ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В СМЕЩЕНИЯХ

Э. И. ГРИГОЛЮК, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(*Москва, Новосибирск*)

Рассматривается построение общих решений уравнений технической теории пологих оболочек в смещениях.

Построение общих решений уравнений теории пологих оболочек рассматривались И. Н. Векуа [1].

1. Система дифференциальных уравнений теории в смещениях имеет вид [2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{RR_1}\right)u+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-$$
$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\mu}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1-\mu^2}{Eh}X^*$$
$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{RR_1}\right)v-$$
$$-\left(\frac{1}{R}+\frac{\mu}{R_1}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{1-\mu^2}{Eh}Y^*$$
$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\mu}{R}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{1}{R}+\frac{\mu}{R_1}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2\mu}{RR_1}+\frac{1}{R_1^2}+\frac{h^2}{12}\nabla^2\nabla^2\right)w=-\frac{1-\mu^2}{Eh}Z^*$$
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

где u, v — тангенциальные смещения в срединной поверхности вдоль осей x и y соответственно, w — прогиб; R, R_1 — главные радиусы кривизны, E, μ, h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки, X^*, Y^*, Z^* — соответствующие компоненты поверхностной нагрузки.

Известно, что общее решение системы (1.1) может быть представлено в виде

$$\Psi=\sigma+\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3 \tag{1.2}$$

где σ — общее решение уравнения

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\sigma+\frac{Eh}{D}\nabla_k{}^2\nabla_k{}^2\sigma=0 \tag{1.3}$$

$$\left(\nabla_k{}^2=\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\right)$$

а функции Ψ_j — частные решения неоднородного уравнения

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Psi_j + \frac{Eh}{D}\nabla_k^2\nabla_k^2\Psi_j = -\frac{P_j}{D} \qquad (j=1, 2, 3)$$

$$P_1 = X^*, \qquad P_2 = Y^*, \qquad P_3 = Z^* \tag{1.4}$$

2. Через функцию Ψ, заданную формулой (1.2), можно выразить смещения, усилия и моменты в оболочке. Формулы для смещений определяются симметричной матрицей дифференциальных операторов $\|D_{ik}\|$, где

$$D_{11} = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{2\mu}{RR_1} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1+\mu)}{R_1^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{h^2}{12}\nabla^2\nabla^2 \tag{2.1}$$

$$D_{12} = -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\nabla^2\nabla^2$$

$$D_{13} = \left(\frac{2+\mu}{R_1} - \frac{1}{R}\right)\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

$$D_{22} = \frac{2(1+\mu)}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{R^2} + \frac{2\mu}{RR_1} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\nabla^2\nabla^2$$

$$D_{23} = \left(\frac{2+\mu}{R} - \frac{1}{R_1}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \left(\frac{1}{R} + \frac{\mu}{R_1}\right)\frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$D_{33} = \nabla^2\nabla^2$$

Имеет место три случая когда смещения определяются следующими соотношениями:

$$u = D_{11}\Psi_x, \quad v = D_{12}\Psi_x, \quad w = D_{13}\Psi_x, \quad P_1 \neq 0, \quad P_2 = P_3 = 0 \tag{2.2}$$

$$u = D_{21}\Psi_y, \quad v = D_{22}\Psi_y, \quad w = D_{23}\Psi_y, \quad P_2 \neq 0, \quad P_1 = P_3 = 0 \tag{2.3}$$

$$u = D_{31}\Psi_z, \quad v = D_{32}\Psi_z, \quad w = D_{33}\Psi_z, \quad P_3 \neq 0, \quad P_1 = P_2 = 0 \tag{2.4}$$

Для цилиндрической оболочки формулы типа (2.1)—(2.4) содержатся в [2, 3].

3. Известно [2], что если оболочка нагружена по линиям, либо в точках, то исследование напряженного состояния в ней сводится к интегрированию системы уравнений, относительно функции напряжений U и функции прогибов w

$$\nabla^2\nabla^2 w = D^{-1}\nabla_k^2 U, \qquad \nabla^2\nabla^2 U = -Eh\nabla_k^2 w \tag{3.1}$$

Причем, если положить

$$w = \nabla^2\nabla^2\sigma, \qquad U = -Eh\nabla^2_k\sigma \tag{3.2}$$

то определение функции σ сводится к интегрированию уравнения (1.3).

