МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1978

УДК 539.4

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С РАЗРЕЗАМИ

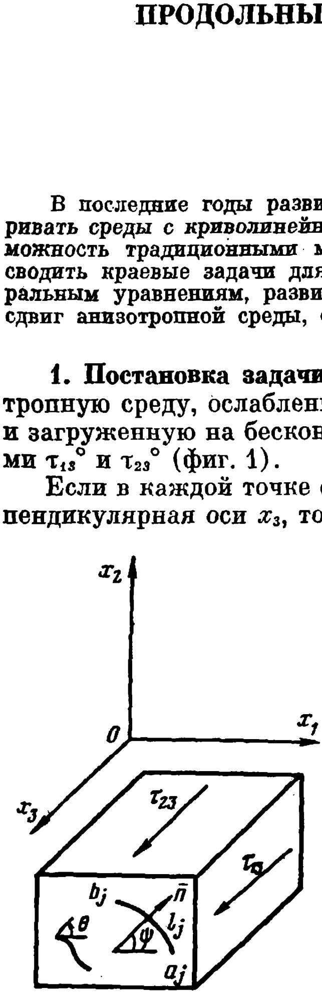
Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Сумы)

В последние годы развиваются дислокационные модели, позволяющие рассматривать среды с криволинейными разрезами [1, 2]. Формальный подход, дающий возможность традиционными методами теории функций комплексного переменного сводить краевые задачи для анизотропных тел с разрезами к сингулярным интегральным уравнениям, развит в [3]. В данной работе рассматривается продольный сдвиг анизотропной среды, ослабленной криволинейными трещинами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную упругую анизотропную среду, ослабленную полостями — разрезами в направлении оси x_3 и загруженную на бесконечности однородными сдвигающими напряжениями τ_{13}° и τ_{23}° (фиг. 1).

Если в каждой точке среды имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная оси x_3, то задача о продольном сдвиге такой среды сводится к двумерной задаче теории потенциала в плоскости x_1ox_2 [4].



Фиг. 1

Обозначим контуры разрезов в плоскости x_1ox_2 через l_j $(j=1, 2, \ldots, k)$, сумму всех l_j — через l, неограниченную область с границей l — через D. Будем предполагать, что l_j — простые разомкнутые дуги Ляпунова с началом в точке a_j и концом — в b_j.

Уравнение равновесия и закон Гука в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}=0,\quad \gamma_{13}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\quad \gamma_{23}=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23}=a_{44}\tau_{23}+a_{45}\tau_{13},\ \gamma_{13}=a_{45}\tau_{23}+a_{55}\tau_{13} \tag{1.1}$$

Здесь τ_{13}, τ_{23}, γ_{13}, γ_{23} — касательные напряжения и сдвиги на площадках, параллельных плоскостям x_3ox_2 и x_3ox_1 соответственно, u_3 — смещение вдоль оси x_3, a_{ik} — коэффициенты упругости в законе Гука.

Напряжения τ_{13}, τ_{23} и смещение u_3 находятся из (1.1) с учетом совместности деформаций γ_{13} и γ_{23}:

$$\tau_{13}=2\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi(z_1)\},\ z_1=x+\mu_1 y$$

$$\tau_{23}=-2\mathrm{Re}\{\Phi(z_1)\},\ \Delta=a_{44}a_{55}-a_{45}^2>0 \tag{1.2}$$

$$u_3=-2\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Im}\,\varphi(z_1),\quad \mu_1=\frac{a_{45}+i\sqrt{\Delta}}{a_{55}},\quad \Phi(z_1)=\frac{d\varphi(z_1)}{dz_1}$$

Здесь $\Phi(z_1)$ — аналитическая функция от комплексного переменного z_1. Краевое условие на l запишем в виде

$$\begin{gathered}2\mathrm{Re}\{a(\psi)\Phi^{\pm}(t_1)\}=\pm Z_n^{\pm}(t),\ t\in l\\ a(\psi)=\mu_1\cos\psi-\sin\psi,\ t_1=\mathrm{Re}\,t+\mu_1\,\mathrm{Im}\,t\end{gathered}\tag{1.3}$$

где верхний знак относится к левому берегу разреза при движении от a_j к b_j, ψ — угол между внешней нормалью к левому берегу в точке t и осью ox_1, $Z_n^{\pm}$ — интенсивности заданных на поверхности полости — разреза касательных усилий в направлении оси ox_3.

