УДК 519.66

ЗЕРКАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ЧИСЛОВЫХ ВЕКТОРОВ В ЗЕРКАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л. П. Андреев,
Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт "Искра", г. Луганск, Украина
E-mail: official@iskra.lugansk.ua

В статье рассмотрены и проанализированы представления четырёхмерного пространства в евклидовом и зеркальном пространствах. Описаны методы построения зеркальных векторов, сформулирована новая система зеркальных координат, которая позволяет определять положение n-мерного вектора в зеркальном пространстве. Методами зеркальных преобразований сформулированы новые методы эквализации, цифровой фильтрации последовательности элементов вектора и сжатия информации.

Ключевые слова: *вектор, четырёхмерное пространство, преобразование координатной системы, зеркальное пространство, координаты числового вектора в зеркальном пространстве, эквализация, цифровая фильтрация, сжатие информации.*

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателя статья посвящена одному из новых направлений в математике – зеркальным преобразованиям числовых векторов в зеркальном пространстве, появление которых явилось следствием проведенных научно-исследовательских работ по поиску новых математических методов, которые позволили бы сжимать числовую информацию без потерь (loss-les). В статье рассмотрены и проанализированы два представления четырёхмерного пространства:

1) современные представления четырёхмерного пространства в евклидовом пространстве;

2) представления четырёхмерного пространства в зеркальном пространстве.

Наибольшее внимание в статье было уделено второму представлению, позволяющему определять положение четырёхмерного вектора в зеркальном пространстве. В качестве системы координат используются так называемые зеркальные векторы. Вектор в числовом четырёхмерном пространстве (числовой вектор) будем называть зеркальным, если из последовательности его элементов можно построить систему координат, позволяющую определять положения числовых векторов, которые находятся в зеркальном пространстве. Пользуясь специальными методами зеркальных преобразований и эквализации последовательности элементов вектора, в статье предлагаются новые методы построения цифровых фильтров и методы сжатия информации.

12. Современные представления четырехмерного пространства

1.1. Представления четырёхмерного пространства в евклидовом пространстве

Четырехмерным пространством называется воображаемое пространство четырех измерений, на осях которых откладываются три координаты x, y, z и четвертая координата - время ct, где c – скорость света. Любое событие в четырехмерном пространстве изображается точкой (*мировая точка*). Движению некоторой частицы в пространстве и во времени соответствует линия в четырехмерном пространстве (*мировая* *линия*). Если x_1, y_1, z_1, ct_1 и x_2, y_2, z_2, ct_2 – координаты двух событий или координаты двух точек в четырёхмерном пространстве, то величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

называется интервалом между двумя событиями или расстоянием между двумя точками. Интервал между двумя бесконечно близкими событиями равен

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{c^2dt^2 - dl^2}, \quad (2)$$

где $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ [1]. Впервые пространство и время было объединено Х. Лоренцем. Пространство неотделимо от времени и, наоборот, пространственный масштаб $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ и интервал времени dt тесно связаны между собой через скорость света c. Они образуют единый пространственно-временной континуум. Согласно специальной теории относительности пространственно-временной континуум имеет вид; $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$ [2]. Откладывая на оси времени $\tau = ict$, величину $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2$ можно рассматривать как квадрат элемента длины в четырехмерном пространстве. В связи с обобщением понятия пространства, элементы пространства – векторы или точки – стали отождествляться с объектами любой природы: числами, кодами, матрицами и т. д. Так, числовой вектор – вектор в числовом пространстве. Вектор в n-мерном пространстве – это совокупность n чисел, идущих в определенном порядке. Таким образом, всякий такой вектор $\boldsymbol{x}$ характеризуется последовательностью n чисел, которые называются составляющими этого вектора: $\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Совокупность таких векторов образует n-мерное векторное пространство [3]. Поэтому координаты точки в четырехмерном пространстве будем считать составляющими некоторого вектора $\boldsymbol{p}^T = (x, y, z, ct)$, совокупность которых образует четырёхмерное векторное пространство. *Числовой вектор* будем представлять либо в виде матрицы порядка $n \times 1$, либо в виде последовательности элементов вектора:

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}, \text{ или } \boldsymbol{p}^T = (x, y, z, ct), \quad (3)$$

где T - знак транспонирования. Причём имена векторов будем обозначать строчными английскими или греческими буквами и жирным шрифтом, а элементы векторов малыми буквами и нежирным шрифтом.

Если рассматривать *последовательность элементов вектора* как случайную величину, то случайное событие будет описываться упорядоченным набором действительных чисел, который представляет собой значение *n-мерной случайной величины* $\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Здесь мы будем рассматривать многомерные случайные величины-векторы, т. е. *систему случайных величин* или *n-мерный случайный вектор*, координатами которого являются одномерные случайные величины. Обозначим *четырёхмерный случайный вектор:* $\boldsymbol{P}^T = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{ct})$, где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{ct}$ - набор одномерных случайных величин, т. е. каждая координата из набора $\boldsymbol{x, y, z, ct}$ представляет собой последовательность случайных чисел или вектор. Например, $\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - одномерная случайная величина по оси $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ - одномерная случайная величина по оси $\boldsymbol{y}$ и т. д. Если говорят, что $\boldsymbol{p}$ – случайный вектор или (*четырехмерная случайная величина*), то величины x, y, z, ct называют его *случайными координатами* [4]. В случае четырёхмерного пространства *случайными координатами* (случайными числами) будут x, y, z, ct или как случайная величина в виде вектора $\boldsymbol{p}^T = (x, y, z, ct)$. *Статистическим математическим ожиданием* $M[\boldsymbol{p}]$ случайной величины $\boldsymbol{p}$ называется число, определяемое следующей формулой:

$$m_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \,. \tag{4}$$

Разность между случайной величиной $\boldsymbol{p}$ и ее математическим ожиданием называется центрированной случайной величиной и обозначается символом $\overset{\circ}{\boldsymbol{p}}$ [5]:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} - M[\boldsymbol{p}]. \tag{5}$$

