МИНИСТРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Караш Имад Тома Бане

УДК 539.3

КОНСТРУКЦИОННАЯ ПРОЧНОСТЬ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С МЕЖСЛОЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

05.02.09 – динамика и прочность машин

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель –
доктор технических наук,
доцент **Верещака С. М.**

Сумы – 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Высокие удельные показатели прочности и жесткости волокнистых композиционных материалов наряду с химической стойкостью, сравнительно малым весом и другими свойствами, сделали эти материалы привлекательными для изготовления трубопроводов различного назначения. Применение стеклопластиковых труб взамен металлических увеличивает срок службы трубопроводов в 5-8 раз, исключает применение антикоррозионных защитных средств, в 4-8 раз снижает массу трубопровода, исключает применение сварочных работ.

Объем мирового производства стеклопластиковых труб (СПТ) составляет более 72 тыс. км стеклопластиковых труб. В стоимостном выражении мировой рынок оценивается в 14 360 млн USD. Крупнейшими потребителями СПТ в мире предприятия химической промышленности. На долю предприятий нефтегазовой промышленности приходится 28% мирового потребления СПТ.

Перспективным направлением применения конструкций из композиционных материалов является замена металлических газовых баллонов композитными. Европейские компании наполняют хранят и транспортируют приблизительно 40 млн баллонов, обслуживая потребности рынка технических газов.

Помимо бурения новых скважин и капитального ремонта существующих скважин, существует ряд много миллиардных проектов закачки воды, реализация которых увеличит скорость вывода нефти из скважин и тем самым повысит эффективность производства в этой области.

Перспективным направлением применения конструкций из композиционных материалов представляется замена металлических газовых баллонов композитными. Наибольшими потребителями газовых баллонов являются компании, оперирующие на рынке природного газа, производители и дистрибуторы промышленных газов. В настоящее время в мире используют почти 8 млн баллонов для хранения природного газа: из них около 7 млн – металлические баллоны, 1 млн – композитные. Европейские компании наполняют, хранят и транспортируют примерно 40 млн баллонов, обслуживая потребности рынка технических газов. Наибольший спрос на баллоны будет ожидаться, прежде всего, в автомобилестроении, на рынках дыхательных аппаратов, пищевой промышленности, электроники, оборудования для пожаротушения и т.д.

Таким образом, интенсивное внедрение новых композиционных материалов в различные отрасли современной техники прежде вызвано высокими технико-экономическими показателями конструкций, созданных на их основе.

При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например, участков непроклея или отслоений. Традиционно используемые в расчетных моделях оболочек и пластин из композиционных материалов условия непрерывности перемещений и напряжений (идеального контакта) при переходе от одного соседнего жесткого армированного слоя к другому не выполняются.

Большинство работ по расчету на прочность и предельное состояние многослойных конструкций с дефектами структуры типа непроклеев и расслоений выполнено, как правило, в рамках приближенных расчетных схем. Из-за сложности численной реализации рассматриваемых задач, полученные теоретические результаты нуждаются в экспериментальной проверке, особенно, если исследуется несущая способность многослойных тонкостенных элементов конструкций с учетом различного рода начальных дефектов структуры материала.

В этой связи разработка новых методик по расчету на прочность и предельное состояние многослойных конструкций с дефектами структуры на основе уточненной дискретно-структурной теории, когда учитываются реальные условия взаимодействия слоев и величина изменения контактных напряжений на межслойных границах, определяет актуальность проводимых исследований.

Проводимые в диссертации исследования тесно связаны с научными программами Сумского государственного университета, которые выполнялись в рамках координированных Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины госбюджетными темами: “Разработка методов оценки надежности работы конструкций химического машиностроения из современных композиционных материалов” и «2010–2012гг., госрегистрация № 0103U000768».

Цели и задачи исследования. Цель работы заключается в разработке научно-обоснованной методики расчета на прочность и несущую способность стеклопластиковых труб и композитных газовых баллонов высокого давления с учетом межслойных дефектов структуры материала.

Для достижения поставленной цели в диссертации решены следующие задачи:

– на основе дискретно-структурной теории разработана методика решения геометрически нелинейных контактных задач для многослойных цилиндрических, сферических и торовых оболочек, когда на одной части межфазной границы выполняются условия идеального контакта, а на другой имеют место участки с ослабленным контактом (непроклея, расслоения, проскальзывания);

– изготовлена экспериментальная установка и исследовано деформированное состояние криволинейных брусьев и цилиндрических оболочек из стеклопластика методом тензометрирования;

– проведена экспериментальная проверка достоверности численных результатов, полученных на основе двух расчетных моделей многослойных оболочек и пластин согласно дисктетно-структурной и структурно-непрерывной теориям;

– исследовано напряженно-деформированное состояние стеклопластиковых труб в зоне фланцевых соединений в зависимости от жесткости фланцев;

– решена задача прочности и получена величина предельного внутреннего давления комбинированных и торовых газовых баллонов высокого давления.

Объект исследования – конструкционная прочность и несущая способность оболочек вращения слоистой структуры.

Предмет исследования – стеклопластиковые трубы, комбинированные и торовые газовые баллоны высокого давления, силовая оболочка которых выполнена из композиционного материала слоистой структуры.

Методы исследования. Для решения геометрически нелинейной контактной задачи применяются метод штрафных функций, метод Фурье, метод перемещений, метод ортогональной прогонки. На основе метода перемещений составлены алгоритм и программа расчета на прочность многослойных оболочек вращения сложной формы. Для оценки достоверности полученных теоретических и экспериментальных данных использован метод конечных элементов, реализованный в программном комплексе ANSYS, также был поставлен и проведен физический эксперимент.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

– получены новые численные решения геометрически нелинейной задачи о деформации оболочек вращения слоистой структуры под действием внутреннего давления с неидеальным межслойным контактом, выявлены основные закономерности изменения напряженного состояния и контактного давления в зоне локальных участков непроклея или расслоений. Показано, что напряженное состояние многослойных элементов, определенное на основе дискретно-структурной теории анизотропных оболочек, качественно отличается, а деформации – выше значений, найденных согласно структурно-непрерывной теории;

– предложена теоретико-экспериментальная методика определения приведенных физико-механических характеристик композитов слоистой структуры;

– установлено влияния жесткости фланцев на напряженно-деформированное состояние стеклопластиковых труб в зоне их соединения;

– решена контактная задача двух соосных сферических оболочек при действии внутреннего давления, внутренняя оболочка выполнена из стеклопластика, а наружная из металлического сплава;

– на основе метода перемещений разработана методика расчета конструкционной прочности и несущей способности армированных оболочек с межслойными дефектами структуры материала.

Практическое значение полученных результатов. Теоретические и численные результаты диссертационной работы внедрены в научных исследованиях кафедры сопротивления материалов и машиноведения Сумского государственного университета, а также в прикладных научно-технических разработках по усовершенствованию изделий из композиционных материалов: ООО «СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫЕ ТРУБЫ» г. Харьков.

Предложенные методики расчета многослойных элементов конструкций на прочность и несущую способность используются в учебном процессе Сумского государственного университета.

Личный вклад соискателя. Предоставленные к защите положения диссертационной работы получены соискателем лично. В публикациях, изданных в соавторстве, соискателю принадлежат следующие научные результаты:

[1 – 4, 8] – разработана методика моделирования механических свойств многослойного полого цилиндра и выявлены особенности изменения напряжений поперечного сдвига и контактного давления по толщине оболочки в условиях сложного нагружения;

[5, 6, 9] – смоделирована расчетная модель многослойного бруса, когда предполагается упругое проскальзывание сопряженных поверхностей соседних слоев относительно друг друга, доказано, что эта модель более реально отражает картину деформации такого конструктивного элемента;

[7, 17] – составлен алгоритм и решена контактная задача двух соосных сферических оболочек при действии внутреннего давления, внутренняя оболочка выполнена из стеклопластика, а внешняя из металлического сплава;

[10] – проведены расчеты на конструкционную прочность и предельное состояние армированных оболочек с межслойными дефектами структуры материала;

[11, 13] – изготовлено экспериментальное оборудование и предложена экспериментально-теоретическая методика определения технических постоянных стеклопластиковых труб;

[12] – экспериментально установлено влияние жесткости фланцев на напряженно-деформированное состояние стеклопластиковых труб в зоне их соединения;

[14 - 16, 18] – на основе модифицированного полиноминального критерия прочности проведены расчеты несущей способности тонкостенных элементов слоистой структуры с неидеальным межслойным контактом.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием апробированных методов решения краевых задач, физически обоснованных моделей конструкций и материалов, хорошей корреляцией теоретических результатов как с полученными в работе, так и приведенными в литературных источниках экспериментальными и теоретическими данными.

Апробация результатов диссертации. Содержание основных разделов и отдельные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях, симпозиумах и семинарах: 16th, 17th International Scientific Conference “Economic for Ecology ISCD” (Сумы, 2010 – 2011); Международной научно-технической конференции “Прогрессивная техника и технология” (Киев – Севастополь, 2011); Международной научно-технической конференции “Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем и элементов их конструкций” (Севастополь, 2012); научно-технических конференциях преподавателей, сотрудников и студентов Сумского государственного университета (Сумы, 2010 – 2012).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 12 статей в специализированных научных журналах и сборниках Украины, 4 статьи в зарубежных изданиях и 2 – в сборниках трудов научно-технических конференций.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из вступления, 5 глав, выводов, приложения и списка использованной литературы. Диссертация объемом 170 страниц машинописного текста содержит 57 рисунков и 15 таблиц.

Список использованной литературы включает 219 источников и размещен на 24 страницах. Приложения занимают 2 страницы.

1. РАСЧЁТНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДИКИ РАСЧЁТА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

Основная цель данной работе предусматривает решение следующих задач:

1) выбор математической модели тонкостенных конструкций из композиционных материалов с учетом дефектов структуры материала, которые возникают при их изготовлении и эксплуатации;

2) экспериментальная проверка теоретических результатов;

3) создание прикладной методики расчета стеклопластиковых труб и баллонов высокого давления с учетом влияния структурных несовершенств на их конструкционную прочность и несущую способность.

Полученные результаты могут использоваться при разработке новых конструкций или изделий из композиционных материалов для химического машиностроения. Предложенная методика практических расчетов позволит значительно сократить время проектирования, прогнозировать срок и надежность работы таких конструкций.

Обзор публикаций по теме диссертационной работы и основные результаты исследований представлены в работах [1-18].

1.1. Классификация стеклопластиковых труб

Под трубами из полимерных композитных материалов (ПКМ) понимаются стеклопластиковые, базальтопластиковые, органопластиковые или иные трубы (в зависимости от типа армирующего наполнителя) с полимерными связующими из термореактивного материала. Трубы из стеклопластика (СПТ) классифицируются по жесткости, номинальному давлению и внутреннему диаметру.

Под классом жесткости (SN или G) стеклопластиковой трубы подразумевается поперечная жесткость трубы, то есть способность стенок трубы выдерживать нагрузки, приводящие к деформации или сжатию трубы в плоскости, перпендикулярной оси трубы. По жесткости в разных системах стандартизации трубы делятся на следующие классы (таблица 1.1).

Таблица 1.1 - Показатели жесткости труб в различных системах стандартизации

Система стандартизации [19]	Обозначе-ние	Единица измере-ния	Класс жесткости		
			SN2500	SN5000	SN10000
ISO	S_P	Н/м^2 (Па)	2500	5000	10000
DIN	S_R	Н/мм^2 (МПа)	0,02	0,04	0,08
ASTM	F/Δy	Psi	20	40	80

Источник: данные «American Composites manufactures Association» (США).

По давлению трубы классифицируются по номинальному давлению (PN), под которым подразумевается величина безопасного давления воды в МПа при +20°С в течение нормируемого срока службы (обычно 50 лет) с применением коэффициента безопасности (запаса прочности), равного 1,8. Например, стандартные стеклопластиковые трубы фирмы Hobas имеют комбинированные характеристики по рабочему давлению и жесткости, показанные в таблице 1.2.

Таблица 1.2 - Комбинированные характеристики по рабочему давлению и жесткости стеклопластиковых труб

Рабочее давление (МПа)	Класс по давлению (PN)	Класс по жесткости (SN)	Обозначение
0,4	4	2500	4/2500
0,6	6	5000	6/5000
1,0	10	5000	10/5000
1,0	10	10000	10/10000
1,6	16	10000	16/10000
2,0	20	10000	20/10000
2,5	25	10000	25/10000

Источник: данные компании «Hobas».

Доля волокон в материале трубы может составлять от 65% до 85%. Физико-механические характеристики стеклопластиковых труб зависят от закона армирования (направления укладки волокон) и для каждого типа трубы различаются вдоль оси и в окружном направлении (таблица 1.3). Как правило, все производители стеклопластиковых труб стремятся к тому, чтобы прочность в окружном направлении трубы была в два раза выше прочности вдоль оси. Значение окружной прочности стеклопластиковых труб при полном разрушении материала может составлять от 400 до 650 МПа. Для сравнения, временное сопротивление для стали 20 составляет 410 МПа.

Таблица 1.3 - Физико-механические свойства стеклопластиковых труб на эпоксидном связующем, по данным АО «Прогресс», ТУ 2296-250-24046478-95[20]

Наименование показателя	Трубы спиральной намотки с углом намотки 55°	Трубы непрерывной намотки армирование 2:1
Предел прочности при растяжении в тангенциальном направлении, МПа, не менее	240	180
Предел прочности при растяжении в осевом направлении, МПа, не менее	120	80
Модуль упругости в тангенциальном направлении, МПа, не менее	25000	19000
Модуль упругости в осевом направлении, МПа, не менее	12000	8000
Коэффициент линейного теплового расширения (осевой), 1/^{0}С, не более	18x10^{-6}	21x10^{-6}
Плотность, кг/м^3	1800 – 1900	1600 – 1700
Весовое соотношение: стеклонаполнитель – связующее	65 – 72/35 – 28	50 – 55 / 50 – 40
Тангенциальные напряжения при растяжении, МПа, не более	50	35
Осевые напряжения при растяжении, МПа, не более	24	16
Деформация при растяжении, мм/м, не более	0002	0002

Источник: данные компании АО «Прогресс».

Типы стеклопластиковых труб различных производителей разделяются на три группы:

– по типу связующего (матрицы): эпоксидные или полиэфирные;

– по типу соединения труб: клеевое или механическое;

– по конструкции стенки трубы: чистый стеклопластик (без футеровки), стеклопластик с пленочным слоем (футерованные трубы), многослойные конструкции.

1.1.1. Конструкции стенки стеклопластиковых труб. Существенным различием между стеклопластиковыми трубами различных производителей является конструкция стенки.

Стеклопластиковые трубы однослойные (1С). Однослойные стеклопластиковые трубы выполнены из высококачественного стеклопластика получаемого методом «мокрой» намотки. В целях увеличения химической стойкости и снижения коэффициента гидравлического сопротивления на внутренней поверхности труб применяется лейнер.

Лейнер представляет собой двухкомпонентный композит, состоящий из низкоплотного стеклянного материала с пропиткой эпоксидным связующим, содержание которого достигает 60-70% по массе. Толщина лейнера может составлять от 0,2 до 0,8 мм. Основной слой трубы (конструкционный слой) состоит из стеклянных нитей (ровингов), пропитанных эпоксидным связующим. Конструкционный слой обеспечивает заданное соотношение физико-механических характеристик вдоль оси и в окружном направлении трубы.

Стеклопластиковые трубы двухслойные (2С). Двухслойные стеклопластиковые трубы представляют собой двухслойную конструкцию, состоящую из защитного и конструкционного слоев. Защитный слой выполнен из полиэтилена высокого давления (ПВД). Толщина защитного слоя может составлять от 1 до 3 мм. Конструкционный слой выполнен из высококачественного стеклопластика, получаемого методом «мокрой» намотки стеклянных нитей (ровингов), пропитанных эпоксидным связующим.

Стеклопластиковые трубы трехслойные (3С). Трехслойные стеклопластиковые трубы представляют собой трехслойную конструкцию, состоящую из внутренней стеклопластиковой оболочки, защитного и конструкционного слоев. Конструктивно внутренняя оболочка независима от защитного и конструкционного слоев.

Внутренняя оболочка выполнена из стеклопластика методом «мокрой» намотки стеклянных нитей (ровингов), пропитанных эпоксидным связующим. Толщина внутренней оболочки может составлять от 3 до 6 мм в зависимости от внутреннего диаметра трубы. Внутренняя оболочка не несет нагрузок вдоль оси трубы, и ее конструкция имеет большую прочность в окружном направлении.

Защитный слой выполнен из полиэтилена высокого давления (ПВД). Толщина защитного слоя может составлять от 1 до 3 мм. Защитный слой предназначен для повышения химической стойкости трубы и сохранения ее герметичности при действии значительных внешних нагрузок.

Конструкционный слой выполнен из высококачественного стеклопластика, получаемого методом «мокрой» намотки стеклянных нитей (ровингов), пропитанных эпоксидным связующим до требуемой толщины. Конструкционный слой обеспечивает заданное соотношение физико-механических характеристик вдоль оси и в окружном направлении трубы.

1.1.2. Стеклопластиковые трубы на полиэфирном связующем (GRP). Конструкция стенки трубы формируется на основе армированных стекловолокном термореактивных полиэфирных смол и песчаного наполнителя. Применяемая технология позволяет создать структуру стенки трубы с использованием характерных свойств основных сырьевых материалов.

Они обладают важными для производимых труб свойствами: отверждением при комнатной температуре, низкой степенью токсичности, химической инертностью, прочностью сцепки со стекловолокном. В зависимости от сферы применения труб используются разные типы полиэфирных (изофталевая, ортофталевая, бисфенольная, винилэфирная) и других смол.

Толщина стенки трубы определяется ее структурой, включающей в себя несколько слоев. Внутренний слой – лейнер (толщиной 0,8 – 1,2 мм), обеспечивает герметичность, максимальную устойчивость к химической коррозии, к абразивному истиранию, гладкость внутренней поверхности, исключает отложения на стенках трубы.

Структурный слой образуется путем нанесения и намотки на частично отвердевший нижний (лайнер) слоя термореактивного полимера (полиэфирной смолы), непрерывной намотки стекловолокна, рубленных стекловолокон и кварцевого песка.

Наружный слой имеет толщину 0,2–0,3 мм или более, служит для защиты трубы от воздействия солнечного света, агрессивной почвы или коррозионной среды. Обычно он состоит из чистого полимера с добавлением (при наземной прокладке трубопровода) ультрафиолетового ингибитора для защиты трубы от воздействия солнечного света.

Трубы на основе полиэфирных смол устойчивы к коррозии и к не очень агрессивным средам. Они более дешевы, а потому имеют широкую область применения, особенно в водоснабжении.

Трубы из полиэфирных смол не могут применяться при высоких температурах транспортируемой среды (свыше 90^0С) и в условиях высокого давления – свыше 32 атм. Для применения в условиях высокого давления, высоких температур и при контакте с агрессивными средами в мире применяются стекло – базальтопластиковые трубы на эпоксидном связующем.

1.1.3. Стеклопластиковые трубы на эпоксидном связующем (GRE). Стеклопластиковые трубы на эпоксидном связующем способны выдерживать давление до 240 атм. Максимальная температура эксплуатации достигает 130^oС. Стеклопластиковые трубы на основе эпоксидных смол имеют множество преимуществ (таблица 1.4). Волокно, пропитанное эпоксидной смолой, не подвержено коррозии и поэтому не требует изоляции (внутренней или внешней), химических ингибиторов, катодной и анодной защиты и защиты от коррозии. Ещё одним преимуществом является увеличение срока службы насосов и другого встроенного в трубопровод оборудования из-за полного отсутствия в потоке частиц ржавчины. Низкая теплопроводность GRE-труб уменьшает потери тепла из системы трубопроводов, вследствие чего во многих случаях исчезает необходимость в изоляции.

Таблица 1.4 - Сферы применения стеклопластиковых труб на эпоксидном связующем

ЖКХ	Трубопроводы для линий ГВС и теплоснабжения
Нефтедобыча	Внутрипромысловые трубопроводы
	Обсадные и насосно-компрессорные трубы
	Трубопроводы поддержания пластового давления
	Технологические и магистральные трубопроводы
Химическая промышленность	Трубопроводы для транспортировки кислот, их солей и химически агрессивных растворов
	Трубопроводы химводоподготовки
	Шламопроводы и системы золошлакоудаления
Энергетическая промышленность	Системы охлаждения ТЭС (ТЭЦ)
	Системы опреснительных установок

Источник: данные компании «Amiantit».

Отличительной особенностью GRP труб от GRE труб являются габаритные размеры. Как правило, стеклопластиковые трубы на основе полиэфирных смол имеют больший диаметр по сравнению с трубами на эпоксидном связующем.

1.1.4. Типы соединений труб. Трубы и соединительные детали из стекло-базальтопластика изготавливаются под стыковые соединения следующих типов: фланцевый (Ф), бугельный (Б), муфтовый (М), муфтовый клеевой (МК), раструбный (Р), специальный (например, резьбовой) (С).

Наиболее распространенным видам соединений относятся:

1. Раструбно-шиповое соединение с двойным кольцевым уплотнением. Обеспечивает быструю и надежную сборку труб и фасонных элементов. Два эластичных кольцевых уплотнения круглого сечения, устанавливаемые в параллельные окружные канавки на концах труб, обеспечивают герметичность стыка в напорных и безнапорных трубопроводах

2. Раструбно-шиповое соединение с двойным кольцевым уплотнением и стопорным элементом. Для компенсации действия на трубопровод осевых сил (например, в надземных трубопроводах) в раструбно-шиповом соединении применяется стопорный элемент, который устанавливается через отверстие в раструбе в кольцевые пазы на концах труб и препятствует осевому перемещению элементов трубопровода относительно друг друга. В зависимости от уровня

осевых сил стопорный элемент может быть круглого или прямоугольного сечения и выполняться из различных материалов (полиамид, ПВХ, металлический трос).

3. Фланцевое соединение. Используется для соединения элементов стеклопластикового трубопровода с металлическими трубопроводами и арматурой. Присоединительные размеры стеклопластиковых фланцев выполняются по ГОСТ 12815-80 [21].