Искомую аналитическую функцию $\Phi(z_1)$ представим интегралом типа Коши

$$\Phi(z_1)=A+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\omega(t)}{a(\psi)}\frac{dt_1}{t_1-z_1},\quad A=\frac{\tau_{13}^{\circ}+\bar{\mu}_1\tau_{23}^{\circ}}{\mu_1-\bar{\mu}_1}\tag{1.4}$$

Представление (1.4) обеспечивает заданное на бесконечности однородное поле сдвигающих напряжений τ_{13}° и τ_{23}°.

2. Основная система сингулярных уравнений. Переходя в (1.4) к предельным значениям и подставляя их в краевое условие (1.3), получаем, вычитая из первого предельного равенства второе

$$2\,\mathrm{Re}\,\omega(t)=F_1(t),\ F_1(t)=Z_n^{+}+Z_n^{-}\tag{2.1}$$

Складывая полученные предельные равенства и учитывая (2.1), приходим к основной системе сингулярных интегральных уравнений задачи

$$\begin{gathered}\int\limits_l\frac{p(t)\,dt_1}{t_1-t_{10}}+\int\limits_l p(t)K(t,t_0)\,ds=N(t_0),\quad t_0\in l_j\quad (j=1,2,\ldots k)\\
K(t,t_0)=\frac{1}{2}\overline{\frac{a(\psi_0)}{a(\psi)}}\frac{d}{ds}\ln\frac{\bar{t}_1-\bar{t}_{10}}{t_1-t_{10}}+\frac{\lambda(t,t_0)}{t_1-t_{10}}\frac{dt_1}{ds}\\
N(t_0)=\frac{\pi}{2}\{F_2(t_0)-2\tau_{13}^{\circ}\cos\psi_0-2\tau_{23}^{\circ}\sin\psi_0\}-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int\limits_l\frac{a(\psi_0)}{a(\psi)}\frac{F_1(t)}{t_1-t_{10}}dt_1\\
F_2(t)=Z_n^{+}-Z_n^{-},\quad p(t)=\mathrm{Im}\,\omega(t),\quad \lambda(t,t_0)=\mathrm{Re}\left[\frac{a(\psi_0)}{a(\psi)}-1\right]\\
a(\psi)=\mu_1\cos\psi-\sin\psi,\ a(\psi_0)=\mu_1\cos\psi_0-\sin\psi_0\\
t_1=\mathrm{Re}\,t+\mu_1\,\mathrm{Im}\,t,\ t_{10}=\mathrm{Re}\,t_0+\mu_1\,\mathrm{Im}\,t_0,\ \psi_0=\psi(t_0)\end{gathered}\tag{2.2}$$

При сделанных выше предположениях относительно l_j ядро $K(t,\ t_0)$ может иметь не более чем слабую особенность.

К системе (2.2) необходимо присовокупить k дополнительных условий однозначности смещения u_3. Из (1.2) и (1.4) находим, приравнивая нулю приращения при обходе по замкнутому контуру вокруг каждого из разрезов l_j:

$$\int\limits_{l_j}p(t)\,ds=0\quad (j=1,2,\ldots,k)\tag{2.3}$$

Решение основной системы (2.2) существует в классе h_0 [5] и однозначно фиксируется условиями (2.3). Функция $p(t)=\{p_j(t),\ t\in l_j\}$ удовлетворяет условию Гельдера в любой внутренней точке l.

В случае изотропной среды в системе (2.2) необходимо положить $\mu_1=i$. Используя равенства (1.2), (1.4) и (2.1), находим скачок $\delta\, u_3(t_0)$

$$\delta u_3(t_0)=2\sqrt{\Delta}\int_{a_j}^{t_0} p(t)\,ds,\quad t_0\in l_j\quad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,k)} \tag{2.4}$$

Согласно (2.3), $\delta\, u_3(b_j)=0$.

