МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1974

УДК 539.3

УПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗОК, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НА ЛИНИЯХ

В. Н. МАКСИМЕНКО, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Новосибирск)

Рассматривается пологая анизотропная оболочка, загруженная по произвольным линиям. Строится фундаментальное решение уравнений теории пологих анизотропных оболочек в классе периодических функций. Вычисляются асимптотические значения деформаций и усилий в окрестности концов линии загружения.

Обзор работ по сосредоточенным нагрузкам дан в [1]. Расчет изотропных оболочек, загруженных по линиям, содержится в работах [2, 3].

1. Основная система уравнений теории пологих анизотропных оболочек в смещениях имеет вид [4]

$$L_{11}(C_{jk})u+L_{12}(C_{jk})v+L_{13}(C_{jk})w=-X \tag{1.1}$$

$$L_{12}(C_{jk})u+L_{22}(C_{jk})v+L_{23}(C_{jk})w=-Y$$

$$L_{13}(C_{jk})u+L_{23}(C_{jk})v+L_{33}(C_{jk}, D_{jk})w=Z$$

$$L_{11}(C_{jk})=\frac{C_{11}}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{C_{16}}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{C_{66}}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

$$L_{22}(C_{jk})=\frac{C_{66}}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{C_{26}}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{C_{22}}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

$$L_{12}(C_{jk})=\frac{C_{16}}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{C_{12}+C_{66}}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{C_{26}}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

$$L_{13}(C_{jk})=\frac{(k_1C_{11}+k_2C_{12})}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{(k_1C_{16}+k_2C_{26})}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$C_{23}(C_{jk})=\frac{(k_1C_{16}+k_2C_{26})}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{(k_1C_{16}+k_2C_{22})}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$L_{33}(C_{jk}, D_{jk})=(k_1^2C_{11}+2k_1k_2C_{12}+k_2^2C_{22})+$$

$$+\frac{D_{11}}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+4\frac{D_{16}}{A^3B}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^3\,\partial\beta}+2\frac{D_{12}+2D_{66}}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+$$

$$+4\frac{D_{26}}{AB^3}\frac{\partial^4}{\partial\alpha\,\partial\beta^3}+\frac{D_{22}}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

Здесь величины C_{jk} и D_{jk} связаны с упругими параметрами анизотропии, k_1 и k_2 — главные кривизны срединной поверхности оболочки, A и B — коэффициенты первой квадратичной формы; X, Y, Z — компоненты поверхностной нагрузки; α и β — безразмерные декартовы координаты.

Деформации, внутренние усилия и моменты выражаются через смещения по известным формулам

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+k_1w,\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+k_2w$$

$$\omega=\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta},\qquad \varkappa_1=-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}$$

$$\varkappa_2=-\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2},\qquad \tau=-\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}$$

$$T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2+C_{16}\omega,\qquad M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{12}\varkappa_2+D_{16}\tau$$

$$T_2=C_{22}\varepsilon_2+C_{12}\varepsilon_1+C_{26}\omega,\qquad M_2=D_{22}\varkappa_2+D_{12}\varkappa_1+D_{26}\tau$$

$$S=C_{66}\omega+C_{16}\varepsilon_1+C_{26}\varepsilon_2,\qquad H=D_{66}\tau+D_{16}\varkappa_1+D_{26}\varkappa_2$$

$$N_1=\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial H}{\partial\beta},\qquad N_2=\frac{1}{A}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial M_2}{\partial\beta}$$

Здесь ε_1, ε_2, ω — компоненты тангенциальной деформации; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ — деформации изгиба и кручения; T_1, T_2, S — внутренние тангенциальные и N_1, N_2 — поперечные силы; M_1, M_2 и H — изгибающие и крутящий моменты.

