Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

# НАПРЯЖЕНИЯ И СМЕЩЕНИЯ В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ОДИНАКОВЫХ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

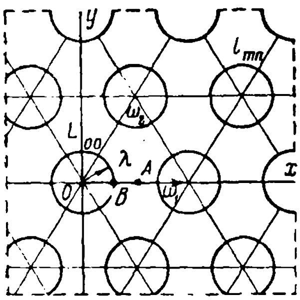
В. Т. Койтер [1] свел первую основную задачу плоской теории упругости для произвольной двоякопериодической решетки к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

В работе [2] был намечен путь решения двоякопериодической плоской задачи теории упругости для решетки, образованной внешностью конгруентных круглых отверстий.

Ниже приводится обоснование и дальнейшее развитие указанного подхода, а также поставлена и решена задача приведения двоякопериодической решетки к эквивалентной сплошной плоскости.

**1.** Рассмотрим двоякопериодическую решетку. Пусть

$$\omega_1 = 2, \qquad \omega_2 = 2le^{i\alpha} \qquad (l > 0, \quad \operatorname{Im} \omega_2 > 0)$$




Фиг. 1

основные периоды, $D$ — область, занятая телом и $\lambda$ — радиус отверстия (фиг. 1). Пусть далее $L_{mn}$ — контур отверстия с центром в точке $P = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \ \pm 1, \ \pm, \ldots)$, $L = UL_{mn}$ — граница области $D$ и $D°$ — область $D$ с присоединенной границей.

Положим для простоты, что решетка симметрична относительно осей $x$ и $y$, а система сил на контурах отверстий одинакова, самоуравновешена и обладает той же симметрией, что и решетка. В случае первой основной задачи система сил на контурах отверстий задана. В случае второй основной задачи условием разрешимости ее в классе задач с двоякопериодическим распределением напряжений будет квазипериодичность заданных на контурах $L_{mn}$ смещений. Для симметрии задачи необходимо, чтобы смещения на контуре $L_{00}$ были симметричны относительно осей $x$ и $y$.

Согласно [3], указанные задачи можно свести к разысканию двух регулярных в $D$ функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из системы граничных условий

$$\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - \{\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)\} e^{2i\theta} = f_1 + if_2 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ -\varkappa \end{cases} \qquad f_1 + if_2 = \begin{cases} N - iT & \text{для 1-й основной задачи} \\ -2Ge^{i\theta} d(v + iu)/ds & \text{для 2-й основной задачи} \end{cases}$$

$$\tau \in L_{mn} \ (m,n = 0, \pm 1, \pm \ , \ldots), \qquad \varkappa = (3 - \mu) / (1 + \mu)$$

Здесь $N$ и $T$ — нормальная и касательная составляющие усилий, действующих на контуре отверстия, $u$ и $v$ — смещения вдоль осей $x$ и $y$ соответственно, $G$ — модуль сдвига, $\mu$ — коэффициент Пуассона, $\theta$ — угол между нормалью к контуру отверстия и осью $x$, $s$ — дуговая координата вдоль контура $L_{mn}$.

Граничные условия (1.1) на системе контуров $L_{mn}$ можно свести к одному функциональному соотношению на контуре произвольного отверстия, если подчинить функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ условиям, вытекающим из периодичности задачи [2]

$$\Phi(z+\omega_1)=\Phi(z), \qquad \Phi(z+\omega_2)=\Phi(z) \tag{1.2}$$

$$\Psi(z+\omega_1)=\Psi(z)-\overline{\omega}_1\Phi'(z), \qquad \Psi(z+\omega_2)=\Psi(z)-\overline{\omega}_2\Phi'(z)$$

Условия симметрии задачи приводят к соотношениям

$$\Phi(\overline{z})=\overline{\Phi(z)}, \quad \Phi(-z)=\Phi(z); \quad \Psi(\overline{z})=\overline{\Psi(z)}, \quad \Psi(-z)=\Psi(z) \tag{1.3}$$

2. Рассмотрим в области $D$ систему функций, образованную всевозможными производными от функций

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{(z-P)^2}-\frac{1}{P^2}\right\}, \quad Q(z)=\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{\overline{P}}{(z-P)^2}-2z\frac{\overline{P}}{P^3}-\frac{\overline{P}}{P^2}\right\} \tag{2.1}$$

$$z=x+iy, \qquad P=m\omega_1+n\omega_2 \qquad (m,n=0\pm1,\pm,\ldots)$$

Здесь $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $Q(z)$ — специальная мероморфная функция.

Нашей задачей является построение регулярных в $D$ функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3). С этой целью установим необходимые свойства функций (2.1) и их производных.