3. Асимптотические значения напряжений в окрестности концов a **и** b_j. Введем параметризацию l_j, положив (ниже индекс j опускаем)

$$t=t(\beta),\ t(-1)=a,\ t(1)=b,\ t\in l_j,\ -1\leqslant\beta\leqslant 1 \tag{3.1}$$

Согласно (3.1), и учитывая, что решение (2.2), (2.3) существует в классе h_0, запишем

$$p(t)=\Omega(\beta)=\Omega_0(\beta)(1-\beta^2)^{-1/2} \tag{3.2}$$

Вычисляя асимптотические значения [5] интеграла (1.4) и принимая во внимание (1.2), (2.1) и (3.1), получаем асимптотические выражения искомых величин в окрестности концевой точки $c=a$ или $c=b$:

$$\tau_{13}=\mp\sqrt{\frac{s'(\pm1)}{2\rho}}\operatorname{Re}(\mu_1\zeta),\quad \tau_{23}=\mp\sqrt{\frac{s'(\pm1)}{2\rho}}\operatorname{Re}\zeta \tag{3.3}$$

$$\zeta=\zeta(\theta)=i\Omega_0(\pm1)/[\mp(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)(\mu_1\cos\psi_c-\sin\psi_c)]^{1/2}$$

$$s'(\pm1)=\left.\frac{ds}{d\beta}\right|_{\beta=\pm1},\quad \rho=|z-c|,\quad \psi_c=\psi(t)|_{t=c}$$

Здесь верхний знак относится к точке $c=b$ (конец трещины), нижний знак — к точке $c=a$ (начало трещины), ds — элемент дуги на l, отсчет полярного угла θ для каждого из концов показан на фиг. 1.

Из (3.3) можно, в частности, получить асимптотические значения напряжений на продолжении трещины за точку c:

$$\begin{gathered}\tau_{13}=\mp\sqrt{\frac{s'(\mp1)}{2\rho}}\operatorname{Im}\frac{i\mu_1\Omega_0(\pm1)}{\mu_1\cos\psi_c-\sin\psi_c}\\ \tau_{23}=\mp\sqrt{\frac{s'(\pm1)}{2\rho}}\operatorname{Im}\frac{i\Omega_0(\pm1)}{\mu_1\cos\psi_c-\sin\psi_c}\end{gathered} \tag{3.4}$$

4. Примеры. *Одиночная прямолинейная трещина в анизотропной среде, ориентированная произвольным образом.* Рассмотрим трещину длиной $2L$, наклон которой определяется углом $\psi=\text{const}$. Берега трещины свободны от сил, на бесконечности действуют сдвигающие усилия τ_{13}° и τ_{23}°.

Интегральное уравнение (2.2) в этом случае имеет вид

$$\int_l\frac{p(t)}{t_1-t_{10}}\,dt_1=N(t_0),\qquad N(t_0)=-\pi(\tau_{13}^\circ\cos\psi+\tau_{23}^\circ\sin\psi) \tag{4.1}$$

Его решение таково:

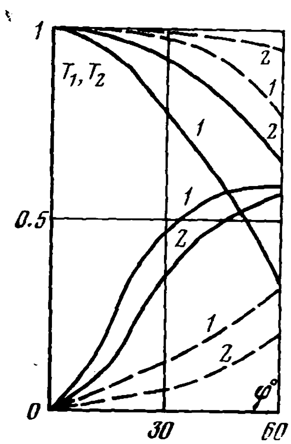
$$\Omega_0(\beta)=\beta N/\pi,\quad t\neq ie^{i\psi}\beta L,\quad -1\leqslant\beta\leqslant1,\quad s=|t| \tag{4.2}$$

Подставив $\Omega_0(\pm 1)$ из (4.2) в (3.3) или (3.4), получим соответствующие асимптотические значения напряжений

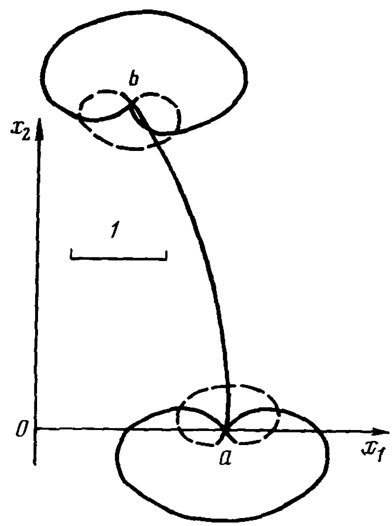
$$\tau_{13}=\sqrt{\frac{L}{2\rho}}\,(\tau_{13}{}^\circ\cos\psi+\tau_{23}{}^\circ\sin\psi)\,\lambda_1(\psi),\qquad \tau_{23}=\sqrt{\frac{L}{2\rho}}\,(\tau_{13}{}^\circ\cos\psi+\tau_{23}{}^\circ\sin\psi)\,\lambda_2(\psi)$$

$$\lambda_1(\psi)=\operatorname{Im}\frac{i\mu_1}{\mu_1\cos\psi-\sin\psi},\qquad \lambda_2(\psi)=\operatorname{Im}\frac{i}{\mu_1\cos\psi-\sin\psi}$$

