

О ЖЕСТКОСТИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Э. П. ГРИГОЛЮК, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Москва — Новосибирск)

Под двоякопериодической решеткой будем понимать неограниченную изотропную пластину (плоскость), ослабленную двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий, в которые впаины шайбы из однородного материала.

Задача о жесткости таких решеток (задача приведения) рассматривалась в общем виде в работах [1, 2] (см. так же [3]). Согласно полученным там результатам, для вычисления жесткости решетки на растяжение или изгиб необходимо иметь значения некоторых констант, найденных из решения двоякопериодической задачи. Чтобы не решать двоякопериодическую задачу, предлагается приближенный прием определения жесткости, основанный на анализе точного решения.

§ 1. Согласно [2, 3], приведенные упругие параметры решетки определяются следующим образом: при растяжении

$$\frac{E_1^*/(1 - \mu_1^*)}{E/(1 - \mu)} = \left\{ 1 + \frac{2\pi\lambda^2}{S(1 - \mu)} (\beta_2 - 2\alpha_2) \right\}^{-1} \quad (1.1)$$

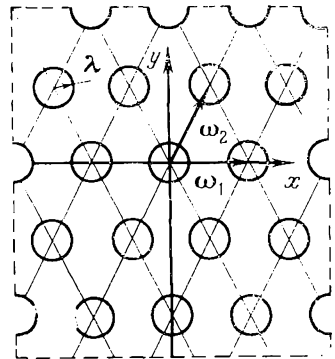
$$\frac{E_1^*/(1 + \mu_1^*)}{E/(1 + \mu)} = \left\{ 1 + \frac{2\pi\lambda^2}{S(1 + \mu)} (\beta_2 - 2\alpha_2) \right\}^{-1} \quad (1.2)$$

$$\frac{E}{E_2^*} - \frac{E}{E_1^*} = \frac{8\pi\lambda^2}{S(1 + \mu)} \alpha_2 \quad (1.3)$$

Здесь E_1^* , E_2^* и μ_1^* — приведенные модули упругости в направлении осей x , y и коэффициент Пуассона; E , μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала решетки. S — площадь параллелограмма периодов (фиг. 1), λ — безразмерный радиус отверстия (отношение диаметра отверстия к длине периода ω_1).

Коэффициенты α_2 и β_2 в (1.1) и (1.3) определяются из решения двоякопериодической задачи при заданных средних напряжениях $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ (всестороннее растяжение на бесконечности), в формуле (1.2) α_2 и β_2 определяются из решения задачи со средними напряжениями $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$.

При изгибе



Фиг. 1

$$\frac{E_1^*/(1 - \mu_1^*)}{E/(1 - \mu)} = \left\{ 1 + \frac{2\pi\lambda^2}{S} \left(\beta_2 + 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_2 \right) \right\}^{-1} \quad (1.4)$$

$$\frac{E_1^*/(1 + \mu_1^*)}{E/(1 + \mu)} = \left\{ 1 + \frac{2\pi\lambda^2}{S} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \beta_2 + 2\alpha_2 \right) \right\}^{-1} \quad (1.5)$$

$$\frac{E}{E_1^*} - \frac{E}{E_2^*} = \frac{8\pi\lambda^2}{S} (1 + \mu) \alpha_2 \quad (1.6)$$

В формулах (1.4) и (1.6) величины α_2 и β_2 необходимо брать из решения двойкопериодической задачи изгиба при $M_1 = M_2 = 1$ (чистый изгиб на бесконечности), в (1.5) α_2 и β_2 определяются из решения задачи при $M_1 = -M_2 = 1$.

§ 2. Таким образом, вопрос упирается в определение величин α_2 и β_2 . Анализируя бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, к которым сводятся основные красивые двойкопериодические задачи для решетки [1], можно записать выражения для величин α_2 и β_2 с точностью до величины λ^6 .

Имеем в случае растяжения решетки

$$\alpha_2 \approx \frac{1 - G/G_1}{(1 + \varkappa)(1 - S_{00})\gamma} \left\{ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left(1 + \frac{G_1}{\varkappa_1 G} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} i^2 K_0 \eta_1(G/G_1) \right\}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{1 - 2\lambda^2 K_1} \left\{ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 - \frac{e_0}{2} \right) + \lambda^2 \alpha_2 \left(2K_0 - \frac{1 + \varkappa}{1 - G/G_1} e_{0,0} \right) \right\}$$

$$e_0 = \frac{1 + \varkappa}{e(1 - 2\lambda^2 K_1)}, \quad e_{0,0} = \frac{(1 - G/G_1) K_0}{e(1 - 2\lambda^2 K_1)} \quad (2.1)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \mu_1)}$$