4. Клеевое стыковое соединение – выполняется путем послойного нанесения на гладкие концы труб армирующих стекломатериалов, пропитанных полиэфирным связующим «холодного» отверждения.

1.1.5. Способы производства стеклопластиковых труб. Стеклопластиковые трубы в мире производятся двумя основными способами: методом центробежного формования и методом непрерывной намотки.

Метод непрерывной намотки. Большинство стеклопластиковых труб в мире изготавливаются методом непрерывной намотки стекловолокна со связующим компонентом (таким, как полиэфирная или эпоксидная смола) на оправку. После намотки труба отверждается, снимается с оправки, испытывается и отгружается заказчику. Схема армирования определяется в результате расчета, выполненного в соответствии с международными стандартами на основании заданных условий монтажа и эксплуатации трубопровода.

Преимущества применения труб, изготовленных по технологии непрерывной намотки: высокая удельная прочность, малый вес (в 4 раза легче стальных труб), высокая коррозионная стойкость, высокая надежность и долговечность, минимальные затраты на монтаж и обслуживание, высокая ремонтопригодность, малое гидравлическое сопротивление, отсутствие "зарастания" внутреннего сечения, экологическая чистота транспортируемых продуктов, длительный срок эксплуатации труб.

Метод центробежного формования. Другим способом изготовления стеклопластиковых труб является центробежное формование – технология, предложенная фирмой Hobas. Процесс производства этих труб протекает в направлении от наружной поверхности к внутренней, с применением вращающейся формы. Труба изготавливается из рубленых стеклянных волокнистых жгутов (ровингов), полиэфирной смолы и песка. Процесс полимеризации смолы происходит под действием катализатора и дополнительно ускоряется путем нагрева. Благодаря трехмерным пространственным химическим связям, процесс полимеризации смолы необратим. Таким образом, стеклопластик (GRP) является термоустойчивым материалом, сохраняющим пространственную стабильность при повышенной температуре окружающей среды.

1.1.6. Стандарты производства стеклопластиковых труб. Российские стеклопластиковые трубы изготавливаются по ТУ (например, ТУ 2296-001-26757545-2005 [22]), разработанными производителями труб и научно-исследовательскими организациями. Эти ТУ приведены в соответствие с международными стандартами ISO и API (Американского института нефти), требованиями российских нормативных документов.

Российскими производителями стеклопластиковых труб предполагается разработать проект национального стандарта Российской Федерации на стеклопластиковые трубы и фасонные изделия, предоставив в технический комитет по стандартизации предварительный проект документа. В стандарте предусмотрены требования к проектированию и контролю качества стеклопластиковых труб и соединительных деталей, обеспечивающих необходимый уровень безопасности, надежности и долговечности трубопроводных коммуникаций. Введение документа обусловлено отсутствием единого стандарта регламентирующего требования к производству и качеству стеклопластиковых труб, что позволяет выходить на рынок производителям с заведомо не качественной продукцией, дезориентирующих потребителей. Сейчас проект документа проходит процедуры согласования, в соответствии с правилами проведения процесса стандартизации.

В мире стеклопластиковые трубы изготавливаются по следующим стандартам: ASTM, AWWA, BSI, DIN, ISO, KN.

При производстве, стеклопластиковые трубы проходят квалификационные и контрольные испытания, а также тестируются на химическую устойчивость.

Существует несколько стандартов ASTM, распространяющихся на стеклопластиковые трубы разного назначения. Все стандарты применимы к трубам диаметром от 80 до 4000 мм с применением гибких соединений при проведении гидростатического испытания в контуре (по ASTM D4161 [23]), имитирующем превышение параметров последующей эксплуатации. Эти стандарты включают много строгих квалификационных испытаний и тестов по контролю качества.

Стандарт AWWA C950 [24] – наиболее исчерпывающий из всех стандартов на стеклопластиковые трубы. Для напорных труб этот стандарт содержит обширные требования к трубам и соединениям, методы контроля. Подобно ASTM это стандарт качества продукции. Недавно вступило в силу новое руководство AWWA M-45 [25], включающее несколько глав по стеклопластиковым трубам для подземного и надземного монтажа.

Международная организация по стандартизации (ISO) и Европейский комитет нормирования (EN) активно пополняют существующие документы новыми стандартами на продукцию и соответствующими методами испытаний. Общим для всех стандартов является требование к производителям труб обеспечить соответствие выпускаемой продукции минимуму стандартов, характеризующих ее качество. В случае стеклопластиковых труб в этот минимум входят как начальные, так и долговременные требования. Самыми важными из них являются требования к соединениям, начальная и долговременная деформация, долгосрочная способность выдерживать давление и долговременная коррозионная стойкость. Трубы СПТ строго тестируются для подтверждения их соответствия требованиям стандартов ASTM D3262 [26], ASTM 33517 [27], AWWA C950 [24] и DIN 16868 [28].

Отдельно следует отметить, что номинальное давление стеклопластиковых труб серийного производства достигает показателя 40 МПа. При этом ряд производителей СПТ отмечают, что возможно производство труб и большего номинального давления.

1.1.7. Производство и потребление стеклопластиковых труб в мире. Крупнейшими потребителями стеклопластиковых труб являются страны Северной Америки: США и Канада. На долю этих стран приходится более трети (36%) потребления стеклопластиковых труб в мире.

На долю стран Западной Европы приходится свыше 19% совокупного потребления. Наиболее развито потребление стеклопластиковых труб в Италии, Испании, Великобритании и Германии. В северных странах Западной Европы: Швеции, Дании, Финляндии и Норвегии потребление стеклопластиковых труб развито слабо.

Чрезвычайно развито потребление СПТ в странах Ближнего Востока. На их долю приходится до 12% мирового потребления. В данном регионе СПТ преимущественно используются в нефтяной промышленности. Вместе с тем потребление СПТ при транспортировке воды является наиболее динамично развивающимся направлением по сравнению с другими. Доля СНГ составляет менее 2% в совокупном объеме потребления СПТ в мире.

Можно выделить следующие отрасли, выступающие основными потребителями стеклопластиковых труб. Крупнейшими потребителями стеклопластиковых труб в мире выступают предприятия химической промышленности. В данной отрасли практически не существует адекватной альтернативы стеклопластиковым трубопроводам. В химической промышленности (до 80%) используются стеклопластиковые трубы на эпоксидной основе, изготовленные методом непрерывной намотки. На долю предприятий химической промышленности приходится треть (32%) потребляемых в мире стеклопластиковых труб.

На долю предприятий нефтегазовой промышленности приходится 28% мирового потребления стеклопластиковых труб.

Основные области применения стеклопластиковых труб нефтяными и газовыми предприятиями:

– выкидные трубопроводы от скважин для транспортирования продукции нефтяных скважин до замерных установок;

– насосно-компрессорные трубопроводы;

– водоводы поддержания пластового давления для транспортировки пресной, пластовой и подтоварной воды на КНС (кустовой насосной станции);

– нефтепроводы для транспортирования товарной нефти от центральных пунктов сбора и подготовки нефти до сооружений магистрального транспорта;

– изолирующие вставки газопроводов.

В магистральных нефтепроводах и газопроводах стеклопластиковые трубы не применяются.

1.1.8. Нефтедобывающая промышленность Ирака. Ирак занимает второе место в мире по доказанным запасам нефти, уступая лишь Саудовской Аравии. Объем доказанных запасов нефти в Ираке составляет около 15 млрд тонн, а по прогнозным данным такой запас составляет около 29,5 млрд тонн.

Экспорт нефти Ирака превзошел довоенный уровень и на 31 декабря 2011 года составил цель 3.26 млн баррелей в день. На данный момент в Ираке активно работают известные международные нефтяные корпорации – Китайская национальная нефтяная корпорация, компании Eni, Exxon Mobil, Shell.

Руководство Ирака надеется, что объем добычи нефти в течение ближайших семи лет будет около 12 млн баррелей в день и составит около четверти поставок ОПЕК. За это время правительство и руководство нефтяных компаний планирует пробурить 4500 новых скважин в областях Румейла и Западная Курна.

1.2. Современное газобаллонное оборудование. Основные требования

Классификацию цилиндрических баллонов высокого давления для хранения природного газа даёт международный стандарт ISO 11439-2003 [29] и ГОСТ Р 51753-2001 [30]:

Таблица 1.5 - Классификация баллонов высокого давления

CNG-1 (compressed natural gas), СПГ-1 (сжатый природный газ).	Цельнометаллические без применения сварки, изготовленные из легированной или углеродистой стали бесшовные баллоны.
CNG-2, СПГ-2.	Металлопластиковые баллоны, которые состоят из металлического лейнера и внешней несущей цилиндрической оболочки из композиционного материала.
CNG-3, СПГ-3.	Металлопластиковые баллоны, которые состоят из металлического лейнера и внешней несущей оболочки из композиционного материала по всей поверхности лейнера.
CNG-4, СПГ-4.	Баллоны из композиционных материалов.

Выбор типа баллона потребителем определяется не только ценовыми соображениями, но и ограничениями по массе баллонов, устойчивостью к ударам, газонепроницаемостью, циклической долговечностью и т.д. Дополнительно вводятся ограничения, учитывающие совместимость материала сосуда с заполняемым его техническим газом. Такие ограничения оговорены в международных стандартах: с металлами – в EN ISO 11114-1, с композиционными материалами - в EN ISO 11114-2 и EN ISO 11114-3 [31].

1.2.1. Цилиндрические газовые баллоны. По данным информационного бюллетеня Национальной газомоторной ассоциации России [32] доля цилиндрических металлопластиковых баллонов с армирующей оболочкой по всей поверхности сравнительно невелика и, как правило, приходится на рынки технологически развитых стран. Также следует обратить внимание на соотношение удельной массы и цены за литр: металлопластиковые баллоны с армирующей оболочкой по всей поверхности имеют почти оптимальное соотношение цена-качество (таблица 1.6).

Таблица 1.6 - Баллоны высокого давления

Тип баллона*	Удельная масса, кг/л	Цена, US$/л	Доля на рынке, %
СПГ-1, цельнометаллические.	0,9	3 - 5	90
СПГ-2, металлопластиковые.	0,7 - 0,9	5 - 7	4
СПГ-3, металлопластиковые.	0,6 - 0,9	9 - 14	1
СПГ-4, баллоны из композиционных материалов.	0,3 - 0,5	11 - 18	3

- - описание по ISO 11439-2003.

Для снабжения топливом одного двигателя внутреннего сгорания требуется от 2 – 3 баллонов для легковых автомобилей и больше 10 для грузовых автомобилей, тракторов или тепловозов. Габариты существующих транспортных средств ограничивают размеры баллонов. Кроме того, стальные газовые баллоны (СПГ-1) заметно снижают грузоподъёмность автомобилей и требуют тем больших затрат топлива на собственную перевозку, чем они массивнее. При этом они работают в условиях циклических термомеханических нагрузок.

Металлопластиковые баллоны высокого давления с армирующей оболочкой по цилиндрической части – следующий шаг к решению проблемы производства экономичных, простых в изготовлении и надёжных сосудов высокого давления. Данная проблема решается путем применения комбинированных баллонов, в которых герметичная металлическая оболочка объединяется с силовой оболочкой из композиционных материалов. Кроме того, в конструкцию баллона могут вводиться дополнительные слои, выполняющие защитную и другие функции. Таким образом, баллон образовывается соединением слоёв с разным функциональным назначением.

Производством баллонов высокого давления 2 -го типа также занимаются фирмы: MCS Cylinder Systems (Германия); Орский машиностроительный завод (Россия); Компания ЛЕМ (Россия); Котласский электромеханический завод (Россия); Pressed Steel Tank (США); SCI (NGV Systems) (США); Luxfer Gas Cylinders (США).

Фирма DYNETEC Industries (Канада) – известный производитель металлопластиковых баллонов, конструкция которых включает лейнер из алюминиевого сплава и оболочку из углепластика по всей поверхности (тип СПГ-3). Алюминиевый лейнер изготавливается из трубной заготовки. Максимальный диаметр выпускаемых фирмой баллонов до последнего времени составлял 406 мм. В последнее время фирмой разработан баллон диаметром 520 мм [33].

Производством баллонов высокого давления 3 –го типа также занимаются фирмы: Raufoss (Норвегия); НПФ Шторм (Россия); SCI (NGV Systems) (США); Luxfer Gas Cylinders (США); Kokan Drum / Dyneteck (Япония).

Новая конструкция баллона третьего типа предложена в [34]. Комбинированный баллон давления содержит внутреннюю полиэтиленовую оболочку, несущую стеклопластиковую оболочку, цилиндрическая часть которой выполнена в виде набора тороидальных сегментов. В торцевых участках несущей стеклопластиковой оболочки расположены формирующие детали сферических днищ. Тороидальные сегменты усилены в местах их стыка шпангоутами. Кроме того, несущая стеклопластиковая оболочка защищена с внутренней стороны полиэтиленовой оболочкой, а с наружной – металлической обшивкой, которая состоит из круговой цилиндрической оболочки и сферических днищ, контактирующих со сферическими днищами несущей стеклопластиковой оболочки.

Фирма Lincoln Composites (США) является мировым лидером в производстве композитных баллонов 4 типа (СПГ- 4). Производством баллонов высокого давления 4 –го типа также занимаются фирмы: ДОАО "Оргэнергогаз" (Россия); ОКБ "Союз" (Россия); Quantum Technology (США); Ulitt (Франция); Composite Aquitaine (Франция).

В соответствии с требованиями международного стандарта [29], расчетное давление разрушения баллонов, изготавливаемых с использованием полимерных композиционных материалов, должно определяется на основании анализа напряжений, действующих в волокне. Требование по запасу прочности баллонов возрастает в ряду: углеродное волокно, органическое волокно, стеклянное волокно.

1.2.2. Существующие методики расчета баллонов слоистой структуры. Для проектирования и расчета баллонов давления из композиционных материалов на практике применяются два подхода.

Согласно первому подходу волокна композиционного материала распределены некоторым заданным образом, а полимерная матрица представляется однородным материалом с изотропными свойствами. Исходя из предпосылки малости диаметра отдельного волокна по сравнению с толщиной конструктивного элемента, определяются осредненные упругие постоянные слоёв материала в зависимости от упругих постоянных волокон и связующего, их объемного содержания в материале и схем армирования.

Расчетные модели тонкостенных конструкций баллонов многослойной структуры из анизотропных материалов по первому подходу изложены в подразделе 1.3.

Второй подход моделирует оболочку из композиционного материала упругими нитями, которые при натяжении воспринимают всю внешнюю нагрузку. Равновесное состояние рассматриваемой конструкции для заданных нагрузок обеспечиваются равновесием каждой отдельно взятой нити. Связующее принимается упруго податливым и служит для создания монолитности структуры материала, а его несущая способность не учитывается. Этот метод расчета оболочек называется "сетчатым анализом". Обычно применяется для оценочных расчётов на начальном этапе проектирования.

Считается, что первый подход даёт более точные результаты. Следует отметить, что при 10-20% нагрузке от её разрушающего значения в однонаправленном композиционном материале начинается растрескивание связующего [35, 36]. Момент растрескивания на кривой в терминах деформация - напряжения характеризуется точкой перегиба, после чего упругие постоянные и обобщенные характеристики жесткости материала меняются. В результате влияния остаточных напряжений, вызываемых близко расположенными волокнами, предел прочности однонаправленного композиционного материала поперек волокон значительно уменьшается [37, 38]. Вследствие этого разрушение связующего наступает уже при начальном этапе нагружения и далее внешняя нагрузка воспринимается преимущественно волокнами. Этими соображениями обосновывается проектирование конструкции на основе «сетчатого анализа» [39].

На основании второго подхода предложены следующие методики проектирования оптимальных по массе конструкций, в которых расчётная нагрузка вызывает безмоментное напряженное состояние оболочки и воспринимается в основном волокнами. Здесь критерием оптимальности принимается условие равно напряжённости всех нитей [39 - 41].

Отдельно следует отметить третий подход при проектировании сосудов высокого давления. Поскольку разрушение стеклопластиковых оболочек из-за слабого сопротивления поперечному отрыву и межслойному сдвигу происходит задолго до достижения напряжениями предельных значений. При действии нагрузки, ввиду особенностей технологического характера и физико-механических свойств армированных пластиков, на границах контакта сопряженных слоёв происходит образование тонких неоднородных межфазных прослоек, различного рода несовершенств, например, участков отслоения или непроклея. В этом случае предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта может оказаться существенно нарушенным. Третий подход состоит в моделировании участков ослабленного контакта на межфазных границах на основе дискретно-структурной теории тонких пластин и оболочек. Решение контактной задачи сопряжения жестких анизотропных слоев представлено двумя расчетными моделями. Согласно первой модели [42] контакт жёстких слоев осуществляется при помощи клеевой прослойки ненулевой толщины. При этом допускается, что на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, поэтому в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями. Для второй модели [43] характерно выполнение статических условий контакта по поверхности сопряжения отдельных слоев. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. При этом допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев. Дополнительно производится оценка достоверности результатов расчётов двух моделей при помощи непрерывно-структурной модели теории пластин и оболочек (первый подход). Здесь кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматриваются как квазиоднородная с приведенными упругими характеристиками. При этом считается, что выполняется допущение об идеальном жестком контакте смежных слоев.

1.3. Расчетные модели многослойных конструкций

Теория тонкостенных конструкций из композиционных материалов является одним из важных разделов современной механики деформируемого твердого тела. Анализ целого ряда обзоров [37, 44 - 55] показывает, что все исследования по вопросам механики тонкостенных армированных элементов проводятся в трех основных направлениях.

Первое направление связано с выбором математических моделей тонкостенных элементов конструкций. Принятая математическая модель сравнивается с её классическим аналогом по уровню учета тех или иных внутренних силовых факторов, по адекватности постановки краевых задач неоднородной структуре композиционного материала. Для второго направления характерно обоснование предложенных моделей, установление связи между ними и пространственными задачами теории упругости. По третьему направлению проводится анализ методов решения различных классов задач и исследование влияния геометрических и механических параметров и нагрузок на поля напряжений и перемещений, предлагаются варианты использования полученных результатов расчета при проектировании тонкостенных элементов конструкций различного назначения.

Основы классической теории анизотропных оболочек получили детальное отражение в монографиях С. А. Амбарцумяна [56, 57], Я. М. Григоренко [58], В. И. Королёва [59] и С. Г. Лехницкого [60]. Подробная библиография по классической теории анизотропных пластин и оболочек имеется в обзоре Э. И. Григолюка и Ф. А. Когана [61]. Подчеркивается, что эта теория "является корректной для тонких изотропных и слабо анизотропных оболочек, у которых жёсткости слоёв одного порядка (расчётные схемы слоёв эквивалентны)".

Как известно, потеря несущей способности слоистых систем при действии сжимающей нагрузки из-за слабого сопротивления поперечному отрыву и межслойному сдвигу происходит задолго до достижения напряжениями предельных значений. Поэтому при расчетах на прочность и устойчивость тонкостенных элементов, имеющих слои пониженной жесткости, классическая теория оказывается неприемлемой. Указанные несоответствия классической модели и реальных условий деформирования материала слоистых конструкций стали основной причиной создания уточненных теорий анизотропных пластин и оболочек, которые учитывают поперечные деформации сдвига и обжатия. Анализ подходов к построению математических моделей на основе уточненной теории слоистых тонкостенных конструкций содержится в работе [62].

Первый вариант уточненной неклассической теории принадлежит С.П.Тимошенко [63]. При решении задачи изгибных колебаний балки он вводит дополнительный угол поворота поперечного сечения, возникающий из-за деформаций поперечного сдвига. Модель, предложенная С.П.Тимошенко, получила широкое обобщение в теории однородных и анизотропных пластин и оболочек.

Неклассическая теория пластин впервые построена Э. Рейсснером [64]. При её построении в качестве исходных гипотез взяты основные расчётные напряжения – тангенциальные компоненты тензора напряжений. Для них принят линейный закон, который соответствует допущению о линейном изменении тангенциальных перемещений – гипотеза прямой линии. Получена система из двух уравнений. Первое уравнение четвертого порядка характеризует изгиб пластины. Второе уравнение второго порядка описывает напряженное состояние, которое носит местный характер и быстро затухает при удалении от края пластины. А. Л. Гольденвейзер [65] предложил называть это состояние “краевым эффектом Рейсснера”, подчеркивая качественное отличие от краевого эффекта в оболочках. В указанной статье также отмечено, что в краевой зоне теория Э. Рейсснера может давать результаты далекие от действительности. А. П. Прусаков на основе энергоасимптотического метода [66] подтвердил это мнение, показав, что напряжения в заделке пластины средней толщины значительно превосходят те, которые дает теория Э. Рейсснера.

В работе [67] были получены показатели изменяемости краевого эффекта Рейсснера, а также потенциального и вихревого погранслоев, находящиеся в соответствии с точным решением А. И. Лурье [68].

Развитие неклассическая теория оболочек и пластин получила в трудах: С. А. Амбарцумяна [56, 57, 69, 70], В. В. Васильева [71], Б. Ф. Власова [72], И. И. Воровича, [73], Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко [74 - 76], Э. И. Григолюка, И. Т. Селезова [46], А. Н. Гузя, И. Ю. Бабича, Я. М. Григоренко [77], Л. Г. Донелла [78], Х. М. Муштари, А. Г. Терегулова [79, 80], П. М. Нагди [81], Б. Л. Пелеха [82], А. П. Прусакова [83], О. Ф. Рябовым [84] и других ученых. Особенно эффективными при построении уточненных теорий пластин и оболочек оказались методы, в основу которых положены обобщенные вариационные принципы теории упругости [85 - 89].

Анализу и сопоставлению моделей пластин типа Тимошенко и Рейсснера посвящены работы В. В. Васильева [90] и В. Г. Пискунова, А. О. Рассказова [62]. Отмечается, что в рассматриваемых вариантах непрерывно-структурных моделей теории слоистых пластин и оболочек видна преемственность неклассических теорий однородных конструкций. Сохраняется общее противоречие, свойственное этим теориям: несоответствие между геометрической моделью, учитывающей искривление нормали, и системой внутренних усилий, которая отвечает гипотезе прямой. Это противоречие, как показано в работе [91], вносит погрешность в результаты решения и сокращает область применения теории. Дальнейшее развитие теории дано в [92 - 94]. Обобщение рассмотренной теории содержится в монографии [95].