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} Q(z+\omega_1)&=Q(z)+\overline{\omega}_1\wp(z)+\gamma_1\\ Q(z+\omega_2)&=Q(z)+\overline{\omega}_2\wp(z)+\gamma_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Действительно, подставив в равенства (2.2) функции (2.1) и взяв затем производную от (2.2), находим, что функции

$$\begin{aligned} G_1(z)&=Q'(z+\omega_1)-\overline{\omega}_1\wp'(z)-Q'(z)\\ G_2(z)&=Q'(z+\omega_2)-\overline{\omega}_2\wp'(z)-Q'(z) \end{aligned} \tag{2.3}$$

регулярны в полной $z$-плоскости. Имеем поэтому

$$G_1(z)\equiv\text{const}, \qquad G_2(z)\equiv\text{const} \tag{2.4}$$

Положим в первом из тождеств (2.4) $z=-{}^1/_2\omega_1$, а во втором из них $z=-{}^1/_2\omega_2$, учитывая четность функции $Q'(z)$ и равенства [4]

$$\wp'({}^1/_2\omega_1)=0, \qquad \wp'({}^1/_2\omega_2)=0 \tag{2.5}$$

получим

$$G_1(z)\equiv0, \qquad G_2(z)\equiv0 \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6), приходим к равенствам (2.2).

Рассмотрим интеграл от функции $Q(z)$ по контуру параллелограмма с вершинами $0.5(\omega_1+\omega_2)$, $0.5(\omega_2-\omega_1)$, $-0.5(\omega_1+\omega_2)$ и $0.5(\omega_1-\omega_2)$.

Учитывая регулярность $Q(z)$ в указанном параллелограмме и соотношения (2.2), находим

$$\gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2 = \delta_1\overline{\omega}_2 - \delta_2\overline{\omega}_1, \qquad \delta_1 = 2\zeta\,(^1/_2\omega_1), \qquad \delta_2 = 2\zeta\,(^1/_2\omega_2) \tag{2.7}$$

Здесь $\zeta\,(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса. Таким образом, величины $\gamma_1$ и $\gamma_2$ могут быть отличны от нуля.

Дифференцируя (2.2) четным образом, полагая в полученных равенствах $z = -{}^1/_2\omega_1$ и $z = -{}^1/_2\omega_2$ и учитывая нечетность функций $Q^{(2k)}\,(z)$ и четность функций $\wp^{(2k)}\,(z)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} 2Q^{(2k)}\,(^1/_2\,\omega_1) &= \overline{\omega}_1\wp^{(2k)}\,(^1/_2\,\omega_1), \qquad \gamma_1 = 2Q\,(^1/_2\,\omega_1) - \overline{\omega}_1\wp\,(^1/_2\,\omega_1) \\ 2Q^{(2k)}\,(^1/_2\,\omega_2) &= \overline{\omega}_2\,\wp^{(2k)}\,(^1/_2\,\omega_2), \qquad \gamma_2 = 2Q\,(^1/_2\,\omega_2) - \overline{\omega}_2\wp\,(^1/_2\,\omega_2) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Отметим, что для правильной треугольной $(\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 2e^{i\pi/3})$ и квадратной $(\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 2i)$ решеток имеет место равенство

$$\delta_1\overline{\omega}_2 - \delta_2\overline{\omega}_1 = 0 \tag{2.9}$$

В совокупности с известным соотношением Лежандра [4]

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i \tag{2.10}$$

равенство (2.9) дает возможность определить в замкнутом виде константы решетки $\delta_1$, $\delta_2$, $\gamma_1$ и $\gamma_2$.

Для доказательства равенства (2.9) рассмотрим правильную треугольную решетку и совершим преобразование функций $\zeta\,(z)$, $\wp\,(z)$ и $Q\,(z)$ от аргумента $z$ к $ze^{i\pi/3}$. В силу конгруэнтности систем $P = 2m + 2ne^{i\pi/3}$ и $Pe^{-i\pi/3} = 2n + 2me^{-i\pi/3}$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm \ldots)$ имеем соотношения

$$\zeta\,(ze^{i\pi/3}) = e^{-i\pi/3}\zeta\,(z), \qquad \wp\,(ze^{i\pi/3}) = e^{-2i\pi/3}\wp\,(z), \qquad Q\,(ze^{i\pi/3}) = e^{-3i\pi/3}Q\,(z) \tag{2.11}$$

Полагая в первом равенстве (2.11) $z = {}^1/_2\omega_1$ и учитывая равенства $\delta_1 = 2\zeta\,(^1/_2\omega_1)$ и $\delta_2 = 2\zeta\,(^1/_2\omega_2)$, приходим к соотношению (2.9).

Аналогичные рассуждения справедливы и для квадратной решетки.

Из (2.9), (2.10), (2.11) и (2.7) находим величины констант для правильных решеток.

а. Правильная треугольная решетка; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\pi, \qquad \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\pi e^{-i\pi/3}, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 0 \tag{2.12}$$

б. Квадратная решетка; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$

$$\delta_1 = {}^1/_2\pi, \qquad \delta_2 = -{}^1/_2 i\pi, \qquad \gamma_2 = i\gamma_1, \qquad \gamma_1 \neq 0 \tag{2.13}$$

3. Будем разыскивать функции $\Phi\,(z)$ и $\Psi\,(z)$ в виде

$$\Phi\,(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k)}\,(z)}{(2k+1)\,!}$$

$$\Psi\,(z) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k)}\,(z)}{(2k+1)\,!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k+1)}\,(z)}{(2k+1)\,!} \tag{3.1}$$

$$\operatorname{Im}\alpha_{2k} = \operatorname{Im}\beta_{2k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

Легко показать, учитывая тождества (2.2), что соотношения (1.2) при этом выполняются.