$$e = \frac{1 + \varkappa}{2(1 - 2\lambda^2 K_1)} - \frac{\varkappa - 1}{2} + \frac{\varkappa_1 - 1}{2} \frac{G}{G_1}, \quad \varkappa = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}, \quad \varkappa_1 = \frac{3 - \mu_1}{1 + \mu_1}$$

$$S_{00} = \frac{1 - G/G_1}{1 + \varkappa} \left(\gamma_{00} + \frac{G_1}{\varkappa_1 G} \gamma_{00}^* + d_{00} \right) \frac{\lambda^2}{\gamma}$$

$$\gamma_{00} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + K_2 + \frac{2i^2 K_0^2}{1 - 2\lambda^2 K_1} + \frac{3g_2^2 \lambda^6}{256}$$

$$\gamma_{00}^* = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + K_2 + \frac{(1 - \varkappa) i^2 K_0^2}{1 - (1 - \varkappa) \lambda^2 K_1} - \varkappa \frac{3g_2^2 \lambda^6}{256}$$

$$d_{00} = \lambda^2 K_0^2 \eta(G/G_1), \quad \gamma = \frac{(1 - G/G_1)(1 - \varkappa G_1/\varkappa_1 G)}{1 + \varkappa} - \frac{1 + \varkappa_1}{\varkappa_1}$$

$$\eta(G/G_1) = \left[\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{1 + (\varkappa - 1) K_1 \lambda^2} - \frac{2}{1 - 2K_1 \lambda^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ 1 - (1 - 2K_1 \lambda^2) \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} - \frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1} \frac{G}{G_1} \right) \right\}^{-1}$$

$$K_0 = \frac{\delta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{S}, \quad K_1 = \frac{\pi}{2S}, \quad K_2 = \frac{\gamma_1 - \delta_1}{\omega_1} + \frac{2\pi}{S}$$

$$\delta_1 = 2\zeta \left(\frac{\omega_1}{2} \right), \quad \gamma_1 = 2Q \left(\frac{\omega_1}{2} \right) - \bar{\omega}_1 \wp \left(\frac{\omega_1}{2} \right)$$

$$\eta_1(G/G_1) = \frac{(1 + G_1/\varkappa_1 G) [(\varkappa_1 - 1)G/G_1 - (\varkappa - 1)]}{1 + (\varkappa - 1) \lambda^2 K_1 + (\varkappa_1 - 1) (1 - 2K_1 \lambda^2) G/2G_1}$$

Здесь E_1 , μ_1 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала шайбы, $\wp(1/2\omega_1)$, $\zeta(1/2\omega_1)$, $Q(1/2\omega_1)$ — специальные мероморфные функции [2].

Последовательность операций при подсчете приведенных упругих параметров по формулам (1.1) — (1.3) рассмотрим на примере прямоугольной решетки с периодами $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 4i$.

1. Подсчитываем величины $\wp(1/2\omega_1)$, $Q(1/2\omega_1)$, $\zeta(1/2\omega_1)$ по формулам

$$\wp(1/2\omega_1) = \wp(1) = 1 + {}^3/_{16}g_2 + {}^5/_{64}g_3 + {}^7/_{256}g_4 + {}^8/_{1024}g_5 + \dots \quad (2.2)$$

$$Q(1/2\omega_1) = Q(1) = {}^4/_{16}\rho_2 + {}^6/_{64}\rho_3 + {}^8/_{256}\rho_4 + {}^{10}/_{1024}\rho_5 + \dots$$

$$\zeta(1/2\omega_1) = 1 - {}^1/_{16}g_2 - {}^1/_{64}g_3 - {}^1/_{256}g_4 - {}^1/_{1024}g_5 - \dots$$

Константы g_k и ρ_k , входящие в (2.2) для прямоугольных решеток с периодами $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2li$, можно вычислять по формулам

$$g_k = 2\zeta^*(2k) \left\{ 1 + \frac{(-1)^k}{l^{2k}} + \frac{2 \cos 2k\varphi_1}{(1+l^2)^k} + \frac{2 \cos 2k\varphi_2}{(4+l^2)^k} + \frac{2 \cos 2k\varphi_3}{(1+4l^2)^k} + \dots \right\} \quad (2.3)$$

$$\rho_k = 2\zeta^*(2k) \left\{ 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{l^{2k}} + \frac{2 \cos(2k+2)\varphi_1}{(1+l^2)^k} + \right. \\ \left. + \frac{2 \cos(2k+2)\varphi_2}{(4+l^2)^k} + \frac{2 \cos(2k+2)\varphi_3}{(1+4l^2)^k} + \dots \right\}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{l}{1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{l}{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = 2l, \dots$$

$$\zeta^*(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.082, \quad \zeta^*(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.017, \quad \zeta^*(8) = 1.004$$

