УДК 539.4

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. Е. КАЦ, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(*Москва, Новосибирск*)

Первая основная двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды при весьма общих предположениях о границе области рассмотрена в [1]. Автор основывается на некоторых общих теоремах относительно интегралов типа Коши с ядрами в виде дзета-функции Вейерштрасса [2]. Подобные интегралы рассматривались при исследовании обтекания регулярных решеток [3]. Общая теория интегралов типа Коши с автоморфными ядрами дана в [4, 5]. Решение второй основной двоякопериодической задачи для изотропной среды дано в [6]. Конструктивные методы решения двоякопериодических задач в изотропной среде развиты в [7]. В области периодической задачи для анизотропной среды также имеется ряд исследований (см. обзор [8]).

В данной работе рассматривается первая основная двоякопериодическая задача для анизотропной среды, ослабленной конгруентной системой отверстий общего вида. При этом в качестве исходных используются соответствующие интегральные представления Д. И. Шермана [9], которые модифицируются таким образом, чтобы они определяли две произвольные квазипериодические функции. Краевая задача приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказывается существование и единственность решения полученного интегрального уравнения.

Следует отметить, что применение интегральных представлений Д. И. Шермана при исследовании задач с регулярными границами (в частности двоякопериодических задач) весьма удобно и приводит к интегральным уравнениям Фредгольма с ядрами простого вида.

1. Рассмотрим плоскую неограниченную анизотропную среду, ослабленную двоякопериодической системой одинаковых произвольных отверстий. (Контуры отверстий — простые непересекающиеся кривые).

Пусть ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im}\omega_1 = 0$, $\operatorname{Im}\omega_2 > 0$) — основные периоды; D — область, занятая средой; L_{mn} — контур отверстия, содержащий внутри себя точку $P = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$); $L = \bigcup L_{mn}$ — граница области D. Односвязные области, заключенные внутри L_{mn}, обозначим через D_{mn}, а начало координат совместим с точкой $P = 0$.

Предположим, что к контуру каждого отверстия приложена одинаковая самоуравновешанная нагрузка, а в области D действуют средние напряжения σ_1, σ_2, τ.

Определим упругое равновесие двоякопериодической решетки под действием заданной системы сил.

Наряду с комплексной плоскостью $z = x + iy$ введем в рассмотрение две вспомогательные плоскости

$$z_1 = x + \mu_1 y, \qquad z_2 = x + \mu_2 y \tag{1.1}$$

где μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения для функции напряжений в анизотропной среде [10].

Обозначим области и контуры в плоскостях z_1 и z_2, находящиеся в аффинном соответствии с D, D_{mn}, L_{mn}, через $D^{(1)}$, $D_{mn}^{(1)}$, $L_{mn}^{(1)}$ и $D^{(2)}$, $D_{mn}^{(2)}$, $L_{mn}^{(2)}$.

Тогда решение первой основной задачи плоской теории упругости для анизотропной среды сводится к построению двух функций $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$, регулярных в областях $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ и удовлетворяющих на L краевому условию [10]

$$(1+i\mu_1)\varphi_1(t_1)+(1+i\bar{\mu}_1)\overline{\varphi_1(t_1)}+(1+i\mu_2)\varphi_2(t_2)+ \tag{1.2}$$
$$+(1+i\bar{\mu}_2)\overline{\varphi_2(t_2)}=f(t)+C_{mn}$$

$$f(t)=i\int_0^t (X_n+iY_n)\,ds$$

Здесь $t,\ t_1,\ t_2$ — аффиксы точек $L_{mn}, L_{mn}^{(1)}\ \ L_{mn}^{(2)}$; $X_n,\ Y_n$ — компоненты внешней нагрузки, действующей на контуре L_{mn}; C_{mn} — комплексные постоянные, одна из которых может быть произвольно зафиксирована. Условимся в дальнейшем считать $C_{00}=0$.

Условию (1.2) можно придать вид [9]

$$a\varphi_1(t_1)+b\overline{\varphi_1(t_1)}+\varphi_2(t_2)=F(t)+E_{mn} \tag{1.3}$$

где

$$a=\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2},\qquad b=\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}$$

$$F(t)=\frac{(1-i\bar{\mu}_2)f(t)-(1+i\bar{\mu}_2)\overline{f(t)}}{2i(\mu_2-\bar{\mu}_2)}$$

$$E_{mn}=\frac{(1-i\bar{\mu}_2)C_{mn}-(1+i\bar{\mu}_2)\bar{C}_{mn}}{2i(\mu_2-\bar{\mu}_2)}$$

Напряжения через функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ определяются по формулам [10]

$$\sigma_x=2\operatorname{Re}[\mu_1^2\varphi_1'(z_1)+\mu_2^2\varphi_2'(z_2)]$$

$$\sigma_y=2\operatorname{Re}[\varphi_1(z_1)+\varphi_2(z_2)] \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}=-2\operatorname{Re}[\mu_1\varphi_1(z_1)+\mu_2\varphi_2(z_2)]$$

Из геометрии рассматриваемой задачи и характера внешней нагрузки следует, что напряжения в решетке — двоякопериодические функции.