Далее, из симметрии решетки следует, что периодические системы $P = m\omega_1 + n\omega_2$ и $P^* = m^*\bar{\omega}_1 + n^*\bar{\omega}_2$ $(m, n, m^*, n^* = 0, \pm 1, \pm, \ldots)$ конгруентны. Следовательно, имеют место равенства

$$\wp^{(2k)}(z, \bar{P}) = \wp^{(2k)}(z, P), \qquad Q^{(2k+1)}(z, \bar{P}) = Q^{(2k+1)}(z, P) \tag{3.2}$$

Отсюда

$$\wp^{(2k)}(\bar{z}) = \overline{\wp^{(2k)}(z)}, \qquad Q^{(2k+1)}(\bar{z}) = \overline{Q^{(2k+1)}(z)} \tag{3.3}$$

Из равенств (3.3) непосредственно следует, что функции (3.1) удовлетворяют условиям (1.3). Таким образом, условия периодичности и симметрии выполнены. Отметим еще, что представления (3.1) можно получить непосредственно из соотношений (1.2) и (1.3).

Наложим теперь на представления (3.1) условие равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруентные точки в $D$. Это условие, как легко видеть, эквивалентно равенствам

$$g(z + \omega_1) - g(z) = 0, \qquad g(z + \omega_2) - g(z) = 0 \tag{3.4}$$

где

$$g(z) = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}, \qquad \varphi(z) = \int \Phi(z)\, dz, \qquad \psi(z) = \int \Psi(z)\, dz$$

Подставив в (3.4) представления (3.1) и учитывая соотношения (2.2), (2.7) и (2.9), получим

$$\alpha_0 = K_0\alpha_2\lambda^2 + K_1\beta_2\lambda^2, \qquad \beta_0 = K_2\alpha_2\lambda^2 + K_3\beta_2\lambda^2 \tag{3.5}$$

$$K_0 = \frac{\delta_1}{2\omega_1} - K_1, \quad K_2 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\omega_1} + 2K_1, \quad K_3 = 2K_0, \quad K_1 = \frac{\pi i}{\bar{\omega}_1\omega_2 - \omega_1\bar{\omega}_2}$$

Разложим функции (3.1) в ряды Лорана в окрестности нуля

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} z^{2j} \\ \Psi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} z^{2j} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)\,\alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} s_{j,k} z^{2j} \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$r_{j,k} = \frac{(2j + 2k + 1)!\, g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+1)!\, 2^{2j+2k+2}}, \qquad s_{j,k} = \frac{(2j + 2k + 2)!\, \rho_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+2)!\, 2^{2j+2k+2}}$$

$$r_{0,0} = 0, \qquad s_{0,0} = 0$$

$$g_i = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{T^{2i}}, \qquad \rho_i = \sum_{m,n}{}' \frac{\bar{T}}{T^{2i+1}}, \qquad T = \frac{P}{2} = m + nle^{i\alpha} \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

Предположим, что правая часть функционального соотношения (1.1) на контуре $L_{00}$ допускает разложение в ряд Фурье. В силу симметрии задачи этот ряд имеет вид

$$f_1 + if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \qquad \operatorname{Im} A_{2k} = 0 \tag{3.7}$$

Подставив ряды (3.6) и (3.7) в соотношение (1.1) на $L_\infty$, получим после некоторых преобразований бесконечную алгебраическую систему уравнений относительно коэффициентов $\alpha_{2j+2}$

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\alpha_{2k+2} + b_j \qquad (j = 0, 1, \ldots) \tag{3.8}$$

где

$$a_{j,k} = \frac{2j+1}{\varepsilon} \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3g_2}{8}\lambda^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}} + K_2 + \frac{(1+\varepsilon) K_0 K_3 \lambda^2}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2}$$

$$\gamma_{0,k} = -\frac{(2k+2)\rho_{k+1}}{2^{2k+2}} + \frac{(2k+4)!\, g_{k+2}\lambda^2}{2!\,(2k+2)!\,2^{2k+4}} + \frac{(1+\varepsilon) K_3 \lambda^2}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2} \frac{g_{k+1}}{2^{2k+2}} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k+2i+1)!\, g_{i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2k+1)!\,(2i)!\,2^{2k+4i+4}} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\gamma_{j,0} = -\frac{(2j+2)\rho_{j+1}}{2^{2j+2}} + \frac{(2j+4)!\, g_{j+2}\lambda^2}{2!\,(2j+2)!\,2^{2j+4}} + \frac{(1+\varepsilon) K_0 \lambda^2}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2} \frac{g_{j+1}}{2^{2j+2}} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!\, g_{i+1} g_{j+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!\,(2i)!\,2^{2j+4i+4}} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

$$\gamma_{i,k} = \gamma_{k,j} = -\frac{(2j+2k+2)!\,\rho_{j+k+1}}{(2j+1)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!\, g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!\,(2k+2)!\,2^{2j+2k+4}} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!\,(2k+2i+1)!\, g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!\,(2k+1)!\,(2i+1)!\,(2i)!\,2^{2j+2k+4i+4}} +$$

$$+ \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left\{1 + \frac{(1+\varepsilon)^2 K_1 \lambda^2}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2}\right\} \qquad (j,\ k = 1, 2, \ldots)$$

$$\varepsilon b_0 = A_2 - \frac{A_0 K_3 \lambda^2}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2}$$

$$\varepsilon b_j = A_{2j+2} - \frac{(2j+1) A_0 \lambda^{2j+2}}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2} \frac{g_{j+1}}{2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!\, g_{j+k+2} \lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!\,(2k+3)!\,2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}$$