Общее решение системы (1.1) можно представить в виде

$$\Psi=\sigma+\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3$$

где σ — общее решение уравнения

$$B^*(\sigma)=0$$

а Ψ_j — частные решения неоднородного уравнения

$$B^*(\Psi_j)=P_j\qquad (j=1,2,3)$$

$$P_1=-X,\qquad P_2=-Y,\qquad P_3=Z,\qquad B^*=\det[L_{ij}]$$

Частные решения для смещений выражаются через функции Ψ_j следующим образом (B_{ij} — алгебраическое дополнение элемента L_{ij} в симметричной матрице $[L_{ij}]$):

$$u=B_{11}\Psi_1,\qquad v=B_{12}\Psi_1,\qquad w=B_{13}\Psi_1\qquad (P_1\neq0,\ P_2=P_3=0)$$

$$u=B_{12}\Psi_2,\qquad v=B_{22}\Psi_2,\qquad w=B_{23}\Psi_2\qquad (P_1=P_3=0,\ P_2\neq0)$$

$$u=B_{13}\Psi_3,\qquad v=B_{23}\Psi_3,\qquad w=B_{33}\Psi_3\qquad (P_1=P_2=0,\ P_3\neq0)$$

В случае нагрузки общего вида

$$u=\sum_{j=1}^{3}B_{j1}\Psi_j,\qquad v=\sum_{j=1}^{3}B_{j2}\Psi_j\qquad w=\sum_{j=1}^{3}B_{j3}\Psi_j$$

Полагая $A=R_2$, $B=R_2$, $\lambda=R_2/R_1$, запишем

$$B^*=\Omega(C_{jk})\frac{D_{11}A_{22}}{R_2^8}L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha},\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\tag{1.2}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha},\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=L_0\left(\frac{\partial}{\partial\alpha},\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+a_9\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\lambda\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+\lambda^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\right]$$

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial\alpha},\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=\sum_{j=0}^{8}a_j\frac{\partial^8}{\partial\alpha_j\,\partial\beta^{8-j}},$$

$$B_{11}=\sum_{j=0}^{6} a_j^{11}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{6-j}}+\sum_{j=0}^{2} b_j^{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{2-j}}$$

$$B_{22}=\sum_{j=0}^{6} a_j^{22}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{6-j}}+\sum_{j=0}^{2} b_j^{22}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{2-j}}$$

$$B_{12}=\sum_{j=0}^{6} a_j^{12}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{6-j}}+\sum_{j=0}^{2} b_j^{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{2-j}}$$

$$B_{13}=\sum_{j=0}^{3} b_j^{13}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{3-j}},\qquad B_{23}=\sum_{j=0} b_j^{23}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{3-j}}$$

$$B_{33}=\sum_{j=0} a_j^{33}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{4-j}}$$

$$a_9=R_2^2D_{11}^{-1}A_{22}^{-1},\qquad a_8=1,\qquad a_7=2[2D_{16}D_{22}-D_{11}A_{26}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$a_6=[D_{11}(2A_{12}+A_{66})-8D_{16}A_{26}+2(D_{12}+2D_{66})A_{22}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$a_5=2[2D_{16}(2A_{12}+A_{66})+2D_{26}A_{22}-D_{11}A_{16}-2(D_{12}+$$
$$+2D_{66})A_{26}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$a_4=[D_{11}A_{11}-8D_{16}A_{16}+2(D_{12}+2D_{66})(2A_{12}+A_{66})-8D_{26}A_{26}+$$
$$+D_{22}A_{22}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$a_3=2[2D_{26}(2A_{12}+A_{26})+2D_{16}A_{11}-D_{22}A_{26}-2(D_{12}+$$
$$+2D_{66})A_{16}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$a_2=[D_{22}(2A_{12}+A_{66})-8D_{26}A_{16}+2(D_{12}+2D_{66})A_{11}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$a_1=2[2D_{26}A_{11}-D_{22}A_{16}]D_{11}^{-1}A_{22}^{-1},\qquad a_0=D_{22}A_{11}D_{11}^{-1}A_{22}^{-1}$$

$$\Omega(C_{jk})=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)C_{66}+2C_{12}C_{16}C_{26}-C_{11}C_{26}^2-C_{22}C_{16}^2$$

$$A_{11}=\frac{C_{22}C_{66}-C_{26}^2}{\Omega(C_{jk})},\qquad A_{22}=\frac{C_{11}C_{66}-C_{16}^2}{\Omega(C_{jk})}$$

