{20}} \right) \right] \quad (1.8)$$

$$\Delta_1 = q_1 \bar{p}_1 - p_1 \bar{q}_1$$

Наконец, подставляя функции  $\omega_1(x)$ ,  $\omega_2(x)$  в представления (1.3), получаем решение поставленной задачи

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \frac{A_1}{z_1 - z_{10}} + \frac{1}{p_2 q_1 - p_1 q_2} \left( \bar{A}_1 \frac{\bar{p}_1 q_2 - \bar{q}_1 p_2}{z_1 - \bar{z}_{10}} + \bar{A}_2 \frac{\bar{p}_2 q_2 - p_2 \bar{q}_2}{z_1 - \bar{z}_{20}} \right) \\ \Phi_2(z_2) &= \frac{A_2}{z_2 - z_{20}} + \frac{1}{p_2 q_1 - p_1 q_2} \left( \bar{A}_1 \frac{p_1 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 q_1}{z_2 - \bar{z}_{10}} + \bar{A}_2 \frac{p_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 q_1}{z_2 - \bar{z}_{20}} \right) \\ z_1 &= x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y \end{aligned} \quad (1.9)$$

Интегрируя функции (1.9), находим  $\varphi_\nu(z_\nu)$ . Подставляя  $\varphi_\nu(z_\nu)$  в выражения для смещений из (1.1), непосредственно убеждаемся в выполнении краевых условий  $u(x) = v(x) = 0$ . Условия однозначности смещений и статические условия выполняются за счет первого члена, фигурирующего в выражении для  $\varphi_\nu(z_\nu)$ , соответствующего сосредоточенной силе в анизотропной плоскости. Остальные члены дают учет влияния границы  $y=0$ .

Решение для сосредоточенной силы в полуплоскости со свободной от сил границей строится аналогичным образом и имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \frac{A_1}{z_1 - z_{10}} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \bar{A}_1 \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{z_1 - \bar{z}_{10}} + \bar{A}_2 \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_2}{z_1 - \bar{z}_{20}} \right) \\ \Phi_2(z_2) &= \frac{A_2}{z_2 - z_{20}} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \bar{A}_1 \frac{\bar{\mu}_1 - \mu_1}{z_2 - \bar{z}_{10}} + \bar{A}_2 \frac{\bar{\mu}_2 - \mu_1}{z_2 - \bar{z}_{20}} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Построенные фундаментальные решения оказываются полезными при конструировании общих представлений решений краевых задач для анизотропной полуплоскости с отверстиями или разрезами. При рассмотрении задач «стрингерного» типа, когда стрингер под углом выходит к границе полуплоскости, важно знать характер неподвижных особенностей ядра возникающего сингулярного интегродифференциального уравнения. Эти особенности в явном виде даются выражениями (1.9) в случае защемленной и (1.10) — свободной полуплоскости.

**2. Интегральное уравнение первой основной задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости с разрезами.** Пусть в верхней полуплоскости со свободной границей имеется  $k$  криволинейных разрезов  $L_j$ , не выходящих на границу  $y=0$ . На берегах разрезов зададим непрерывную по Гельдеру нагрузку  $X_n^\pm + iY_n^\pm$  (верхний знак относится к левому берегу  $L_j$  при движении от начала разреза  $a_j$  к концу  $-b_j$ ), причем будем считать, что главный вектор нагрузки, приложенной к обоим берегам каждого разреза, равен нулю. Будем предполагать также, что  $L_j$  — простые, непересекающиеся гладкие кривые Ляпунова [3].

Краевые условия на берегах разрезов имеют вид [4]:

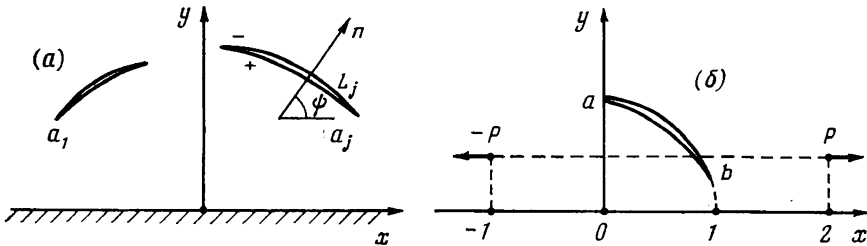
$$a(\psi) \Phi_1^\pm(t_1) + b(\psi) \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = F^\pm(t) \quad (2.1)$$