Для постоянных $\beta_{2j+2}$ получим равенства (3.9)

$$\beta_2 = \frac{1}{1-(1+\varepsilon) K_1 \lambda^2} \left\{-A_0 + (1+\varepsilon) K_0 \lambda^2 \alpha_2 + (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2}\right\}$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3)\,\alpha_{2j+2} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!\, g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A_{-2j-2} \quad (j=0,1,\ldots)$$

Построение решения закончено.

4. Покажем, что если отверстия в решетке не касаются и не пересекаются, то при некоторых предположениях относительно нагрузки представления (3.1) с учетом уравнений (3.8) и (3.9) дают искомое решение.

Имеют место легко выводимые оценки

$$|g_k| < \frac{M}{\lambda_1^{2k}}, \quad |\rho_k| < \frac{M}{\lambda_1^{2k}}, \quad M > 0 \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{4.1}$$

где $M$ — некоторое число, $\lambda_1$ — половина расстояния между двумя ближайшими конгруентными точками.

Пусть коэффициенты $A_{2k}$ в разложении (3.7) удовлетворяют неравенствам

$$|A_j| < \frac{A}{j^{h+1}}, \quad A > 0, \quad h > 0 \tag{4.2}$$

При условии (4.2) система (3.8) имеет единственное ограниченное решение, причем $\lim \alpha_{2j+2} = 0$ при $j \to \infty$.

Действительно, учитывая (4.1), легко получить оценки [1] для коэффициентов и свободных членов системы (3.8)

$$|a_{j,k}| \leqslant M\,(2j+1)\,\delta^{2j+2k+2}, \quad |b_j| \leqslant M\left\{\delta^{2j} + \left(\frac{1}{2j+2}\right)^{h+1}\right\}, \quad 0 \leqslant \delta = \frac{\lambda}{\lambda_1} < 1 \tag{4.3}$$

В силу первой из оценок (4.3) двойная сумма $\Sigma\,|a_{j,k}|$ сходится, что наряду со второй из оценок (4.3) дает достаточное условие для существования единственного ограниченного решения системы (3.8).

Используя оценки (4.3), получим из (3.8)

$$|\alpha_{2j+2}| \leqslant M\left\{(2j+1)\,\delta^{2j} + \left(\frac{1}{2j+2}\right)^{h+1}\right\}, \quad 0 \leqslant \delta < 1 \quad (j = 0, 1 \ldots) \tag{4.4}$$

Утверждение доказано.

Для величин $\beta_{2j+2}$ имеют место оценки

$$|\beta_{2j+2}| \leqslant M\left\{(4j^2 - 1)\,\delta^{2j-2} + \left(\frac{1}{2j+2}\right)^{h}\right\}, \quad 0 \leqslant \delta < 1 \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{4.5}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(z) = \alpha_0 z - \alpha_2\lambda^2\zeta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!}$$

$$\psi(z) = \beta_0 z - \beta_2\lambda^2\zeta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} \tag{4.6}$$

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)\,dz, \qquad \psi(z) = \int \Psi(z)\,dz$$

Ряды (4.6) при $0 \leqslant \delta \leqslant r < 1$ сходятся в замкнутой области $D^\circ$ абсолютно и равномерно.

---

[1] При условии $0 \leqslant \lambda < \lambda_1$ выражение $1 - (1+\varepsilon)K_1\lambda^2$ отлично от нуля.

Действительно, легко показать, что если $z$ находится в части $D^\circ$, погруженной внутрь основного параллелограмма периодов, то справедливы неравенства

$$\sum_{m,n}\left|\frac{1}{(z-P)^{k+2}}\right| < \frac{M}{\lambda^{k+2}} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4.7}$$

Отсюда с учетом (2.1) имеем оценки в $D^\circ$

$$\left|\frac{\wp^{(k)}(z)}{(k+1)!}\right| < \frac{M}{\lambda^{k+2}}, \qquad \left|\frac{Q^{(k)}(z)}{(k+1)!}\right| < \frac{M}{\lambda^{k+2}} \qquad (k=0,1,\ldots) \tag{4.8}$$

С учетом (4.4), (4.5) и (4.8) получим

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!}\right| < A\sum_{k=1}^{\infty}\left(\delta^{2k}+\frac{1}{k^{h+2}}\right)\\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\wp^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!}\right| < A\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\delta^{2k-2}+\frac{1}{k^{h+1}}\right)\\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}\right| < A\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\delta^{2k}+\frac{1}{k^{h+1}}\right)\end{gathered} \tag{4.9}$$

Утверждение доказано. Регулярность функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в $D$ и непрерывность в $D^\circ$ вытекает из соотношений

$$\begin{aligned}\varphi(z+\omega_1)&=\varphi(z)+C_1, \qquad \psi(z+\omega_1)=\psi(z)-\bar{\omega}_1\Phi(z)+a_1\\ \varphi(z+\omega_2)&=\varphi(z)+C_2, \qquad \psi(z+\omega_2)=\psi(z)-\bar{\omega}_2\Phi(z)+a_2\end{aligned} \tag{4.10}$$

которым удовлетворяют ряды (4.6).