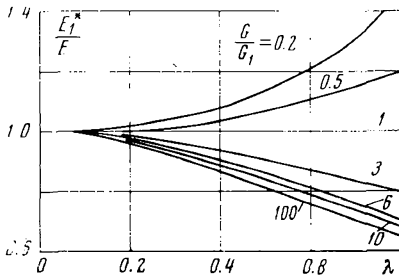
Подставляя в (2.3) значение $l = 2$, находим

$$g_2 = 2.193, \quad g_3 = 2.033, \quad g_4 = 2.012, \quad \rho_2 = 2.191, \quad \rho_3 = 2.047 \\ \rho_4 = 2.001, \quad \wp(1) = 1.625, \quad Q(1) = 0.802, \quad \zeta(1) = 0.823$$

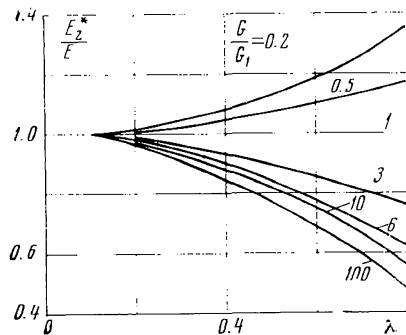
2. Определяем величины $K_0, K_1, K_2, \gamma_1, \delta_1$

$$\delta_1 = 2\zeta(1) = 1.647, \quad \gamma_1 = 2Q(1) - 2\wp(1) = -1.646 \\ K_0 = 0.431, \quad K_1 = 0.196, \quad K_2 = -0.861$$

3. По формулам (2.1) определяем α_2 и β_2 для двух случаев нагружения: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ и $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. По формулам (1.1) — (1.3) подсчитываем приведенные упругие параметры. Кривые приведенных модулей упругости для этого случая ($\omega_1 = 2$,

$\omega_2 = 4i$) при различных отношениях G/G_1 даны на фиг. 2 и 3. В расчетах принималось $\mu = \mu_1 = 0.3$.

Следует иметь в виду, что если решетка не нормирована, т. е. если $\omega_1 = 2a \neq 2$, $\omega_2 = 2ali$ и диаметр шайбы равен $2b$, то λ следует трактовать, как отношение b/a .

§ 3. В случае изгиба последовательность расчетов при определении приведенных упругих параметров решетки такова:

1. Находим величины g_n , ρ_n , $\mathcal{P}(1/2\omega_1)$, $Q(1/2\omega_1)$, $\zeta(1/2\omega_1)$, δ_1 и γ_1 по формулам (2.3), (2.2) и (2.1);

2. Определяем константы [4]

$$\begin{aligned} K_0' &= \frac{\delta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{S}, & K_1' &= -\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\pi}{2S} \\ K_2' &= \frac{\gamma_1 - \delta_1}{2} - \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{2\pi}{S}, & K_3' &= K_0' \end{aligned} \quad (3.1)$$

3. Подсчитываем далее величины

$$\begin{aligned} \gamma_{00}' &= K_2' + \frac{2K_0'K_3'\lambda^2}{1-2K_1'\lambda^2} + \frac{3}{8}g_2\lambda^2 + \frac{3}{256}g_2^2\lambda^6 \\ \gamma_{00}^* &= K_2' + \frac{(1-n)K_0'K_3'\lambda^2}{1-(1-n)K_1'\lambda^2} + \frac{3}{8}g_2\lambda^2 - n\frac{3}{256}g_2^2\lambda^6, & n &= \frac{3+\mu}{1-\mu} \\ d_{00} &= \lambda^2 K_0'K_3'\eta(G/G_1), & n_1 &= \frac{3+\mu_1}{1-\mu_1} \\ \eta(G/G_1) &= \left[\frac{n_1-1}{n_1} \frac{1}{1+(n-1)K_1'\lambda^2} - \frac{2}{1-2K_1'\lambda^2} \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + (1-2K_1'\lambda^2) \left(\frac{n_1-1}{n+1} \frac{G_1}{G} - \frac{n-1}{n+1} \right) \right\}^{-1} \\ t_0 &= \frac{M_2 - M_1}{2(1-\mu)} \left(1 + \frac{G}{G_1 n_1} \right) + \frac{M_1 + M_2}{4(1+\mu)} K_3'\lambda^2 \eta_1(G/G_1) \\ \eta_1(G/G_1) &= \left(1 + \frac{G}{n_1 G_1} \right) \left(\frac{n-1}{n_1-1} - \frac{G_1}{G} \right) (n_1-1) \times \\ &\times \left\{ 1 + k_1'\lambda^2(n-1) + (1-2K_1'\lambda^2)(n_1-1) \frac{G_1}{2G} \right\}^{-1} \\ S_{00} &= \frac{1-G_1/G}{1+n} \left(\gamma_{00}' + \frac{G}{G_1 n_1} \gamma_{00}^* + d_{00} \right), & S_{00} &= \frac{\lambda^2 s_{00}}{\gamma} \\ \gamma &= \frac{(1-G_1/G)(1-Gn/G_1 n_1)}{1+n} - \frac{1+n_1}{n_1} & T &= \frac{t_0}{\gamma} \end{aligned} \quad (3.2)$$