В матричной форме центрированная случайная величина имеет вид:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} - M[\boldsymbol{p}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_p \\ m_p \\ m_p \\ m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-m_p \\ y-m_p \\ z-m_p \\ ct-m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \overset{\circ}{x} \\ \Delta \overset{\circ}{y} \\ \Delta \overset{\circ}{z} \\ \Delta \overset{\circ}{ct} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\Delta \overset{\circ}{x}, \Delta \overset{\circ}{y}, \Delta \overset{\circ}{z}, \Delta \overset{\circ}{ct}$ - центрированные случайные числа (отклонения от математического ожидания). Область пространства, которая заполняется множеством точек с координатами $\Delta \overset{\circ}{x}, \Delta \overset{\circ}{y}, \Delta \overset{\circ}{z}, \Delta \overset{\circ}{ct}$, будем называть центрированное $\overset{\circ}{\boldsymbol{p}}$*-пространство.*

Пример. Пусть вектор, $\boldsymbol{p}^T = (102, 153, 34, 187)$. Вычислим по формуле (4) математическое ожидание $m_p = 119$ и представим его в виде вектора, т. е. $\boldsymbol{m}_p^T = (119, 119, 119, 119)$. По формуле (6) вычислим центрированную случайную величину $\overset{\circ}{\boldsymbol{p}}{}^T = (-17, 34, -85, 68)$, из которой следует, что сумма любых трех элементов последовательности элементов центрированного вектора всегда равна по модулю, оставшемуся четвёртому элементу и противоположна по знаку, т. е. уравновешивает его. В приведённом примере пространство и время едины и уравновешивают друг друга. В данном случае пространство уравновешивает время и наоборот.

1.2. Преобразования четырёхмерного пространства

Как известно, размерность пространства определяется количеством составляющих элементов последовательности вектора, т. е. количеством координатных осей.

Если составляющие элементы центрированного $\boldsymbol{p}^{\circ}$ *-вектора* рассматривать как координаты точки в четырехмерном пространстве, то согласно уравнению (6) сумма всех элементов *вектора* $\boldsymbol{p}^{\circ}$ всегда равна нулю. Это значит, что если представить последовательность элементов вектора в виде кратковременной функции и проинтегрировать её, то получим центрированную случайную вектор-функцию $p^{\circ}(n)$. Интегрирование будем выполнять методом последовательного суммирования элементов вектора по следующей итерационной формуле:

$$p^{\circ}{}_{n+1} = (p_n^{\circ} + p_{n+1}^{\circ})\,\Delta n\,, \tag{7}$$

где $n = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$ и $\Delta n = 1$.

Восстанавливается $\boldsymbol{p}^{\circ}$ *-вектор* методом дифференцирования последовательности элементов вектор-функции $p^{\circ}(n)$ в конечных разностях, взяв за базис начало координат, т. е.

$$p^{\circ}{}_{n+1} = \frac{p^{\circ}{}_{n+1} - p^{\circ}{}_{n}}{\Delta n}\,, \tag{8}$$

где $n = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$ и $\Delta n = 1$.

Пример. Пусть исходный вектор $\boldsymbol{p}^{T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$. Вычислим математическое ожидание по формуле (4), $m_p = 119$, преобразовав его в вектор, получим $\boldsymbol{m}_{\mathbf{p}}^{T} = (119,\ 119,\ 119,\ 119)$. Далее по формуле (6) вычислим центрированную случайную величину $\boldsymbol{p}^{\circ T} = (\text{-}17,\ 34,\ \text{-}85,\ 68)$. По формуле (7) вычислим вектор-функцию $p^{\circ}(n) = (\text{-}17, 17, \text{-}68, 0)$. По формуле (8) восстановим исходный центрированный вектор, $\boldsymbol{p}^{\circ T} = (\text{-}17,\ 34,\ \text{-}85,\ 68)$. Таким образом, из примера видно, что последний элемент вектор-функции $p^{\circ}(n)$ всегда равен нулю, т. е. $ct = 0$. Если не учитывать время, то $p^{\circ}(n) = (-17,\ 17,\ -68)$. Продифференцировав новое значение $p^{\circ}(n)$, получим *трехмерный центрированный вектор* $\boldsymbol{p}^{\circ T} = (\text{-}17,\ 34,\ \text{-}85)$, т. е., как бы понижена размерность *четырехмерного пространства до трёхмерного пространства*.

13. Представления четырехмерного пространства в зеркальном пространстве

2.1. Зеркальные преобразования четырёхмерных векторов

В природе наблюдается известное всем явление – зеркальное отражение тел и предметов в среде, в которой они находятся. Так, идя по снегу или песку, вы оставляете следы своих ног, причём следы зеркальны вашим ногам. Глядя в зеркало или стоячую воду озера, вы видите своё зеркальное отражение. Другими словами, любой образ имеет своё зеркальное отражение. Если пропустить образ через линзу, то за линзой мы получим обратное изображение образа (смотри рис. 1). Зеркальное пространство будем представлять как векторное пространство, т. е. как совокупность четырёхмерных векторов, координатами которых являются зеркальные векторы.