Сформулированные в п. 1 основные задачи для двоякопериодической решетки можно было бы поставить в виде краевых задач для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. При этом систему (3.8) и формулы (3.9) можно было бы получить, отправляясь от представлений (4.6). Все операции, проделанные над (4.6) при получении (3.8) и (3.9), законны в силу абсолютной сходимости (4.6) в замкнутой области $D^\circ$.

Таким образом, если постоянные $\alpha_{2k+2}$ удовлетворяют системе (3.8), а постоянные $\beta_{2k+2}$ найдены из (3.9), то при $0 \leqslant \lambda < \lambda_1$ ряды (4.6) определяют регулярные в $D$ и непрерывные в $D^\circ$ функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, дающие решение поставленной задачи.

5. Рассмотрим задачу приведения двоякопериодической решетки к эквивалентной сплошной плоскости.

Пусть в решетке действуют средние напряжения $\sigma_x^\circ = \sigma_1$, $\sigma_y^\circ = \sigma_2$ и $\tau_{xy}^\circ = \tau_{12} = 0$. Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ имеют при этом вид

$$\Phi_s(z) = {}^1\!/_4(\sigma_1+\sigma_2)+\Phi(z), \qquad \Psi_s(z) = {}^1\!/_2(\sigma_2-\sigma_1)+\Psi(z) \tag{5.1}$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ определены рядами (3.1).

Легко видеть, что смещения в классе задач, определяемом функциями (5.1),— квазипериодические функции.

Действительно, смещения имеют вид [3]

$$\begin{gathered}2G(u+iv) = h_s(z) = \varkappa\varphi_s(z) - z\overline{\Phi_s(z)} - \overline{\psi_s(z)}\\ \varphi_s(z) = \int\Phi_s(z)\,dz, \qquad \psi_s(z) = \int\Psi_s(z)\,dz\end{gathered} \tag{5.2}$$

Положим

$$\Omega_1 = h_s(z+\omega_1) - h_s(z), \qquad \Omega_2 = h_s(z+\omega_2) - h_s(z) \tag{5.3}$$

Подставив в (5.3) ряды (4.6), найдем с учетом (5.1), (2.2) и (2.8)

$$\Omega_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}\omega_1 - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\bar{\omega}_1 + \alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_1 - \varkappa\delta_1) + \beta_2\lambda^2\bar{\delta}_1 + \\ + (\varkappa - 1)\alpha_0\omega_1 - \beta_0\bar{\omega}_1 \tag{5.4}$$

$$\Omega_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}\omega_2 - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\bar{\omega}_2 + \alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_2 - \varkappa\delta_2) + \beta_2\lambda^2\bar{\delta}_2 + (\varkappa-1)\alpha_0\omega_2 - \beta_0\bar{\omega}_2$$

Рассмотрим теперь ортотропную сплошную плоскость в условиях равномерного растяжения $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\tau_{xy} = 0$.

Закон Гука для ортотропной среды имеет вид [5]

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1^*} - \frac{\mu_2^*\sigma_y}{E_2^*}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2^*} - \frac{\mu_1^*\sigma_x}{E_1^*}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G^*}, \quad E_1^*\mu_2^* = E_2^*\mu_1^* \tag{5.5}$$

Здесь $E_1^*$, $E_2^*$ — модули упругости в направлении главных осей $x$ и $y$, а $\mu_1^*$, $\mu_2^*$ — соответствующие коэффициенты Пуассона, $G^*$ — модуль упругости второго рода.

Из (5.5) находим смещения точек сплошной плоскости

$$\frac{h^*(z)}{2G} = u + iv = \frac{z}{2}\left(\sigma_1\frac{1-\mu_1^*}{E_1^*} + \sigma_2\frac{1-\mu_2^*}{E_2^*}\right) + \frac{\bar{z}}{2}\left(\sigma_1\frac{1+\mu_1^*}{E_1^*} - \sigma_2\frac{1+\mu_2^*}{E_2^*}\right) \tag{5.6}$$

Отсюда имеем

$$\Omega_1^* = h^*(z+\omega_1) - h^*(z) = G\omega_1\left(\sigma_1\frac{1-\mu_1^*}{E^*} + \sigma_2\frac{1-\mu_2^*}{E_2^*}\right) + \\ + G\bar{\omega}_1\left(\sigma_1\frac{1+\mu_1^*}{E_1^*} - \sigma_2\frac{1+\mu_2^*}{E_2^*}\right)$$

$$\Omega_2^* = h^*(z+\omega_2) - h^*(z) = G\omega_2\left(\sigma_1\frac{1-\mu_1^*}{E_1^*} + \sigma_2\frac{1-\mu_2^*}{E_2^*}\right) + \\ + G\bar{\omega}_2\left(\sigma_1\frac{1+\mu_1^*}{E_1^*} - \sigma_2\frac{1+\mu_2^*}{E_2^*}\right) \tag{5.7}$$

Равенства (5.7) устанавливают квазипериодичность смещений (5.6).