$$A_{66}=\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}{\Omega(C_{jk})},\qquad A_{12}=\frac{C_{16}C_{26}-C_{12}C_{66}}{\Omega(C_{jk})}$$

$$A_{16}=\frac{C_{12}C_{26}-C_{16}C_{22}}{\Omega(C_{jk})},\qquad A_{26}=\frac{C_{12}C_{16}-C_{26}C_{11}}{\Omega(C_{jk})}$$

$$a_6^{11}=\frac{D_{11}C_{66}}{R_2^6},\qquad a_5^{11}=\frac{2[2D_{16}C_{66}+D_{11}C_{26}]}{R_2^6}$$

$$a_4^{11}=[2(D_{12}+2D_{66})C_{66}+8D_{16}C_{26}+D_{11}C_{22}]R_2^{-6}$$

$$a_3^{11}=4[D_{26}C_{66}+(D_{12}+2D_{66})C_{26}+D_{16}C_{22}]R_2^{-6}$$

$$a_2^{11}=[D_{22}C_{66}+8D_{26}C_{26}+2(D_{12}+2D_{66})C_{22}]R_2^{-6}$$

$$a_1^{11}=2[D_{22}C_{26}+2D_{26}C_{22}]R_2^{-6},\qquad a_0^{11}=D_{22}C_{22}R_2^{-6}$$

$$b_2^{11}=[(k_1^2C_{11}+2k_1k_2C_{12}+k_2^2C_{22})C_{66}-(k_1C_{16}+k_2C_{26})^2]R_2^{-2}$$
$$b_1^{11}=2[(k_1^2C_{11}+2k_1k_2C_{12}+k_2^2C_{22})C_{26}-$$
$$-(k_1C_{16}+k_2C_{26})(k_1C_{12}+k_2C_{22})]R_2^{-2}$$
$$b_0^{11}=k_1^2(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)R_2^{-2},\quad a_6^{22}=D_{11}C_{11}R_2^{-6},$$
$$a_5^{22}=2[2D_{26}C_{11}+D_{11}C_{16}]R_2^{-6}$$
$$a_4^{22}=[2(D_{12}+2D_{66})C_{11}+8D_{16}C_{16}+D_{11}C_{66}]R_2^{-6}$$
$$a_3^{22}=4[D_{26}C_{11}+(D_{12}+2D_{66})C_{16}+D_{16}C_{66}]R_2^{-6}$$
$$a_2^{22}=[D_{22}C_{11}+8D_{26}C_{16}+2(D_{12}+2D_{66})C_{66}]R_2^{-6}$$
$$a_1^{22}=2[D_{22}C_{16}+2D_{26}C_{66}]R_2^{-6},\quad a_0^{22}=D_{22}C_{66}R_2^{-6}$$
$$a_6^{12}=-D_{11}C_{16}R_2^{-6},\quad a_5^{12}=-[D_{11}(C_{12}+C_{66})+4C_{16}D_{16}]R_2^{-6}$$
$$a_4^{12}=-[2(D_{12}+2D_{66})C_{16}+4D_{16}(C_{12}+C_{66})+D_{11}C_{26}]R_2^{-6}$$
$$a_3^{12}=-2[2D_{26}C_{16}+(D_{12}+2D_{66})(C_{12}+C_{66})+2D_{16}C_{26}]R_2^{-6}$$
$$a_2^{12}=-[D_{22}C_{16}+4D_{26}(C_{12}+C_{66})+2(D_{12}+2D_{66})C_{26}]R_2^{-6}$$
$$a_1^{12}=-[D_{22}(C_{12}+C_{66})+4D_{26}C_{26}]R_2^{-6},\quad a_0^{12}=-D_{22}C_{26}R_2^{-6}$$
$$b_2^{12}=[k_1k_2(C_{11}C_{26}-C_{12}C_{16})+k_2^2(C_{12}C_{26}-C_{22}C_{16})]R_2^{-2}$$
$$b_1^{12}=[(k_1C_{16}+k_2C_{26})^2+(k_1C_{11}+k_2C_{12})(k_1C_{12}+k_2C_{22})-$$
$$-(k_1^2C_{11}+2k_1k_2C_{12}+k_2^2C_{22})(C_{12}+C_{66})]R_2^{-2}$$
$$b_0^{12}=[k_1^2(C_{16}C_{12}-C_{11}C_{26})+k_1k_2(C_{16}C_{22}-C_{12}C_{26})]R_2^{-2}$$
$$b_3^{13}=\Omega(C_{jk})[-k_1A_{22}+k_2A_{12}]R_2^{-3}$$
$$b_2^{13}=\Omega(C_{jk})[2k_1A_{26}-k_2A_{16}]R_2^{-3}$$
$$b_1^{13}=\Omega(C_{jk})[-k_1(A_{12}+A_{66})+k_2A_{11}]R_2^{-3};\quad b_0^{13}=\Omega(C_{jk})k_1A_{16}R_2^{-3}$$
$$b_3^{23}=\Omega(C_{jk})k_2A_{26}R_2^{-3},\quad b_2^{23}=\Omega(C_{jk})[k_1A_{22}-k_2(A_{66}+2A_{12})]R_2^{-3}$$
$$b_1^{23}=\Omega(C_{jk})[-k_1A_{26}+2k_2A_{16}]R_2^{-3}$$
$$b_0^{23}=\Omega(C_{jk})[k_1A_{12}-k_2A_{11}]R_2^{-3}$$
$$a_4^{33}=\Omega(C_{jk})A_{22}R_2^{-4},\quad a_3^{33}=-\Omega(C_{jk})2A_{26}R_2^{-4}$$
$$a_2^{33}=\Omega(C_{jk})(A_{66}+2A_{12})R_2^{-4},\quad a_1^{33}=-\Omega(C_{jk})2A_{16}R_2^{-4}$$
$$a_0^{33}=\Omega(C_{jk})A_{11}R_2^{-4},\quad b_2^{22}=k_2^2(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)R_2^{-2}$$
$$b_1^{22}=2[k_1k_2(C_{12}C_{16}-C_{11}C_{26})+k_2^2(C_{16}C_{22}-C_{12}C_{26})]R_2^{-2}$$
$$b_0^{22}=[(k_1^2C_{11}+2k_1k_2C_{12}+k_2^2C_{22})C_{66}-(k_1C_{16}+k_2C_{26})^2]R_2^{-2}$$