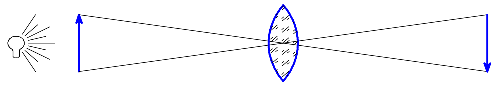

Рисунок 1 – Прямое и обратное изображение образа

Введем обозначения:

$\boldsymbol{x}^{\uparrow}$ - образ исходного вектора, $\boldsymbol{x}^{\downarrow}$ - его зеркальное отражение. В векторной форме:

$\boldsymbol{x}^{\uparrow T}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$- *образ исходного числового вектора (прямое изображение);*

$\boldsymbol{x}^{\downarrow T}=(x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1)$– *зеркальное отражение образа исходного числового вектора, (обратное изображение),* где $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ - числовая последовательность исходного вектора, $x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1$ - числовая последовательность зеркального отражения исходного вектора, T – знак транспонирования. Такие представления вектора позволяют проводить арифметические операции (с самим собой). Вычислим сумму *образа исходного числового вектора* с его *зеркальным отражением:*

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{x}^{\uparrow}+\mathbf{x}^{\downarrow}. \tag{9}$$

Для восстановления исходного вектора необходимо знать и разность этих векторов:

$$\delta=\mathbf{x}^{\uparrow}-\mathbf{x}^{\downarrow}. \tag{10}$$

Сумму образа исходного числового вектора и его зеркального отражения в дальнейшем будем называть σ*-координата*. Разность образа исходного вектора и его зеркального отражения будем называть δ*-координата*. Для восстановления образа исходного вектора и его зеркального отражения необходимо решить систему двух векторных уравнений [6]:

$$\begin{cases}\mathbf{x}^{\uparrow}+\mathbf{x}^{\downarrow}=\sigma\\ \mathbf{x}^{\uparrow}-\mathbf{x}^{\downarrow}=\delta\end{cases}. \tag{11}$$

В результате решения системы уравнений получим:

$$\mathbf{x}^{\uparrow}=(\sigma+\delta)/2, \tag{12}$$

$$\mathbf{x}^{\downarrow}=(\sigma-\delta)/2. \tag{13}$$

Изменяя *координаты* σ и δ, изменяем положение числового вектора в *зеркальном пространстве*. Если заданы векторы $\boldsymbol{x}^{\uparrow T}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ и $\boldsymbol{x}^{\downarrow T}=(x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1)$, то

$$\sigma=\mathbf{x}^{\uparrow}+\mathbf{x}^{\downarrow}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_4\\x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_4\\x_2+x_3\\x_3+x_2\\x_4+x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_2\\\sigma_1\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\delta = \mathbf{x}^{\uparrow} - \mathbf{x}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_1 \\ \delta_2 \\ -\delta_2 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

при условии $x_1<x_4$ и $x_3<x_2$.

Например, если *представление образа исходного вектора* $\mathbf{x}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$, *то* $\mathbf{x}^{\downarrow T} = (187,\ 34,\ 153,\ 102)$ - *зеркальное отражение образа вектора*, тогда согласно (11) *зеркальные координаты* будут равны: $\sigma^T = (289,\ 187,\ 187,\ 289)$ и $\delta^T = (-85,\ 119,\ -119,\ 85)$. Анализируя σ- и δ*-координаты*, видно, что они обладают внутренней зеркальной симметрией: первая половина координаты зеркально симметрична второй половине координаты. Другими словами: σ*-координата* обладает внутренней зеркальной симметрией; δ*-координата* обладает внутренней зеркально-инверсной симметрией. По формулам (12, 13) восстановим *исходный вектор* и его *зеркальное отражение*:

$$\mathbf{x}^{\uparrow} = \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_2 \\ x_4 + x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

$$\mathbf{x}^{\downarrow} = \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_2 \\ x_4 + x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Из выражений (12, 13 и 16, 17) следует, что векторы σ и δ исполняют роль координат, с помощью которых вычисляются положения исходного вектора и его зеркального отражения в *зеркальном пространстве*.

2.2. Система зеркальных координат

Основным и главным свойством зеркальных векторов является то, что они образуют систему зеркальных координат: координату σ и координату δ. Зная координаты σ и δ можно определить положение числового вектора в зеркальном пространстве. Восстанавливаются исходный вектор и его зеркальное отражение по формулам (12, 13). Другими словами, зная зеркальные координаты $\sigma^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1)$ и $\delta^T = (-\delta_1,\ \delta_2, -\delta_2,\ \delta_1)$ можно определить положение исходного вектора в зеркальном пространстве и затем, зная последовательность элементов исходного вектора, определить координаты точки в четырёхмерном пространстве. Область пространства, которая заполняется множеством координат $(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_2,\ \sigma_1)$, будем называть σ*-пространство*, а область пространства, которая заполняется множеством координат $(-\delta_1,\ \delta_2, -\delta_2,\ \delta_1)$, будем называть δ*-пространство*. Так как σ*-координата* и δ*-координата* обладают внутренней зеркальной симметрией и соответственно внутренней зеркально-инверсной симметрией, то для описания зеркального пространства достаточно одной половины зеркальных координат. Обозначим первую половину зеркальных координат $\sigma^{\uparrow}$ и $\delta^{\uparrow}$; а вторую половину зеркальных координат - $\sigma^{\downarrow}$ и $\delta^{\downarrow}$. Последовательность элементов одной половины координаты σ будем рассматривать как координаты точки в σ*-пространстве*, а последовательность элементов одной половины δ-координаты будем рассматривать как координаты точки в δ*-пространстве*.

2.3. Представления четырехмерного пространства в зеркальном пространстве

Пусть исходный вектор $\boldsymbol{p}^{\uparrow T} = (x,\ y,\ z,\ ct) = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$, где $x,\ y,\ z,\ ct$ – координаты точки в *четырехмерном пространстве*. Вычислим *зеркальные координаты* исходного вектора $\boldsymbol{p}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}^{\uparrow} + \boldsymbol{p}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 102 \\ 153 \\ 34 \\ 187 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 187 \\ 34 \\ 153 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 \\ 187 \\ 187 \\ 289 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \boldsymbol{p}^{\uparrow} - \boldsymbol{p}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 102 \\ 153 \\ 34 \\ 187 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 187 \\ 34 \\ 153 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -85 \\ 119 \\ -119 \\ 85 \end{pmatrix},$$

здесь $\sigma^{\uparrow} = (289,\ 187)$, $\sigma^{\downarrow} = (187,\ 289)$, $\delta^{\uparrow} = (-85,\ 119)$, $\delta^{\downarrow} = (-119,\ 85)$.