$$a(\psi) = a_0 \frac{a_1(\psi)}{a_2(\psi)}, \quad b(\psi) = b_0 \frac{\overline{a_1(\psi)}}{a_2(\psi)} \quad (t \in L)$$

$$a_0 = (\mu_1 - \bar{\mu}_2) / (\mu_2 - \bar{\mu}_2), \quad b_0 = (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) / (\mu_2 - \bar{\mu}_2)$$

$$F^\pm(t) = \frac{X_n^\pm + \bar{\mu}_2 Y_n^\pm}{(\mu_2 - \bar{\mu}_2) a_2(\psi)}, \quad a_\nu(\psi) = \mu_\nu \cos \psi - \sin \psi \quad (\nu=1,2)$$

Здесь верхний знак относится к левому берегу разреза,  $\psi$  — угол между положительной нормалью к левому берегу в точке  $t$  и осью  $ox$  (фиг. 1, а).



Фиг. 1

Предположим, что вдоль  $L_j$  действуют непрерывно распределенные усилия интенсивности  $p(t)$ ,  $t \in L_j$ . Тогда функции  $\Phi_\nu(z_\nu)$ , описывающие поля напряжений в полуплоскости с разрезами, можно представить как результат суперпозиций ( $ds$  — элемент дуги  $L$ ):

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \int_L \left\{ \frac{A_\nu(t)}{z_\nu - t_\nu} + \alpha_\nu \frac{\overline{A_1(t)}}{z_\nu - \bar{t}_1} + \beta_\nu \frac{\overline{A_2(t)}}{z_\nu - \bar{t}_2} \right\} ds \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 = (\mu_2 - \bar{\mu}_1) / (\mu_1 - \mu_2), \quad \beta_1 = (\mu_2 - \bar{\mu}_2) / (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\alpha_2 = (\bar{\mu}_1 - \mu_1) / (\mu_1 - \mu_2), \quad \beta_2 = (\bar{\mu}_2 - \mu_1) / (\mu_1 - \mu_2)$$

$$t_\nu = \operatorname{Re} t + \mu_\nu \operatorname{Im} t, \quad \operatorname{Im} z_\nu > 0, \quad t \in L = \bigcup_{j=1}^n L_j \quad (\nu=1,2)$$

Учитывая формулы  $dt_\nu = a_\nu(\psi) ds$  и вводя функции  $r_\nu(t) = -2\pi A_\nu(t) / a_\nu(\psi)$ , приводим функции (2.2) к виду

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{r_\nu(t) dt_\nu}{t_\nu - z_\nu} - \frac{\alpha_\nu}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{r_1(t)} dt_1}{\bar{t}_1 - z_\nu} - \frac{\beta_\nu}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{r_2(t)} dt_2}{\bar{t}_2 - z_\nu} \quad (2.3)$$

Функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , определяемые равенствами (2.3), автоматически обеспечивают выполнение условий  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$  на границе полуплоскости  $y=0$ . Функции  $r_1(t) = \{r_{1j}(t), t \in L_j\}$  и  $r_2(t) = \{r_{2j}(t), t \in L_j\}$  определяются краевыми условиями на разрезах и дополнительными условиями однозначности смещений.

Подставляя предельные значения функций (2.3) в краевые условия (2.1) и вычитая из первого предельного равенства второе, находим

$$r_2(t) = F_1(t) - a(\psi) r_1(t) - b(\psi) \overline{r_1(t)} \quad (2.4)$$

$$F_1(t) = F^+(t) - F^-(t) \quad (t \in L)$$

Складывая оба предельных равенства и учитывая (2.4), приходим после преобразований к основному сингулярному интегральному уравнению