Модифицируя соответствующие представления [9], запишем функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ в виде

$$\varphi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(1)}}\omega(t)\,[\zeta(t_1-z_1)-\zeta(t_1)+\zeta(z_1)]\,dt_1+b_1\zeta(z_1)+Az_1$$

$$\varphi_2(z_2)=-\frac{a}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(2)}}\omega(t)\,[\zeta(t_2-z_2)-\zeta(t_2)+\zeta(z_2)]\,dt_2+ \tag{1.5}$$

$$+\frac{b}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(2)}}\overline{\omega(t)}\,[\zeta(t_2-z_2)-\zeta(t_2)+\zeta(z_2)]\,dt_2-\gamma_2\zeta(z_2)+Bz_2$$

Здесь $\omega(t)$ — искомая плотность, удовлетворяющая на L условию Гельдера; $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса; $A,\ B$ — постоянные, подлежащие определению; $b_1,\ \gamma_2$ — функционалы, задаваемые формулами

$$b_1=-\gamma_1+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(1)}}[\omega(t)\,\overline{dt_1}-\overline{\omega(t)}\,dt_1]$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{(1)}} \omega(t)\,dt_1 \tag{1.6}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{(2)}} [-a\omega(t) + b\overline{\omega(t)}]\,dt_2$$

В представлениях (1.5) интегралы дают периодические, а внеинтегральные члены — квазипериодические функции.

Функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ определяют класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений в анизотропной решетке.

2. Согласно [2], всякая квазипериодическая функция $\varphi(z)$ с циклическими весами α_1 и α_2 может быть представлена в D при помощи модифицированного интеграла Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}} \varphi(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt - \frac{1}{2\pi i}(\alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1)z \tag{2.1}$$

где

$$\delta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right), \quad \alpha_j = \varphi(z+\omega_j) - \varphi(z) \quad (z \in D) \quad {\scriptstyle j=1,2}$$

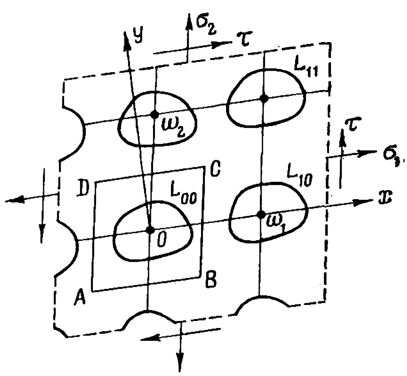
Аналогичным образом можно ввести модифицированные интегралы типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}} \omega(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}} \omega(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t) + \zeta(z)]\,dt \tag{2.2}$$

которые определяют соответственно квазипериодическую и периодическую функции. Отсюда видно, что для этих интегралов справедливы формулы Сохоцкого — Племеля. В частности, если $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ — функции регулярные соответственно в D и D_{00}, то

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \omega(t) \quad (t \in L_{00}) \tag{2.3}$$



3. Займемся статическими условиями. Согласно [10] компоненты главного вектора усилий, действующих на некоторой дуге l в D, определяются формулами

$$\int\limits_l X_n ds = 2\mathrm{Re}[\mu_1\varphi_1(z_1) + \mu_2\varphi_2(z_2)]\,|_l \tag{3.1}$$

$$\int\limits_l Y_n ds = -2\mathrm{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)]\,|_l$$

Определяя компоненты главного вектора усилий, действующих на гранях AB и BC параллелограмма периодов B_{00} (фигура) по формулам (3.1), находим

$$\mathrm{Re}(A+B) = \frac{1}{2}\sigma_2\sin\alpha - \frac{1}{\omega_1}\mathrm{Re}(b_1\delta_1^{(1)} - \gamma_2\delta_1^{(2)})$$

$$\mathrm{Re}(\mu_1 A + \mu_2 B) = -\frac{1}{2}(\tau + \sigma_2\cos\alpha) - \frac{1}{\omega_1}\mathrm{Re}(\mu_1 b_1\delta_1^{(1)} - \mu_2\gamma_2\delta_1^{(2)}) \tag{3.2}$$

$$\operatorname{Re}(\mu_1 A\omega_2^{(1)} + \mu_2 B\omega_2^{(2)}) = {}^1/_2(\sigma_1 + \tau\cos\alpha)\,|\omega_2| - \operatorname{Re}(\mu_1 b_1 \delta_2^{(1)} - \mu_2\gamma_2\delta_2^{(2)})$$

$$\operatorname{Re}(A\omega_2^{(1)} + B\omega_2^{(2)}) = -{}^1/_2\tau|\omega_2|\sin\alpha - \operatorname{Re}(b_1\delta_2^{(1)} - \gamma_2\delta_2^{(2)})$$