Последовательность элементов σ*-вектора* (289, 187) есть координаты точки в *двумерном* σ*-пространстве*, которое представляет собой пространство, имеющее два измерения. Последовательность элементов δ*-вектора* (-85, 119) есть координаты точки в *двумерном* δ*-пространстве*, которое также представляет собой пространство, имеющее два измерения. Таким образом, *четырехмерное* пространство можно представлять как конкатенацию (соединение) двух подпространств, в каждой из которых могут быть представлены некоторые функции одной переменной: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{\uparrow}\ \&\ \sigma^{\downarrow}$, $\delta = \delta^{\uparrow}\ \&\ \delta^{\downarrow}$.

Восстанавливается исходный вектор в два этапа:

– на первом этапе восстанавливаются σ- и δ*-координаты*, т. е.

$$\sigma^{\uparrow}\ \&\ \sigma^{\downarrow} = \boldsymbol{\sigma}^{T} = (289,\ 187,\ 187,\ 289),\quad \delta^{\uparrow}\ \&\ \delta^{\downarrow} = \delta^{T} = (-85, 119, -119, 85);$$

– на втором этапе восстанавливается исходный вектор по формуле (12):

$$\boldsymbol{p} = (\sigma + \delta)/2 = \left\{ \begin{pmatrix} 289 \\ 187 \\ 187 \\ 289 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -85 \\ 119 \\ -119 \\ 85 \end{pmatrix} \right\} / 2 = \begin{pmatrix} 102 \\ 153 \\ 34 \\ 187 \end{pmatrix}.$$

2.4. Основные свойства зеркальных векторов

1. Основным и главным свойством зеркальных векторов является то, что они образуют систему *зеркальных координат*: *координату* $\boldsymbol{\sigma}$ и *координату* δ, изменяя которые, мы изменяем положение числового вектора в *зеркальном пространстве. Зеркальное пространство* – это совокупность четырёхмерных векторов, которая находится между исходным вектором $\boldsymbol{x}^{\uparrow}$ и его зеркальным отражением $\boldsymbol{x}^{\downarrow}$.

2. Если рассматривать последовательность элементов числового вектора как некоторую случайную величину, то статистическое матожидание *координаты* $\boldsymbol{\sigma}$ будет в два раза больше матожидания исходного $\boldsymbol{x}$*-вектора,* при этом матожидание *координаты* δ всегда будет равно нулю:

$$M(\sigma) = 2M(\boldsymbol{x}), \tag{18}$$

$$M(\delta) = 0. \tag{19}$$

Например, если $\boldsymbol{x}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$, то $M(x) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 119$;

если $\sigma^T = (289,\ 187,\ 187,\ 289)$, то $M(\sigma) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \sigma_i = 238$;

если $\delta^T = (-85,\ 119,\ -119,\ 85)$, то $M(\delta) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \delta_{\mathrm{i}} = 0$.

3. Разность между $\boldsymbol{\sigma}$*-координатой* и её матожиданием $M(\sigma)$ равна некоторому $\boldsymbol{k}$*-вектору*, у которого все элементы по модулю равны друг другу, т. е. типа константы, поэтому будем его называть *конституентный* вектор:

$$\boldsymbol{\sigma} - M(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{k}^T = (|k_i|, |k_i|, |k_i|, |k_i|). \tag{20}$$

Например, если $\sigma^T = (289,\ 187,\ 187,\ 289)$ и $M(\sigma) = 238$, то $\boldsymbol{k}^T = (51,\ -51,\ -51,\ 51)$.

4. Матожидание последовательности элементов $\boldsymbol{k}$*-вектора* равно нулю.

$$M(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} k_i = 0. \tag{21}$$

5. Если последовательность элементов вектора представлять в виде случайной величины, то разность между случайной величиной x и ее математическим ожиданием $M(\boldsymbol{x})$ будет представлять собой центрированную случайную величину, т. е. отклонение от матожидания $M(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{x}^{\circ} = x - M[\boldsymbol{x}] \tag{22}$$

6. Матожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю:

$$M(x^{\circ}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 0. \tag{23}$$

7. Координаты центрированной случайной величины вычисляются следующим образом:

$$\sigma(\boldsymbol{x}^{\circ}) = \boldsymbol{x}^{\circ\uparrow} + \boldsymbol{x}^{\circ\downarrow} = \boldsymbol{k}_{\sigma}\,, \tag{24}$$

$$\delta(\boldsymbol{x}^{\circ}) = \boldsymbol{x}^{\circ\uparrow} - \boldsymbol{x}^{\circ\downarrow} = \boldsymbol{k}_{\delta}\,, \tag{25}$$

где $\boldsymbol{k}$ - *конституентный* вектор.

Например, если *вектор* $\boldsymbol{x}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$, то

$$\boldsymbol{x}^{\circ T} = (-17,\ 34,\ -85,\ 68)\,,$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}^{\circ}) = k_{\sigma}{}^{T} = (51,\ -51,\ -51,\ 51)\,,$$

$$\delta(\boldsymbol{x}^{\circ})^{T} = (-85, 119, -119, 85)\,.$$

2.5. Зависимость зеркальных координат от параметров исходного вектора

Для выяснения зависимости *зеркальных координат* от параметров исходного вектора будем воздействовать на исходный вектор $\boldsymbol{x}^{\uparrow}$ *конституентными векторами* типа $\boldsymbol{k}_{\sigma}$ и $\boldsymbol{k}_{\delta}$, имеющими следующие *сигнатуры* (*сигнатура* – это группа знаков, стоящих перед элементами σ - и δ *-координат,* и обозначается как *sign*):

$$sign\,\boldsymbol{k}_{\sigma 1} = (+\,+\,+\,+),\quad sign\,\boldsymbol{k}_{\sigma 2} = (+\,-\,-\,+),\quad sign\,\boldsymbol{k}_{\sigma 3} = (-\,+\,+\,-),\quad sign\,\boldsymbol{k}_{\sigma 4} = (-\,-\,-\,-), \tag{26}$$

$$sign\,\boldsymbol{k}_{\delta 1} = (-\,-\,+\,+),\quad sign\,\boldsymbol{k}_{\delta 2} = (+\,+\,-\,-),\quad sign\,\boldsymbol{k}_{\delta 3} = (-\,+\,-\,+),\quad sign\,\boldsymbol{k}_{\delta 4} = (+\,-\,+\,-). \tag{27}$$