2. Построим T-периодическое по β фундаментальное решение уравнений теории пологих анизотропных оболочек. Имеем

$$L(G)=\delta(\alpha)\delta_T(\beta) \tag{2.1}$$

$$\delta_T(\beta)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\omega\beta}\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$

где $\delta(\alpha)$ — дельта-функция Дирака, $G(\alpha,\beta)$ — искомое фундаментальное решение.

В силу (2.1) функцию $G(\alpha,\beta)$ разыскиваем в виде

$$G(\alpha,\beta)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(\alpha)e^{ik\omega\beta} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\omega\beta}$, получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений для определения $c_k(\alpha)$

$$\sum_{j=0}^{8} a_j(ik\omega)^{8-j}\frac{d^j c_k(\alpha)}{d\alpha^j}+a_9\left[\frac{d^4c_k(\alpha)}{d\alpha^4}+2\lambda(ik\omega)^2\frac{d^2c_k(\alpha)}{d\alpha^2}+\right.$$
$$\left.+\lambda^2(ik\omega)^4c_k(\alpha)\right]=\delta(\alpha)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)\tag{2.3}$$

Применяя к (2.3) обратное преобразование Фурье, находим

$$2\pi\left\{\sum_{j=0}^{8} a_j(ik\omega)^{8-j}(i\mu)^j+\right.$$
$$\left.+a_9[(i\mu)^4+2\lambda(ik\omega)^2(i\mu)^2+\lambda^2(ik\omega)^4]\right\}F^{-1}(c_k,\mu)=1$$

Отсюда

$$F^{-1}(c_k,\mu)=\left[2\pi(k\omega)^8\Delta_k\left(\frac{\mu}{ik\omega}\right)\right]^{-1}$$

$$\Delta_k(\mu)=\sum_{j=0}^{8}a_j\mu^j+\frac{a_9}{(k\omega)^4}[\mu^4+2\lambda\mu^2+\lambda^2]=\prod_{\nu=1}^{4}(\mu-\mu_\nu^{(k)})(\mu-\bar\mu_\nu^{(k)})$$

$$\operatorname{Im}\mu_\nu^{(k)}>0\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ \nu=1,2,3,4)$$

Все $\mu_\nu^{(k)}$ считаем простыми.