Пусть теперь $\tau_{13}{}^\circ=\tau_{23}{}^\circ=0$, а на поверхности разреза заданы сосредоточенные на линии $x=x_0$, $y=y_0$ и противоположно направленные касательные усилия интенсив-



Фиг. 2



Фиг. 3

ности q. В этом случае $Z_n{}^+=q\delta(x-x_0,\ y-y_0)$, $Z_n{}^-=-q\delta(x-x_0,\ y-y_0)$, где $\delta(x,\ y)$ – дельта-функция Дирака. Решение уравнения (4.1) имеет вид

$$p(t)=\frac{\Omega_0(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \Omega_0(\beta)=-\frac{q}{\pi L}\frac{\sqrt{1-\beta_0{}^2}}{(\beta-\beta_0)}\tag{4.3}$$

Здесь $\beta=\beta_0$ соответствует точке приложения сосредоточенного усилия $t=x_0+iy_0$. Асимптотические значения напряжений, например на продолжении разреза за точку $c=b$, определяются формулой

$$\tau_{13}=\frac{q\lambda_1}{\pi\sqrt{2\rho L}}\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}},\qquad \tau_{23}=\frac{q\lambda_2}{\pi\sqrt{2\rho L}}\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}$$

Пусть $\tau_{13}{}^\circ=\tau_{23}{}^\circ=0$, а на поверхности полости – разреза заданы произвольно распределенные касательные нагрузки $Z_n{}^+=q(s)$, $Z_n{}^-=-q(s)$. В этом случае асимптотические значения напряжений, например для конца $c=b$, имеют вид

$$\tau_{13}=\frac{\lambda_1}{\pi\sqrt{2\rho L}}\int_{-1}^{1}q(s)\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,ds,\qquad \tau_{23}=\frac{\lambda_2}{\pi\sqrt{2\rho L}}\int_{-1}^{1}q(s)\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,ds$$

Если $q(s)=\mathrm{const}$, то эти формулы принимают вид

$$\tau_{13}=\lambda_1 q\sqrt{0.5L/\rho},\qquad \tau_{23}=\lambda_2 q\sqrt{0.5L/\rho}\tag{4.4}$$

Формулы (4.4) совпадают с соответствующими результатами из [6].

Пусть среда ослаблена криволинейной трещиной длиной $2l$ вдоль дуги эллипса

$$x_1=R_1\cos[{}^1/_2(1+\beta)\varphi],\qquad x_2=R_2\sin[{}^1/_2(1+\beta)\varphi],\qquad -1\leqslant\beta\leqslant1,$$

таким образом, что полуось R_1 ориентирована вдоль оси ox_1. В этом случае интегральное уравнение (1.2) решалось численно с применением процедуры [7].

На фиг. 2 приведены асимптотические значения величин $T_1=\tau_{13}\sqrt{2\rho/l}$ (нисходящие кривые) и $T_2=\tau_{23}\sqrt{2\rho/l}$ (восходящие кривые) на продолжении трещины за конец $b(\beta=1)$ в зависимости от угла φ для отношений $R_1/R_2=1$ (кривая *1*) и $R_1/R_2=0.5$ (кривая *2*). В расчетах принималось $\mu_1=i$ (сплошные кривые), что соответствует изотропной среде и $\mu_1=2i$ (штрихпунктирные кривые), что соответствует существенно анизотропной среде. Края трещины свободны от сил, $\tau_{13}{}^\circ=1$, а $\tau_{23}{}^\circ=0$.

На фиг. 3 приведены эпюры величин T_1 и T_2 (штрихпунктир) в начале (точка *a*) и в конце трещины (точка *b*) для значений параметров $\mu_1=2i$, $R_1/R_2=0.5$, $\tau_{13}{}^\circ=1$, $\tau_{23}{}^\circ=0$, $\varphi=60°$.

Поступила 29 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
2. *Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н.* Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
3. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
6. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения. В кн.: Разрушение, т. 2. Математические основы теории разрушения. М., «Мир», 1975.
7. *Каландия А. И.* О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.