Обобщение модели Тимошенко для расчета многослойных оболочек выполнено Э. И. Григолюком и Г. М. Куликовым [96]. Здесь, в частности, разработан энергетический критерий определения коэффициента сдвига для слоистой структуры. В работах В. В. Пикуля [97 - 99] предлагается вариант физически корректной прикладной уточненной теории оболочек, где на основе метода минимизации невязок учтена повышенная податливость оболочки в поперечных направлениях. Метод взвешенных невязок используется при построении уточненной теории анизотропных оболочек в [100, 101].

Неклассические теории пластин и оболочек в последнее время активно развиваются. Так в [91, 102, 103] показано, что вектор перемещений и, соответственно, тензоры деформаций и напряжений должны включать слагаемые, которые учитывают поперечное обжатие от непосредственного приложения внешних нагрузок.

Имеются классы задач механики деформируемого твердого тела, в которых учет поперечного обжатия оказывает определяющее влияние на результат. Это задачи контакта пластин и оболочек с жесткими телами (штампами), а также задачи взаимного контакта оболочек. Для таких задач, как показано в [41], учёт поперечного обжатия необходим для того, чтобы установить реальную картину распределения напряжений по области контакта, т.е. контактных напряжений. Проблема учета напряжений и деформаций поперечного обжатия проанализирована в [104].

Обоснование допущений неклассических моделей неоднородных оболочек осуществляется, как правило, двумя различными способами. Один из них заключается в сопоставлении полученных на их основе значений напряжений и перемещений с данными точных или достаточно точных решений отдельных классов задач трехмерной теории упругости [72, 58, 105, 106]. Последний обзор по аналитическим методам решения трехмерных задач статики анизотропных тел представлен в работе Ю. Н. Немиша [107]. Для второго подхода характерно, что соответствующее обоснование проводится асимтотическими методами [74, 68, 79, 108 - 111].

Эти методы построения двухмерных моделей упругого деформирования тонкостенных тел, учитывающих влияние поперечных деформаций, основаны на разложении в ряды по системам функций некоторого малого параметра перемещений и напряжений. Как правило, предполагается, что толщина оболочки значительно меньше других характерных геометрических размеров оболочки. Анализ по асимптотическим методам приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным моделям содержатся в работах [76, 107, 112].

А.С.Сахаровым и его соавторами [113] предложена математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем, являющаяся обобщением модели Тимошенко. Перемещения имеют две ступени аппроксимации. Первая основана на гипотезе прямой линии, а вторая вводит эту гипотезу послойно, т.е. гипотезу ломаной для пакета слоев. Достоинство модели состоит в простоте реализации, т.к. система разрешающих уравнений включает только дифференциальные операторы второго порядка.

Развитием данного направления является итерационно-аналитическая процедура построения разрешающих соотношений теории слоистых систем, изложенная в монографии [114]. В основе процедуры лежит принцип стационарности полной энергии деформации. Здесь также получило развитие моделирование процессов разрушения (расслоения) многослойных композитных оболочек.

Соотношения упругости в рассмотренных выше вариантах уточненных теорий анизотропных тонкостенных конструкций включают интегральные (приведенные) жёсткостные характеристики, что не позволяет в достаточно полной мере оценивать влияние неоднородности механических параметров по толщине. Обычно в теории тонких многослойных пластин и оболочек с идеальным сцеплением между слоями применяются два различных подхода к построению уточненных двумерных теорий [61], называемых сейчас часто структурно-непрерывным (феноменологическим) и дискретно-структурным.

При феноменологическом подходе кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками. Порядок получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоёв. При дискретно-структурном подходе учитывается неоднородность строения оболочки введением кинематических или статических (или кинематических и статических) гипотез для каждого отдельного слоя. Порядок получающихся при этом уравнений зависит от числа слоев, но эти уравнения позволяют учитывать локальные эффекты на границах контакта слоев. Поэтому именно дискретно-структурный подход оказался пригодным, в частности, для расчета многослойных конструкций с разного рода несовершенствами поверхностей контакта слоев.

Отдельно следует выделить класс задач, связанных с расчетом трехслойных пластин и оболочек [115 - 117]. Такие конструкции включают в себя два несущих слоя и заполнитель, обеспечивающий их совместную работу. Для вывода уравнений трехслойных конструкций кинематические гипотезы применяются для каждого отдельного слоя. В этой связи порядок таких уравнений будет определяться количеством слоев. Обзор результатов многочисленных исследований напряженно-деформированного состояния, устойчивости и колебаний трехслойных оболочек и пластин можно найти в работах Э. И. Григолюка, Ф. А. Когана [61], Л. М. Куршина [52], Л. Либреску, Т. Хаузе [118], А. Нура [119].

Уравнения многослойных пластин с произвольным количеством слоев были построены В. В. Болотиным [120 - 122] применительно к армированным слоистым средам. Здесь многослойные пластины представлены как системы чередующихся жестких и мягких слоев. Мягкие слои определяются свойствами связующего и воспринимают поперечные касательные напряжения. Для жестких слоев справедлива гипотеза прямой нормали. Развитие этого подхода получило обобщение в монографии В. В. Болотина и Ю. Н. Новичкова [40]. Здесь представлена модель многослойных сред из произвольного числа слоев при широких предположениях об их свойствах. Как предельный вариант общей модели предложена теория слоистых композиционных материалов мелкослоистой структуры.

Следует отметить, что при постановке, учитывающей трехмерный характер работы каждого слоя, послойном удовлетворении условий на торцах, дискретно-структурная теория позволяет с высокой степенью точности описать как общее напряженно-деформированное состояние, так и локальные эффекты в слоях, например, местную потерю устойчивости.

При расчетах слоистых оболочек часто приходиться учитывать различного рода несовершенства, то есть начальные прогибы срединной поверхности несущих слоев, непроклеи и т.д. В этой связи более предпочтительной оказывается дискретно-структурная теория многослойных оболочек, исходная математическая модель которой учитывает специфику работы каждого отдельного слоя. Трудоёмкость задач значительно возрастает, если на участке расслоения учитывается контакт слоёв.

1.4. Численное моделирование напряженного состояния и экспериментальные исследования слоистых конструкций

Наиболее эффективный и универсальный численный метод механики деформируемого твердого тела – метод конечных элементов (МКЭ). В [102] принята следующая классификация конечных элементов (КЭ) кусочно-неоднородной (слоистой) структуры: пространственные или трехмерные КЭ; специализированные двумерные КЭ для расчета трехслойных конструкций; двумерные КЭ для расчета слоистых систем с произвольным количеством слоев [123 - 126].

Другое направление численно-аналитических подходов положено рядом работ Я. М. Григоренко и его соавторами [74, 58, 75, 127], где при помощи различных аналитических приёмов соотношения рассматриваемой математической модели оболочки или пластины сводятся к системе дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Краевые задачи при этом решаются устойчивым численным методом, как правило, методом дискретной ортогонализации Годунова [128].

Наличие локальных и краевых эффектов, которые вызваны неоднородной структурой новых конструкционных материалов, высокой изменяемостью внешней нагрузки, способом крепления краев конструкции, накладывает определенные условия разрешимости краевых задач и обуславливает неустойчивость счета в процессе численной реализации задачи. В последнее время для таких задач широко используется математический аппарат сплайн – функций [114], преимуществом которого заключается в высокой устойчивости сплайновых аппроксимаций относительно различного рода локальных возмущений, быстрой сходимости, простотой и удобством реализации алгоритмов. Обзор работ по теории пластин и оболочек с использованием метода сплайновой аппроксимации содержится в [129]. К численно-аналитическим подходам также следует отнести методы, в которых на основе гибридного подхода используется комбинация методов конечных разностей и граничных элементов, а также метода рядов Фурье и метода граничных элементов.

Для научного обоснования теории слоистых систем был выполнен ряд экспериментальных исследований, цель которых состояла в выявлении особенностей деформирования этих систем и обоснования положений теории. Данные об экспериментальных работах сравнительно немногочисленны [94, 95, 130 - 139]. Первоначально эксперименты были поставлены и проведены для трехслойных конструкций.

Данные испытаний на изгиб трехслойных элементов конструкций содержатся в работах А. Я. Александрова, Л. Э. Брюккера, Л. М. Куршина [130], Л. Э. Брюккера [133], В. И. Королева [135], Э. С. Остерника [136]. Экспериментальные образцы [130, 133, 135] представляли собой пластины прямоугольной формы с наружными алюминиевыми слоями и пенопластовым заполнителем. Исследовалось влияние величины модуля сдвига заполнителя, условий закрепления торцов, геометрических размеров пластины и соотношений толщины заполнителя к толщине наружных слоев на напряженно-деформированное состояние трехслойных конструкций. В [136] экспериментально на примере изгиба трехслойной балки был подтвержден нелинейный закон распределения по высоте балки тангенциальных перемещений, подтверждает обоснованность применения неклассической теории.

Экспериментальные данные для пластин симметричной структуры с числом слоев больше трех приведены в работах [94, 95, 139].

В [94, 95] результаты получены для шарнирно закрепленных пластин решением в тригонометрических рядах, а для остальных случаев закрепления численно - МКЭ. Данные эксперимента хорошо согласуются с теоретическими результатами.

Экспериментально изучено и теоретически доказано влияние поперечных сдвигов на прогиб и несущую способность при изгибе свободно опертых квадратных пластин из стеклопластика в работе [139]. Кроме того, здесь на примере изгиба многослойных свободно опертых балок, нагруженных двумя сосредоточенными силами, экспериментально и теоретически исследуется искривление поперечных сечений.

Несущая способность стеклопластиковых трубчатых образцов при осевом растяжении в зависимости от величины угла укладки слоев перекрестно армированного композита теоретически и экспериментально изучалась авторами работы [131].

Испытания тонкостенных труб из стеклопластика [134, 137, 138] проводились на растяжение и кручение, внутреннее и внешнее давление, также было изучено напряженно-деформированное состояние образцов при действии на них различного рода сочетаний указанных видов нагрузки. Все образцы труб испытывались до разрушения. Экспериментальная проверка наиболее распространенных критериев прочности Мизеса-Хилла, Фишера, Прагера, Веррена, Норриса, Ашкенази для композиционных материалов проведена в [137].

Методика определения масштабных коэффициентов подобия физико-механических характеристик конструкций из стеклопластика предложена в работе [132]. Для экспериментальной проверки этой методики из стеклопластика разных размеров были изготовлены образцы в виде пластинок, призм и колец. Результаты испытаний серии крупномасштабных и мелкомасштабных образцов показали, что существует простое подобие в статистическом смысле в пределах 12%.

Образцы [140], полученные спиральной намоткой пропитанного смолой базальтового жгута на цилиндрическую металлическую оправку, испытывались на разрыв и сдвиг пластикового слоя до его разрушения. Разрыву пластикового слоя при растяжении предшествовало разрушение на поверхности раздела металл – пластиковый слой вследствие распространения межфазной трещины.

1.5. Расчеты на прочность конструкций из композиционных материалов

Различные стороны современной механики композитов отражены в монографиях [71, 48, 144, 53, 141 - 146] и обзорах [43], [147, 148], [149 - 151]. Исследования в области теории слоистых композитных систем показали, что при воздействии на них силовых полей, изменяемость которых описывается длинами волн, существенно превышающими размеры структурных элементов, композит можно рассматривать как однородный анизотропный материал. Специфика заключается только в том, что коэффициенты уравнений состояния эквивалентного анизотропного материала будут зависеть от свойств составляющих композит компонентов.

В настоящее время достаточно полно разработаны и обоснованы методы определения эффективных характеристик композита, если его поведение описывается обобщенным законом Гука [122, 142], и значительно в меньшей степени, если он деформируется нелинейно или упруго-пластически [152, 143]. Такой подход позволяет осуществлять расчет конструкций из композитов методами теории упругости анизотропного тела [56, 59, 75, 153 - 156].

Однако следует признать, что модель композита как анизотропного тела является приближенной, так как она не учитывает эффектов микромеханического характера [48, 142]. Все же она оказалась весьма обоснованной при определении таких интегральных характеристик как перемещения, усилия и моменты, критические нагрузки и частоты колебаний оболочек.

Экспериментально и теоретически показано [37, 152, 157], что слоистые композиционные материалы из-за высокой анизотропии прочностных свойств элементарных слоев, начиная с некоторого уровня нагружения, проявляют свойства неупругости. Слои, для которых критерий прочности выполняются раньше при росте нагрузки, перестают воспринимать дополнительную нагрузку. Происходит перераспределение нагрузки на не разрушенные слои. В целом слоистый пакет сохраняет несущую способность, однако его жесткость изменяется в процессе нагружения. Проявление неупругости волокнистых композитов на макроуровне может быть также следствием устойчивого процесса накопления или развития микротрещин в структуре материала.

В работе [142] предложены методы определения эффективных характеристик материала при наличии трещин на границе волокно – связующее. Эти методы можно использовать для определения модулей материала на каждом этапе нагружения, если известны размеры трещин при достигнутом уровне нагружения.

Различные критерии прочности соединения слоёв при наличии расслоений, виды и модели разрушения, а также экспериментальные методы определения сопротивления композитов расслоению рассматриваются в [158 - 170].

Прогнозирование прочностных характеристик композиционного материала методами структурного моделирования в ряде случаев приводит к неверным результатам не только в количественном, но и в качественном отношении. Это объясняется тем, что разрушение композита является многофакторным физически неоднородным процессом [171], где физико-механические характеристики элементов композиции играют важную, но не определяющую роль. Процессу макроразрушения композита, который обычно приводит к полной утрате его функциональных качеств как конструкционного материала, предшествует более или менее длительный период зарождения, взаимодействия и развития в объеме композита различных микродефектов, о чем свидетельствуют данные сейсмоакустических, рентгеноструктурных и других методов исследования [172].

На прочность конструкции из композиционного материала существенное влияние оказывают ее размеры, форма и характер нагружения (скорость нагружения, вид прикладываемой нагрузки, взаимодействие различных видов нагрузки между собой и такие сопутствующие факторы, как температура, влажность, радиация и т. п.) [173 - 182]. Кроме того, разрушение композиционного материала является стохастическим процессом [183 - 191].

Структурный подход к оценке макропрочности композита состоит в определении зависимости характеристик макроразрушения композита, так называемых характерных прочностей [144, 192 - 201], от характеристик прочности структурных элементов и параметров макроструктуры композита. При этом характеристики прочности структурного элемента определяются экспериментально или теоретически в результате расчета его совместной работы структуры и исходных элементов.

В случае если потеря несущей способности конструкции из композита связывается с начальными стадиями процесса разрушения конструкционного материала или разрушение конструкции рассматривается как развивающийся во времени процесс, то учитываются состояния отдельных структурных элементов, а на микроуровне - исходных элементов композиции. Такая группа критериев, задающих условия достижения соответствующих предельных состояний композита называется критериями начального разрушения. Критерии начального разрушения, описывающие условия возникновения дефектов структуры композита, предложены в работах А. М. Скудры и Ф. Я. Булавса [202, 203].

Для композитов с пластической матрицей начало разрушения связывают с возникновением в связующем пластических деформаций. В качестве критерия начального разрушения для таких материалов выбирается одно из условий пластичности (текучести) [144], при этом поверхность начального разрушения композита будет совпадать с поверхностью текучести материала связующего.

В случаях, когда ранние стадии разрушения конструкционного материала по условиям эксплуатации конструкции допустимы или разрушение материала рассматривается на более высоких структурных уровнях, начало разрушения композита связывают с разрушением отдельных структурных элементов соответствующего порядка. Так для слоистых композитов применяется послойный анализ разрушения [157, 204, 205].

Идея послойного анализа разрушения слоистого композита состоит в оценке несущей способности каждого монослоя пакета с последующим исключением из рассмотрения разрушенных и пересчёте НДС. Процедура прекращается после выполнения критерия макроразрушения слоистого пакета. Такой подход обобщается на случай произвольного структурного элемента композита, деформативные и прочностные характеристики которого известны.

1.6. Выводы по первой главе

Обобщая изложенное, отметим следующее. К настоящему времени выполнено значительное число работ, посвящённых созданию методов расчёта на прочность оболочек из композиционных материалов слоистой структуры, но ни одна из существующих разработок не содержит достаточно эффективного метода расчёта многослойных стеклопластиковых труб и комбинированных баллонов высокого давления с учетом слоистой структуры пакета, анизотропии упругих свойств материала, схемы армирования, характерных конструктивных факторов, особенностей совместной работы и условий контакта слоёв.

Следует отметить, что большая часть расчетов на прочность анизотропных оболочек и пластин в соответствии с допущениями макроподхода проводится в геометрически и физически линейной постановке. Хотя, как показали расчеты на прочность сосудов высокого давления из стеклопластиков [131], уже при нагрузках, равных 15 – 20% от разрушающих, значения напряжений в отдельных слоях оболочки выше пределов прочности однонаправленного материала.

Актуальными по-прежнему остаются вопросы экспериментальной проверки различных моделей, учитывающих дефекты структуры композиционного материала, разработка пакетов прикладных программ расчета тонкостенных конструкций на прочность с расслоениями и геометрическими несовершенствами, создание научно обоснованных методик нормирования допустимых дефектов.

2. ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Данная глава посвящена разработке методики расчета многослойных оболочек вращения, согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала. Основные результаты этой главы изложены в работе [207].

На основе предлагаемого в [207] варианта дискретно-структурной теории разработаны две модели, в которых учитываются ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала.

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой, толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю. Тогда в соответствии с допущениями первого варианта модели предполагается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, т.е. по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой.

Суть второго варианта расчетной модели многослойной анизотропной оболочки заключается в том, что рассматриваемая оболочка состоит из жестких анизотропных слоев, между которыми имеет место клеевая прослойка ненулевой толщины. Считается, что перемещения линейно изменяются по толщине клеевого слоя и записываются при помощи функций, характеризующие перемещения и углы поворотов жестких слоев.

Для оценки достоверности результатов, полученных по первой и второй модели, разработан вариант нелинейной теории анизотропных оболочек с учетом поперечного сдвига и обжатия с привлечением вариационного принципа Рейсснера и непрерывно-структурной модели теории пластин и оболочек (третья модель). Третья модель хорошо известна и часто используется при расчете анизотропных тонкостенных элементов, когда кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками.

2.1. Геометрически нелинейная деформация криволинейного слоя по уточненной теории Тимошенко

Пусть многослойная оболочка состоит из $\boldsymbol{n}$ анизотропных криволинейных слоев, объем которых $V=\sum_{k=1}^{n} V^{(k)}$. Для обозначения площади нижней и верхней лицевых поверхностей многослойной оболочки в целом применяются символы - S^0 и S^n; $\Gamma=\sum_{k=1}^{n}\Gamma^{(k)}-$ боковая поверхность, представляющая собой объединение линейчатых поверхностей, перпендикулярных срединным поверхностям каждого $k-$го слоя. Считается, что $k-$й слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе гауссовых координат $\alpha_i^{(k)}$ (i=1,2), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$ $k-$го слоя. Индекс “**z**” при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},z^{(k)})$ эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$. Положение точки недеформированной поверхности $S_z^{(k)}$ будет определяться радиус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)}=\vec{r}^{(k)}+\vec{m}^{(k)}z^{(k)}, \quad -\frac{h^{(k)}}{2}\le z^{(k)}\le\frac{h^{(k)}}{2}, \tag{2.1}$$

базисные векторы в точке ($\alpha_i^{(k)}$, $z^{(k)}$) поверхности $S_z^{(k)}$

$$\vec{\rho}_i^{(k)}=\frac{\partial\vec{\rho}^{(k)}}{\partial\alpha^i}=\vec{r}_j^{(k)}(\delta_i^j-z^{(k)}b_i^{j(k)})=\vec{r}_j^{(k)}Z_i^{(k)j}=\vec{r}_i^{(k)}+\vec{m}_i^{(k)}z^{(k)},\quad \vec{\rho}_3^{(k)}=\vec{m}^{(k)}, \tag{2.2}$$

где $\vec{r}^{(k)}-$ радиус-вектор точки срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{m}^{(k)}-$ нормаль единичной длины к поверхности $S^{(k)}$; δ_i^j-тензорная запись символа Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)}=\vec{r}_i^{(k)}\vec{r}_j^{(k)},\qquad b_{ij}^{(k)}=-\vec{m}_i^{(k)}\vec{r}_j^{(k)}=\vec{m}_j^{(k)}\vec{r}_i^{(k)},$$

$$b_i^{(k)j}\vec{r}_j^{(k)} = -m_i^{(k)} \qquad (i=1,2;\ j=1,2) - \tag{2.3}$$

коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $S^{(k)}$; $\vec{m}_i^{(k)} = \dfrac{\partial \vec{m}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} -$ производная нормали $\vec{m}^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки $k-$го жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)}\vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z)\vec{\psi}^{(k)}, \tag{2.4}$$

где $\vec{u}^{(k)} -$ вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)} -$ вектор-функция углов поворота и обжатия волокон, перпендикулярных недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z) -$ нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине $k-$го слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [57]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}) -$ вектор функций сдвига.