Здесь $\omega_1^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$ и $\omega_1^{(2)}$, $\omega_2^{(2)}$ — периоды решеток соответственно в плоскостях z_1 и z_2, причем, согласно (1.1), $\omega_1^{(1)} = \omega_1^{(2)} = \omega_1$

$$\omega_2^{(j)} = \operatorname{Re}\omega_2 + \mu_j \operatorname{Im}\omega_2; \quad \delta_k^{(j)} = \zeta(z_j + \omega_k^{(j)}) - \zeta(z_j) = 2\zeta(\omega_k^{(j)}/2)$$

$$(j, k = 1, 2) \quad \alpha = \arg\omega_2$$

Решение системы (3.2) может быть представлено в виде

$$A = i\beta_1 K_0 + K_1 + K_2, \quad B = i\beta_2 K_0 + K_1^* + K_2^* \tag{3.3}$$

$$\operatorname{Im}(b_1 - \gamma_2) = \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

где K_0 — вещественная константа, которая определяется из условия отсутствия вращения в некоторой точке решетки, а β_j, K_j, K_j^* $(j = 1, 2)$ в зависимости от соотношения параметров $\mu_1 = \mu_1' + i\mu_1''$ и $\mu_2 = \mu_2' + i\mu_2''$ $(\mu_j' = \operatorname{Re}\mu_j,\ \mu_j'' = \operatorname{Im}\mu_j)$ имеют вид при $\mu_2' = \mu_1'$

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_2 = -\mu_1''/\mu_2''$$

$$K_1 = \frac{1}{\mu_2''^2 - \mu_1''^2}[\Delta_3 - 2\mu_1'\Delta_2 + |\mu_2|^2\Delta_1]$$

$$K_1^* = -\frac{1}{\mu_2''^2 - \mu_1''^2}[\Delta_3 - 2\mu_1'\Delta_2 + |\mu_1|^2\Delta_1] + \frac{i}{\mu_2''}(\mu_1'\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu_2''^2 - \mu_1''^2)}[\mathring{\sigma}_x + 2\mu_1'\mathring{\tau}_{xy} + |\mu_1|^2\mathring{\sigma}_y] \tag{3.4}$$

$$K_2^* = -\frac{1}{2(\mu_2''^2 - \mu_1''^2)}[\mathring{\sigma}_x + 2\mu_1'\mathring{\tau}_{xy} + |\mu_1|^2\mathring{\sigma}_y] + \frac{i}{2\mu_2''}(\mu_1'\mathring{\sigma}_y + \mathring{\tau}_{xy})$$

при $\mu_2' \neq \mu_1'$

$$\beta_1 = -i\left\{1 + \frac{i}{2}\left[\frac{\mu_1' - \mu_2'}{\mu_1''} + \frac{\mu_2''^2 - \mu_1''^2}{\mu_1''(\mu_1' - \mu_2')}\right]\right\}$$

$$\beta_2 = i\left\{1 - \frac{i}{2}\left[\frac{\mu_1' - \mu_2'}{\mu_2''} - \frac{\mu_2''^2 - \mu_1''^2}{\mu_2''(\mu_1' - \mu_2')}\right]\right\} \tag{3.5}$$

$$K_1 = -\frac{i}{2\mu_1''(\mu_1' - \mu_2')}[\Delta_3 - 2\mu_2'\Delta_2 + |\mu_2|^2\Delta_1]$$

$$K_1^* = \Delta_1 + \frac{i}{2\mu_2''(\mu_1' - \mu_2')}[\Delta_3 - 2\mu_1'\Delta_2 + (\mu_2''^2 - \mu_2'^2 + 2\mu_1'\mu_2')\Delta_1]$$

$$K_2 = -\frac{i}{4\mu_1''(\mu_1' - \mu_2')}[\mathring{\sigma}_x + 2\mu_2'\mathring{\tau}_{xy} + |\mu_2|^2\mathring{\sigma}_y]$$