Систему (3.1) приведем к одному эквивалентному ей уравнению относительно комплексной функции F

$$L_1 F = 0 \tag{3.3}$$

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2 \partial \zeta^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$F = F_1 + iF_2, \quad F_1(z, \zeta) = U(x, y), \quad F_2(z, \zeta) = \frac{1}{\varepsilon^*} w(x, y)$$

$$z = \frac{\beta \sqrt{i}}{a}(x + iy), \quad \zeta = \frac{\beta \sqrt{i}}{a}(x - iy)$$

$$\beta = \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon(1-\alpha)}, \quad \varepsilon = \frac{a^2\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Rh}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}, \quad \alpha = \frac{R}{R_1}, \quad \delta = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \quad |\alpha| \leqslant 1$$

Здесь a — некоторый характерный линейный размер. В силу (3.2) и (3.3) можем записать

$$F(z, \zeta) = -Eh \nabla_k^2 \sigma + \frac{i}{\varepsilon^*} \nabla^2 \nabla^2 \sigma \tag{3.4}$$

Преобразуя последнее равенство к переменным z, ζ, получим

$$\lambda_0 F(z, \zeta) = L_2(\sigma) \tag{3.5}$$

$$L_2 = \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right), \quad \lambda_0 = \frac{\varepsilon^* i}{16}\left(\frac{a}{\beta}\right)^4$$

Преобразуя к переменным z, ζ разрешающее уравнение (1.3), легко приводим его к виду

$$L_1 L_2 \sigma = 0 \tag{3.6}$$

где L_1, L_2 — дифференциальные операторы, заданные в (3.3) и (3.5).

Таким образом, если функция F есть решение уравнения (3.3), то любая функция σ, удовлетворяющая уравнению (3.5), будет решением уравнения (3.6). Обратно, если σ — решение уравнения (3.6), то функция F, определенная в (3.5) или (3.4), будет решением уравнения (3.3).

Вопрос, стало быть, сводится к построению общего решения уравнения (3.6).

4. Из вида операторов L_1 и L_2 следует, что L_1 переходит в L_2 и, наоборот, если в одном из них заменить z на $-i\zeta$ и ζ на $-iz$. Иными словами, имеют место равенства

$$\bar{L}_1 = \frac{\partial^4}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{\zeta}^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} \right) = L_2 \tag{4.1}$$

$$\bar{L}_2 = \frac{\partial^4}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{\zeta}^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} \right) = L_1$$

где черта сверху означает знак сопряжения комплексной величины.

Так как σ по своему физическому содержанию функция вещественная, то в силу (4.1) можем записать

$$\sigma(z, \zeta) = \operatorname{Re} \sigma_1(z, \zeta) \tag{4.2}$$

где $\sigma_1(z, \zeta)$ — общее решение уравнения (3.3). Приходим к следующей формуле:

$$\sigma(z, \zeta) = \operatorname{Re}\{a_0 G(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + a_1 G(z_0 - z, \zeta_0 - \zeta) +$$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} G(z-t, \zeta-\zeta_0)\mu_0(t)\,dt + \int\limits_{z}^{z_0} G(t-z, \zeta_0-\zeta)\mu_1(-t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} G(z-z_0, \zeta-\tau)\nu_0\,d\tau + \int\limits_{\zeta}^{\zeta_0} G(z_0-z, \tau-\zeta)\nu_1(-\tau)\,d\tau\} \tag{4.3}$$

где μ_0, μ_1, ν_0 и ν_1 — произвольные аналитические функции своих аргументов, а ядро $G(z - t, \zeta - \tau)$ имеет вид

$$G(z-t, \zeta-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\tau)^s}{s!} c_{k,s}, \qquad c_{2k+1, 2s+1} = b_{k,s}$$

$$c_{2k, 2s} = a_{k,s}, \qquad c_{2k, 2s+1} = a_{k,s} + b_{k-1;s}, \qquad c_{2k+1, 2s} = a_{k,s} + b_{k,s-1}$$

$$a_{k,s} = (k+s)! \sum_{j=0}^{\min(k,s)} \frac{(2\delta)^{2j}}{(2j)!(k-j)!(s-j)!}$$

$$b_{k,s} = (k+s+1)! \sum_{j=0}^{\min(k,s)} \frac{(2\delta)^{2j+1}}{(2j+1)!(k-j)!(s-j)!}$$

$$b_{-1,s} = 0, \qquad b_{k,-1} = 0 \qquad (k, s = 0, 1, \ldots) \tag{4.4}$$

Двойной ряд в (4.4) абсолютно сходится в любой конечной точке z, ζ.