Здесь для учета деформаций поперечных сдвигов и обжатия вводится предположение о том, что перпендикулярный недеформированной (исходной) координатной поверхности оболочки прямолинейный элемент после деформации оказывается уже не перпендикулярным деформированной поверхности и изменяет свою длину. При этом выражение (2.4) определяет нелинейный характер изменения тангенциальных перемещений по толщине $k-$го слоя. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}, \vec{\gamma}^{(k)}, \vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)}w^{(k)};\ \ \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}\gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)}\gamma^{(k)};\ \ \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}\psi_i^{(k)}. \tag{2.5}$$

Тогда радиус-вектор точки $k-$го слоя оболочки после деформации будет иметь вид

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \tag{2.6}$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}}, \qquad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}}. \tag{2.7}$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке ($\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $z^{(k)}$) определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до и после деформации

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}, 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}, 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \tag{2.8}$$

где $g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)}\vec{\rho}_j^{(k)}$, $g_{ij}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*}\vec{\rho}_j^{(k)*}$, $g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)}\vec{\rho}_3^{(k)}$,

$$g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*}\vec{\rho}_3^{(k)*}, \quad g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{(k)}\vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)}\vec{m}^{(k)} = 1, \quad g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{(k)*}\vec{\rho}_3^{(k)*} \quad (i = 1,2;\ j = 1,2). \tag{2.9}$$

Подставляя в (2.8), (2.9) значения базисных векторов (2.2), (2.7), нетрудно найти геометрические зависимости между деформациями и перемещениями в векторной форме

$$\varepsilon_{i3}^{(k)z} = \frac{1}{2}[\vec{\rho}_3^{(k)}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial\alpha_i^{(k)}} + \vec{\rho}_i^{(k)}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial\alpha_i^{(k)}}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}}], \ \varepsilon_{ij}^{(k)z} = \frac{1}{2}[\vec{\rho}_i^{(k)}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial\alpha_j^{(k)}} + \vec{\rho}_j^{(k)}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial\alpha_i^{(k)}} + \frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial\alpha_i^{(k)}}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial\alpha_j^{(k)}}],$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \vec{\rho}_3^{(k)}\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}}\right)^2. \tag{2.10}$$

Используя операции тензорного анализа и теорию среднего изгиба [87], соотношения (2.10) можно привести к виду:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z^{(k)}\chi_{ij}^{(k)}, \tag{2.11}$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = \omega_i^{(k)} + \theta_i^{(k)}, \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \varepsilon_{33}^{(k)} = \gamma^{(k)}, \tag{2.13}$$

где

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}, \tag{2.14}$$

$$2\chi_{ij}^{(k)} = \nabla_i\beta_j^{(k)} + \nabla_j\beta_i^{(k)} - в_i^{(k)\gamma}e_{j\gamma}^{(k)} - в_j^{(k)\gamma}e_{i\gamma}^{(k)}. \tag{2.15}$$

Величины $\beta_i^{(k)}$ и $\theta_i^{(k)}$ определяются зависимостями

$$\beta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + f^{(k)}(z)\psi_i^{(k)}, \qquad \theta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)\prime}(z)\psi_i^{(k)}. \tag{2.16}$$

В приведенных соотношениях (2.11) – (2.15) пренебрегают влиянием нелинейных членов на величины $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\chi_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{i3}^{(k)}$, $\varepsilon_{33}^{(k)}$, за исключением слагаемых, произведения которых содержат компоненты $w^{(k)}$. Это вызвано, прежде всего, тем, что тангенциальные перемещения $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ оболочки существенно меньше перемещений $w^{(k)}$ в направлении нормали к срединной поверхности. Применяя правило ковариантного дифференцирования и выражения символов Кристоффеля 2-го рода, компоненты соотношений (2.11) – (2.15) в ортогональных координатах, которые совпадают с линиями главных кривизн, запишутся таким образом:

$$e_{11}^{(k)}=\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \sim_1^{(k)}}-\Gamma_{11}^{(k)1}u_1^{(k)}-\Gamma_{11}^{(k)2}u_2^{(k)}-\Gamma_{11}^{(k)3}u_3^{(k)}\ \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \sim_1^{(k)}}-\frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)}\partial \sim_1^{(k)}}u_1^{(k)}+\frac{A^{(k)}}{\left(B^{(k)}\right)^2}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial \sim_2^{(k)}}u_2^{(k)}+k_1^{(k)}\left(A^{(k)}\right)^2 w^{(k)}$$

или с учетом физических компонент тензоров $u_1^{(k)}=A^{(k)}u_{(1)}^{(k)}$, $u_2^{(k)}=B^{(k)}u_{(2)}^{(k)}$, $w^{(k)}=u_{(3)}^{(k)}$, $e_{11}^{(k)}=\left(A^{(k)}\right)^2 e_{(11)}^{(k)}$ (после преобразований скобки у индексов были убраны)

$$e_{11}^{(k)}=\frac{\partial u_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}-\frac{1}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}u_2^{(k)}+k_1^{(k)}w^{(k)}\quad \left(1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right). \qquad (2.17)$$

Символ $\left(1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right)$ означает, что остальные формулы получаются из приведенных перестановкой индексов 1, 2 и параметров Ламе $A^{(k)}, B^{(k)}$. Аналогично получены остальные соотношения:

$$e_{12}^{(k)}=\frac{\partial u_2^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}-\frac{u_1^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}\qquad \left(1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right), \qquad (2.18)$$

$$\omega_1^{(k)}=\frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}-k_1^{(k)}u_1^{(k)}\qquad \left(1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right), \qquad (2.19)$$

$$\chi_{11}^{(k)}=\frac{\partial\beta_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\beta_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}+k_1^{(k)}e_{11}^{(k)}\qquad \left(1\leftrightarrow 2;\ \boldsymbol{A^{(k)}}\leftrightarrow \boldsymbol{B^{(k)}}\right), \qquad (2.20)$$

$$2\chi_{12}^{(k)}=\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\beta_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right)+\frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\beta_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right)+k_1^{(k)}e_{21}^{(k)}+k_2^{(k)}e_{12}^{(k)}. \qquad (2.21)$$

Соотношения (2.20) , (2.21) можно преобразовать, если заменить в них $\beta_1^{(k)}$ и $\beta_2^{(k)}$ выражением –

$$\beta_i^{(k)}=\theta_i^{(k)}+g^{(k)}(z)\psi_i^{(k)}=2\varepsilon_{i3}^{(k)}-\omega_i^{(k)}+g^{(k)}(z)\psi_i^{(k)}. \qquad (2.22)$$

Тогда соотношения (2.20) и (2.21) принимают вид

$$\chi_{11}^{(k)}=\chi_{11}^{(k)0}+2\beta_{11}^{(k)}+g^{(k)}(z)\psi_{11}^{(k)}\qquad \left(1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right), \qquad (2.23)$$

$$\chi_{12}^{(k)}=\chi_{12}^{0}+2\beta_{12}^{(k)}+g^{(k)}(z)\psi_{12}^{(k)}\qquad \left(1\leftrightarrow 2;\ \boldsymbol{A^{(k)}}\leftrightarrow \boldsymbol{B^{(k)}}\right), \qquad (2.24)$$

где $$\chi_{11}^{(k)0}=-\frac{\partial\omega_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}-\frac{\omega_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}+k_1^{(k)}e_{11}^{(k)}\qquad \left(1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right), \qquad (2.25)$$

$$2\chi_{12}^{(k)0} = -\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\omega_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right) - \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\omega_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right) + k_1^{(k)}e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)}e_{12}^{(k)}, \qquad (2.26)$$

$$\beta_{11}^{(k)} = \frac{\partial\varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} \qquad (1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.27)$$

$$2\beta_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{B^{(k)}}\right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)}}\right), \qquad (2.28)$$

$$\psi_{11}^{(k)} = \frac{\partial\psi_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\psi_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} \qquad (1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.29)$$

$$2\psi_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\psi_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\psi_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right), \qquad (2.30)$$

где $\chi_{ij}^{(k)0}$ – компоненты тензора изменения кривизны срединной поверхности k – го слоя согласно линейной теории оболочек по гипотезе Кирхгофа-Лява.

Соотношения (2.12), (2.20) и (2.21) можно представить в несколько ином виде по сравнению с формулами (2.23) и (2.24):

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)\prime}(z)\psi_i^{(k)}, \qquad (2.31)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma} + f^{(k)}(z)\psi_{11}^{(k)} \qquad (1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.32)$$

$$\chi_{12}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)\gamma} + f^{(k)}(z)\psi_{12}^{(k)} \qquad (1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.33)$$

где
$$2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} = \omega_i^{(k)} + \gamma_i^{(k)},$$

$$\chi_{11}^{(k)\gamma} = \frac{\partial\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\gamma_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)}e_{11}^{(k)} \qquad (1\leftrightarrow 2;\ A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.34)$$

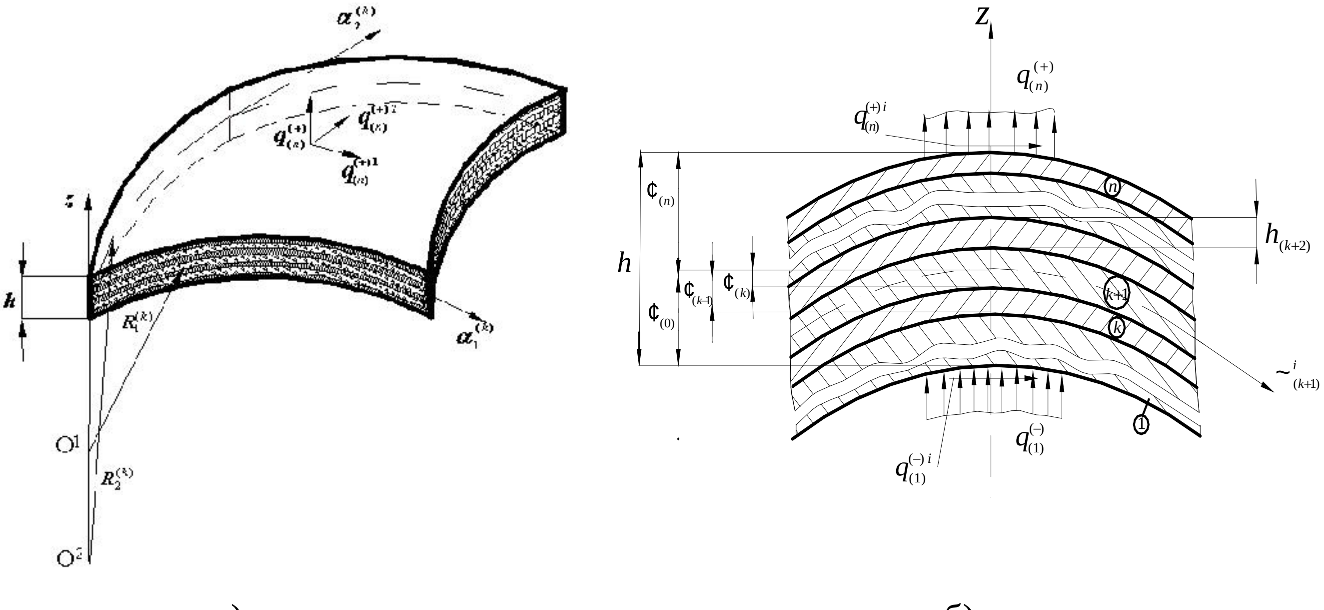
$$2\chi_{12}^{(k)\gamma} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\gamma_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right) + k_1^{(k)}e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)}e_{12}^{(k)}. \qquad (2.35)$$

Компоненты $\psi_{ij}^{(k)}$ определяются зависимостями (2.29) и (2.30).

2.2. Разрешающие уравнения дискретно-структурной теории многослойных оболочек

Теория многослойных оболочек и пластин занимает промежуточное место между теорией анизотропных оболочек и точными подходами, основанными на трехмерных уравнениях теории упругости. Следует отметить, что существует общая методология построения теорий трехслойных и многослойных оболочек. Последняя из них обобщается таким образом, что позволяет решать задачи с учетом дискретного характера работы каждого отдельно взятого анизотропного слоя оболочки, поэтому порядок разрешающих уравнений здесь будет определяться количеством рассматриваемых слоев.

2.2.1. Вариационные уравнения принципа Рейсснера слоистых анизотропных структур. В качестве рассматриваемой здесь математической модели принимается модель многослойной оболочки, которая состоит из *n* тонких анизотропных слоев (рис.2.1). Тонкой считается оболочка (слой), если относительной толщиной h/R_{min} (R_{min} – минимальное значение одного из главных радиусов кривизны) такой оболочки можно пренебречь по сравнению с единицей.



а) б)

Рисунок 2.1 - Расчетная модель многослойной оболочки.

Пусть анизотропная оболочка разбита на *n* тонких дискретных слоев. При этом приняты обозначения и допущения подраздела 2.1 о распределении поперечных деформаций по толщине каждого дискретного слоя, рассматриваемого как отдельно взятая оболочка с заданной локальной системой координат. Задав направление поверхностной нагрузки (рис.2.1), следует определить свойства локальных систем координат $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $z^{(k)}$ каждого k-го слоя и общей системы гауссовых координат (α_1, α_2, z). Считается, что поперечные координатные линии общей и локальных систем совмещены, кроме того, локальные координатные поверхности совмещены со срединными поверхностями слоев. Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты z от единицы до n.

Вариационное уравнение принципа Рейсснера для многослойной оболочки запишется таким образом:

$$\delta R = \sum_{k=1}^{n} \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{V^{(k)}} \delta\left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}\right) dV = 0, \qquad (2.36)$$

где $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты тензора напряжений (первый индекс "α" указывает на то, что эти напряжения отнесены к единице площади недеформированной координатной поверхности $x^{\alpha} = \text{const}$ и действуют на площадку на деформированной поверхности $x^{\alpha} = \text{const}$, в которую переходит первоначальная координатная поверхность; второй индекс "β" указывает на базисные векторы недеформированного тела, относительно которых вычисляются компоненты тензора напряжений); $\eta_{\alpha\beta}^{(k)}$ – тензор деформаций Грина; $F^{(k)}$ – функция дополнительной энергии деформации.

Если для k-го слоя оболочки используются следующие условия идеального контакта между слоями (рис.2.1):

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}, \qquad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \qquad (2.37)$$

или в векторном виде –

$$\vec{u}_z^{(k)}\left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2}\right) = \vec{u}_z^{(k-1)}\left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2}\right),$$

$$\vec{X}_{(k)}\left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2}\right) = \vec{X}_{(k-1)}\left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2}\right) \quad (i = 1,2), \qquad (2.38)$$

тогда вариация элементарной работы внешних сил δA_R запишется в таком виде:

$$\delta A_R = \sum_{k=1}^{n} \delta A_R^{(k)} = \iint\limits_{S_{(n)}} \left(\vec{X}_{(n)} \delta \vec{u}^{(n)} + M_{(n)}^{i} \vec{r}_{i*}^{(n)} \cdot \delta\vec{\gamma}^{(n)} + B_{(n)}^{i} \vec{r}_{i*}^{(n)} \cdot \delta\vec{\psi}^{(n)} + M_{(n)}^{3} \delta\varepsilon_{33}^{(n)z}\right) dS +$$

$$+\iint\limits_{S_{(-)}}\left(\vec{X}_{(1)}\delta\vec{u}^{(1)}+M^{i}_{(1)}\vec{r}^{(1)}_{i*}\cdot\delta\vec{\gamma}^{(1)}+B^{i}_{(1)}\vec{r}^{(1)}_{i*}\delta\vec{\psi}^{(1)}+M^{3}_{(1)}\delta\varepsilon^{(1)z}_{33}\right)dS+\sum_{k=2}^{n-1}\iint\limits_{S_{(k)}}\left(\vec{X}_{(k)}\delta\vec{u}^{(k)}+\right.$$

$$+M^{i}_{(k)}\vec{r}^{(k)}_{i*}\delta\vec{\gamma}^{(k)}+B^{i}_{(k)}\vec{r}^{(k)}_{i*}\delta\vec{\psi}^{(k)}+M^{3}_{(k)}\delta\varepsilon^{(k)z}_{33}\left.\right)dS+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{l_1^{(k)}}\left(\vec{\Phi}^{S}_{(k)}\delta\vec{u}^{(k)}+\vec{G}^{S}_{(k)}\delta\vec{\gamma}^{(k)}+\right.$$

$$+\vec{L}^{s}_{(k)}\delta\vec{\psi}^{(k)}\left.\right)dl+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{l_2^{(k)}}\left(\vec{\Phi}_{(k)}\delta\vec{u}^{(k)}+G_{(k)}\delta\vec{\gamma}^{(k)}+\vec{L}_{(k)}\delta\vec{\psi}^{(k)}+\left(\vec{u}^{(k)}-\vec{u}^{(k)}_{S}\right)\delta\vec{\Phi}_{(k)}+\right.$$

$$+\left(\vec{\gamma}^{(k)}-\vec{\gamma}^{(k)}_{S}\right)\delta\vec{G}_{(k)}+\left(\vec{\psi}^{(k)}-\vec{\psi}^{(k)}_{S}\right)\delta\vec{L}_{(k)}\left.\right)dl\ , \qquad (2.39)$$

где $S_{(n)}, S_{(1)}$ – срединные поверхности ограничивающих слоев оболочки, $S_{(k)}$– срединная поверхность k-го слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – части контура $l^{(k)}$ k-го слоя, где выполняются статические и геометрические граничные условия соответственно. Элемент площади боковой линейчатой поверхности $d\Gamma_{(k)}$ k-го слоя с контуром $\ell_{(k)}$ равен

$$d\Gamma_{(k)}=d\ell_{(k)}dz^{(k)}, \qquad (2.40)$$

а элемент объема –

$$dV^{(k)}=t^{(k)}dS_{(k)}dz^{(k)}. \qquad (2.41)$$

Векторы внешних усилий $\vec{X}_{(k)}$, моментов $\vec{M}_{(k)}$ и дополнительных моментов $\vec{B}_{(k)}$, которые действуют в точках деформированной срединной поверхности k-го слоя, будут определяться равенствами:

$$\vec{X}_{(1)}=t^{(+)}_{(1)}\vec{X}^{(+)}_{(1)}+t^{(-)}_{(1)}\vec{q}^{(-)}_{(1)}+\int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2}t^{(1)}\vec{P}^{(1)}dz\ ,\quad \vec{M}_{(1)}=\frac{h^{(1)}}{2}\left(t^{(+)}_{1}\vec{X}^{(+)}_{1}-t^{(-)}_{(1)}\vec{q}^{(-)}_{(1)}\right)+\int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2}t^{(1)}\vec{P}^{(1)}z^{(1)}dz$$

$$,\vec{B}_{(1)}=\frac{h^{(1)}}{2}f^{(1)}\left(\frac{h^{(1)}}{2}\right)\left(t^{(+)}_{1}\vec{X}^{(+)}_{1}-t^{(-)}_{(1)}\vec{q}^{(-)}_{(1)}\right)+\int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2}t^{(1)}\vec{P}^{(1)}\varphi^{(1)}(z)dz\ , \qquad (2.42)$$

$$\vec{X}_{(k)}=t^{(+)}_{(k)}\vec{X}^{(+)}_{(k)}-t^{(-)}_{(k)}\vec{X}^{(-)}_{(k)}+\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}t^{(k)}\vec{P}^{(k)}dz\ ,\quad \vec{M}_{(k)}=\frac{h^{(k)}}{2}\left(t^{(+)}_{(k)}\vec{X}^{(+)}_{(k)}-t^{(-)}_{(k)}\vec{X}^{(-)}_{(k)}\right)+\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}t^{(k)}\vec{P}^{(k)}z^{(k)}dz\ ,$$

$$\vec{B}_{(k)}=\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(t^{(+)}_{(k)}\vec{X}^{(+)}_{(k)}-t^{(-)}_{(k)}\vec{X}^{(-)}_{(k)}\right)+\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}t^{(k)}\vec{P}^{(k)}\varphi^{(k)}(z)dz\ , \qquad (2.43)$$

$$\vec{X}_{(n)} = t_{(n)}^{(+)}\vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)}\vec{X}_{(n)}^{(-)} + \int\limits_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)}\vec{P}^{(n)}dz\ , \quad \vec{M}_{(n)} = \frac{h^{(n)}}{2}\left(t_{(n)}^{(+)}\vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)}\vec{X}_{(n)}^{(-)}\right) + \int\limits_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)}\vec{P}^{(n)}z^{(n)}dz\ ,$$

$$\vec{B}_{(n)} = \varphi^{(n)}\left(\frac{h^{(n)}}{2}\right)\left(t_{(n)}^{(+)}\vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)}\vec{X}_{(n)}^{(-)}\right) + \int\limits_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)}\vec{P}^{(n)}\varphi^{(n)}(z)dz\ , \qquad (2.44)$$

где векторы $\vec{X}_{(k)}^{(+)}$, $\vec{X}_{(k)}^{(-)}$ определяют контактные напряжения соответственно на верхней (индекс «+») и нижней (индекс «-») ограничивающих лицевых поверхностях k-го слоя.