4. Величины α_2 и β_2 для случаев $M_1 = M_2 = 1$ и $M_1 = -M_2 = 1$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1-G/G_1}{1+n} A_2, & A_2 &= \frac{T_0}{1-S_{00}} \\ e &= \frac{n_1-1}{2} \frac{G_1}{G} - \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2(1-2K_1'\lambda^2)} & e &= -\frac{n+1}{e(1-2K_1'\lambda^2)} \end{aligned}$$

$$e_{\omega} = \frac{K_0'(1 - G_1/G)}{e(1 - 2K_1'\lambda^2)}, \quad A_0 = \frac{M_1 + M_2}{4(1 + \mu)} e_0 + e_{00} A_2 \lambda^2$$

$$\beta_2 = \frac{1}{1 - 2\lambda^2 K_1'} \left(-A_0 - \frac{M_1 + M_2}{2(1 + \mu)} + 2\lambda^2 K_0' \alpha_2 \right) \quad (3.3)$$

5. По формулам (1.4) — (1.6) определяем соответствующие приведенные упругие параметры.

§ 4. Особенно компактными получаются формулы для приведенного модуля упругости в случае правильных решеток (правильной треугольной: $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2e^{i\pi/3}$; квадратной: $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$).

Правильная треугольная решетка. Растяжение

$$\frac{E^*/(1 - \mu^*)}{E/(1 - \mu)} = \frac{12 - (1 - \mu)(6 - \sqrt{3}\pi\lambda^2)(1 - G/G_1)}{12 - (1 + \mu)(6 - \sqrt{3}\pi\lambda^2)(1 - G_1/G)} \frac{G_1}{G} \quad (4.1)$$

Квадратная решетка. Растяжение

$$\frac{E^*/(1 - \mu^*)}{E/(1 - \mu)} = \frac{8 - (1 - \mu)(4 - \pi\lambda^2)(1 - G/G_1)}{8 - (1 + \mu)(4 - \pi\lambda^2)(1 - G_1/G)} \frac{G_1}{G} \quad (4.2)$$

Правильная треугольная решетка. Изгиб

$$\frac{E^*/(1 - \mu^*)}{E/(1 - \mu)} = \frac{12 - (1 + \mu)[6 + \sqrt{3}\pi\lambda^2(1 - \mu)/(1 + \mu)](1 - G_1/G)}{12 - (1 + \mu)(6 - \sqrt{3}\pi\lambda^2)(1 - G_1/G)} \quad (4.3)$$

Квадратная решетка. Изгиб

$$\frac{E^*/(1 - \mu^*)}{E/(1 - \mu)} = \frac{8 - (1 + \mu)[4 + \pi\lambda^2(1 - \mu)/(1 + \mu)](1 - G_1/G)}{8 - (1 + \mu)(4 - \pi\lambda^2)(1 - G_1/G)} \quad (4.4)$$

При выводе соотношений (4.1) — (4.4) мы предполагали, что $\mu_1 = \mu$.

Формулы (4.1) — (4.4) дают весьма точные результаты во всем диапазоне изменения $0 \leq \lambda < 1$ и $0 < G/G_1 < \infty$. Под λ нужно понимать здесь отношение диаметра отверстия (шайбы) к шагу.

Поступила 30 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

- Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие изотропной плоскости с двоякопериодической системой включений. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 9.
- Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, № 3.
- Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластинки и отверстия и связанные с ними проблемы. Обзор результатов. Итоги науки, «Механика», ВИНТИ, М., 1967.
- Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Изгиб упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 6.