Таким образом, решение уравнения (3.6) выражается через четыре произвольные аналитические функции.

5. В некоторых вопросах при построении тензора Грина, например, целесообразно исходить из представления общего решения в форме Векуа [4]. В этом случае вопрос упирается в построение функции Римана оператора $L_1 L_2$.

Строить функцию Римана непосредственным путем было бы затруднительно. Можно показать, что функция Римана оператора L_1 имеет вид

$$G_1(z-t, \zeta-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^{k+1}}{(k+1)!} g_k(\zeta-\tau) \tag{5.1}$$

$$g_{2k}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2s+1}}{(2s+1)!} a_{k,s}, \qquad g_{2k+1}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2s+2}}{(2s+2)!} b_{k,s}$$

Вещественная часть G_1 после некоторых преобразований может быть определена следующим образом:

$$\operatorname{Re} G_1(z-t, \zeta-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\tau)^s}{s!} \Lambda_{k,s} \tag{5.2}$$

$$\Lambda_{k,s} = \frac{1}{2}(-1)^{(3k+3s)/4} \cos\frac{k+s}{2}\pi \cos\frac{k+s}{4}\pi [d_{k,s}(\delta) + (-1)^s d_{k,s}(-\delta)]$$

$$d_{k,s}(\delta) = \Gamma\left(\frac{k+s}{2}+1\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\delta)^j}{j!\Gamma(^1/_2(k-j)+1)\Gamma(^1/_2(s-j)+1)}$$

Очевидно, что при тех значениях k и s, при которых величина $\cos[^1/_2(k+s)\pi]\cos[^1/_4(k+s)\pi]$ отлична от нуля, выражение в квадратных скобках всегда есть полином от δ (а не ряд), а сами $\Lambda_{k,s}$ симметричны относительно индексов k и s. Отличны от нуля $\Lambda_{k,s}$ только в том случае, если $k+s$ кратно четырем.

Проинтегрируем теперь функцию (5.2) трижды по z и трижды по ζ. Получим

$$R_3(z-t, \zeta-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^{k+3}}{(k+3)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\tau)^{s+3}}{(s+3)!} \Lambda_{k,s} \tag{5.3}$$

Функция $R_3(z-t, \zeta-\tau)$ есть функция Римана оператора L_1L_2.

Прежде всего необходимо показать, что функция $R_3(z, \zeta)$ — решение уравнения (3.6).

Из формулы (4.2) следует, что $\operatorname{Re} G_1(z, \zeta)$ является решением уравнения (3.6). Подставляя функцию (5.2) в уравнение (3.6), получаем разностное соотношение, которому удовлетворяют величины $\Lambda_{k,s}$

$$\begin{gathered}\Lambda_{k+4,\,s+4} - \Lambda_{k,\,s+4} - (4\delta^2+2)\Lambda_{k+2,\,s+2} - \Lambda_{k+4,\,s} - 4\delta(\Lambda_{k+1,\,s+3} + \\ + \Lambda_{k+3,\,s+1}) = 0 \qquad (k,\, s=0,\, 1, \ldots)\end{gathered} \tag{5.4}$$

Подставляя в (3.6) функцию $R_3(z, \zeta)$, заданную формулой (5.3), приходим помимо соотношений (5.4) к дополнительным соотношениям

$$\begin{aligned}&\Lambda_{k+4,1} - \Lambda_{k,1} - 4\delta\Lambda_{k+1,0} = 0\\ &\Lambda_{k+4,2} - \Lambda_{k,2} - (4\delta^2+2)\Lambda_{k+2,0} - 4\delta\Lambda_{k+1,1} = 0\\ &\Lambda_{k+4,3} - \Lambda_{k,3} - (4\delta^2+2)\Lambda_{k+2,1} - 4\delta(\Lambda_{k+1,2} + \Lambda_{k+3,0}) = 0\end{aligned} \tag{5.5}$$

Непосредственной проверкой легко убеждаемся, что соотношения (5.5) выполняются. Таким образом, $R_3(z, \zeta)$ — решение уравнения (3.6).