Контравариантные компоненты вектора контактных напряжений $\vec{X}_{(k)}$ и векторов внешней нагрузки $\vec{q}_{(n)}^{(+)}$, $\vec{q}_{(1)}^{(-)}$ будут определяться равенствами

$$\vec{X}_{(k)}^{(+)} = \sigma_{(+)}^{(k)i3}\vec{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(+)}^{(k)33}\vec{m}^{(k)*}, \vec{X}_{(k)}^{(-)} = \sigma_{(-)}^{(k)i3}\vec{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(-)}^{(k)33}\vec{m}^{(k)*},$$

$$\vec{q}_{(n)}^{(+)} = q_{(+)}^{(n)i3}\vec{\rho}_i^{(n)*} + q_{(+)}^{(n)33}\vec{m}^{(n)*}, \vec{q}_{(1)}^{(-)} = q_{(-)}^{(1)i3}\vec{\rho}_i^{(1)*} + q_{(-)}^{(1)33}\vec{m}^{(1)*} \qquad (i=1,2). \qquad (2.45)$$

Первую вариацию второго слагаемого уравнения (2.36) можно представить следующим образом:

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\iiint\limits_{V^{(k)}}\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)}dV - \sum_{k=1}^{n}\iiint\limits_{V^{(k)}}\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}\right)\delta\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}dV, \qquad (2.46)$$

где

$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iiint\limits_{V^{(k)}}\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)}dV = \iiint\limits_{V^{(k)}}\left(\sigma_{(k)}^{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)z} + 2\sigma_{(k)}^{i3}\delta\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\right)dV\ , \qquad (2.47)$$

$$\delta\Pi_{2R}^{(k)} = -\iiint\limits_{V^{(k)}}\delta W_{(k)}^{f}dV = -\iiint\limits_{V^{(k)}}\left\{\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)z}\right)\delta\sigma_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{i3}} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)z}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\delta\sigma_{(k)}^{i3} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{33}} - \varepsilon_{33}^{(k)z}\right)\delta\sigma_{(k)}^{33}\right\}dV. \qquad (2.48)$$

Подставляя соотношения (2.11) – (2.13) в (2.47) и учитывая, что элемент недеформированного объема $dV^{(k)}$ равен

$$dV^{(k)} = \sqrt{g^{(k)}}d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} \approx \sqrt{a^{(k)}}d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} = dS_{(k)}dz^{(k)}, \qquad (2.49)$$

можно получить следующее выражение:

$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iint\limits_{S_{(k)}}\int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}\left\{\sigma_{(k)}^{ij}\left[\delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + z\delta\chi_{ij}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)}(z)\nabla_i\delta\psi_i^{(k)}\right] + \right.$$

$$\left. + \sigma_{(k)}^{i3}\left(2\delta\varepsilon_{i3}^{(k)} + z\nabla_i\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\right) + \sigma_{(k)}^{33}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\right\}dSdz \qquad (2.50)$$

При выводе уравнения (2.50) рассматривался случай среднего изгиба тонкого k-го слоя оболочки. Если в (2.50) ввести отнесенные к единице длины координатных линий недеформированной срединной поверхности k-го слоя контравариантные компоненты тензоров тангенциальных усилий $T^{ij}_{(k)}$, изгибающих и крутящих моментов $M^{ij}_{(k)}$, дополнительного изгибающего и крутящего момента $L^{ij}_{(k)}$, а также контравариантные компоненты вектора поперечных сил и дополнительных поперечных сил деформаций сдвига и обжатия $Q^{i}_{(k)}$, $Q^{3}_{(k)}$, $L^{i}_{(k)}$, $M^{i3}_{(k)}$ относительно базисных векторов $\vec{r}^{(k)*}$, $\vec{\rho}^{(k)*}_{3}$:

$$T^{ij}_{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{ij}_{(k)} d\text{ƶ}, \qquad M^{ij}_{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{ij}_{(k)} \text{ƶ} d\text{ƶ}, \quad L^{ij}_{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{ij}_{(k)} \varphi^{(k)}(z) d\text{ƶ}, \quad Q^{i}_{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{i3}_{(k)} d\text{ƶ}, \ ,$$

$$L^{i3}_{(k)} = \frac{1}{2} \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{i3}_{(k)} \varphi^{(k)\prime}(z) d\text{ƶ}, \; Q^{3}_{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{33}_{(k)} d\text{ƶ}, \quad M^{i3}_{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{i3}_{(k)} \text{ƶ} d\text{ƶ}, \qquad (2.51)$$

то равенство (2.50) перепишется так:

$$\delta\Pi^{(k)}_{1R} = \iint\limits_{S(k)} (T^{ij}_{(k)} \delta\varepsilon^{(k)}_{ij} + M^{ij}_{(k)} \delta\chi^{(k)\gamma}_{ij} + L^{ij}_{(k)} \nabla_i \delta\psi^{(k)}_{i} + 2Q^{i}_{(k)} \delta\varepsilon^{(k)\gamma}_{i3} + L^{i3}_{(k)} \delta\psi^{(k)}_{i} +$$

$$+ M^{i3}_{(k)} \nabla_i \delta\varepsilon^{(k)\text{ƶ}}_{33} + Q^{3}_{(k)} \delta\varepsilon^{(k)\text{ƶ}}_{33}) dS. \qquad (2.52)$$

Введя интеграл для дополнительной работы деформации k-го слоя

$$\int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} F^{(k)} d\text{ƶ}^{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left(\sigma^{\alpha\beta}_{(k)} \eta^{(k)}_{\alpha\beta} - W_{(k)}\right) d\text{ƶ} = F^{(k)}_{p}\left(T^{ij}_{(k)}, M^{ij}_{(k)}, L^{ij}_{(k)}, M^{i3}_{(k)}, Q^{i}_{(k)}, L^{i3}_{(k)}, Q^{3}_{(k)}\right), \qquad (2.53)$$

который в случае малых деформаций можно считать квадратичной функцией от напряжений

$$F^{(k)}_{p} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left(\sigma^{\alpha\beta}_{(k)} \eta^{(k)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta}_{(k)} \eta^{(k)}_{\alpha\beta} \right) d\text{ƶ} = \frac{1}{2} \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{\alpha\beta}_{(k)} \eta^{(k)}_{\alpha\beta} d\text{ƶ},$$

выражение (2.48) перепишется так:

$$\delta\Pi^{(k)}_{2R} = -\iint\limits_{S_{(k)}} \left\{ \left(\frac{\partial F^{(k)}_{p}}{\partial T^{ij}_{(k)}} - \varepsilon^{(k)}_{ij} \right) \delta T^{ij}_{(k)} + \left(\frac{\partial F^{(k)}_{p}}{\partial M^{ij}_{(k)}} - \chi^{(k)\gamma}_{ij} \right) \delta M^{ij}_{(k)} + \left(\frac{\partial F^{(k)}_{p}}{\partial L^{ij}_{(k)}} - \nabla_i \psi^{(k)}_{i} \right) \delta L^{ij}_{(k)} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial F^{(k)}_{p}}{\partial Q^{i}_{(k)}} - 2\varepsilon^{(k)\gamma}_{i3} \right) \delta Q^{i}_{(k)} + \left(\frac{\partial F^{(k)}_{p}}{\partial L^{i3}_{(k)}} - \psi^{(k)}_{i} \right) \delta L^{i3}_{(k)} + \left(\frac{\partial F^{(k)}_{p}}{\partial M^{i3}_{(k)}} - \nabla_i \varepsilon^{(k)\text{ƶ}}_{33} \right) \delta M^{i3}_{(k)} +$$

$$+\left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^3}-\varepsilon_{33}^{(k)z}\right)\delta Q_{(k)}^3\ \Big\}dS. \qquad (2.54)$$

2.2.2. Уравнения равновесия упругого слоя анизотропной оболочки. Опуская целый ряд громоздких преобразований вариационных уравнений подраздела 2.2.1, представленных в [207], для случая среднего изгиба физические компоненты тензора тангенциальных усилий $R_{(k)}^{ij}$ и усилий поперечного сдвига $R_{(k)}^{i3}$ относительно недеформированной ортогональной системы координат запишутся в следующем виде:

$$R_{11}^{(k)0}=T_{11}^{(k)}+M_{11}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)}+M_{12}^{(k)}\gamma_{12}^{(k)}+M_{11}^{(k)}k_1^{(k)}+L_{11}^{(k)}\psi_{11}^{(k)}+L_{12}^{(k)}\psi_{12}^{(k)}+Q_1^{(k)}\gamma_1^{(k)}+L_{13}^{(k)}\psi_1^{(k)},$$

$$R_{22}^{(k)0}=T_{22}^{(k)}+M_{22}^{(k)}\gamma_{22}^{(k)}+M_{21}^{(k)}\gamma_{21}^{(k)}+M_{22}^{(k)}k_2^{(k)}+L_{22}^{(k)}\psi_{22}^{(k)}+L_{21}^{(k)}\psi_{12}^{(k)}+Q_2^{(k)}\gamma_2^{(k)}+L_{23}^{(k)}\psi_2^{(k)},$$

$$R_{12}^{(k)0}=T_{12}^{(k)}+M_{11}^{(k)}\gamma_{12}^{(k)}+M_{12}^{(k)}\gamma_{22}^{(k)}+M_{12}^{(k)}k_2^{(k)}+L_{11}^{(k)}\psi_{12}^{(k)}+L_{12}^{(k)}\psi_{22}^{(k)}+Q_1^{(k)}\gamma_2^{(k)}+L_{13}^{(k)}\psi_2^{(k)},$$

$$R_{21}^{(k)0}=T_{21}^{(k)}+M_{21}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)}+M_{22}^{(k)}\gamma_{21}^{(k)}+M_{21}^{(k)}k_1^{(k)}+L_{21}^{(k)}\psi_{11}^{(k)}+L_{22}^{(k)}\psi_{21}^{(k)}+Q_2^{(k)}\gamma_1^{(k)}+L_{23}^{(k)}\psi_1^{(k)},$$

$$R_{13}^{(k)0}=T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)}+T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)}+Q_1^{(k)}-M_{11}^{(k)}k_1^{(k)}\gamma_1^{(k)}-M_{12}^{(k)}k_2^{(k)}\gamma_2^{(k)}-L_{11}^{(k)}k_1^{(k)}\psi_1^{(k)}-L_{12}^{(k)}k_2^{(k)}\psi_2^{(k)},$$

$$R_{23}^{(k)0}=T_{21}^{(k)}\omega_1^{(k)}+T_{22}^{(k)}\omega_2^{(k)}+Q_2^{(k)}-M_{21}^{(k)}k_1^{(k)}\gamma_1^{(k)}-M_{22}^{(k)}k_2^{(k)}\gamma_2^{(k)}-L_{21}^{(k)}k_1^{(k)}\psi_1^{(k)}-L_{22}^{(k)}k_2^{(k)}\psi_2^{(k)}, \qquad (2.55)$$

где

$$\gamma_{11}^{(k)}=\frac{\partial\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\gamma_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}+k_1^{(k)}\gamma_{(k)} \qquad \left(1\leftrightarrow 2;\, A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right),$$

$$2\gamma_{12}^{(k)}=\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\gamma_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right)+\frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right)+\left(k_1^{(k)}+k_2^{(k)}\right)\gamma_{(k)}, \qquad (2.56)$$

$$\gamma_i^{(k)}=2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma}-\omega_i^{(k)}. \qquad (2.57)$$

Переходя к физическим компонентам уравнения равновесия, отнесенные к недеформированному состоянию k-го слоя оболочки, с учетом незначительного влияния мембранных деформаций на компоненты изгибной деформации, запишутся

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}R_{11}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}R_{21}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+R_{12}^{(k)0}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-R_{22}^{(k)0}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}+$$

$$+A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}R_{13}^{(k)0}+X_1^{(k)0}\right)=0 \quad \left(1\leftrightarrow 2;\, A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right),$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}R_{13}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}R_{23}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}-A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}R_{11}^{(k)0}+k_2^{(k)}R_{22}^{(k)0}-X_3^{(k)0}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}M_{21}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+M_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-M_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}+$$

$$+A^{(k)}B^{(k)}\left(M_1^{(k)}-Q_1^{(k)}\right)=0\quad\left(1\leftrightarrow 2;A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right),$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}L_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}L_{21}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+L_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-L_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}+$$

$$+A^{(k)}B^{(k)}\left(B_1^{(k)}-L_{13}^{(k)}\right)=0\quad\left(1\leftrightarrow 2;A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right).\qquad(2.58)$$

При учете обжатия k -го слоя к системе (58) необходимо добавить восьмое уравнение равновесия

$$H_3^{(k)}=\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}M_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}-A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}M_{22}^{(k)}+k_1^{(k)}L_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}L_{22}^{(k)}+Q_3^{(k)}-M_3^{(k)}\right)=0.\qquad(2.59)$$

Граничные условия для упругого анизотропного слоя. На контуре $\ell_{(k)}$ k-го слоя оболочки имеют место восемь уравнений равновесия (2.58), (2.59) и статические граничные условия:

$$\Phi_{(k)0}^{nS}=R_{(k)0}^{n},\quad\Phi_{(k)0}^{\tau S}=R_{(k)0}^{\tau},\quad\Phi_{(k)0}^{mS}=R_{(k)0}^{m},\quad G_{(k)0}^{nS}=G_{(k)0}^{n},\quad H_{(k)0}^{\tau S}=H_{(k)0}^{\tau},$$

$$L_{(k)0}^{nS}=L_{(k)0}^{n},\quad L_{(k)0}^{\tau S}=L_{(k)0}^{\tau},\quad M_{(k)S}^{3n}+L_{(k)S}^{3n}=M_{(k)}^{i3}n_i^{(k)}.\qquad(2.60)$$

Кроме граничных условий (2.60), из вариационных уравнений следуют геометрические граничные условия и граничные условия смешанного типа:

а) жестко закрепленный контур

$$u_n^{(k)}=u_\tau^{(k)}=w^{(k)}=\gamma_n^{(k)}=\gamma_\tau^{(k)}=\psi_n^{(k)}=\psi_\tau^{(k)}=\varepsilon_{33}^{(k)z}=0,\qquad(2.61)$$

б) шарнирный, неподвижный в тангенциальном и нормальном направлениях контур

$$u_n^{(k)}=u_\tau^{(k)}=w^{(k)}=G_{(k)0}^{n}=\gamma_\tau^{(k)}=L_{(k)0}^{n}=\psi_\tau^{(k)}=\varepsilon_{33}^{(k)z}=0,\qquad(2.62)$$

в) шарнирный, неподвижный в тангенциальном направлении контур

$$u_n^{(k)}=u_\tau^{(k)}=R_{(k)0}^{m}=G_{(k)0}^{n}=\gamma_\tau^{(k)}=L_{(k)0}^{n}=\psi_\tau^{(k)}=M_{(k)}^{i3}n_i^{(k)}=0,\qquad(2.63)$$

г) шарнирный, свободный в тангенциальной плоскости контур

$$R_{(k)0}^{n}=R_{(k)0}^{\tau}=w^{(k)}=G_{(k)0}^{n}=\gamma_\tau^{(k)}=L_{(k)0}^{n}=\psi_\tau^{(k)}=\varepsilon_{33}^{(k)z}=0\,.\qquad(2.64)$$

Для случая среднего изгиба при переходе к физическим величинам перемещения и контурные усилия (2.61) – (2.64) определяются по формулам:

$$u_n^{(k)}=u_i^{(k)}n_i^{(k)},\quad u_\tau^{(k)}=u_i^{(k)}\tau_i^{(k)},\quad\gamma_n^{(k)}=\gamma_i^{(k)}n_i^{(k)},\quad\gamma_\tau^{(k)}=\gamma_i^{(k)}\tau_i^{(k)},$$

$$\psi_n^{(k)} = \psi_i^{(k)} n_i^{(k)}, \quad \psi_\tau^{(k)} = \psi_i^{(k)} \tau_i^{(k)}, \quad R_{(k)0}^n = R_{ij}^{(k)0} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad R_{(k)0}^\tau = R_{ij}^{(k)0} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)},$$

$$R_{(k)0}^m = R_{i3}^{(k)0} n_i, \quad G_{(k)0}^n = M_{ij}^{(k)} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad H_{(k)0}^\tau = -M_{ij}^{(k)} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \quad L_{(k)0}^n = L_{ij}^{(k)} n_i^{(k)} n_j^{(k)},$$

$$L_{(k)0}^\tau = L_{ij}^{(k)} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \quad M_{(k)}^{i3} n_i^{(k)} = M_{i3}^{(k)} n_i^{(k)}, \tag{2.65}$$

где

$$n_1^{(k)} = \cos\left(n^{(k)}, \alpha_1^{(k)}\right), \qquad n_2^{(k)} = \cos\left(n^{(k)}, \alpha_2^{(k)}\right),$$

$$\tau_1^{(k)} = -\sin\left(n^{(k)}, \alpha_1^{(k)}\right), \qquad \tau_2^{(k)} = \sin\left(n^{(k)}, \alpha_2^{(k)}\right). \tag{2.66}$$

Соотношения упругости для анизотропного слоя. Пусть рассматриваемый анизотропный слой имеет одну плоскость упругой симметрии, касательную к координатной поверхности, и направление оси $ƶ^{(k)}$ перпендикулярно к этой плоскости. Тогда число упругих постоянных соответственно сводиться к 13, т.е. восемь из 21 упругих постоянных обобщенного закона Гука должны быть равны нулю:

$$a_{(k)}^{14} = a_{(k)}^{24} = a_{(k)}^{34} = a_{(k)}^{46} = a_{(k)}^{15} = a_{(k)}^{25} = a_{(k)}^{35} = a_{(k)}^{56} = 0,$$

$$в_{14}^{(k)} = в_{24}^{(k)} = в_{34}^{(k)} = в_{46}^{(k)} = в_{15}^{(k)} = в_{25}^{(k)} = в_{35}^{(k)} = в_{56}^{(k)} = 0.$$

Уравнения обобщенного закона Гука для анизотропного слоя с одной плоскостью упругой симметрии, принимают вид:

$$\sigma_{(k)}^{11} = a_{(k)}^{11}\varepsilon_{11}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{12}\varepsilon_{22}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{13}\varepsilon_{33}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{16}\varepsilon_{12}^{(k)ƶ}, \quad \sigma_{(k)}^{22} = a_{(k)}^{21}\varepsilon_{11}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{22}\varepsilon_{22}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{23}\varepsilon_{33}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{26}\varepsilon_{12}^{(k)ƶ},$$

$$\sigma_{(k)}^{33} = a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{36}\varepsilon_{12}^{(k)ƶ}, \; \sigma_{(k)}^{23} = a_{(k)}^{44}\varepsilon_{23}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{45}\varepsilon_{13}^{(k)ƶ},$$

$$\sigma_{(k)}^{13} = a_{(k)}^{54}\varepsilon_{23}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{55}\varepsilon_{13}^{(k)ƶ}, \; \sigma_{(k)}^{12} = a_{(k)}^{61}\varepsilon_{11}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{62}\varepsilon_{22}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{63}\varepsilon_{33}^{(k)ƶ} + a_{(k)}^{66}\varepsilon_{12}^{(k)ƶ}. \tag{2.67}$$

или

$$\varepsilon_{11}^{(k)ƶ} = в_{11}^{(k)}\sigma_{(k)}^{11} + в_{12}^{(k)}\sigma_{(k)}^{22} + в_{13}^{(k)}\sigma_{(k)}^{33} + в_{16}^{(k)}\sigma_{(k)}^{12}, \; \varepsilon_{22}^{(k)ƶ} = в_{21}^{(k)}\sigma_{(k)}^{11} + в_{22}^{(k)}\sigma_{(k)}^{22} + в_{23}^{(k)}\sigma_{(k)}^{33} + в_{26}^{(k)}\sigma_{(k)}^{12},$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)ƶ} = в_{31}^{(k)}\sigma_{(k)}^{11} + в_{32}^{(k)}\sigma_{(k)}^{22} + в_{33}^{(k)}\sigma_{(k)}^{33} + в_{36}^{(k)}\sigma_{(k)}^{12}, \; \varepsilon_{23}^{(k)ƶ} = в_{44}^{(k)}\sigma_{(k)}^{23} + в_{45}^{(k)}\sigma_{(k)}^{13},$$

$$\varepsilon_{13}^{(k)ƶ} = в_{54}^{(k)}\sigma_{(k)}^{23} + в_{55}^{(k)}\sigma_{(k)}^{13}, \; \varepsilon_{12}^{(k)ƶ} = в_{61}^{(k)}\sigma_{(k)}^{11} + в_{62}^{(k)}\sigma_{(k)}^{22} + в_{63}^{(k)}\sigma_{(k)}^{33} + в_{66}^{(k)}\sigma_{(k)}^{12}. \tag{2.68}$$

Подставляя соотношения (2.67) с учетом формул (2.31) – (2.33) в (2.51), несложно получить зависимости между компонентами тензоров внутренних усилий и моментов k-го слоя анизотропной оболочки с плоскостью упругой симметрии, касательной к координатной поверхности, и компонентами тензора деформаций в матричной форме:

$$T_{(k)} = A_{(k)}\varepsilon_{(k)}, \tag{2.69}$$

$$M_{(k)} = D_{(k)}\chi_{(k)} + K_{(k)}\psi_{(k)}, \qquad L_{(k)} = K_{(k)}\chi_{(k)} + F_{(k)}\psi_{(k)}, \tag{2.70}$$

$$Q^{\gamma}_{(k)} = C_{(k)}\varepsilon^{\gamma}_{(k)} + R_{(k)}\psi^{\gamma}_{(k)}, \qquad L^{\gamma}_{(k)} = R_{(k)}\varepsilon^{\gamma}_{(k)} + G_{(k)}\psi^{\gamma}_{(k)}. \tag{2.71}$$

Здесь приняты обозначения матриц столбцов усилий и деформаций:

$$T_{(k)} = \left[T^{11}_{(k)},\ T^{22}_{(k)},\ Q^{3}_{(k)},\ T^{12}_{(k)}\right]^{T}, \quad \varepsilon_{(k)} = \left[\varepsilon^{(k)}_{11},\ \varepsilon^{(k)}_{22},\ \varepsilon^{(k)}_{33},\ \varepsilon^{(k)}_{12}\right]^{T}, \quad M_{(k)} = \left[M^{11}_{(k)},\ M^{22}_{(k)},\ M^{12}_{(k)}\right]^{T},$$

$$\chi_{(k)} = \left[\chi^{(k)\gamma}_{11},\ \chi^{(k)\gamma}_{22},\ \chi^{(k)\gamma}_{12}\right]^{T},\ L_{(k)} = \left[L^{11}_{(k)},\ L^{22}_{(k)},\ L^{12}_{(k)}\right]^{T}, \quad \psi_{(k)} = \left[\psi^{(k)}_{11},\ \psi^{(k)}_{22},\ \psi^{(k)}_{12}\right]^{T},$$

$$Q^{\gamma}_{(k)} = \left[Q^{2}_{(k)},\ Q^{1}_{(k)}\right]^{T}, \qquad \varepsilon^{\gamma}_{(k)} = \left[\varepsilon^{(k)\gamma}_{23},\ \varepsilon^{(k)\gamma}_{13}\right]^{T},$$

$$L^{\gamma}_{(k)} = \left[L^{23}_{(k)},\ L^{13}_{(k)}\right]^{T}, \qquad \psi^{\gamma}_{(k)} = \left[\psi^{(k)}_{2},\ \psi^{(k)}_{1}\right]^{T} \tag{2.72}$$