Здесь каждая группа координат (26) или (27) содержат по четыре *сигнатуры*. Других вариантов *сигнатур* типа $\boldsymbol{k}$ нет. Номера *сигнатур* обозначаются индексами: i=1, 2, 3, 4. Рассмотрим зависимости функций $\sigma = f(\boldsymbol{x}^{\uparrow})$ и $\delta = f(\boldsymbol{x}^{\uparrow})$ при воздействии *конституентного вектора* $\boldsymbol{k}$ на *исходный вектор* $\boldsymbol{x}^{\uparrow}$. При сложении *исходного вектора* $\boldsymbol{x}^{\uparrow}$ с одним из вариантов сигнатур $\boldsymbol{k}_{\sigma}$, *элементы* σ *-координаты* увеличатся или уменьшатся, т. е. изменится *координата* σ ; δ *-координата,* при этом, не изменится.

Например,

если $\boldsymbol{x}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$, его сигнатура $sign\,\boldsymbol{x} = (+\,+\,+\,+)$, то

$$\sigma^{T} = (289,\ 187,\ 187,\ 289),\ \text{его}\ sign\ \sigma = (+\,+\,+\,+)\,,$$

$$\delta^{T} = (-85,\ 119,\ -119,\ 85)\,,\ \text{его}\ sign\,\delta = (-\,+\,-\,+)\,,$$

$$\boldsymbol{k}_{\sigma}{}^{T} = (51,\ -51,\ -51,\ 51)\,,\ \text{его}\ sign\ \boldsymbol{k}_{\sigma} = (+\,-\,-\,+)\,,$$

тогда:

$$\boldsymbol{x}_{1}^{\uparrow} = \boldsymbol{x}^{\uparrow} + k_{\sigma} = \begin{pmatrix}102\\153\\34\\187\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}51\\-51\\-51\\51\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}153\\102\\-17\\238\end{pmatrix},$$

$$\sigma_{1} = \boldsymbol{x}_{1}^{\uparrow} + \boldsymbol{x}_{1}^{\downarrow} = \begin{pmatrix}153\\102\\-17\\238\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}238\\-17\\102\\153\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}391\\85\\85\\391\end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = x_1^{\uparrow} - x_1^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 153 \\ 102 \\ -17 \\ 238 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 238 \\ -17 \\ 102 \\ 153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -85 \\ 119 \\ -119 \\ 85 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что σ *-координата* изменилась (деформировалась). *Координата* δ осталась неизменной, т. е. $\delta_1 = \delta$ При сложении исходного вектора $x^{\uparrow}$ с одним из вариантов сигнатур k_{δ}, *элементы* δ *-координаты* уменьшатся или увеличатся, т. е. изменится координата δ; σ *-координата* при этом не изменится. Преобразуем k_{σ} в k_{δ}, т. е. $k_{\sigma}^{T} = (-51, 51, -51, 51)$, его сигнатура *sign* $k_{\delta} = (- + - +)$ тогда

$$x_2^{\uparrow} = x^{\uparrow} + k_{\delta} = \begin{pmatrix} 102 \\ 153 \\ 34 \\ 187 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -51 \\ 51 \\ -51 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 204 \\ -17 \\ 238 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = x_2^{\uparrow} - x_2^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 51 \\ 204 \\ -17 \\ 238 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 238 \\ -17 \\ 204 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 \\ 187 \\ 187 \\ 289 \end{pmatrix},$$

$$\delta_2 = x_2^{\uparrow} - x_2^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 51 \\ 204 \\ -17 \\ 238 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 238 \\ -17 \\ 204 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -187 \\ 221 \\ -221 \\ 187 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что δ *-координата* изменилась, σ *-координата* осталась неизменной, т. е. $\sigma_2 = \sigma$.

2.6. Методы управления сигнатурой зеркальных координат

Под управлением сигнатурой координат будем понимать изменение знаков перед элементами зеркальных координат, которое позволит проводить различные преобразования координат, например, преобразование σ *-координаты в* δ *-координату* и обратно, т.е. переход из σ *-пространства в* δ *-пространство* и обратно. Такие преобразования необходимы для приведения координат к одному типу или приведения всех элементов координат к положительным или отрицательным числам. В качестве операторов преобразования применим двоичные матрицы второго порядка: прямые и обратные, у которых элементы равны 0, 1, -1, $a_{11} = a_{22} = 0$ и $a_{12} = a_{21} = |1|$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Рассмотрим два метода управления сигнатурой. Первый метод очень прост [6] и заключается в линейном преобразовании координат. Рассмотрим преобразование σ *-координаты* в δ *-координату*, или переход из σ*-пространства в* δ*-пространство.* Такое преобразование проводится следующим образом:

$$\delta^{\downarrow} = \boldsymbol{A} \cdot \sigma^{\uparrow}, \tag{29}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^{\uparrow T} = (\sigma_1, \sigma_2)$;

$$\boldsymbol{A} \cdot \sigma^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ -\sigma_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^{\downarrow T} = (\sigma_2, -\sigma_1);$$

$$\delta^{\uparrow} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\downarrow}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^{\downarrow T} = (\sigma_2, \sigma_1)$, $\boldsymbol{A} \cdot \sigma^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^{\downarrow T} = (\sigma_1, -\sigma_2)$.