Возвращаясь к оригиналам, имеем

$$c_0(\alpha)=\frac{1}{2a_9}\left\{\frac{|\alpha|^3}{3!}+\operatorname{Im}\left[\frac{e^{i\mu_1^{(0)}\alpha}}{(\mu_1^{(0)})^3}\right]\right\},\qquad \mu_1^{(0)}=\frac{\sqrt[4]{a_9}}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$c_k(\alpha)=\frac{1}{(ik\omega)^7}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{e^{ik\omega\mu_\nu^{(k)}\alpha}}{\Delta_k'(\mu_\nu^{(k)})},\qquad c_{-k}(\alpha)=c_k(-\alpha)=\overline{c_k(\alpha)}\qquad(\alpha>0)$$

$$\Delta_k'(\mu)=\frac{d\Delta_k(\mu)}{d\mu}\qquad(k=0,1,2,\ldots)$$

Аналогичным образом можно получить представление главной части $G_0(\alpha,\beta)$ фундаментального решения $G(\alpha,\beta)$. Она удовлетворяет уравнению

$$L_0(G_0)=\delta(\alpha)\delta_T(\beta)$$

Запишем

$$G_0(\alpha,\beta)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k(\alpha)e^{ik\omega\beta}\tag{2.4}$$

$$g_0(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{|\alpha|^7}{7!},\qquad g_k(\alpha)=\frac{1}{(ik\omega)^7}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{e^{ik\omega\mu_\nu\alpha}}{\Delta'(\mu_\nu)}$$

$$g_{-k}(\alpha)=g_k(-\alpha)=\overline{g_k(\alpha)}\qquad(\alpha>0,\ k=1,2,3,\ldots)$$

$$\Delta(\mu)=\sum_{j=0}^{8}a_j\mu^j=\prod_{\nu=1}^{4}(\mu-\mu_\nu)(\mu-\bar{\mu}_\nu),\qquad \operatorname{Im}\mu_\nu>0$$

$$\Delta'(\mu)=\frac{d\Delta(\mu)}{d\mu}$$

Дифференцируя (2.4) и суммируя соответствующие ряды, находим

$$\frac{\partial^7 G_0}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{7-j}}=\frac{1}{T}\left\{\frac{\partial^7 g_0(\alpha)}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{7-j}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}\operatorname{Re}\left\{\frac{(\mu_\nu)^j}{\Delta'(\mu_\nu)}\left[i\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}(\mu_\nu\alpha+\beta)-\operatorname{sign}\alpha\right]\right\}\right\}$$

Решение задачи о действии сосредоточенной силы P_j в точке $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$ выражается через фундаментальное решение (2.2) в виде

$$G_*(\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1)=P_jfG(\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1),\qquad f=\frac{R_2^6}{\Omega(C_{jk})D_{11}A_{22}}$$

Деформации, усилия и моменты определяются соотношениями

(2.5) $$u_j=B_{j1}G_*,\quad v_j=B_{j2}G_*,\quad w_j=B_{j3}G_*$$

$$\varepsilon_{1j}=\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}+\lambda w_j\right),\qquad \varepsilon_{2j}=\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial\beta}+w_j\right)$$

$$\omega_j=\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_j}{\partial\beta}\right),\qquad \varkappa_{1j}=-\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial^2 w_j}{\partial\alpha^2}$$

$$\varkappa_{2j}=-\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial^2 w_j}{\partial\beta^2},\qquad \tau_j=-\frac{2}{R_2^2}\frac{\partial^2 w_j}{\partial\alpha\,\partial\beta}$$

$$T_{1j}=C_{11}\varepsilon_{1j}+C_{12}\varepsilon_{2j}+C_{16}\omega_j,\qquad M_{1j}=D_{11}\varkappa_{1j}+D_{12}\varkappa_{2j}+D_{16}\tau_j$$