и матриц жесткости k-го слоя оболочки:

$$A_{(k)} = \begin{bmatrix} A^{(k)}_{11} & A^{(k)}_{12} & A^{(k)}_{13} & A^{(k)}_{16} \\ A^{(k)}_{21} & A^{(k)}_{21} & A^{(k)}_{23} & A^{(k)}_{26} \\ A^{(k)}_{31} & A^{(k)}_{32} & A^{(k)}_{33} & A^{(k)}_{36} \\ A^{(k)}_{61} & A^{(k)}_{62} & A^{(k)}_{63} & A^{(k)}_{66} \end{bmatrix},\ D_{(k)} = \begin{bmatrix} D^{(k)}_{11} & D^{(k)}_{12} & D^{(k)}_{16} \\ D^{(k)}_{21} & D^{(k)}_{22} & D^{(k)}_{26} \\ D^{(k)}_{61} & D^{(k)}_{62} & D^{(k)}_{66} \end{bmatrix},\ K_{(k)} = \begin{bmatrix} K^{(k)}_{11} & K^{(k)}_{12} & K^{(k)}_{16} \\ K^{(k)}_{21} & K^{(k)}_{22} & K^{(k)}_{26} \\ K^{(k)}_{61} & K^{(k)}_{62} & K^{(k)}_{66} \end{bmatrix},$$

$$F_{(k)} = \begin{bmatrix} F^{(k)}_{11} & F^{(k)}_{12} & F^{(k)}_{16} \\ F^{(k)}_{21} & F^{(k)}_{22} & F^{(k)}_{26} \\ F^{(k)}_{61} & F^{(k)}_{62} & F^{(k)}_{66} \end{bmatrix},\ C_{(k)} = \begin{bmatrix} C^{(k)}_{44} & C^{(k)}_{45} \\ C^{(k)}_{54} & C^{(k)}_{55} \end{bmatrix},\ R_{(k)} = \begin{bmatrix} R^{(k)}_{44} & R^{(k)}_{45} \\ R^{(k)}_{54} & R^{(k)}_{55} \end{bmatrix},\ G_{(k)} = \begin{bmatrix} G^{(k)}_{44} & G^{(k)}_{45} \\ G^{(k)}_{54} & G^{(k)}_{55} \end{bmatrix}, \tag{2.73}$$

где

$$A^{(k)}_{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} a^{ij}_{(k)} dz, \quad D^{(k)}_{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z^{2} a^{ij}_{(k)} dz, \quad K^{(k)}_{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z\varphi^{(k)}(z) a^{ij}_{(k)} dz,\ F^{(k)}_{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi^{2}_{(k)}(z) a^{ij}_{(k)} dz,$$

$$C^{(k)}_{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} a^{ij}_{(k)} dz, \quad R^{(k)}_{ij} = \frac{1}{2}\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi^{\prime}_{(k)}(z) a^{ij}_{(k)} dz,\ G^{(k)}_{ij} = \frac{1}{4}\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left[\varphi^{\prime}_{(k)}(z)\right]^{2} a^{ij}_{(k)} dz. \tag{2.74}$$

Считается, что функция $\varphi_{(k)}(z)$, которая определяет нелинейный характер распределения тангенциальных перемещений (2.4) по толщине k-го слоя оболочки, имеет вид

$$\varphi_{(k)}(z) = z f_{(k)}(z). \tag{2.75}$$

При этом функция $f_{(k)}(z)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h^{(k)}}\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} f_{(k)}(z)dz = 1, \quad \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} zf_{(k)}(z)dz = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}(z)dz = 0, \quad f_{(k)}(-z) = f_{(k)}(z). \qquad (2.76)$$

Выбор $\varphi_{(k)}(z)$ в виде функции (2.76) существенно упрощает вывод зависимостей (2.69) – (2.71), т.к. часть коэффициентов с интегралами

$$\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} zdz = 0, \quad \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}(z)dz = 0, \quad \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z\varphi'_{(k)}(z)dz = 0$$

будет равна нулю. Кроме этого, момент $M^{i3}_{(k)}$ также обращается в нуль:

$$M^{i3}_{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma^{i3}_{(k)} zdz = 0\,. \qquad (2.77)$$

Решая линейные системы уравнений (2.69) – (2.71), несложно найти следующие зависимости:

$$\varepsilon_{(k)} = A^{-1}_{(k)} T_{(k)}, \qquad (2.78)$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{(k)} \\ \psi_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{(k)} & K_{(k)} \\ K_{(k)} & F_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{(k)} \\ L_{(k)} \end{bmatrix}, \qquad (2.79)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\gamma}_{(k)} \\ \psi^{\gamma}_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{(k)} & R_{(k)} \\ R_{(k)} & G_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q^{\gamma}_{(k)} \\ L^{\gamma}_{(k)} \end{bmatrix}. \qquad (2.80)$$

Вывод соотношений (2.78) – (2.80) в форме аналитических зависимостей весьма проблематичен, поэтому значительно проще получить такое решение одним из численных методов на ЭВМ.

Таким образом, в развернутой форме уравнения (2.78) – (2.80) можно переписать в виде:

$$\varepsilon^{(k)}_{11} = B^{(k)}_{11} T^{11}_{(k)} + B^{(k)}_{12} T^{22}_{(k)} + B^{(k)}_{13} Q^{3}_{(k)} + B^{(k)}_{16} T^{12}_{(k)}, \quad \varepsilon^{(k)}_{22} = B^{(k)}_{21} T^{11}_{(k)} + B^{(k)}_{22} T^{22}_{(k)} + B^{(k)}_{23} Q^{3}_{(k)} + B^{(k)}_{26} T^{12}_{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)}_{33} = B^{(k)}_{31} T^{11}_{(k)} + B^{(k)}_{32} T^{22}_{(k)} + B^{(k)}_{33} Q^{3}_{(k)} + B^{(k)}_{36} T^{12}_{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)}_{12} = B^{(k)}_{61} T^{11}_{(k)} + B^{(k)}_{62} T^{22}_{(k)} + B^{(k)}_{63} Q^{3}_{(k)} + B^{(k)}_{66} T^{12}_{(k)}. \qquad (2.81)$$

$$\chi^{(k)\gamma}_{11} = d^{(k)}_{11} M^{11}_{(k)} + d^{(k)}_{12} M^{22}_{(k)} + d^{(k)}_{13} M^{12}_{(k)} + d^{(k)}_{14} L^{11}_{(k)} + d^{(k)}_{15} L^{22}_{(k)} + d^{(k)}_{16} L^{12}_{(k)},$$

$$\chi^{(k)\gamma}_{22} = d^{(k)}_{21} M^{11}_{(k)} + d^{(k)}_{22} M^{22}_{(k)} + d^{(k)}_{23} M^{12}_{(k)} + d^{(k)}_{24} L^{11}_{(k)} + d^{(k)}_{25} L^{22}_{(k)} + d^{(k)}_{26} L^{12}_{(k)},$$

$$\chi^{(k)\gamma}_{12} = d^{(k)}_{31} M^{11}_{(k)} + d^{(k)}_{32} M^{22}_{(k)} + d^{(k)}_{33} M^{12}_{(k)} + d^{(k)}_{34} L^{11}_{(k)} + d^{(k)}_{35} L^{22}_{(k)} + d^{(k)}_{36} L^{12}_{(k)},$$

$$\psi_{11}^{(k)}=d_{41}^{(k)}M_{(k)}^{11}+d_{42}^{(k)}M_{(k)}^{22}+d_{43}^{(k)}M_{(k)}^{12}+d_{44}^{(k)}L_{(k)}^{11}+d_{45}^{(k)}L_{(k)}^{22}+d_{46}^{(k)}L_{(k)}^{12},$$

$$\psi_{22}^{(k)}=d_{51}^{(k)}M_{(k)}^{11}+d_{52}^{(k)}M_{(k)}^{22}+d_{53}^{(k)}M_{(k)}^{12}+d_{54}^{(k)}L_{(k)}^{11}+d_{55}^{(k)}L_{(k)}^{22}+d_{56}^{(k)}L_{(k)}^{12},$$

$$\psi_{12}^{(k)}=d_{61}^{(k)}M_{(k)}^{11}+d_{62}^{(k)}M_{(k)}^{22}+d_{63}^{(k)}M_{(k)}^{12}+d_{64}^{(k)}L_{(k)}^{11}+d_{65}^{(k)}L_{(k)}^{22}+d_{66}^{(k)}L_{(k)}^{12}, \qquad (2.82)$$

$$\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}=g_{11}^{(k)}Q_{(k)}^{2}+g_{12}^{(k)}Q_{(k)}^{1}+g_{13}^{(k)}L_{(k)}^{23}+g_{14}^{(k)}L_{(k)}^{13},\ \ \varepsilon_{13}^{(k)\gamma}=g_{21}^{(k)}Q_{(k)}^{2}+g_{22}^{(k)}Q_{(k)}^{1}+g_{23}^{(k)}L_{(k)}^{23}+g_{24}^{(k)}L_{(k)}^{13},$$

$$\psi_{2}^{(k)}=g_{31}^{(k)}Q_{(k)}^{2}+g_{32}^{(k)}Q_{(k)}^{1}+g_{33}^{(k)}L_{(k)}^{23}+g_{34}^{(k)}L_{(k)}^{13},$$

$$\psi_{1}^{(k)}=g_{41}^{(k)}Q_{(k)}^{2}+g_{42}^{(k)}Q_{(k)}^{1}+g_{43}^{(k)}L_{(k)}^{23}+g_{44}^{(k)}L_{(k)}^{13}, \qquad (2.83)$$

где
$$\left(B_{ij}^{(k)}\right)=\left(A_{ij}^{(k)}\right)^{-1}(i,\ j=1,2,\ldots,4),$$

$$\left(d_{ij}^{(k)}\right)=\begin{bmatrix} D_{(k)} & K_{(k)} \\ K_{(k)} & F_{(k)} \end{bmatrix}^{-1}(i,\ j=1,2,\ldots,6),\ \ \left(g_{ij}^{(k)}\right)=\begin{bmatrix} C_{(k)} & R_{(k)} \\ R_{(k)} & G_{(k)} \end{bmatrix}^{-1}\quad (i,\ j=1,2,\ldots,4). \qquad (2.84)$$

Принимая обозначения (2.72), интеграл дополнительной работы деформации $F_p^{(k)}$ (2.53) запишется так:

$$F_p^{(k)}=\frac{1}{2}[T_{(k)}^{11}\varepsilon_{11}^{(k)}+T_{(k)}^{12}\varepsilon_{12}^{(k)}+T_{(k)}^{22}\varepsilon_{22}^{(k)}+M_{(k)}^{11}\chi_{11}^{(k)}+2M_{(k)}^{12}\chi_{12}^{(k)}+M_{(k)}^{22}\chi_{22}^{(k)}+L_{(k)}^{11}\psi_{11}^{(k)}+2L_{(k)}^{12}\psi_{12}^{(k)}+$$

$$+L_{(k)}^{22}\psi_{22}^{(k)}+2Q_{(k)}^{1}\varepsilon_{13}^{(k)\gamma}+2Q_{(k)}^{2}\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}+L_{(k)}^{13}\psi_{1}^{(k)}+L_{(k)}^{23}\psi_{2}^{(k)}+M_{(k)}^{i3}\nabla_i\varepsilon_{33}^{(k)ƶ}+Q_{(k)}^{3}\varepsilon_{33}^{(k)ƶ}]. \qquad (2.85)$$

Функция $F_p^{(k)}$ заметно упрощается, если учесть тождества

$$T_{(k)}^{12}=T_{(k)}^{21},\quad M_{(k)}^{12}=M_{(k)}^{21},\quad L_{(k)}^{12}=L_{(k)}^{21}.$$

Опуская ряд громоздких преобразований, из (2.54), (2.81) – (2.83), (2.85) следуют соотношения упругости для k-го слоя, которые записываются при помощи физических компонент тензоров усилий и деформаций:

$$\varepsilon_{11}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial T_{11}^{(k)}}=B_{11}^{(k)}T_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{12}^{(k)}+B_{21}^{(k)}\right)T_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{13}^{(k)}+B_{31}^{(k)}\right)Q_{3}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{16}^{(k)}+B_{61}^{(k)}\right)T_{12}^{(k)},$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial T_{22}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(B_{12}^{(k)}+B_{21}^{(k)}\right)T_{11}^{(k)}+B_{22}^{(k)}T_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{23}^{(k)}+B_{32}^{(k)}\right)Q_{3}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{26}^{(k)}+B_{62}^{(k)}\right)T_{12}^{(k)},$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{3}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(B_{13}^{(k)}+B_{31}^{(k)}\right)T_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{23}^{(k)}+B_{32}^{(k)}\right)T_{22}^{(k)}+B_{33}^{(k)}Q_{3}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{36}^{(k)}+B_{63}^{(k)}\right)T_{12}^{(k)},$$

$$\varepsilon_{12}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial T_{12}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(B_{16}^{(k)}+B_{61}^{(k)}\right)T_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{26}^{(k)}+B_{62}^{(k)}\right)T_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(B_{36}^{(k)}+B_{63}^{(k)}\right)Q_{3}^{(k)}+B_{66}^{(k)}T_{12}^{(k)}, \qquad (2.86)$$

$$\chi_{11}^{(k)\gamma}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{11}^{(k)}}=d_{11}^{(k)}M_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{12}^{(k)}+d_{21}^{(k)}\right)M_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{13}^{(k)}+2d_{31}^{(k)}\right)M_{12}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{14}^{(k)}+d_{41}^{(k)}\right)L_{11}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(d_{15}^{(k)}+d_{51}^{(k)}\right)L_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{16}^{(k)}+2d_{61}^{(k)}\right)L_{12}^{(k)},$$

$$\chi_{22}^{(k)\gamma}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{22}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(d_{12}^{(k)}+d_{21}^{(k)}\right)M_{11}^{(k)}+d_{22}^{(k)}M_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{23}^{(k)}+2d_{32}^{(k)}\right)M_{12}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{24}^{(k)}+d_{42}^{(k)}\right)L_{11}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(d_{25}^{(k)}+d_{52}^{(k)}\right)L_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{26}^{(k)}+2d_{62}^{(k)}\right)L_{12}^{(k)},$$

$$2\chi_{12}^{(k)\gamma}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{12}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(d_{13}^{(k)}+2d_{31}^{(k)}\right)M_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{23}^{(k)}+2d_{32}^{(k)}\right)M_{22}^{(k)}+2d_{33}^{(k)}M_{12}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(d_{43}^{(k)}+2d_{34}^{(k)}\right)L_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{53}^{(k)}+2d_{35}^{(k)}\right)L_{22}^{(k)}+\left(d_{36}^{(k)}+d_{63}^{(k)}\right)L_{12}^{(k)}, \qquad (2.87)$$

$$\psi_{11}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{11}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(d_{14}^{(k)}+d_{41}^{(k)}\right)M_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{24}^{(k)}+d_{42}^{(k)}\right)M_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{43}^{(k)}+2d_{34}^{(k)}\right)M_{12}^{(k)}+$$

$$+d_{44}^{(k)}L_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{45}^{(k)}+d_{54}^{(k)}\right)L_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{46}^{(k)}+2d_{64}^{(k)}\right)L_{12}^{(k)},$$

$$\psi_{22}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{22}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(d_{15}^{(k)}+d_{51}^{(k)}\right)M_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{25}^{(k)}+d_{52}^{(k)}\right)M_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{53}^{(k)}+2d_{35}^{(k)}\right)M_{12}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(d_{45}^{(k)}+d_{54}^{(k)}\right)L_{11}^{(k)}+d_{55}^{(k)}L_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{56}^{(k)}+2d_{65}^{(k)}\right)L_{12}^{(k)},$$

$$2\psi_{12}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{12}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(d_{16}^{(k)}+2d_{61}^{(k)}\right)M_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{26}^{(k)}+2d_{62}^{(k)}\right)M_{22}^{(k)}+\left(d_{36}^{(k)}+d_{63}^{(k)}\right)M_{12}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(d_{46}^{(k)}+2d_{64}^{(k)}\right)L_{11}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(d_{56}^{(k)}+2d_{65}^{(k)}\right)L_{22}^{(k)}+2d_{66}^{(k)}L_{12}^{(k)}, \qquad (2.88)$$

$$2\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_2^{(k)}}=2g_{11}^{(k)}Q_2^{(k)}+\left(g_{12}^{(k)}+g_{21}^{(k)}\right)Q_1^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{31}^{(k)}+2g_{13}^{(k)}\right)L_{23}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{41}^{(k)}+2g_{14}^{(k)}\right)L_{13}^{(k)},$$

$$2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_1^{(k)}}=\left(g_{12}^{(k)}+g_{21}^{(k)}\right)Q_2^{(k)}+2g_{22}^{(k)}Q_1^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{32}^{(k)}+2g_{23}^{(k)}\right)L_{23}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{42}^{(k)}+2g_{24}^{(k)}\right)L_{13}^{(k)}, \qquad (2.89)$$

$$\psi_{2}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{23}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(g_{31}^{(k)}+2g_{13}^{(k)}\right)Q_2^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{32}^{(k)}+2g_{23}^{(k)}\right)Q_1^{(k)}+g_{33}^{(k)}L_{23}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{34}^{(k)}+g_{43}^{(k)}\right)L_{13}^{(k)},$$

$$\psi_{1}^{(k)}=\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{13}^{(k)}}=\frac{1}{2}\left(g_{41}^{(k)}+2g_{14}^{(k)}\right)Q_2^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{42}^{(k)}+2g_{24}^{(k)}\right)Q_1^{(k)}+\frac{1}{2}\left(g_{43}^{(k)}+g_{34}^{(k)}\right)L_{23}^{(k)}+g_{44}^{(k)}L_{13}^{(k)}. \qquad (2.90)$$

2.2.3. Уравнения дискретно – структурной теории при наличии идеального контакта слоев структуры анизотропного тела. В соответствии с общей и местной системами координат, которые были введены в подразделе 2.1 для рассматриваемой многослойной оболочки (рис.2.1), кинематические условия идеального контакта k-го слоя оболочки с $k+1$ и $k-1$-ым слоями в тензорной форме запишутся таким образом:

$$z^{(k)}=\frac{h^{(k)}}{2}:\ u_i^{(k)}+\frac{h^{(k)}}{2}\gamma_i^{(k)}+\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\psi_i^{(k)}=u_i^{(k+1)}-\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma_i^{(k+1)}-\varphi^{(k+1)}\left(\frac{h^{(k+1)}}{2}\right)\psi_i^{(k+1)},\ (i=1,2),$$

$$w^{(k)}+\frac{h^{(k)}}{2}\gamma^{(k)}=w^{(k+1)}-\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k+1)};\tag{2.91}$$

$$z^{(k)}=-\frac{h^{(k)}}{2}:\ u_i^{(k)}-\frac{h^{(k)}}{2}\gamma_i^{(k)}-\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\psi_i^{(k)}=u_i^{(k-1)}+\frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma_i^{(k-1)}+\varphi^{(k-1)}\left(\frac{h^{(k-1)}}{2}\right)\psi_i^{(k-1)},\ (i=1,2),$$

$$w^{(k)}-\frac{h^{(k)}}{2}\gamma^{(k)}=w^{(k-1)}+\frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma^{(k-1)}.\tag{2.92}$$

Здесь функция $\varphi^{(k)}(z)$, как отмечалось ранее (2.76), будет нечетной, т.е. $\varphi^{(k)}(-z)=-\varphi^{(k)}(z)$. Решая совместно уравнения (2.91) – (2.92), перемещения срединной поверхности k-го слоя можно выразить через перемещения срединных поверхностей $k+1$, k-1-го слоев оболочки:

$$2u_i^{(k)}=u_i^{(k+1)}+u_i^{(k-1)}-\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma_i^{(k+1)}+\frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma_i^{(k-1)}-\varphi^{(k+1)}\left(\frac{h^{(k+1)}}{2}\right)\psi_i^{(k+1)}+\varphi^{(k-1)}\left(\frac{h^{(k-1)}}{2}\right)\psi_i^{(k-1)},\ (i=1,2),$$

$$2w^{(k)}=w^{(k+1)}+w^{(k-1)}-\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k+1)}+\frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma^{(k-1)}.\tag{2.93}$$

Выражения (2.91) – (2.92) несколько видоизменяются для первого и n-го слоев:

$$u_i^{(1)}=u_i^{(2)}-\frac{h^{(2)}}{2}\gamma_i^{(2)}-\frac{h^{(1)}}{2}\gamma_i^{(1)}-\varphi^{(2)}\left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)\psi_i^{(2)}-\varphi^{(1)}\left(\frac{h^{(1)}}{2}\right)\psi_i^{(1)}\quad (i=1,2),$$

$$w^{(1)}=w^{(2)}-\frac{h^{(1)}}{2}\gamma^{(1)}-\frac{h^{(2)}}{2}\gamma^{(2)},$$

$$u_i^{(n)}=u_i^{(n-1)}+\frac{h^{(n-1)}}{2}\gamma_i^{(n-1)}+\frac{h^{(n)}}{2}\gamma_i^{(n)}+\varphi^{(n-1)}\left(\frac{h^{(n-1)}}{2}\right)\psi_i^{n-1}+\varphi^{(n)}\left(\frac{h^{(n)}}{2}\right)\psi_i^{(n)}\quad (i=1,2),$$

$$w^{(n)}=w^{(n-1)}+\frac{h^{(n-1)}}{2}\gamma^{(n-1)}+\frac{h^{(n)}}{2}\gamma^{(n)}.\tag{2.94}$$

Статические краевые условия идеального контакта на лицевых поверхностях k-го слоя принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(k)+}=\sigma_{i3}^{(k+1)-},\qquad \sigma_{i3}^{(k)-}=\sigma_{i3}^{(k-1)+}\qquad (i=1,2),\ \sigma_{33}^{(k)+}=\sigma_{33}^{(k+1)-},\qquad \sigma_{33}^{(k)-}=\sigma_{33}^{(k-1)+}. \tag{2.95}$$

Для первого и n-го слоев оболочки выражения (2.95) соответственно перепишутся так:

$$\sigma_{i3}^{(1)+}=\sigma_{i3}^{(2)-},\qquad \sigma_{i3}^{(1)-}=q_{(1)}^{(-)i}\qquad (i=1,2),\qquad \sigma_{33}^{(1)+}=\sigma_{33}^{(2)-},\qquad \sigma_{33}^{(1)-}=q_{(1)}^{(-)},$$
$$\sigma_{i3}^{(n)+}=-q_{(n)}^{(+)i},\qquad \sigma_{i3}^{(n)-}=\sigma_{i3}^{(n-1)+}\qquad (i=1,2),\ \sigma_{33}^{(n)+}=-q_{(n)}^{(+)},\qquad \sigma_{33}^{(n)-}=\sigma_{33}^{(n-1)+}. \tag{2.96}$$

При этом напряжения $\sigma_{(k)}^{i3}$ $(i=1,2,3)$ на лицевых поверхностях k-го слоя, согласно статическим условиям (2.95) и соотношениям упругости (2.67), принимают вид

$$ƶ^{(k)}=-\frac{h^{(k)}}{2}:\ \sigma_{13}^{(k)-}=a_{(k)}^{54}\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{55}\varepsilon_{13}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)/}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{54}\psi_2^{(k)}+a_{(k)}^{55}\psi_1^{(k)}\right)\quad (1\leftrightarrow 2,4\leftrightarrow 5),$$

$$\sigma_{33}^{(k)-}=a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\varepsilon_{12}^{(k)}-\frac{h^{(k)}}{2}\left(a_{(k)}^{31}\chi_{11}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{32}\chi_{22}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{36}\chi_{12}^{(k)\gamma}\right)-$$
$$-\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{31}\psi_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\psi_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\psi_{12}^{(k)}\right),$$

$$ƶ^{(k)}=\frac{h^{(k)}}{2}:\ \sigma_{13}^{(k)+}=a_{(k)}^{54}\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{55}\varepsilon_{13}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)/}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{54}\psi_2^{(k)}+a_{(k)}^{55}\psi_1^{(k)}\right)(1\leftrightarrow 2,4\leftrightarrow 5),$$

$$\sigma_{33}^{(k)+}=a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\varepsilon_{12}^{(k)}+\frac{h^{(k)}}{2}\left(a_{(k)}^{31}\chi_{11}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{32}\chi_{22}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{36}\chi_{12}^{(k)\gamma}\right)+$$
$$+\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{31}\psi_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\psi_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\psi_{12}^{(k)}\right). \tag{2.97}$$

Таким образом, кинематические условия идеального контакта лицевых поверхностей $\boldsymbol{k}$-го слоя и сопряженных с ними лицевых поверхностей $\boldsymbol{k}$-1 и $\boldsymbol{k}$+1 слоев (2.91), (2.92) накладывают определенные ограничения (2.93) на тангенциальные и нормальные перемещения k-го слоя. Аналогично статические условия идеального контакта (2.95) вносят некоторые изменения в характер распределения напряжений сдвига и обжатия (2.67) в зонах контакта k-го слоя (2.97).