краевой задачи

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{r_1(t)}{t_1 - t_{10}} dt_1 + \int_L \{r_1(t) G_1(t, t_0) + \overline{r_1(t)} G_2(t, t_0)\} ds = N(t_0) \quad (2.5)$$

$$-2\pi i G_1(t, t_0) = \frac{d}{dt_{10}} \left\{ \ln \frac{\bar{t}_2 - \bar{t}_{20}}{(\bar{t}_2 - t_{10})(t_1 - t_{10})(t_1 - \bar{t}_{20})} + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_1 - \mu_2} \right|^2 \ln \frac{(t_1 - \bar{t}_{20})(t_2 - \bar{t}_{10})}{(t_1 - \bar{t}_{10})(t_2 - \bar{t}_{20})} \right\} t'(s)$$

$$2\pi i G_2(t, t_0) = \frac{\bar{\mu}_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{d}{dt_{10}} \left\{ \ln \frac{(t_2 - \bar{t}_{20})(\bar{t}_1 - \bar{t}_{10})(\bar{t}_2 - t_{10})}{(t_2 - \bar{t}_{20})(\bar{t}_1 - t_{10})(t_2 - \bar{t}_{10})} \right\} \overline{t'(s)}$$

$$N(t_0) = \frac{\bar{\mu}_2 - \mu_2}{2(\mu_1 - \mu_2)} \left\{ \overline{F_2(t_0)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \overline{F_1(t)} \left( \frac{1}{\bar{t}_2 - \bar{t}_{20}} + \frac{\beta_1 b(\psi_0)}{\bar{t}_2 - t_{10}} \right) \overline{dt_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi i} \int_L F_1(t) \left( \frac{\beta_1 a(\psi_0)}{t_2 - \bar{t}_{10}} + \frac{\beta_2}{t_2 - \bar{t}_{20}} \right) dt_2 \right\} \frac{a_2(\psi_0)}{a_1(\psi_0)}$$

$$F_2(t) = F^+(t) + F^-(t), \quad t'(s) = dt_1/ds \quad (t_0 \in L)$$

$$\psi_0 = \psi(t_0), \quad t_{10} = \text{Re } t_0 + \mu_1 \text{Im } t_0, \quad t_{20} = \text{Re } t_0 + \mu_2 \text{Im } t_0$$

Ядра  $G_1$  и  $G_2$  в силу принятых допущений относительно дуг  $L_j$  имеют не более чем слабую особенность.

Уравнение (точнее систему) (2.5) необходимо решать совместно с дополнительными условиями однозначности перемещений [4]:

$$\int_{L_j} r_1(t) dt_1 = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (2.6)$$

Этим же путем, с использованием фундаментального решения (1.9) было получено интегральное уравнение первой основной задачи для заземленной анизотропной полуплоскости с разрезами (здесь не приводится).

**3. Представления типа Д. И. Шермана для анизотропной полуплоскости.** Указанные в [7] представления оказались эффективным инструментом исследования двумерных краевых задач теории упругости. Ниже дано их обобщение на случай анизотропной полуплоскости.

Пусть в верхней полуплоскости со свободной от сил границей  $y=0$  имеется отверстие, ограниченное простым гладким контуром  $l$ . При решении первой основной задачи для указанной области целесообразно иметь общие представления решений, обеспечивающие выполнение условий  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$  на границе  $y=0$ .

Будем исходить из представлений типа (2.2). Интегрируя функции  $\Phi_\nu(z_\nu)$  по  $z_\nu$  и затем преобразуя полученные интегралы интегрированием по частям, получим тем же путем, что и при выводе формул (2.3):

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{R_\nu(t)}{t_\nu - z_\nu} dt_\nu - \frac{\alpha_\nu}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{R_1(t)}}{t_1 - z_\nu} dt_1 - \frac{\beta_\nu}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{R_2(t)}}{\bar{t}_2 - z_\nu} dt_2 \quad (\nu=1, 2) \quad (3.1)$$

Здесь  $R_\nu(t)$  — функции, подлежащие определению из краевых условий на контуре отверстия  $l$ .