$$K_2^* = \frac{1}{2}\mathring{\sigma}_y + \frac{i}{4\mu_2''(\mu_1' - \mu_2')}[\mathring{\sigma}_x + 2\mu_1'\mathring{\tau}_{xy} + (\mu_2''^2 - \mu_2'^2 + 2\mu_1'\mu_2')\mathring{\sigma}_y]$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta_1 = -\frac{1}{\omega_1}\operatorname{Re}(b_1\delta_1^{(1)} - \gamma_2\delta_1^{(2)}), \qquad \Delta_2 = -\frac{1}{\omega_1}\operatorname{Re}(\mu_1 b_1\delta_1^{(1)} - \mu_2\gamma_2\delta_1^{(2)})$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{\omega_1}\left\{\operatorname{Re}(\mu_1^2 b_1\delta_1^{(1)} - \mu_2^2\gamma_2\delta_1^{(2)}) + \frac{2\pi}{\operatorname{Im}\omega_2}\operatorname{Im}(\mu_1 b_1 - \mu_2\gamma_2)\right\} \tag{3.6}$$

где $\overset{\circ}{\sigma}_x$, $\overset{\circ}{\sigma}_y$, $\overset{\circ}{\tau}_{xy}$ — средние напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных осям координат.

4. Согласно формулам Сохоцкого — Племеля, граничные значения функций (1.5) имеют вид

$$\varphi_1(t_{10} + P^{(1)}) = \frac{\omega(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(1)}} \omega(t)\,[\zeta(t_1 - t_{10}) - \zeta(t_1) + \zeta(t_{10})]\,dt_1 + \tag{4.1}$$

$$+ b_1\zeta(t_{10}) + At_{10} + b_1(m\delta_1^{(1)} + n\delta_2^{(1)}) + AP^{(1)}$$

$$\varphi_2(t_{20} + P^{(2)}) = -\frac{a\omega(t_0)}{2} - \frac{a}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(2)}} \omega(t)\,[\zeta(t_2 - t_{20}) - \zeta(t_2) + \zeta(t_{20})]\,dt_2 +$$

$$+ \frac{b\overline{\omega(t_0)}}{2} + \frac{b}{2\pi i}\int_{L_{00}^{(2)}} \overline{\omega(t)}\,[\zeta(t_2 - t_{20}) - \zeta(t_2) + \zeta(t_{20})]\,dt_2 -$$

$$- \gamma_2\zeta(t_{20}) + Bt_{20} - \gamma_2(m\delta_1^{(2)} + n\delta_2^{(2)}) + BP^{(2)}$$

$$t_0 \in L_{00}, \quad t_{10} \in L_{00}^{(1)}, \quad t_{20} \in L_{00}^{(2)}; \quad P^{(j)} = m\omega_1^{(j)} + n\omega_2^{(j)}\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Подставляя их в краевое условие (1.3), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно искомой функции $\omega(t)$

$$\overline{\omega(t_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}} \overline{\omega(t)}\, d\ln\frac{\overline{\sigma(t_1 - t_{10})}\,\sigma(t_2)}{\sigma(t_2 - t_{20})\,\overline{\sigma(t_1)}} + \tag{4.2}$$

$$+ \frac{a}{b}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}} \omega(t)\, d\ln\frac{\sigma(t^1 - t_{10})\,\sigma(t_2))}{\sigma(t_2 - t_{20})\,\sigma(t_1)} + M[\omega(t), t_0] = F^*(t) + E_{mn}^*$$

Здесь

$$M[\omega(t), t_0] = \frac{a}{b}(b_1 + \gamma_1)\zeta(t_{10}) + (\bar b_1 + \bar\gamma_1)\overline{\zeta(t_{10})} +$$

$$+ \frac{2}{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}[(\Delta_2 - \mu_2\Delta_1)\operatorname{Re} t_0 + (\Delta_3 - \bar\mu_2\Delta_2)\operatorname{Im} t_0]$$

$$F^*(t_0) = \frac{1}{b}F(t_0) + \frac{1}{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}[(\overset{\circ}{\tau}_{xy} + \mu_2\overset{\circ}{\sigma}_y)\operatorname{Re} t_0 - (\overset{\circ}{\sigma}_x + \bar\mu_2\overset{\circ}{\tau}_{xy})\operatorname{Im} t_0]$$

$$E_{mn}^* = \frac{1}{b}\{E_{mn} - [ab_1(m\delta_1^{(1)} - n\delta_2^{(1)}) + b\bar b_1(m\bar\delta_1^{(1)} + n\bar\delta_2^{(1)}) -$$

$$- \gamma_2(m\delta_1^{(2)} + n\delta_2^{(2)})] - [aP^{(1)}A + b\overline{P^{(1)}}\bar A + P^{(2)}B]\}$$

$\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса.