Вносся соотношения (2.95) в формулы (2.42) – (2.44) и считая, что

$g^{(k)} \approx a^{(k)}$, компоненты векторов $\vec{X}_{(k)}$, $\vec{M}_{(k)}$, $\vec{B}_{(k)}$ $\boldsymbol{k}$ -го слоя оболочки принимают вид

$$X_i^{(k)} = \sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}, \quad X_3^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}, \; M_i^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2}(\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}),$$

$$M_3^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2}(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}), \quad B_i^{(k)} = \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}\right) \quad (i = 1,2). \qquad (2.98)$$

Здесь не учитывается влияние собственного веса k-го слоя $\vec{p}^{(k)}$ на компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Имея геометрические соотношения (2.11) – (2.35) для случая среднего изгиба k-го слоя, физические соотношения (2.86) – (2.90), уравнения равновесия (2.58), (2.59), несложно для оболочки вращения, которая включает в себя $\boldsymbol{n}$ слоев с соосными поверхностями вращения, составить $\boldsymbol{n}$ разрешающих систем уравнений для каждого слоя. При этом условия идеального контакта по сопряженным лицевым поверхностям слоев выполняются при помощи соотношений (2.93) – (2.94), (2.97) – (2.98). В качестве основных неизвестных принимаются функции, которые входят в граничные условия на боковом контуре $\boldsymbol{k}$ -го слоя оболочки. Таким образом, разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных для $\boldsymbol{k}$ -го слоя оболочки имеет вид

$$\frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{A_{(\kappa)}\partial \alpha_1^{(k)}} = D_0^{(k)}\vec{R}^{(k)} + D_1^{(k)}\frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{B_{(k)}\partial \alpha_2^{(k)}} + \vec{f}^{(k)} \qquad k = 1,2..., n \;, \qquad (2.99)$$

где
$$\vec{R}^{(k)} = \left\{R_{11}^{(k)}, R_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\right\}^T,$$
$$\vec{f}^{(k)} = \left\{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, ..., f_{14}^{(k)}\right\}^T,$$

$D_0^{(k)}, D_1^{(k)}$-квадратные матрицы 14-го порядка.

Кроме 14 дифференциальных уравнений система уравнений (2.99) дополняется двумя недифференциальными уравнениями (2.59) и (2.13) при учете поперечного обжатия $\boldsymbol{k}$ -го слоя. На торцах каждого слоя оболочки имеют место статические (2.60), геометрические и смешанного типа граничные условия (2.61) – (2.64).

После отбрасывания нелинейных слагаемых более высокого порядка малости физические компоненты тензора тангенциальных усилий $R_{ij}^{(k)}$ и усилий поперечного сдвига $R_{i3}^{(k)}$ (2.55) запишутся таким образом:

$$R_{11}^{(k)} \approx T_{11}^{(k)}, \quad R_{22}^{(k)} \approx T_{22}^{(k)}, \quad R_{12}^{(k)} \approx R_{21}^{(k)} \approx T_{12}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)},$$

$$R_{13}^{(k)} \approx T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)} + T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)} + Q_1^{(k)}, \quad R_{23}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)}\omega_1^{(k)} + T_{22}^{(k)}\omega_2^{(k)} + Q_2^{(k)}, \tag{2.100}$$

где $$\gamma_1^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - \omega_1^{(k)}, \quad \omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1} - k_1^{(k)}u_1^{(k)} \quad \left(1 \leftrightarrow 2, A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}\right). \tag{2.101}$$

При этом система уравнений (2.99) перепишется

$$\frac{\partial\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}\partial\alpha_1} = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \vec{Y}^{(k)}, \frac{\partial\vec{Y}^{(k)}}{B_{(k)}\partial\alpha_2}, \vec{f}^{(k)}\right) \qquad k = 1,2,...,n, \tag{2. 102}$$

где вектор решений

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{\vec{Y}_1^{(k)}, \vec{Y}_2^{(k)}, ..., \vec{Y}_{14}^{(k)}\right\}^T =$$
$$= \left\{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\right\}^T$$

И компоненты вектора правых частей ***F*** в развернутой форме:

$$F_1^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_1^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_2^{(k)} - \rho_1^{(k)}T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)}Y_3^{(k)} - \frac{\partial Y_2^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - X_1^{(k)},$$

$$F_2^{(k)} = -\rho_2^{(k)}Y_1^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_2^{(k)} + \rho_2^{(k)}T_{22}^{(k)} - k_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - \frac{\partial T_{22}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - X_2^{(k)},$$

$$F_3^{(k)} = k_1^{(k)}Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)}Y_3^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)} + \rho_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - \frac{\partial R_{23}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - X_3^{(k)},$$

$$F_4^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_4^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_5^{(k)} - \rho_1^{(k)}M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{\partial Y_5^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{h_{(k)}}{2}X_1^{(k)},$$

$$F_5^{(k)} = -\rho_2^{(k)}Y_4^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_5^{(k)} + \rho_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{\partial M_{22}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{h_{(k)}}{2}X_2^{(k)},$$

$$F_6^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_6^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_7^{(k)} - \rho_1^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \frac{\partial Y_7^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right)X_1^{(k)},$$

$$F_7^{(k)} = -\rho_2^{(k)}Y_6^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_7^{(k)} + \rho_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \frac{\partial L_{22}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right)X_2^{(k)},$$

$$F_8^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)}Y_9^{(k)} - k_1^{(k)}Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)^2,$$

$$F_9^{(k)} = \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)} Y_8^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_9^{(k)} - \left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)\left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - k_2^{(k)} Y_9^{(k)}\right) - \frac{\partial Y_8^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2},$$

$$F_{10}^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)} Y_8^{(k)}, \qquad F_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma} + \rho_2^{(k)} Y_{12}^{(k)},$$

$$F_{12}^{(k)} = 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_2^{(k)} Y_{11}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)} - \frac{\partial Y_{11}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}, \qquad F_{13}^{(k)} = \psi_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)} Y_{14}^{(k)},$$

$$F_{14}^{(k)} = 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)} Y_{13}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)} - \frac{\partial Y_{13}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}, \qquad . \tag{2.103}$$

где

$$\rho_1 = -\frac{\partial B^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial\alpha_1}, \qquad \rho_2 = -\frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial\alpha_2}.$$

При учете поперечного обжатия k-го слоя система уравнений (2.102) дополняется двумя недифференциальными уравнениями:

$$Q_3^{(k)} = \frac{h_{(k)}}{2}\left(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}\right) - k_1^{(k)}\left(Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)}\right) - k_2^{(k)}\left(M_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)}\right),$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \gamma_{(k)}. \tag{2.104}$$

Учитывая, что, как правило, тангенциальные компоненты деформаций k-го слоя не оказывают существенного влияния на величину напряжений поперечного обжатия, третье уравнение физических соотношений (2.69) можно переписать в таком виде:

$$Q_3^{(k)} \approx A_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z}. \tag{2.105}$$

Решая совместно уравнения (2.104) и (2.105), можно составить выражения для определения деформации поперечного обжатия k-го слоя

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \frac{Q_3^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} = \left(A_{33}^{(k)}\right)^{-1}\left[\frac{h_{(k)}}{2}\left(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}\right) - k_1^{(k)}\left(Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)}\right) - k_2^{(k)}\left(M_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)}\right)\right]. \tag{2.106}$$

В уравнении (2.106) не учитывается слагаемое, равное половине произведения толщины k-го слоя на разность напряжений поперечного обжатия, которые возникают на лицевых поверхностях, так как известно, что эти напряжения значительно меньше остальных компонент напряженного состояния оболочки.

Все неизвестные, которые входят в правую часть системы уравнений (2.102), необходимо выразить через компоненты вектора решений $\vec{Y}^{(k)}$. Эти зависимости несложно получить при помощи геометрических и физических соотношений. Опуская целый ряд громоздких преобразований, выражения усилий $M_{22}^{(k)}$, $L_{22}^{(k)}$, $T_{22}^{(k)}$, $Q_2^{(k)}$, $Q_1^{(k)}$, $L_{23}^{(k)}$, $R_{23}^{(k)}$, которые входят в правую часть (2.103) системы уравнений (2.102), можно записать при помощи компонент вектора $\vec{Y}^{(k)}$в виде:

$$M_{22}^{(k)} = m_1^{(k)} Y_4^{(k)} - m_2^{(k)} Y_5^{(k)} + m_3^{(k)} Y_6^{(k)} - m_4^{(k)} Y_7^{(k)} + m_5^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} +$$
$$+ m_6^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{13}^{(k)} - m_5^{(k)} \frac{\partial Y_{12}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - m_6^{(k)} \frac{\partial Y_{14}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2},$$

$$L_{22}^{(k)} = l_1^{(k)} Y_4^{(k)} - l_2^{(k)} Y_5^{(k)} + l_3^{(k)} Y_6^{(k)} - l_4^{(k)} Y_7^{(k)} + l_5^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} +$$
$$+ l_6^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{13}^{(k)} - l_5^{(k)} \frac{\partial Y_{12}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - l_6^{(k)} \frac{\partial Y_{14}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2},$$

$$T_{22}^{(k)} = t_1^{(k)} Y_1^{(k)} + t_2^{(k)} Y_2^{(k)} + t_3^{(k)} Y_4^{(k)} - t_4^{(k)} Y_5^{(k)} + t_5^{(k)} Y_6^{(k)} -$$
$$- t_6^{(k)} Y_7^{(k)} - t_7^{(k)} Y_8^{(k)} - t_8^{(k)} \left(Y_9^{(k)}\right)^2 + t_9^{(k)} Y_{10}^{(k)} + t_{10}^{(k)} Y_{11}^{(k)} + t_{11}^{(k)} Y_{13}^{(k)} + t_{12}^{(k)} \frac{\partial Y_9^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} -$$
$$- t_{13}^{(k)} Y_9^{(k)} \frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} + t_{14}^{(k)} \left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} \right)^2 - t_{15}^{(k)} \frac{\partial Y_{12}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - t_{16}^{(k)} \frac{\partial Y_{14}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2},$$

$$Q_2^{(k)} = \frac{C_{44}^{(k)}}{2} \left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - k_2^{(k)} Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)} \right) + \frac{C_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)}} \left(Y_3^{(k)} + \frac{1}{2} C_{54}^{(k)} k_2^{(k)} Y_9^{(k)} - \frac{1}{2} \times \right.$$
$$\times C_{54}^{(k)} Y_{12}^{(k)} - R_{55}^{(k)} Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)} Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} - k_2^{(k)} Y_2^{(k)} Y_9^{(k)} -$$
$$\left. - \frac{1}{2} C_{54}^{(k)} \frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} + Y_2^{(k)} \frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} \right) + R_{44}^{(k)} Y_{14}^{(k)} + R_{45}^{(k)} Y_{13}^{(k)},$$

$$Q_1^{(k)} = \frac{C_{54}^{(k)}}{2} \left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - k_2^{(k)} Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)} \right) + \frac{C_{55}^{(k)}}{C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)}} \left(Y_3^{(k)} + \frac{1}{2} C_{54}^{(k)} k_2^{(k)} Y_9^{(k)} - \frac{1}{2} \times \right.$$
$$\times C_{54}^{(k)} Y_{12}^{(k)} - R_{55}^{(k)} Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)} Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} - k_2^{(k)} Y_2^{(k)} Y_9^{(k)} - \frac{1}{2} C_{54}^{(k)} \frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} +$$
$$\left. + Y_2^{(k)} \frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} \right) + R_{54}^{(k)} Y_{14}^{(k)} + R_{55}^{(k)} Y_{13}^{(k)},$$

$$L_{23}^{(k)} = \frac{R_{44}^{(k)}}{2}\left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - k_2^{(k)}Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)}\right) + \frac{C_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)}}\left(Y_3^{(k)} + \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \frac{1}{2}\times\right.$$

$$\times C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)} - R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)} - k_2^{(k)}Y_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} +$$

$$\left. + Y_2^{(k)}\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}\right) + G_{44}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + G_{45}^{(k)}Y_{13}^{(k)},$$

$$L_{13}^{(k)} = \frac{R_{54}^{(k)}}{2}\left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - k_2^{(k)}Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)}\right) + \frac{R_{55}^{(k)}}{C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)}}\left(Y_3^{(k)} + \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \frac{1}{2}\times\right.$$

$$\times C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)} - R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)} - k_2^{(k)}Y_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} +$$

$$\left. + Y_2^{(k)}\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}\right) + G_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + G_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)},$$

$$R_{23}^{(k)} = Q_2^{(k)} + Y_2^{(k)}\left[\frac{2}{C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)}}\left(Y_3^{(k)} + \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)} - k_2^{(k)}Y_2^{(k)}Y_9^{(k)} + Y_2^{(k)}\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}\right) - Y_{11}^{(k)}\right] + T_{22}^{(k)}\left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - k_2^{(k)}Y_9^{(k)}\right), \qquad (2.107)$$

где

$$m_1^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(D_{21}^{(k)}Z_{11}^{(k)} - D_{26}^{(k)}Z_{12}^{(k)} + K_{21}^{(k)}Z_{13}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{14}^{(k)}\right),$$

$$m_2^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(D_{21}^{(k)}Z_{21}^{(k)} - D_{26}^{(k)}Z_{22}^{(k)} + K_{21}^{(k)}Z_{23}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{24}^{(k)}\right),$$

$$m_3^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(D_{21}^{(k)}Z_{31}^{(k)} - D_{26}^{(k)}Z_{32}^{(k)} + K_{21}^{(k)}Z_{33}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{34}^{(k)}\right),$$

$$m_4^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(D_{21}^{(k)}Z_{41}^{(k)} - D_{26}^{(k)}Z_{42}^{(k)} + K_{21}^{(k)}Z_{43}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{44}^{(k)}\right),$$

$$m_5^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left[D_{21}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{11}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{21}^{(k)} + K_{12}^{(k)}Z_{31}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{41}^{(k)}\right) - \left(D_{26}^{(k)} + \left(D_{12}^{(k)}Z_{12}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{22}^{(k)} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + K_{12}^{(k)}Z_{32}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{42}^{(k)}\right) + K_{21}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{13}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{23}^{(k)} + K_{12}^{(k)}Z_{33}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{43}^{(k)}\right) -$$

$$\left. - K_{26}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{14}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{24}^{(k)} + K_{12}^{(k)}Z_{34}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{44}^{(k)}\right)\right] - D_{22}^{(k)},$$

$$m_6^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left[D_{21}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{11}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{21}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{31}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{41}^{(k)}\right) - D_{26}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{12}^{(k)} - \right.\right.$$

$$\left. - K_{62}^{(k)}Z_{22}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{32}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{42}^{(k)}\right) + K_{21}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{13}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{23}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{33}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{43}^{(k)}\right) -$$

$$\left. - K_{26}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{14}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{24}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{34}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{44}^{(k)}\right)\right] - K_{22}^{(k)},$$

$$l_1^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(K_{21}^{(k)}Z_{11}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{12}^{(k)} + F_{21}^{(k)}Z_{13}^{(k)} - F_{26}^{(k)}Z_{14}^{(k)}\right),$$

$$l_2^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(K_{21}^{(k)}Z_{21}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{22}^{(k)} + F_{21}^{(k)}Z_{23}^{(k)} - F_{26}^{(k)}Z_{24}^{(k)}\right),$$

$$l_3^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(K_{21}^{(k)}Z_{31}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{32}^{(k)} + F_{21}^{(k)}Z_{33}^{(k)} - F_{26}^{(k)}Z_{34}^{(k)}\right),$$

$$l_4^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\left(K_{21}^{(k)}Z_{41}^{(k)} - K_{26}^{(k)}Z_{42}^{(k)} + F_{21}^{(k)}Z_{43}^{(k)} - F_{26}^{(k)}Z_{44}^{(k)}\right),$$

$$l_5^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\Big[K_{21}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{11}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{21}^{(k)} + K_{12}^{(k)}Z_{31}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{41}^{(k)}\right) - K_{26}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{12}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{22}^{(k)} +\right.$$
$$\left. + K_{12}^{(k)}Z_{32}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{42}^{(k)}\right) + F_{21}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{13}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{23}^{(k)} + K_{12}^{(k)}Z_{33}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{43}^{(k)}\right) -$$
$$- F_{26}^{(k)}\left(D_{12}^{(k)}Z_{14}^{(k)} - D_{62}^{(k)}Z_{24}^{(k)} + K_{12}^{(k)}Z_{34}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{44}^{(k)}\right)\Big] - K_{22}^{(k)},$$

$$l_6^{(k)} = Z_{(k)}^{-1}\Big[K_{21}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{11}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{21}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{31}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{41}^{(k)}\right) -$$
$$- K_{26}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{12}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{22}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{32}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{42}^{(k)}\right) + F_{21}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{13}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{23}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{33}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{43}^{(k)}\right) -$$
$$- F_{26}^{(k)}\left(K_{12}^{(k)}Z_{14}^{(k)} - K_{62}^{(k)}Z_{24}^{(k)} + F_{12}^{(k)}Z_{34}^{(k)} - F_{62}^{(k)}Z_{44}^{(k)}\right)\Big] - F_{22}^{(k)},$$

$Z_{ij}^{(k)}(i, j = 1,2,3,4)$-миноры матрицы $Z_{(k)}$, которые получены путем вычеркивания $\boldsymbol{i}$-й строки и $\boldsymbol{j}$-го столбца матрицы

$$Z_{(k)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{16}^{(k)} & K_{11}^{(k)} & K_{16}^{(k)} \\ D_{61}^{(k)} & D_{66}^{(k)} & K_{61}^{(k)} & K_{66}^{(k)} \\ K_{11}^{(k)} & K_{16}^{(k)} & F_{11}^{(k)} & F_{16}^{(k)} \\ K_{61}^{(k)} & K_{66}^{(k)} & F_{61}^{(k)} & F_{66}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$f_1^{(k)} = A_{(k)}^{-1}\left[A_{21}^{(k)}\left(A_{14}^{(k)}A_{42}^{(k)} - A_{12}^{(k)}A_{44}^{(k)}\right) + A_{(k)}A_{22}^{(k)} + A_{26}^{(k)}\left(A_{41}^{(k)}A_{12}^{(k)} - A_{42}^{(k)}A_{11}^{(k)}\right)\right];$$

$$f_2^{(k)} = m_5^{(k)} + l_5^{(k)}, \qquad f_3^{(k)} = m_6^{(k)} + l_6^{(k)},$$

$$f_4^{(k)} = A_{(k)}^{-1}A_{33}^{(k)-1}\left[A_{21}^{(k)}\left(A_{43}^{(k)}A_{14}^{(k)} - A_{44}^{(k)}A_{13}^{(k)}\right) + A_{(k)}^{-1}A_{23}^{(k)} + A_{26}^{(k)}\left(A_{41}^{(k)}A_{13}^{(k)} - A_{43}^{(k)}A_{11}^{(k)}\right)\right];$$

$$t_1^{(k)} = A_{(k)}^{-1}\left(A_{21}^{(k)}A_{44}^{(k)} - A_{26}^{(k)}A_{41}^{(k)}\right), \qquad t_2^{(k)} = A_{(k)}^{-1}\left(A_{26}^{(k)}A_{11}^{(k)} - A_{21}^{(k)}A_{14}^{(k)}\right),$$

$$t_3^{(k)} = \left[k_1^{(k)} + k_2^{(k)}\left(m_1^{(k)} + l_1^{(k)}\right)\right]f_4^{(k)}, \qquad t_4^{(k)} = k_2^{(k)}\left(m_2^{(k)} + l_2^{(k)}\right)f_4^{(k)},$$

$$t_5^{(k)} = \left[k_1^{(k)} + k_2^{(k)}\left(m_3^{(k)} + l_3^{(k)}\right)\right]f_4^{(k)}, \qquad t_6^{(k)} = k_2^{(k)}\left(m_4^{(k)} + l_4^{(k)}\right)f_4^{(k)},$$

$$t_7^{(k)} = \rho_1^{(k)}f_1^{(k)}, \quad t_8^{(k)} = \frac{1}{2}\left(k_2^{(k)}\right)^2 f_1^{(k)}, \quad t_9^{(k)} = k_2^{(k)}f_1^{(k)}, \quad t_{10}^{(k)} = k_2^{(k)}\rho_1^{(k)}f_2^{(k)}f_4^{(k)},$$

$$t_{11}^{(k)} = k_2^{(k)}\rho_1^{(k)}f_3^{(k)}f_4^{(k)}, \quad t_{12}^{(k)} = f_1^{(k)}, \quad t_{13}^{(k)} = k_2^{(k)}f_1^{(k)}, \quad t_{14}^{(k)} = \frac{1}{2}f_1^{(k)},$$

$$t_{15}^{(k)} = k_2^{(k)}f_2^{(k)}f_4^{(k)}, \qquad t_{16}^{(k)} = k_2^{(k)}f_3^{(k)}f_4^{(k)}. \tag{2.108}$$

2.3. Две модели дискретно - структурной теории многослойных тонкостенных конструкций с ослабленным контактом между слоями

В данном подразделе на основе предлагаемого варианта дискретно-структурной теории разработаны две модели, в которых учитываются ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала.