Далее функция Римана, в нашем случае, должна удовлетворять следующим начальным условиям [4]:

$$R_3(z, \zeta) = \frac{\partial R_3}{\partial z} = \frac{\partial^2 R_3}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 R_3}{\partial z^3} = \pi(\zeta) \qquad (z=0) \tag{5.6}$$

$$R_3(z, \zeta) = \frac{\partial R_3}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 R_3}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 R_3}{\partial \zeta^3} = \pi(z) \qquad (\zeta=0)$$

где функция $\pi(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4\pi(\zeta)}{d\zeta^4}-\pi(\zeta)=0 \tag{5.7}$$

и условиям

$$\pi(\zeta)=\frac{d\pi}{d\zeta}=\frac{d^2\pi}{d\zeta^2}=0, \quad \frac{d^3\pi}{d\zeta^3}=1 \quad \text{при } \zeta=0 \tag{5.8}$$

Из (5.7) в силу (5.8) находим

$$\pi(\zeta) = {}^1/_2(\operatorname{sh}\zeta-\sin\zeta) \tag{5.9}$$

Непосредственно видно, что условия (5.6), (5.8) функцией (5.3) удовлетворяются. Следовательно, она действительно есть функция Римана оператора L_1L_2.

Теперь общее решение уравнения (3.6) можно представить в форме [4]

$$\sigma^*(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{3}\{a_k{}^*R_k(z-z_0,\zeta-\zeta_0)+\int_{z_0} R_k(z-t,\zeta-\zeta_0)\mu_k(t)\,dt+$$

$$+\int_{\zeta_0} R_k(z-z_0,\zeta-\tau)\nu_k(\tau)\,d\tau\}$$

$$R_k(z,\zeta)=\frac{\partial^{2(3-k)}R_3(z,\zeta)}{\partial_z{}^{3-k}\partial\zeta^{3-k}} \quad (k=0,\ 1,\ 2) \tag{5.10}$$

Здесь a_k — произвольные константы, μ_k и ν_k — произвольные аналитические функции.

Рассмотрим вещественные решения. Легко видеть, учитывая формулы для переменных z, ζ в (3.3) и тот факт, что $R_3(z,\zeta)$ — результат интегрирования вещественной функции, что имеют место соотношения

$$\operatorname{Im}\{R_{2k}(z,\zeta)\}=0, \quad \operatorname{Re}\{R_{2k+1}(z,\zeta)\}=0 \quad (k=0,1) \tag{5.11}$$

Рассмотрим сумму

$$I_{2k}=\int_{z_0}^{z} R_{2k}(z-t,\zeta-\zeta_0)\mu_{2k}(t)\,dt+\int_{\zeta_0}^{\zeta} R_{2k}(z-z_0,\zeta-\tau)\nu_{2k}(\tau)\,d\tau \tag{5.12}$$

Учитывая равенство $\bar{z}=-i\zeta$, $\bar{\zeta}=-iz$ и вводя замену $\tau=i\bar{t}$, перепишем (5.12) в виде

$$I_{2k}=\int_{z_0}^{z} R_{2k}(z-t,\ \zeta-\zeta_0)\mu_{2k}(t)\,dt+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} R_{2k}(z-z_0,\ \zeta-i\bar{t})\nu_{2k}(i\bar{t})\,i d\bar{t} \tag{5.13}$$

Полагая $\mu_{2k}(t)=-i\bar{\nu}_{2k}(-it)$, получаем в силу (5.11)

$$I_{2k}=2\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} R_{2k}(z-t,\zeta-\zeta_0)\mu_{2k}(t)\,dt \tag{5.14}$$

Аналогичным путем находим

$$|_{2k+1} = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{z_0}^{z} iR_{2k+1}(z-t,\zeta-\zeta_0)\,\mu_{2k+1}(t)\,dt \tag{5.15}$$

Таким образом, в силу (5.14) и (5.15) формула (5.10) дает

$$\sigma(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{3}\left\{a_k(i)^k R_k(z-z_0,\zeta-\zeta_0)+\mathrm{Re}\int\limits_{z_0}^{z} i^k R_k(z-t,\zeta-\zeta_0)\,\mu_k(t)\,dt\right\} \tag{5.16}$$

где a_k — произвольные вещественные константы.

Формула (5.16) дает представление любого вещественного решения уравнения (3.6) через четыре произвольные аналитические функции $\mu_k(z)$.

6. Представления (5.16) можно использовать при получении различных полных систем частных решений уравнения (3.6). Простейшей системой такого рода будет полная относительно любой конечной односвязной области система обобщенных степеней.

Положим в (5.16)

$$\mu_k(z)=\frac{(z-z_0)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},\qquad a_k=0,\qquad \mathrm{Re}\,\gamma>0 \tag{6.1}$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция Эйлера.