Введем теперь понятие эквивалентности сплошной плоскости и двоякопериодической решетки. Вообще под эквивалентной сплошной пластиной понимают пластину, жесткость которой равна жесткости пластины с отверстиями. Это означает, что при одной и той же нагрузке средние перемещения таких пластин одинаковы. Для рассматриваемого класса задач смещения — квазипериодические функции.

**Назовем** двоякопериодическую решетку и сплошную плоскость эквивалентными, если при одинаковом нагружении имеют место равенства

$$\Omega_1 = \Omega_1^*, \qquad \Omega_2 = \Omega_2^* \tag{5.8}$$

где $\Omega_1$ и $\Omega_2$ определены (5.4), а $\Omega_1^*$ и $\Omega_2^*$ — соотношениями (5.7).

**Равенства** (5.8) отражают то обстоятельство, что смещения произвольной точки $z$ относительно конгруентной ей точки $z + m\omega_1 + n\omega_2 \times \times (m, n = 0, \pm 1, \pm, \ldots)$ в сплошной плоскости и в двоякопериодической решетки равны.

Подставив в (5.8) равенства (5.4) и (5.7), получим

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\frac{1-\mu}{E}\omega_1-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\frac{1+\mu}{E}\bar{\omega}_1+\frac{1+\mu}{E}\{\alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_1-\varkappa\delta_1)+\beta_2\lambda^2\bar{\delta}_1+$$
$$+(\varkappa-1)\alpha_0\omega_1-\beta_0\bar{\omega}_1\}=\frac{\omega_1}{2}\left(\sigma_1\frac{1-\mu_1^*}{E_1^*}+\sigma_2\frac{1-\mu_2^*}{E_2^*}\right)+$$
$$+\frac{\bar{\omega}_1}{2}\left(\sigma_1\frac{1+\mu_1^*}{E_1^*}-\sigma_2\frac{1+\mu_2^*}{E_2^*}\right)$$
$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\frac{1-\mu}{E}\omega_2-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\frac{1+\mu}{E}\bar{\omega}_2+\frac{1+\mu}{E}\{\alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_2-\varkappa\delta_2)+\beta_2\lambda^2\bar{\delta}_2+$$
$$+(\varkappa-1)\alpha_0\omega_2-\beta_0\bar{\omega}_2\}=\frac{\omega_2}{2}\left(\sigma_1\frac{1-\mu_1^*}{E_1^*}+\sigma_2\frac{1-\mu_2^*}{E_2^*}\right)+$$
$$+\frac{\bar{\omega}_2}{2}\left(\sigma_1\frac{1+\mu_1^*}{E_1^*}-\sigma_2\frac{1+\mu_2^*}{E_2^*}\right) \tag{5.9}$$

Соотношения (5.9) дают полную систему уравнений для определения трех независимых приведенных упругих параметров $E_1^*$, $E_2^*$ и $\mu_1^*$. Для определения четвертого параметра $G^*$ можно составить аналогичные соотношения при средних напряжениях $\sigma_1=\sigma_2=0$, $\tau_{12}=\tau$.

Составим их для случая квадратной решетки.

Положим сперва в (5.9) $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$. Тогда получим из первого соотношения (5.9)

$$\frac{E_1^*/(1-\mu_1^*)}{E/(1-\mu)}=\left\{1+\frac{1}{1-\mu}\,[4K_1\beta_2\lambda^2-(\delta_1+4K_1)\,\alpha_2\lambda^2]\right\}^{-1} \tag{5.10}$$

Здесь $\alpha_2$ и $\beta_2$ должны быть взяты из решения соответствующей двоякопериодической задачи при средних напряжениях $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, $\tau_{12}=0$.

Умножая, далее, первое соотношение (5.9) на $\omega_2$, а второе соотношение — на $\omega_1$ и вычитая из первого соотношения второе, находим с учетом (2.7) и (2.10)

$$\frac{E}{E_2^*}-\frac{E}{E_1^*}=\alpha_2\lambda^2\left\{\frac{16\pi i}{\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_1\bar{\omega}_2}+2\,(1+\mu)\frac{\bar{\delta}_1\omega_2-\bar{\delta}_2\omega_1}{\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_1\bar{\omega}_2}\right\} \tag{5.11}$$

В формуле (5.11) величина $\alpha_2$ та же, что и в формуле (5.10).

Пусть теперь средние напряжения в решетке $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma$, $\tau_{12}=0$. Находим из первого соотношения (5.9)

$$\frac{E_1^*/(1+\mu_1^*)}{E/(1+\mu)}=\left[1+4K_1\beta_2\lambda^2-\frac{\lambda^2\alpha_2}{1+\mu}\,(\delta_1+4K_1)\right]^{-1} \tag{5.12}$$

Здесь величины $\alpha_2$ и $\beta_2$ должны быть определены из решения двоякопериодической задачи со средними напряжениями $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma$, $\tau_{12}=0$.

Комбинируя второе и первое соотношения (5.9), получим формулу, эквивалентную (5.11).