Соединив $\sigma^{\uparrow} \& \sigma^{\downarrow}$, получим координату $\boldsymbol{\sigma}^{T} = (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_2, -\sigma_1)$, сигнатура которой изменилась и перешла из группы (26) в группу (27). Заменив символы σ *на* δ, получим δ*-координату* $\boldsymbol{\delta}^{T} = (\delta_1, -\delta_2, \delta_2, -\delta_1)$, *у которой* $sign\,\delta = (+ - + -)$. Таким образом, проведено преобразование σ*-координаты* в δ*-координату,* или переход из σ*-пространства в* δ*-пространство.*

Восстановление σ*-координаты* проводится по следующим формулам:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\downarrow} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \delta^{\uparrow}, \tag{31}$$

где $\delta^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ -\delta_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\delta}^{\uparrow T} = (\delta_1, -\delta_2)$; $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \delta^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ -\delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\delta}^{\downarrow T} = (\delta_2, \delta_1)$;

$$\boldsymbol{\sigma}^{\uparrow} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \delta^{\downarrow}, \tag{32}$$

где $\delta^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ -\delta_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\delta}^{\downarrow T} = (\delta_2, -\delta_1)$; $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \delta^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_2 \\ -\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\delta}^{\uparrow T} = (\delta_1, \delta_2)$.

Соединив две половинки $\delta^{\uparrow} \& \delta^{\downarrow}$, получим вектор $\boldsymbol{\delta}^{T} = (\delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_1)$. Так как сигнатура изменилась и перешла из группы (27) в группу (26), то в результате преобразований получим σ*-координату,* $\boldsymbol{\sigma}^{T} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1)$ с $sign\,\sigma = (++++)$, т.е. σ*-координата* восстановлена.

Второй метод управления сигнатурой заключается в произведении двух матриц второго порядка. Матрицу, полученную от преобразования σ*-координаты,* будем обозначать ***S***; а матрицу, полученную из преобразования δ*-координаты*, будем обозначать ***D***:

$$\delta_i = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{S}_i, \tag{33}$$

где i=1, 2, 3, 4 - номера сигнатуры;

$$\delta_2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\delta}^{T} = (\delta_1, \delta_2, -\delta_2, -\delta_1), \tag{34}$$

Индексы δ*-координаты* в правой части уравнения проставлены согласно сигнатурам (27). Если умножить обратную двоичную матрицу на

δ-*координату*, представленную в виде матрицы, то восстановим σ-*координату*. Так, например, представив из (34) δ_2-*координату* в виде матрицы и умножив на неё обратную двоичную матрицу, получим [6]:

$$\sigma_1 = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ -\delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_2 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_1{}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1), \quad (35)$$

т. е. получено обратное преобразование δ-*координаты* в σ-*координату*. Процедуру изменения знаков σ или δ-*координат*, оставаясь в той же группе сигнатур (26) или (27), будем называть *псевдовращение* зеркальных координат. *Псевдовращение* осуществляется по следующим формулам:

$$\sigma = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\grave{A}}^{-1}, \quad (36)$$

$$\delta = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}. \quad (37)$$

Например, если $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1)$ и его $sign\,\sigma = (++++)$, то

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_2{}^T = (\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_2, \sigma_1),$$

восстановление *координаты* σ проводится по той же формуле (36):

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_1{}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1).$$

Аналогичные преобразования справедливы и для *координаты* δ.

2.7. Дифференцирование и интегрирование зеркальных координат.

Рассматривая последовательности элементов зеркальных координат как некоторые кратковременные функции, продифференцируем последовательность элементов *координаты* σ в конечных разностях, взяв за базис начало координат в системе $\sigma\,(n)$:

$$\frac{d\sigma(n)}{dn} = [\sigma_{n+1} = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\Delta n}], \quad (38)$$

где $n = (0, 1, 2, 3)$ и $\Delta n = 1$.

Здесь производная $\dfrac{d\sigma(n)}{dn}$ имеет условное, чисто символическое обозначение и не связано с конечными разностями. Согласно группе сигнатур (26) σ-*координата* имеет четыре возможных варианта:

$$\sigma_1(n) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1), \qquad \sigma_2(n) = (\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_2, \sigma_1),$$
$$\sigma_3(n) = (-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, -\sigma_1), \qquad \sigma_4(n) = (-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_2, -\sigma_1).$$

Продифференцировав все варианты, получим:

$$\frac{d\sigma_1(n)}{dn} = [(\sigma_1 - 0), (\sigma_2 - \sigma_1), 0, (\sigma_1 - \sigma_2)],$$
$$\frac{d\sigma_2(n)}{dn} = [(\sigma_1 - 0), (\sigma_2 - \sigma_1), 0, (\sigma_1 + \sigma_2)],$$

$$\frac{d\sigma_3(n)}{dn} = [(-\sigma_1 - 0),\ (\sigma_2 + \sigma_1),\ 0,\ (-\sigma_1 - \sigma_2)],$$

$$\frac{d\sigma_4(n)}{dn} = [(-\sigma_1 - 0),\ (-\sigma_2 + \sigma_1),\ 0,\ (-\sigma_1 + \sigma_2)]. \tag{39}$$

Из выражений (39) видно, что для всех $\frac{d\sigma(n)}{dn}$ всегда 3-й элемент равен нулю.

Рассмотрим интегрирование последовательности составляющих *δ-координаты.* Интегрирование будем выполнять методом последовательного суммирования элементов вектора по следующей итерационной формуле:

$$\int_0^3 \delta(n)\,dn = [\delta_{n+1} = (\delta_n + \delta_{n+1}) \cdot \Delta n], \tag{40}$$

где $n = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$, $\Delta n = 1$.