$$T_{2j}=C_{22}\varepsilon_{2j}+C_{12}\varepsilon_{1j}+C_{26}\omega_j,\qquad M_{2j}=D_{22}\varkappa_{2j}+D_{12}\varkappa_{1j}+D_{26}\tau_j$$

$$S_j=C_{66}\omega_j+C_{16}\varepsilon_{1j}+C_{26}\varepsilon_{2j},\qquad H_j=D_{66}\tau_j+D_{16}\varkappa_{1j}+D_{26}\varkappa_{2j}$$

$$N_{1j}=\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial M_{1j}}{\partial\alpha}+\frac{\partial H_j}{\partial\beta}\right),$$

$$N_{2j}=\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial H_j}{\partial\alpha}+\frac{\partial M_{2j}}{\partial\beta}\right)\qquad (j=1,2,3)$$

3. Пусть x_{1l}, x_{2l}, x_{3l} — погонные усилия, распределенные по линии l срединной поверхности оболочки и направленные соответственно вдоль осей α, β, n (n — нормаль к внешней поверхности). Распределенная нагрузка X_j ($j=1,2,3$), соответствующая усилиям x_{jl} и имеющая характер дельта-функции, может быть представлена в виде криволинейных интегралов, взятых по l

$$X_j(\alpha,\beta)=\frac{1}{R_2}\int_l x_{jl}(\alpha_l,\beta_l)\,\delta(\alpha-\alpha_l,\beta-\beta_l)\,dl$$

α_l, β_l — координаты линии l, dl — дифференциал дуги на l.

Решение, соответствующее заданной нагрузке, имеет вид

$$\Psi_j(\alpha, \beta)=R_2 f\int\limits_l p_{jl}(\alpha_l, \beta_l)G(\alpha-\alpha_l, \beta-\beta_l)\,dl$$

$$p_{jl}(\alpha, \beta)=-x_{jl}(\alpha, \beta) \quad (j=1, 2), \quad p_{3l}(\alpha, \beta)=x_{3l}(\alpha, \beta)$$

Смещения выражаются формулами

$$W_k(\alpha, \beta)=R_2 f\int\limits_l \sum_{j=0}^{3} p_{jl}(\alpha_l, \beta_l)u_{jk}(\alpha-\alpha_l, \beta-\beta_l)\,dl \tag{3.1}$$

$$u=W_1, \quad v=W_2, \quad w=W_3, \quad u_{jk}=B_{jk}G$$

Деформации, усилия и моменты определяются аналогичным образом. Асимптотические значения усилий и моментов в окрестности точки приложения сосредоточенной силы вычислим, взяв вместо G его главную часть G_0 из (2.4).

Таким же приемом воспользуемся при вычислении асимптотических значений этих величин в окрестности концов линии нагружения.

Предположим, что l — простой достаточно гладкий, разомкнутый контур с концами a и b, а погонные усилия на l либо ограничены, либо имеют степенные особенности на концах.

Используя известные асимптотические формулы для интеграла типа Коши, запишем несколько соотношений.

а) Пусть $p(t)$ ограничены на l. Тогда

$$\int\limits_l \frac{p(t)\,dl}{t_\nu-z_\nu}\approx\mp q(c_\nu)\ln(z_\nu-c_\nu) \tag{3.2}$$

$$t=\alpha+i\beta, \quad t_\nu=\mu_\nu\alpha_l+\beta_l, \quad z_\nu=\mu_\nu\alpha+\beta, \quad q(t_\nu)=p(t)\,dl/dt_\nu$$

$$q(c_\nu)=\lim_{t_\nu\to c_\nu} q(t_\nu)$$

б) Пусть $p(t)$ имеет вид

$$p(t)=\frac{p^*(t)}{(t-c)^\gamma}, \qquad 0\leqslant\operatorname{Re}\gamma<1$$

где $p^*(t)$ ограничена на l. Тогда

$$\int\limits_l \frac{p(t)\,dt}{t_\nu-z_\nu}\approx\pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{q(c_\nu)}{(z_\nu-c_\nu)^\gamma} \tag{3.3}$$

$$q(t_\nu)=p^*(t)\frac{dl}{dt_\nu}\left(\frac{t_\nu-c_\nu}{t-c}\right)^\gamma, \quad q(c_\nu)=\lim_{t_\nu\to c_\nu} q(t_\nu)$$

В формулах (3.2), (3.3) верхний знак берется при $c=a$ $(c_\nu=a_\nu)$, а нижний — при $c=b$ $(c_\nu=b_\nu)$.