Рассмотрим наиболее интересный для практики случай, когда решетка правильная. В этом случае, при решении двоякопериодической задачи со средними напряжениями $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, $\tau_{12}=0$ величина $\alpha_2=0$, величина $\beta_2$ отлична от нуля.

Следовательно, из равенства (5.11) будет

$$E_1^* = E_2^* = E^* \tag{5.13}$$

Далее, из равенств (3.5) находим

$$K_1 = \frac{\pi}{8\sin\alpha} = \frac{\delta_1}{4} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.14}$$

Подставив значение $K_1$ из (5.14) в соотношения (5.10) и (5.12) и учтя тот факт, что при решении задачи со средними напряжениями $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$, $\tau_{12} = 0$ величина $\beta_2 = 0$, а величина $\alpha_2 \neq 0$, получим:

а. Решетка правильная треугольная; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$

$$\frac{E^* \mid (1-\mu^*)}{E \mid (1-\mu)} = \left[1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\beta_2\lambda^2}{1-\mu}\right]^{-1}, \qquad \frac{E^* \mid (1+\mu^*)}{E \mid (1+\mu)} = \left[1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\alpha_2\lambda^2}{1+\mu}\right]^{-1} \tag{5.15}$$

б. Решетка квадратная; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$

$$\frac{E^* \mid (1-\mu^*)}{E \mid (1-\mu)} = \left[1 + \frac{\pi}{2}\frac{\beta_2\lambda^2}{1-\mu}\right]^{-1}, \qquad \frac{E^* \mid (1+\mu^*)}{E \mid (1+\mu)} = \left[1 - \pi\frac{\alpha_2\lambda^2}{1+\mu}\right]^{-1} \tag{5.16}$$

Так как правильная треугольная решетка изотропна в смысле приведенных упругих параметров, то формулы (5.15) полностью определяют упругие характеристики эквивалентной сплошной плоскости.

Для квадратной решетки необходимо определить величину $G^*$. Рассмотрим для этого двоякопериодическую решетку со средними напряжениями $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = \tau$.

Произведя поворот системы координат на угол 45° против стрелки часов, приведем задачу к симметричной со средними напряжениями в новой системе координат $x'oy'$: $\sigma_{x'}{}^{\circ} = -\sigma_{y'}{}^{\circ} = \tau$, $\tau_{x'y'} = 0$.

Поступая так же, как и при выводе соотношений (5.9), получим

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1' + \alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_1' - \varkappa\delta_1') - \alpha_2\lambda^2(\delta_1 + \bar{\gamma}_1') &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\bar{\omega}_1'}{2G^*} \\ \bar{\omega}_2' + \alpha_2\lambda^2(\bar{\gamma}_2' - \varkappa\delta_2') - \alpha_2\lambda^2(\delta_2 + \bar{\gamma}_2') &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\bar{\omega}_2'}{2G^*} \end{aligned} \tag{5.17}$$

где величины со штрихами относятся к основным периодам $\omega_1' = 2e^{-i\pi/4}$ и $\omega_2' = 2e^{i\pi/4}$ решетки в системе координат $x'oy'$.

При помощи легко выводимых равенств

$$\delta_1' = \delta_1 e^{i\pi/4}, \qquad \delta_2' = \delta_2 e^{i\pi/4}, \qquad \gamma_1' = \gamma_1 e^{3i\pi/4}, \qquad \gamma_2' = \gamma_2 e^{3i\pi/4} \tag{5.18}$$

находим из (5.17)

$$\frac{G^*}{G} = \left[1 - \pi\frac{\alpha_2\lambda^2}{1+\mu}\right]^{-1} \tag{5.19}$$

Условием совместности равенств (5.17) будет соотношение (2.9), которое для правильных решеток выполняется.

Приводим результаты вычисления напряжений $\sigma_\theta(A)$ и $\sigma_\theta(B)$ в характерных точках $A$ и $B$. Для проверки выполнения граничных условий приводим также значения напряжения $\sigma_r(B)$ в точке $B$.

1. Решетка правильная треугольная; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$; кромки отверстий свободны от сил:

а. Средние напряжения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_\theta (A) =$ | 1.10 | 1.45 | 2.27 | 4.70 | 9.66 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 2.07 | 2.35 | 3.09 | 5.70 | 10.70 |
| $\sigma_r (B) =$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0087 |

б. Средние напряжения $\sigma_2 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_\theta (A) =$ | 1.03 | 1.23 | 2.00 | 4.72 | 9.20 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 3.09 | 3.31 | 3.62 | 5.55 | 10.70 |
| $\sigma_r (B) =$ | 0.0000 | —0.0000 | 0.0018 | — 0.008 | 0.060 |

2. Решетка правильная треугольная, в отверстия впаяны жесткие шайбы:

а. Средние напряжения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r (A) =$ | 1.01 | 1.04 | 1.10 | 1.20 | 1.47 |
| $\sigma_r (B) =$ | 1.51 | 1.43 | 1.32 | 1.27 | 1.55 |
| $\sigma_\theta (A) =$ | 0.95 | 0.81 | 0.61 | 0.38 | 0.26 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 0.45 | 0.43 | 0.40 | 0.38 | 0.26 |