Здесь интеграл $\int_0^3 \delta(n)\,dn =$ имеет условное, чисто символическое обозначение. Согласно группе сигнатур (27) следует, что *координата δ* также имеет четыре варианта сигнатур:

$$\delta(n)_1 = (-\delta_1,\ -\delta_2,\ \delta_2,\ \delta_1), \qquad \delta(n)_2 = (\delta_1,\ \delta_2,\ -\delta_2, -\delta_1),$$

$$\delta(n)_3 = (-\delta_1,\ \delta_2,\ -\delta_2,\ \delta_1) \qquad \delta(n)_4 = (\delta_1,\ -\delta_2,\ \delta_2,\ -\delta_1), \tag{41}$$

Проинтегрировав которые, получим:

$$\int_0^3 \delta_1(n)\,dn = [(0 - \delta_1),\ (-\delta_1,\ -\delta_2),\ (-\delta_1),\ 0],$$

$$\int_0^3 \delta_2(n)\,dn = [(0 + \delta_1),\ (\delta_1 + \delta_2),\ (\delta_1),\ 0],$$

$$\int_0^3 \delta_3(n)\,dn = [(0 - \delta_1),\ (-\delta_1,\ + \delta_2),\ (-\delta_1),\ 0],$$

$$\int_0^3 \delta_4(n)\,dn = [(0 + \delta_1),\ (\delta_1 - \delta_2),\ (\delta_1),\ 0]. \tag{42}$$

Из полученных выражений видно, что для всех $\int_0^3 \delta(n)\,dn$ 4-й элемент равен нулю.

14. Возможные приложения зеркальных координат

Зеркальные координаты – удобный инструмент при определении положения числового вектора в *зеркальном пространстве*, при эквализации последовательности элементов векторов, цифровой фильтрации и сжатии числовой информации.

3.1. Эквализация последовательности числовых векторов.

Эквализация - это выравнивание элементов последовательности числового вектора.

Например, по формулам (9) и (10) вычисляем σ и δ*-координаты*. Если $\boldsymbol{x}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$, то $\sigma^T = (289,\ 187,\ 187,\ 289)$, $\delta^T = (-85,\ 119,\ -119,\ 85)$. Далее вычисляем матожидания $M(\sigma)$ и $M(\delta)$: $M(\sigma) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\sigma_i = 238$. Так как $M(\delta) = 0$, то, запомнив $sign\,\delta$, вычисляем $M(\delta)$ без знаков δ, т. е. $\delta_1 = |\,\delta\,|$, $\delta_1 = |\,\delta\,|^T = (85,\ 119,\ 119,\ 85)$, $M(\delta_1) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\delta_{1i} = 102$, тогда, вычислив векторы $\boldsymbol{k}_\sigma$ и $\boldsymbol{k}_\delta$, получим $\sigma - M(\sigma) = \boldsymbol{k}_\sigma{}^T = (51,\ -51,\ -51,\ 51)$ и $\delta_1 - M(\delta_1) = \boldsymbol{k}_\delta{}^T = (-17,\ 17,\ 17,\ -17)$. Для уменьшения $\boldsymbol{k}_\sigma$ и $\boldsymbol{k}_\delta$ введём коэффициенты e_1 и e_2, числа которых кратные 2^n или $2^n + 2^{n-1}$ с сигнатурами $\boldsymbol{k}_\sigma$ и $\boldsymbol{k}_\delta$, и не превышают 2^8. В данном случае $e_1 = 2^n + 2^{n-1} = 2^5 + 2^4 = 48$, $e_2 = 2^n = 2^4 = 16$, где $n = (0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Преобразовав коэффициенты в векторы и присвоив им знаки $\boldsymbol{k}_\sigma$ и $\boldsymbol{k}_\delta$, получим:

$$\boldsymbol{k}_{\sigma_1} = \boldsymbol{k}_\sigma - e_1 = \begin{pmatrix}51\\-51\\-51\\51\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}48\\-48\\-48\\48\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}_{\delta_1} = \boldsymbol{k}_\delta - e_2 = \begin{pmatrix}-17\\17\\17\\-17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-16\\16\\16\\-16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Зная $M(\sigma) = 238$ и $M(\delta_1) = 102$ и векторы $\boldsymbol{k}_{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{k}_{\delta_1}$, можно провести операцию *эквализации*. Для этого прибавим к векторам $\boldsymbol{k}_{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{k}_{\delta_1}$ матожидания $M(\sigma) = 238$ и $M(\delta_1) = 102$, получим значения σ_1 и δ_1:

$$\boldsymbol{k}_{\sigma_1} + M(\sigma) = \sigma_1{}^T = (241, 235, 235, 241),$$

$$\boldsymbol{k}_{\delta_1} + M(\delta_1) = \delta_1^T = (101, 103, 103, 101).$$

Восстановив запомненную сигнатуру $sign\,\delta$, вычислим новое значение исходного вектора $\boldsymbol{x}_1^\uparrow$. Если представлять последовательность элементов, вновь полученного *исходного вектора* $\boldsymbol{x}_1^\uparrow$ в виде кратковременной функции, то она будет иметь вид, близкий к синусоиде:

$$\boldsymbol{x}_1^\uparrow = (\sigma_1 + \delta_1)/2 = \left(\begin{pmatrix}241\\235\\235\\241\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-101\\103\\-103\\101\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}70\\169\\66\\171\end{pmatrix} \text{ - \textit{синусоида}.}$$