Пусть $P_1\neq0$, $P_2=P_3=0$. Для главных значений $\varepsilon_{11}{}^\circ$, $\varepsilon_{21}{}^\circ$, $\omega_1{}^\circ$ имеем в силу (2.5)

$$\varepsilon_{11}{}^\circ=\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B_{11}{}^\circ G_0=\frac{1}{R_2}\sum_{j=0}^{6}a_j^{11}\frac{\partial^7 G_0}{\partial\alpha^{j+1}\partial\beta^{6-j}}$$

$$\varepsilon_{21}{}^\circ=\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\beta}B_{12}{}^\circ G_0=\frac{1}{R_2}\sum_{j=0}^{6}a_j^{12}\frac{\partial^7 G_0}{\partial\alpha^{j}\,\partial\beta^{7-j}}$$

$$\omega_1^\circ(\alpha,\beta)=\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial B_{12}^\circ}{\partial\alpha}+\frac{\partial B_{11}^\circ}{\partial\beta}\right)G_0=$$

$$=\frac{1}{R_2}\left(\sum_{j=0}^{6}a_j^{12}\frac{\partial^7}{\partial\alpha^{j+1}\partial\beta^{6-j}}+\sum_{j=0}^{6}a_j^{11}\frac{\partial^7}{\partial\alpha^j\partial\beta^{7-j}}\right)G_0$$

Получаем, например
(3.4)

$$\varepsilon_{11}^\circ=\frac{1}{TR_2}\left\{a_6^{11}\frac{\partial^7 g_0(\alpha)}{\partial\alpha^7}+\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_{11}(\mu_\nu)\left[i\,\mathrm{ctg}\frac{\omega}{2}(\mu_\nu\alpha+\beta)-\mathrm{sign}\,\alpha\right]\right\}\right\}$$

$$q^{11}(\mu)=i\left(\sum_{j=0}^{6}a_j^{11}\mu^{j+1}\right)\Big/\Delta'(\mu)$$

Учитывая (3.1), (3.4) и тот факт, что в основной полосе периодов $\mathrm{ctg}\,z$ с точность до регулярной части совпадает с ядрами Коши, запишем

$$\varepsilon_1^\circ(\alpha,\beta)\approx\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_{11}(\mu_\nu)\int_l\frac{p_{1l}(\alpha_l,\beta_l)\,dl}{t_\nu-z_\nu}\right\}\tag{3.5}$$

В случае ограниченной на l нагрузки, используя (3.5) и (3.2), находим асимптотические значения деформаций в окрестности концов линии нагружения

$$\varepsilon_1^\circ(\alpha,\beta)\approx\mp\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\{q_{11}(\mu_\nu)q(c_\nu)\ln(z_\nu-c_\nu)\}\tag{3.6}$$

$$\varepsilon_2^\circ(\alpha,\beta)\approx\mp\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\{q_{12}(\mu_\nu)q(c_\nu)\ln(z_\nu-c_\nu)\}$$

$$\omega^\circ(\alpha,\beta)\approx\mp\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\{q_{13}(\mu_\nu)q(c_\nu)\ln(z_\nu-c_\nu)\}$$

$$q_{12}(\mu)=i\left(\sum_{j=0}^{6}a_j^{12}\mu^j\right)\Big/\Delta'(\mu),\qquad q_{13}(\mu)=i\left[\sum_{j=0}^{6}(a_j^{12}\mu+a_j'')\mu^j\right]\Big/\Delta'(\mu)$$