б. Средние напряжения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $r (A) =$ | 1.06 | 1.23 | 1.43 | 1.64 | 1.90 |
| $\sigma_r (B) =$ | 1.49 | 1.44 | 1.44 | 1.59 | 1.90 |
| $\sigma_\theta (A) =$ | —0.03 | — 0.09 | —0.08 | 0.12 | 0.32 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 0.44 | 0.43 | 0.43 | 0.46 | 0.46 |

3. Решетка квадратная; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$; кромки отверстий свободны от сил

а. Средние напряжения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_\theta (A) =$ | 1.10 | 1.46 | 2.25 | 4.65 | 9.58 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 2.07 | 2.36 | 3.19 | 5.75 | 10.63 |
| $\sigma_r (B) =$ | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | —0.0050 | —0.0289 |

б. Средние напряжения $\sigma_2 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_\theta (A) =$ | 1.15 | 1.34 | 2.10 | 4.63 | 9.51 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 3.00 | 3.11 | 3.61 | 5.78 | 10.60 |
| $\sigma_r (B) =$ | 0.0000 | —0.0002 | —0.0009 | —0.0017 | —0.0060 |

4. Решетка квадратная, в отверстия впаяны жесткие шайбы:

а. Средние напряжения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\tau_{12} = 0$

| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r (A) =$ | 1.02 | 1.08 | 1.18 | 1.44 | 1.86 |
| $\sigma_r (B) =$ | 1.51 | 1.45 | 1.39 | 1.48 | 1.83 |
| $\sigma_\theta (A) =$ | 0.95 | 0.80 | 0.58 | 0.35 | 0.41 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 0.45 | 0.44 | 0.42 | 0.45 | 0.56 |

б. Средние напряжения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = 0$

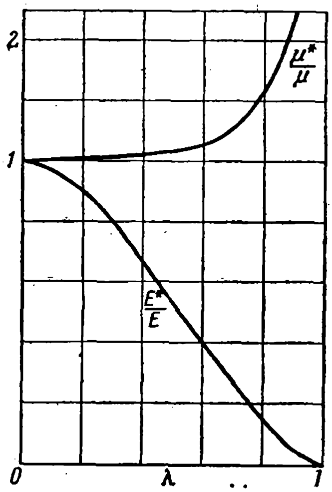
| $\lambda =$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r (A) =$ | 1.07 | 1.25 | 1.48 | 1.74 | 2.12 |
| $\sigma_r (B) =$ | 1.50 | 1.50 | 1.52 | 1.71 | 2.08 |
| $\sigma_\theta (A) =$ | 0.02 | —0.04 | 0.00 | 0.20 | 0.43 |
| $\sigma_\theta (B) =$ | 0.45 | 0.45 | 0.46 | 0.51 | 0.65 |

Используя решения приведенных выше задач, можно определить приведенные упругие параметры правильных решеток.

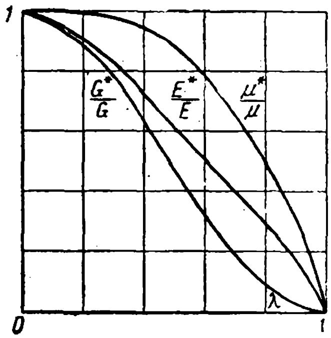
Кривые величин $E^* / E$ и $\mu^* / \mu$ для правильной треугольной решетки, когда кромки отверстий свободны от сил, даны на фиг. 2.

Для случая, когда в отверстия впаяны жесткие шайбы, изменение соответствующих величин дано на фиг. 4.

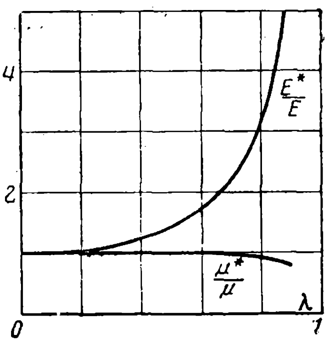
Кривые величин $E^* / E$, $\mu^* / \mu$ и $G^* / G$ для квадратной решетки в случае, когда отверстия свободны от сил, даны на фиг.3.



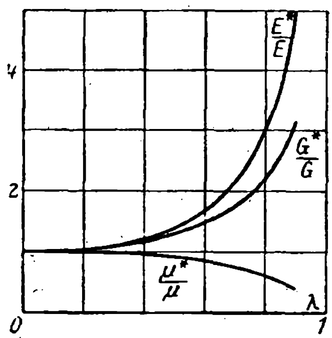

Фиг. 2




Фиг. 3




Фиг. 4




Фиг.

Изменение этих же величин для случая, когда в отверстия впаяны жесткие шайбы, представлено на фиг. 5.

В заключение автор приносит благодарность Л. М. Куршину за полезные обсуждения и ряд ценных советов.

Поступила 30 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. Stress Distribution in an Infinite Elastic Sheet with a Doubly — Periodic Set of Equal Holes. Boundary Problems Differential Equations Madison. Univ. Wisconsin Press., 1960.
2. Куршин Л. М., Фильштинский Л. А. Определение приведенного модуля упругости изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М. — Л., 1951.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.