Сравнивая теперь представления (6.3) и (6.4) и учитывая (6.7)—(6.9), находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{(1)}} \omega_0(t)\,[\zeta(t_1 - z_1) - \zeta(t_1)]\,dt_1 = D_1 \qquad (6.10)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{(2)}} [-a\omega_0(t) + b\overline{\omega_0(t)}]\,[\zeta(t_2 - z_2) - \zeta(t_2)]\,dt_2 = D_2$$

На основании (2.1) последние равенства можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{(1)}} [\omega_0(t) - D_1]\,[\zeta(t_1 - z_1) - \zeta(t_1)]\,dt_1 = 0 \quad (z \in D) \qquad (6.11)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{(2)}} [-a\omega_0(t) + b\overline{\omega_0(t)} - D_2]\,[\zeta(t_2 - z_2) - \zeta(t_2)]\,dt_2 = 0$$

Введем обозначения [9]

$$i\chi_1(t_1) = \omega_0(t) - D_1, \qquad i\chi_2(t_2) = -a\omega_0(t) + b\overline{\omega_0(t)} - D_2 \qquad (6.12)$$

В силу (2.3) из соотношения (6.11) следует, что $\chi_1(t_1)$ и $\chi_2(t_2)$ являются граничными значениями регулярных в $D_{00}^{(1)}$ и $D_{00}^{(2)}$ функций $\chi_1(z_1)$ и $\chi_2(z_2)$.

Выразим $\omega_0(t)$ из первого равенства (6.12) и подставим его во второе, получим

$$a\chi_1(t_1) + b\overline{\chi_1(t_1)} + \chi_2(t_2) = iaD_1 - ib\overline{D}_1 + iD_2 \qquad (6.13)$$

Из (6.13) следует, что функции $\chi_1(z_1)$ и $\chi_2(z_2)$ дают решение плоской задачи теории упругости анизотропной среды для области D_{00} при нулевой внешней нагрузке и должны иметь вид

$$\chi_1(z_1) = i\beta_1 C^* z_1 + D_1^*, \qquad \chi_2(z_2) = i\beta_2 C^* z_2 + D_2^* \qquad (6.14)$$

Приравнивая правые части первых соотношений (6.12) и (6.14), находим

$$\omega_0(t) = -\beta_1 C^* t_1 + D_1 + iD_1^* \qquad (6.15)$$

Наконец, подставляя $\omega_0(t)$ из (6.15) во второе равенство (6.9), получим

$$C^* = 0 \qquad (6.16)$$

Отсюда следует, что

$$\omega_0(t) = D_1 + iD_1^* \qquad (6.17)$$

Определим $\varphi_1^{(0)}(z_1)$ и $\varphi_2^{(0)}(z_2)$ из (6.3). С учетом (6.17) получаем

$$\varphi_1^{(0)}(z_1) = i\beta_1 K_0^{(0)} z_1 + (D_1 + iD_1^*) \qquad (6.18)$$

$$\varphi_2^{(0)}(z_2) = i\beta_2 K_0^{(0)} z_2 - a(D_1 + iD_1^*) + b(\overline{D}_1 + i\overline{D}_1^*)$$

Подставляя (6.18) в граничное условие (1.3), которое в данном случае принимает вид

$$a\varphi_1^{(0)}(t_1) + \overline{b\varphi_1^{(0)}(t_1)} + \varphi_2^{(0)}(t_2) = 0 \tag{6.19}$$

приходим к равенству

$$D_1 + iD_1^* = 0 \tag{6.20}$$

На основании (6.17) и (6.20) заключаем, что

$$\omega_0(t) = 0 \tag{6.21}$$

Таким образом, интегральное уравнение (4.2) имеет единственное решение.

Поступила 5 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of equal holes. Boundary problems differential equations. Madison. Univ. Wisconsin Press, 1960.
2. Koiter W. T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions. Proc. Konikl. nederl. acad. wet. A. Amsterdam, 1959, vol. 62, No. 2.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1950.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
5. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116.
6. Ержанов Ж. С., Тусупов М. Т. К решению двоякопериодической задачи теории упругости. В сб.: Концентрация напряжений. Киев, «Наукова думка», 1968, вып. 2.
7. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорирование пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
8. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки и связанные с ними проблемы. В сб.: Итоги науки. Сер. Механика. Упругость и пластичность. 1965. М., ВИНИТИ, 1967.
9. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
10. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. изд. 5. М., Изд-во АН СССР, 1954.