В случае нагрузки со степенной особенностью имеем

$$\varepsilon_1^\circ(\alpha,\beta)\approx\pm\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_{11}(\mu_\nu)\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{q(c_\nu)}{(z_\nu-c_\nu)^\gamma}\right\}\tag{3.7}$$

$$\varepsilon_2^\circ(\alpha,\beta)\approx\pm\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_{12}(\mu_\nu)\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{q(c_\nu)}{(z_\nu-c_\nu)^\gamma}\right\}$$

$$\omega^\circ(\alpha,\beta)\approx\pm\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_{13}(\mu_\nu)\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{q(c_\nu)}{(z_\nu-c_\nu)^\gamma}\right\}$$

Например, если l — отрезок прямой, составляющий с осью α угол φ, то

$$q(c_\nu)=\frac{p^*(c)}{\sin\varphi+\mu_\nu\cos\varphi}\left(\frac{\sin\varphi+\mu_\nu\cos\varphi}{e^{i\varphi}}\right)^\gamma$$

Аналогичные выражения имеют место при $P_2\neq 0$, $P_1=P_3=0$.

Для нагрузки $P_3\neq 0$, $P_1=P_2=0$ выписываем асимптотические значения для поперечных сил. В случае ограниченной на l нагрузки запишем

$$N_1{}^\circ(\alpha,\beta)\approx\mp\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\{q_1(\mu_\nu)q(c_\nu)\ln(z_\nu-c_\nu)\}$$

$$N_2{}^\circ(\alpha,\beta)\approx\mp\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\{q_2(\mu_\nu)q(c_\nu)\ln(z_\nu-c_\nu)\}$$

$$q_1(\mu)=-\frac{i}{R_2{}^2}[D_{11}\mu^3+3D_{16}\mu^2+(D_{12}+2D_{66})\mu+D_{26}]\left(\sum_{j=0}^{4}a_j{}^{33}\mu^j\right)\Big/\Delta'(\mu)$$

$$q_2(\mu)=-\frac{i}{R_2{}^2}[D_{16}\mu^3+(D_{12}+2D_{66})\mu^2+3D_{26}\mu+D_{22}]\left(\sum_{j=0}^{4}a_j{}^{33}\mu^j\right)\Big/\Delta'(\mu)$$

Для нагрузки со степенной особенностью получаем

$$N_1{}^\circ(\alpha,\beta)\approx\pm\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_1(\mu_\nu)\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{q(c_\nu)}{(z_\nu-c_\nu)^\gamma}\right\}$$

$$N_2{}^\circ(\alpha,\beta)\approx\pm\frac{f}{\pi}\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{Re}\left\{q_2(\mu_\nu)\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{q(c_\nu)}{(z_\nu-c_\nu)^\gamma}\right\}$$

Пример. Для оболочки из стеклопластика АГ-4с с параметрами $E_1=2.1\cdot 10^5$ *кг/см²*, $E_2=1.6\cdot 10^5$ *кг/см²*, $G=0.42\cdot 10^5$ *кг/см²*, $\nu_2=0.07$, загруженной вдоль отрезка $a\leqslant\alpha\leqslant 0$, $\beta=0$ касательными усилиями интенсивности $p(t)=p^*(t)$, $\sqrt{\alpha}$, асимптотические значения деформаций в окрестности конца $\alpha=0$ имеют вид (h — толщина оболочки)

$$\varepsilon_1{}^\circ(\alpha,0)\approx 0.0161\frac{E_1hp^*(0)}{\Omega(C_{jk})A_{22}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\qquad \alpha>0$$

Величины $\Omega(C_{jk})$ и A_{22} определены в (1.2).

Из формул (3.6), (3.7) видно, что асимптотическое поведение деформаций в окрестности концов линии загружения имеет тот же характер, что и в случае изотропной оболочки [3]. Для случая цилиндрической оболочки аналогичные вопросы рассмотрены в [5, 6].

Поступила 18 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернышев Г. Н.* О контактных задачах в теории оболочек. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. (Днепропетровск, 1969). М., «Наука», 1970.

2. *Даревский В. М.* Оболочки под действием локальных нагрузок. Справочник «Прочность – устойчивость – колебания», т. 2. М., «Машиностроение», 1968.
3. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* О расчете цилиндрических оболочек, загруженных по линиям. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
5. *Толкачев В. М.* Действие острых штампов на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
6. *Христенко А. С.* О действии на ортотропную цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно распределенной вдоль отрезка линии кривизны. Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 6.