Положим далее

$$R_1(t) = \omega(t), \quad R_2(t) = -a_0 \omega(t) + b_0 \overline{\omega(t)} \quad (3.2)$$

и подставим в (3.1). Получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \omega(t) \left( \frac{dt_1}{t_1 - z_1} + \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_1}} \right) - \frac{\alpha_1}{2\pi i} \int_l \overline{\omega(t)} \left( \frac{\overline{dt_1}}{\overline{t_1 - z_1}} - \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_1}} \right) \\ \varphi_2(z_2) &= -\frac{a_0}{2\pi i} \int_l \omega(t) \left( \frac{dt_2}{t_2 - z_2} + \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_2}} \right) + \frac{b_0}{2\pi i} \int_l \overline{\omega(t)} \left\{ \frac{dt_2}{t_2 - z_2} + \frac{\overline{dt_1}}{\overline{t_1 - z_2}} - \right. \\ &\quad \left. - \left| \frac{\overline{\mu_2 - \mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \right|^2 \left( \frac{\overline{dt_1}}{\overline{t_1 - z_2}} - \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Представления (3.3) обеспечивают выполнение условий  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$  на границе полуплоскости независимо от выбора функции  $\omega(t)$ .

Для заземленной вдоль границы  $y=0$  полуплоскости соответствующие представления типа Д. И. Шермана имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \omega(t) \left\{ \frac{dt_1}{t_1 - z_1} - \frac{\overline{b_0^2 \Delta_{12}}}{a_0 \Delta} \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_1}} \right\} + \\ &\quad + \frac{\overline{b_0}}{2\pi i} \int_l \overline{\omega(t)} \left\{ \frac{\overline{a_0 \Delta_{12}}}{a_0 \Delta} \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_1}} - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\overline{dt_1}}{\overline{t_1 - z_1}} \right\} \\ \varphi_2(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_l \omega(t) \left\{ \frac{a_0 dt_2}{t_2 - z_2} + \frac{\overline{b_0 \Delta_1}}{b_0 \Delta} \frac{dt_2}{\overline{t_2 - z_2}} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_l \overline{\omega(t)} \left\{ \frac{b_0 \overline{dt_2}}{t_2 - z_2} - \frac{\overline{\Delta_{12}}}{\Delta} \frac{\overline{dt_1}}{\overline{t_1 - z_2}} + \frac{\overline{a_0 \Delta_1}}{b_0 \Delta} \frac{\overline{dt_2}}{\overline{t_2 - z_2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Постоянные  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta$  определены в (1.4), (1.7) и (1.8); постоянные  $a_0$ ,  $b_0$  определены в (2.1). Интегрирование в (3.3) и (3.4) ведется против часовой стрелки.

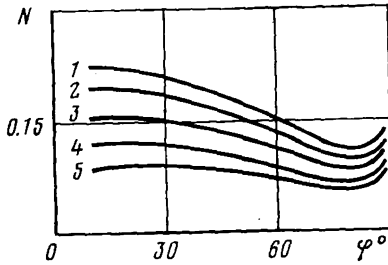
Представления (3.4) удовлетворяют на границе  $y=0$  условию жесткого заземления  $u=v=0$ .

4. Интегральное уравнение первой основной задачи для анизотропной полуплоскости с отверстием. Пусть граница верхней полуплоскости  $y=0$  свободна от сил, а на контуре отверстия  $l$  заданы усилия  $X_n + iY_n$ .

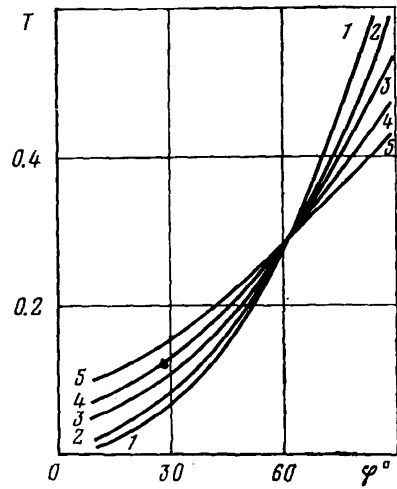
Краевое условие на  $l$  имеет вид [8]:

$$a_0 \varphi_1(t_1) + b_0 \overline{\varphi_1(t_1)} + \varphi_2(t_2) = f_0(t) \quad (4.1)$$