Производя элементарное интегрирование, приходим к следующей системе решений:

$$\sigma_{0,\gamma}(z,\zeta)=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{k+\gamma}}{\Gamma(k+\gamma+1)}\overset{(3)}{r_k}(\zeta-\zeta_0),\quad \sigma_{1,\gamma}(z,\zeta)=\mathrm{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{k+\gamma+1}}{\Gamma(k+\gamma+2)}\overset{(2)}{r_k}(\zeta-\zeta_0)$$

$$\sigma_{2,\gamma}(z,\zeta)=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{k+\gamma+2}}{\Gamma(k+\gamma+3)}\overset{(1)}{r_k}(\zeta-\zeta_0),\quad \sigma_{3,\gamma}(z,\zeta)=\mathrm{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{k+\gamma+3}}{\Gamma(k+\gamma+4)}r_k(\zeta-\zeta_0)$$

$$r_k(\zeta)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\zeta^{s+3}}{(s+3)!}\Lambda_{k,s},\qquad \overset{(n)}{r_k}(\zeta)=\frac{d^n r_k(\zeta)}{d\zeta^n} \tag{6.2}$$

Ограничение, наложенное на γ в (6.1), теперь можно снять. При $\gamma=0$ функции (6.2) совпадают, очевидно, с соответствующими ядрами. При $\gamma=-n$, $(n=1,2,\ldots)$ получаем

$$\sigma_{0,-n}(z,\zeta)=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\overset{(3)}{r}_{k+n}(\zeta),\qquad \sigma_{1,-n}(z,\zeta)=\mathrm{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\overset{(2)}{r}_{k+n}(\zeta) \tag{6.3}$$

$$\sigma_{2,-n}(z,\zeta)=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}\overset{(1)}{r}_{k+n}(\zeta),\qquad \sigma_{3,-n}(z,\zeta)=\mathrm{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+3}}{(k+3)!}r_{k+n}(\zeta)$$

Решения (6.2) целесообразно представить в виде рядов Фурье по полярному углу θ. Это легко сделать, произведя суммирование определенным образом. Имеем

$$\sigma_{0,m}(z,\zeta)=\mathrm{Re}\left\{\sigma_m(m,0;\sqrt{z\zeta})+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\sqrt{\frac{\zeta}{z}}\right)^k\sigma_{m,k}(m,0;\sqrt{z\zeta})\right\} \tag{6.4}$$

$$\sigma_{1,m}(z,\zeta)=\mathrm{Im}\left\{\sigma_m(m+1,0;\sqrt{z\zeta})+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\sqrt{\frac{\zeta}{z}}\right)^k\sigma_{m,k}(m+1,1;\sqrt{z\zeta})\right\}$$

$$\sigma_{2,m}(z, \zeta) = \mathrm{Re}\left\{\sigma_m(m+2, 2; \sqrt{z\zeta}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\sqrt{\frac{\zeta}{z}}\right)^k \sigma_{m,k}(m+2, 2; \sqrt{z\zeta})\right\}$$

$$\sigma_{3,m}(z, \zeta) = \mathrm{Im}\left\{\sigma_m(m+3, 3; \sqrt{z\zeta}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\sqrt{\frac{\zeta}{z}}\right)^k \sigma_{m,k}(m+3, 3; \sqrt{z\zeta})\right\}$$

где

$$\sigma_k(\nu, \lambda; \sqrt{z\zeta}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{j,j+k}(\sqrt{z\zeta})^{2j+k+\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+j+1)\Gamma(\lambda+j+k+1)}, \quad \sqrt{\frac{\zeta}{z}} = e^{-i\theta}$$

$$\sigma_{m,k}(\gamma, \lambda; \sqrt{z\zeta}) = \begin{cases} \sigma_{m+k}(\gamma, \lambda; \sqrt{z\zeta}) & (k=1, 2, \ldots) \\ \sigma_{m+k}(\gamma, \lambda; \sqrt{z\zeta}) & (k=-1, -2, \ldots, -m) \\ \sigma_{-m-k}(\gamma, \lambda; \sqrt{z\zeta}) & (k=-m-1, -m-2, -\ldots) \end{cases}$$

Величины $\Lambda_{k,s}$ определены в (5.2), переменные z, ζ, заданы в (3.3).

Система функций (6.4) может быть использована при рассмотрении краевых задач для пологой оболочки (купола), опирающейся на круговой план.

Поступила 23 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. К теории тонких пологих упругих оболочек. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее применение в технике. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
4. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1948.