3.2. Метод цифровой фильтрации

Для реализации метода цифровой фильтрации необходимо вначале провести *эквализацию* последовательности элементов вектора (смотри выше), затем строить цифровой фильтр. Для этого вычитаем из $\boldsymbol{x}_1^{\uparrow}$ его матожидание, получаем центрированную случайную величину $\boldsymbol{x}_1^{\uparrow\circ} = \boldsymbol{x}_1^{\uparrow} - M[\boldsymbol{x}_1] =$ и, отделив от неё сигнатуру, т. е. вычислив $\boldsymbol{x}_2^{\uparrow}$, получим сглаженные данные, как у цифрового фильтра нижних частот *(ФНЧ).*

$$\boldsymbol{x}_1^{\uparrow\circ} = \boldsymbol{x}_1^{\uparrow} - M[\boldsymbol{x}_1] = \begin{pmatrix} 70 \\ 169 \\ 66 \\ 171 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 119 \\ 119 \\ 119 \\ 119 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 \\ 50 \\ -53 \\ 52 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_2^{\uparrow} = \boldsymbol{x}_1^{\uparrow\circ} \cdot sign\,1 = \begin{pmatrix} -49 \\ 50 \\ -53 \\ 52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 50 \\ 53 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

3.3. Метод сжатия информации

Сжатие информации проводится в три этапа: вначале проводится *эквализация* последовательности элементов вектора (смотри выше), затем полученная информация фильтруется. Далее вычитаем из $x_2^{\uparrow}$ его матожидание, получаем центрированную случайную величину $\boldsymbol{x}_2^{\uparrow\circ} = \boldsymbol{x}_2^{\uparrow} - M[\boldsymbol{x}_2]$ и, отделив от неё сигнатуру, т. е. вычислив $x_3^{\uparrow}$, получаем один из методов сжатия информации:

$$\boldsymbol{x}_2^{\uparrow\circ} = \boldsymbol{x}_2^{\uparrow} - M[\boldsymbol{x}_2] = \begin{pmatrix} 49 \\ 50 \\ 53 \\ 53 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 51 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_3^{\uparrow} = \boldsymbol{x}_2^{\uparrow\circ} \cdot sign\,1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравним: $\boldsymbol{x}^{\uparrow T} = (102,\ 153,\ 34,\ 187)$ и $\boldsymbol{x}_3^{\uparrow T} = (2,\ 1,\ 2,\ 1)$.

Исходный вектор $\boldsymbol{x}^{\uparrow}$ занимает *32* бита. Вектор $\boldsymbol{x}_3^{\uparrow}$ занимает 8 бит. Из ***сравнения*** двух векторов, ***очевидно*** *сжатие информации*, но без служебной информации.

При большом количестве элементов в последовательности исходного вектора (экспериментальные данные) необходимо: либо увеличить порядок исходного вектора (кратное 4), либо разбить последовательность экспериментальных данных на четвёрки, т. е. на векторы четвёртого порядка и параллельно проводить зеркальные преобразования векторов. Затем вычислить матожидания каждой четвёрки и сформировать вектор, у которого последовательность элементов будет представлять собой последовательность матожиданий. Затем провести эквализацию, цифровую фильтрацию и сжатие информации. Далее, прибавив обработанные матожидания к четвёркам после первичной обработки, получим улучшенные экспериментальные данные. Подробное решение этой задачи будет опубликовано в следующей публикации.

ВЫВОДЫ

И в заключении следует отметить самое главное – это разработаны методы построения и преобразования зеркальных векторов, определена новая система *зеркальных координат* и исследованы их основные свойства. Полученные результаты исследований основных свойств зеркальных векторов показали полезность и важность их использования при решении таких задач, как определение положения числового вектора в зеркальном пространстве, *эквализация* последовательности элементов вектора, цифровая фильтрация и сжатие информации, методы которых найдут широкое применение во многих приложениях и различных линейных преобразованиях.

ДЗЕРКАЛЬНІ КООРДИНАТИ ЧИСЛОВИХ ВЕКТОРІВ У ДЗЕРКАЛЬНОМУ ПРОСТОРІ

Л. П. Андрєєв,
Науково-дослідницький та проектно-конструкторський інститут "Іскра", м. Луганськ

У статті розглянуто й проаналізовано уявлення чотиривимірного простору в евклідовому і дзеркальному просторах. Описано методи побудови дзеркальних векторів, сформульовано нову систему дзеркальних координат, яка дозволяє визначати положення n-вимірного вектора в дзеркальному просторі. Методами дзеркальних перетворень сформульовано нові методи еквалізації, цифрової фільтрації послідовності елементів вектора й стиснення інформації.

Ключові слова*: вектор, чотиривимірний простір, перетворення координатної системи, дзеркальний простір, координати числового вектора в дзеркальному просторі, еквалізація, цифрова фільтрація, стиснення інформації.*

MIRROR COORDINATES OF NUMERICAL VECTORS IN MIRROR SPACE

L. P. Andrieiev ,
Scientific Research and Project Designing Institute "Iskra", Lugansk

The article studies and analyses the ideas about a four-dimensional space in Euclidean space and a mirror space. It describes mirror vectors building techniques, formulates a new system of mirror coordinates, which allows to determine the position of a n-dimensional vector in a mirror space. By the methods of mirror transformations it formulates new methods of equalization, digital filtering of the sequence of vector elements and data compression.

Key words: *vector, n-dimensional vector, space, four-dimensional space, transformation of coordinate system, vectorial space, mirror space, equalization, digital filtering, data compression.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яворский Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М., 1963.
2. Косыев В. Я. Единая теория поля, пространства и времени / В. Я. Косыев. – Нижний Новгород : Изд-во «Арабеск», 2000. - 178 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т. III, ч. 1. - С. 47.
4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1984. - 550 с.
5. Иванов В. А. Математические основы теории автоматического регулирования / В. А. Иванов, Б. К. Чемоданов, В. С. Медведев. – М. : Изд-во «Высшая школа», 1971. – 707 с.
6. Андреев Л. П. Зеркальные преобразования числовых векторов / Л. П. Андреев // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – 2011. - № 3 (157). - С. 6-14.

Поступила в редакцию 7 серпня 2012 р.