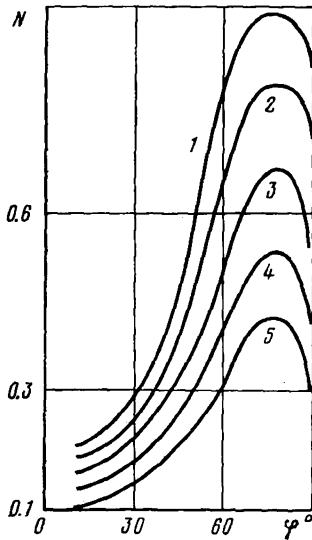
$$f_0(t) = \frac{(1 - i\overline{\mu_2})f(t) - (1 + i\overline{\mu_2})\overline{f(t)}}{2i(\mu_2 - \overline{\mu_2})}, \quad f(t) = i \int_0^l (X_n + iY_n) ds$$



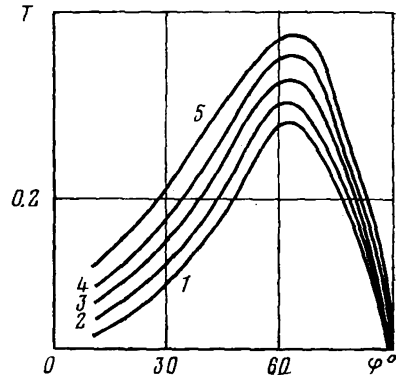
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Подставляя предельные значения функций (3.3) в краевое условие (4.1), приходим после преобразований к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции  $\omega(t)$ :

$$\begin{aligned} \omega(t_0) - \frac{\alpha_1}{2\pi i} \int_l \overline{\omega(t)} d \ln \frac{(\bar{t}_1 - \bar{t}_{10})(t_2 - \bar{t}_{10})(\bar{t}_2 - t_{10})}{(\bar{t}_1 - t_{10})(\bar{t}_2 - \bar{t}_{20})(t_2 - \bar{t}_{20})} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_l \omega(t) \left\{ d \ln \frac{(\bar{t}_2 - \bar{t}_{20})(t_1 - \bar{t}_{20})}{(t_1 - t_{10})(\bar{t}_2 - t_{10})} + \right. \\ \left. + \int_l \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \right\}^2 d \ln \frac{(t_2 - \bar{t}_{20})(t_1 - \bar{t}_{10})}{(t_2 - \bar{t}_{10})(t_1 - \bar{t}_{20})} \Bigg\} = - \frac{\overline{f_0(t_0)}}{b_0} \end{aligned}$$

5. **Пример расчета.** Рассмотрим полубесконечную пластинку из стеклопластика АГ-4С ( $E_1=2.06 \cdot 10^9$  Па,  $E_2=1.57 \cdot 10^9$  Па,  $G=0.41 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_1=0.09$ ,  $\mu_1=2.128 i$ ,  $\mu_2=-0.539 i$ ), ослабленную разрезом длиной  $2l$  вдоль дуги эллипса

$$x=R_1 \sin \frac{\beta+1}{2} \varphi, \quad y=R_2 \cos \frac{\beta+1}{2} \varphi \quad (-1 \leq \beta \leq +1)$$

Пусть берега разреза и граница полуплоскости  $y=0$  свободны от сил, а в точках  $(2; 0.5)$  и  $(-1; 0.5)$  действуют сосредоточенные силы  $P=1$  и  $P=-1$  соответственно (фиг. 1, б).

В этом случае к представлениям (2.3) необходимо добавить функции (1.10), соответствующие действующим в полуплоскости сосредоточенным силам.

Дополнительное условие (2.6) и интегральное уравнение (2.5) с соответствующей правой частью  $N(t)$  обычным образом сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений плотности  $r_1(t)$  в узлах интерполяции. Асимптотические значения напряжений нормального разрыва  $N=\sigma_n \sqrt{r/l}$  и сдвига  $T=\tau_n \sqrt{r/l}$  на продолжении за вершину трещины вычислялись по формулам работы [4].

На фиг. 2, 3 приведены кривые величин  $N$  и  $T$  для вершины трещины  $a$  в зависимости от параметра  $\varphi$  при  $R_1=1$  (кривые 1-5 относятся к значениям  $R_1/R_2=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  и  $1$ ). Те же величины и в том же соответствии для вершины трещины  $b$  приведены на фиг. 4, 5.

Автор благодарит Е. Стрельникову за помощь при численной реализации алгоритма.

Поступила 23 IV 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Лезницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
4. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
5. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.

Фильштинский, Л.А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом [Текст] / Л.А. Фильштинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 6. – С. 72-79.