Суть второго варианта расчетной модели многослойной анизотропной оболочки заключается в том, что рассматриваемая оболочка состоит из ***n*** жестких анизотропных слоев толщиной $h^{(k)} \quad (k = 1,2,...,n)$, между которыми имеет место клеевая прослойка ненулевой толщины $h^{[k]} \quad (k = 1,2,...,n-1)$. Считается, что перемещения линейно изменяются по толщине клеевого слоя и записываются при помощи функций, характеризующих перемещения и углы поворотов жестких слоев.

2.3.1. Дискретно – структурная теория многослойных элементов при упругом проскальзывании жестких слоев друг относительно друга (первая модель). Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой, толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю. Тогда в соответствии с допущениями первого варианта модели предполагается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, т.е. по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой.

Статические условия идеального контакта по сопряженным лицевым поверхностям k-го слоя (2.95) можно учесть, если воспользоваться методом штрафных функций [41] и в вариацию работы δA_R (2.39) дополнительно ввести

$$\vec{P}_{(k)} = K(\vec{X}^{+}_{(k-1)} - \vec{X}^{-}_{(k)})^2, \tag{2.109}$$

где K J коэффициент штрафа.

После несложных преобразований в правую часть (2.103) системы уравнений (2.102), составленных для слоя $2 \le k \le n-1$, войдут соответствующие штрафные функции:

в первое уравнение - $P^{1}_{(k)} = 2K(\sigma^{(k-1)+}_{13} - \sigma^{(k)-}_{13})$,

во второе уравнение - $P^{2}_{(k)} = 2K(\sigma^{(k-1)+}_{23} - \sigma^{(k)-}_{23})$,

в третье уравнение - $P^{3}_{(k)} = 2K(\sigma^{(k-1)+}_{33} - \sigma^{(k)-}_{33})$. (2.110)

Следует отметить, что распределение напряжений поперечного сдвига и обжатия $\sigma^{(k)}_{i3}$, $\sigma^{(k)}_{33}$ $(i = 1,2)$ по толщине k-го слоя соответствуют допущениям (2.31) об изменении деформаций $\varepsilon^{(k)z}_{i3}$, $\varepsilon^{(k)z}_{33}$ в зависимости от координаты z, а также физическим соотношениям обобщенного закона Гука (2.67)

$$\sigma^{(k)}_{13} = a^{45}_{(k)}\varepsilon^{(k)\gamma}_{23} + a^{55}_{(k)}\varepsilon^{(k)\gamma}_{13} + \frac{1}{2}\varphi^{(k)/}_{(z)}\left(a^{45}_{(k)}\psi^{(k)}_{2} + a^{55}_{(k)}\psi^{(k)}_{1}\right) \quad (1 \leftrightarrow 2,\ \ 4 \leftrightarrow 5), \tag{2.111}$$

$$\sigma^{(k)}_{33} = a^{31}_{(k)}\varepsilon^{(k)}_{11} + a^{32}_{(k)}\varepsilon^{(k)}_{22} + a^{33}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{33}, \tag{2.112}$$

где $-\dfrac{h^{(k)}}{2} \le z \le \dfrac{h^{(k)}}{2}$.

Выражения (2.111) – (2.112) позволяют при помощи метода штрафных функций выполнить статические условия межслоевого контакта (2.95). Тем не менее, когда в статических условиях контакта первого и n-го слоев (2.96) анизотропной оболочки имеют место нулевые значения горизонтальных или вертикальных составляющих внешней нагрузки $q^{(-)i}_{(1)}$, $q^{(+)i}_{(n)}$, $q^{(-)}_{(1)}$, $q^{(+)}_{n}$ $(i = 1, 2)$, наличие в (2.111) – (2.112) постоянных величин, которые не зависят от координаты z, не позволяет точно удовлетворить граничным условиям на поверхностях оболочки $z = \delta_{(0)}$, $z = \delta_{(n)}$ (рис. 2.1 б).

Таким образом, наряду с допущениями (2.31) дополнительно можно считать, что напряжения $\sigma^{(k)}_{i3}$, $\sigma^{(k)}_{33}$ изменяются по толщине слоя, согласно следующему закону:

$$\sigma^{(k)}_{i3} = (0,5 + \frac{z}{h_{(k)}})\sigma^{(k)+}_{i3} + (0,5 - \frac{z}{h_{(k)}})\sigma^{(k)-}_{i3} + f^{*}_{(k)}(z)\eta^{(k)}_{i} \quad (i = 1, 2), \tag{2.113}$$

$$\sigma^{(k)}_{33} = \left(0,5 + z / h_{(k)}\right)\sigma^{(k)+}_{33} + \left(0,5 - z / h_{(k)}\right)\sigma^{(k)-}_{33}, \tag{2.114}$$

где $\sigma^{(k)-}_{i3}$, $\sigma^{(k)-}_{33}$, $\sigma^{(k)+}_{i3}$, $\sigma^{(k)+}_{33}$ – значения напряжений поперечного сдвига и обжатия на нижней $z = -h_{(k)} / 2$ и верхней $z = h_{(k)} / 2$ поверхностях слоя; функция

$f^{*}_{(k)}(z)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} f^{*}_{(k)}(z)dz = 1, \quad f^{*}_{(k)}\left(-\frac{h_{(k)}}{2}\right) = f^{*}_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) = 0\,; \tag{2.115}$$

функция $\eta_i^{(k)} = \eta_i^{(k)}\left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}\right)$ позволяет связать и установить непротиворечивый закон изменения по толщине k Ј го слоя деформаций $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$ и напряжений $\sigma_{i3}^{(k)}$; зависимость (2.114) соответствует аппроксимации функции $\sigma_{33}^{(k)}$ полиномами Лежандра в первом приближении [140], что качественно верно отражает принятые допущения о деформации $\varepsilon_{33}^{(k)z}$.

Как следует из (2.48), соотношения упругости для напряжений поперечного сдвига и обжатия выполняются интегрально по толщине $k-$го слоя. Эти выражения с учетом зависимостей (2.113) – (2.114) принимают вид

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \left(2\varepsilon_{13}^{(k)z} - в_{45}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} - в_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)}\right) f^{*}_{(k)}(z)dz = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2,\ \ 4 \leftrightarrow 5), \tag{2.116}$$

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \left(\varepsilon_{33}^{(k)z} - в_{31}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - в_{32}\sigma_{22}^{(k)} - в_{33}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}\right)dz = 0\ . \tag{2.117}$$

Подставив в (2.116) соотношения (2.31), (2.113), а также задав выражение ортонормированной функции (2.115) в виде

$$f^{*}_{(k)}(z) = \varphi'_{(k)}(z),$$

нетрудно найти зависимость напряжений $\sigma_{i3}^{(k)}$ от координаты z:

$$\sigma_{13}^{(k)} = \sigma_1^{(k)+} + \frac{2z}{h_{(k)}}\sigma_1^{(k)-} + \frac{1}{d^{*}_{(k)}}\varphi'_{(k)}(z)\Big\{a_{(k)}^{45}\left[\varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2}d^{*}_{(k)}\psi_2^{(k)} - d_{45}^{(k)*}\sigma_1^{(k)+} - d_{44}^{(k)*}\sigma_2^{(k)+}\right] +$$

$$+ a_{(k)}^{55}\left[\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2}d^{*}_{(k)}\psi_1 - d_{55}^{(k)*}\sigma_1^{(k)+} - d_{45}^{(k)*}\sigma_2^{(k)+}\right]\Big\}\ (1 \leftrightarrow 2,\ \ 4 \leftrightarrow 5), \tag{2.118}$$

где

$$d^{*}_{(k)} = \int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \left(\varphi'_{(k)}(z)\right)^2 dz, \qquad d_{mn}^{(k)*} = \int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} в_{mn}^{(k)}\varphi'_{(k)}(z)dz \qquad (m, n = 4{,}5),$$

$$\sigma_i^{(k)+}=\frac{\sigma_{i3}^{(k)+}+\sigma_{i3}^{(k)-}}{2},\qquad \sigma_i^{(k)-}=\frac{\sigma_{i3}^{(k)+}-\sigma_{i3}^{(k)-}}{2}\qquad (i=1,2).$$

Кроме интегрального тождества (2.116), в результате проведенных преобразований можно дополнительно получить статические условия идеального контакта на лицевых поверхностях k J го слоя (2.95).

Аналогично, из уравнений (2.117) для напряжений $\sigma_{33}^{(k)}$ k J го слоя имеют место соотношения

$$\sigma_3^{(k)+}=\frac{\sigma_{33}^{(k)+}+\sigma_{33}^{(k)-}}{2}=a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)}. \qquad (2.119)$$

С учетом введенных обозначений (2.119), выражение (2.114) запишется так:

$$\sigma_{33}^{(k)}=\sigma_3^{(k)+}+\frac{2z}{h_{(k)}}\sigma_3^{(k)-}, \qquad (2.120)$$

где $\sigma_3^{(k)+}=\dfrac{\sigma_{33}^{(k)+}+\sigma_{33}^{(k)-}}{2},\qquad \sigma_3^{(k)-}=\dfrac{\sigma_{33}^{(k)+}-\sigma_{33}^{(k)-}}{2}.$

2.3.2. Дискретно – структурная теория многослойных элементов с учетом влияния клеевой прослойки между жесткими слоями (вторая модель). Суть второго варианта расчетной модели многослойной анизотропной оболочки заключается в том, что рассматриваемая оболочка состоит из *n* жестких анизотропных слоев толщиной $h^{(k)}$ $(k=1,2,...,n)$, между которыми имеет место клеевая прослойка ненулевой толщины $h^{[k]}$ $(k=1,2,...,n-1)$. Считается, что перемещения линейно изменяются по толщине клеевого слоя и записываются при помощи функций, характеризующих перемещения и углы поворотов жестких слоев.

Пусть многослойная оболочка состоит из n жестких слоев, объем которых $V=\sum\limits_{i=1}^{n}V_i$. Тогда объем промежуточных клеевых слоев будет определяться формулой $\Omega=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\Omega_i$. Для обозначения площади нижней и верхней лицевых поверхностей применяются символы – S^0 и S^n; боковой поверхности – Г. Считается, что каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α^i (i=1,2), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$ k J го слоя. Индекс "z" при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$. Положение точки недеформированной поверхности $S_z^{(k)}$ будет определяться радиус-вектором

$$\vec{c}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}, \quad -\frac{h^{(k)}}{2} \le z^{(k)} \le \frac{h^{(k)}}{2},$$

базисные векторы в точке (α^i, $z^{(k)}$) поверхности $S_z^{(k)}$ –

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)}(\delta_i^j - z^{(k)} b_i^{j(k)}), \quad \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)}, \tag{2.121}$$

где $\vec{r}^{(k)}$ – радиус-вектор точки срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{m}^{(k)}$ – нормаль единичной длины к поверхности $S^{(k)}$; δ_i^j – тензорная запись символа Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)} = \vec{r}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)}, \quad b_{ij}^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)} = \vec{m}_j^{(k)} \vec{r}_i^{(k)}, \quad b_i^{j(k)} \vec{r}_j^{(k)} = -m_i^{(k)} \quad (i = 1,2;\ j = 1,2) -$$

коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $S^{(k)}$;

$\vec{m}_i^{(k)} = \dfrac{\partial \vec{m}^{(k)}}{\partial \alpha^i}$ – производная нормали $\vec{m}^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки k – го жесткого слоя, согласно уточненной теории оболочек Тимошенко, можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + g(z) \psi^{(k)}, \tag{2.122}$$

где $\vec{u}^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота волокон, перпендикулярных недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$ в процессе деформации; $g(z)$ – нелинейная непрерывная функция, характеризующая распределения тангенциальных перемещений по толщине жесткого слоя; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2)$ – вектор функций сдвига. Здесь следует отметить, что в связи с введением "мягкой" клеевой прослойки влияние поперечного обжатия волокон на напряженно-деформированное состояние оболочки считается пренебрежимо малым. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}, \vec{\gamma}^{(k)}, \vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \qquad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)}; \qquad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}.$$

Тогда радиус-вектор точки k Ј го слоя оболочки после деформации представим в виде

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)},$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}, \qquad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}. \qquad (2.123)$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке ($\alpha^1,\ \alpha^2,\ z^{(k)}$) $k-$го жесткого слоя оболочки определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до и после деформации согласно геометрическим соотношениям (2.8) – (2.10), записанным в векторной форме.

Для клеевого слоя считается, что перемещения линейно изменяются по толщине слоя и их можно выразить через функции, характеризующие перемещения и углы поворотов жестких слоев. Из условий совместности перемещений на границах контакта жесткого и клеевого слоев следует

$$\vec{u}_z^{[k]} = \vec{u}^{[k]} + z^{[k]} \vec{\gamma}^{[k]}, \qquad (2.124)$$

где

$$\vec{u}^{[k]} = \frac{1}{2}[\vec{u}_z^{(k)}(\frac{h_{(k)}}{2}) + \vec{u}_z^{(k+1)}(-\frac{h_{(k+1)}}{2})], \quad \vec{\gamma}^{[k]} = \frac{1}{h_{[k]}}[\vec{u}_z^{(k+1)}(-\frac{h_{(k+1)}}{2}) - \vec{u}_z^{(k)}(\frac{h_{(k)}}{2})], \qquad (2.125)$$

$h_{(k)},\ h_{(k+1)},\ h_{[k]} -$ толщина жесткого k – го и $k+1$ – го слоев оболочки, а также k – й клеевой прослойки (индексы, которые указывают на номер жесткого слоя, заключены в круглые скобки, индексы номера мягкого слоя соответственно в квадратные скобки).

В случае изгиба многослойной оболочки в качестве основных деформаций клеевой прослойки, которые оказывают существенное влияние на ее напряженное состояние, принимают поперечные деформации сдвига $\varepsilon_{i3}^{[k]}$ и трансверсальную деформацию $\varepsilon_{33}^{[k]}$

$$\varepsilon^{[k]z}_{i3} = \frac{1}{2}[\vec{\rho}^{[k]}_3 \frac{\partial \vec{u}^{[k]}_z}{\partial \alpha^i} + \vec{\rho}^{[k]}_i \frac{\partial \vec{u}^{[k]}_z}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}^{[k]}_z}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \vec{u}^{[k]}_z}{\partial z}], \quad (2.126)$$

$$\vec{\varepsilon}^{[k]z}_{33} = \vec{\rho}^{[k]}_3 \frac{\partial \vec{u}^{[k]}_z}{\partial z} + \frac{1}{2}(\frac{\partial \vec{u}^{[k]}_z}{\partial z})^2. \quad (2.127)$$

Подставив (2.124) в (2.126) – (2.127), нетрудно получить зависимости, связывающие деформации $\varepsilon^{[k]}_{i3}$, $\varepsilon^{[k]}_{33}$ с векторами перемещений

$$\vec{u}^{(k)}(\frac{h_{(k)}}{2}), \quad \vec{u}^{(k+1)}(-\frac{h_{(k+1)}}{2}).$$

Для вывода уравнений равновесия и граничных условий многослойной оболочки широко применяются вариационные принципы Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера. Значение функционала энергии такого класса задач, следуя Рейсснеру, можно представить в виде

$$R = \sum_{k=1}^{n}(\Pi_{(k)} + A_{(k)}) + A + \sum_{k=1}^{n-1}(\Pi_{[k]} + A_{[k]}), \quad (2.128)$$

где

$$\Pi_{(k)} = -\iiint_{V_k}[\sigma^{ij}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{ij} + \sigma^{i3}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{i3} + \sigma^{3}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{33} - W_{(k)}]\, \boldsymbol{dV} \text{ J} \quad (2.129)$$

потенциальная энергия деформации $k-$го жесткого слоя;

$$\Pi_{[k]} = -\iiint_{\Omega_k}[\sigma^{i3}_{[k]}\varepsilon^{[k]z}_{i3} + \sigma^{3}_{[k]}\varepsilon^{[k]z}_{33} - W_{[k]}]d\Omega - \quad (2.130)$$

потенциальная энергия деформации k- го мягкого слоя;

$$A_{(k)} = \iiint_{V_k}\vec{u}^{(k)}_z F^{(k)} dV + \iint_{\Gamma^{(k)}_1}\vec{u}^{(k)}_z \vec{P}^{(k)}_s dS + \iint_{\Gamma^{(k)}_2}(\vec{u}^{(k)}_z - \vec{u}^{(k)s}_z)\vec{X}^{(k)} dS;$$

$$A = \iint_{S^0}\vec{u}^{(0)}_z \vec{P}^{(0)} dS + \iint_{S^n}\vec{u}^{(n)}_z \vec{P}^{(n)} dS \; - \quad (2.131)$$

значение работ внешних сил, приложенных к k -му жесткому слою и к ограничивающим лицевым поверхностям оболочки (индекс “s” указывает на заданные величины).

В соответствии с принятой расчетной моделью допускается предположение о равенстве нулю работы внешних сил, действующих на мягкие слои оболочки, т.е. считается, что $A_{[k]} = 0.$

В формулах (2.128) – (2.131) введены величины: $\sigma^{ij}_{(k)}$, $\sigma^{i3}_{(k)}$, $\sigma^{3}_{(k)}$, $\sigma^{i3}_{[k]}, \sigma^{3}_{[k]}$ – компоненты тензора напряжений в деформированной косоугольной системе координат α^i и z, определенные для каждого заданного ранее слоя оболочки; $\vec{P}^{(n)}$, $\vec{u}_z^{(n)}$, $\vec{P}^{(0)}$, $\vec{u}_z^{(0)}$ − векторы заданных внешних напряжений и перемещений, которые действуют на ограничивающие лицевые поверхности S^n, S^0 соответственно; $\vec{F}^{(k)}$ − вектор заданных объемных сил; $\vec{P}_s^{(k)}$ − вектор внешней нагрузки на части боковой поверхности k- го жесткого слоя $\Gamma_1^{(k)}$; $\vec{X}^{(k)}$ − вектор внутренних напряжений на части боковой поверхности $\Gamma_2^{(k)}$ с заданным вектором смещений $\vec{u}_z^{(k)}$; $W_{(k)}$, $W_{[k]}$ − удельная дополнительная работа деформации рассматриваемых слоев, выраженная через напряжения.

Условие стационарности функционала энергии (2.128) –

$$\delta R = 0, \tag{2.132}$$

где варьируются независимые между собой перемещения и напряжения, позволяет получить систему уравнений равновесия многослойных оболочек, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия.

Для k -го жесткого слоя с прилегающими к нему частями клеевых слоев с индексами k и $k-1$ толщиной $h_{[k]}/2$ и $h_{[k-1]}/2$ уравнения равновесия в скалярной форме относительно осей, отнесенных к недеформированному состоянию оболочки, принимают вид:

$$\nabla_i R^{ij}_{(k)} - b_i^{j(k)} R^{i3}_{(k)} + \frac{1}{s}[t'(\delta_j^i - c_0 b_j^{[k]i})Q^j_{[k]} - t''(\delta_j^i + c_0 b_j^{[k-1]i})Q^j_{[k-1]}] + X^i_{(k)} = 0 \quad (i = 1,2),$$

$$\nabla_i R^{i3}_{(k)} + b_{ij}^{(k)} R^{ij}_{(k)} + \frac{c_0}{s}\nabla_i[t'(\delta_j^i - c_0 b_j^{[k]i})Q^j_{[k]} + t''(\delta_j^i + c_0 b_j^{[k-1]i})Q^j_{[k-1]}] -$$

$$-\frac{1}{s}(t' N^{[k]} - t'' N^{[k-1]}) + X^3_{(k)} = 0,$$

$$\nabla_i M^{ij}_{(k)} - Q^i_{(k)} + M^i_{(k)} = 0 \quad (i = 1,2), \quad \nabla_i L^{ij}_{(k)} - L^{i3}_{(k)} + B^j_{(k)} = 0, \quad (i = 1,2). \tag{2.133}$$

Кроме того, как дополнение к уравнениям равновесия из (2.133) следуют: статические

$$\Phi_n^{(k)s} = T^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad \Phi_\tau^{(k)s} = R^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \quad \Phi_m^{(k)} = R^{i3}_{(k)} n_i^{(k)} + L^{i3}_{(k)} n_i^{(k)} + \frac{M^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\partial s},$$

$$G_n^{(k)s} = M^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \; H_\tau^{(k)s} = -M^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \; L_n^{(k)s} = L^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \; \Lambda_\tau^{(k)s} = L^{ij}_{(k)} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)} \tag{2.134}$$

и геометрические

$$u_n^{(k)s} = u^i_{(k)} n_i^{(k)}, \quad u_\tau^{(k)s} = u^i_{(k)} \tau_i^{(k)}, \quad w^s_{(k)} = w_{(k)}, \quad \gamma_n^{(k)s} = \gamma^i_{(k)} n_i^{(k)}, \quad \gamma_\tau^{(k)s} = \gamma^i_{(k)} \tau_i^{(k)},$$

$$\psi_n^{(k)s} = \psi^i_{(k)} n_i^{(k)}, \quad \psi_\tau^{(k)s} = \psi^i_{(k)} \tau_i^{(k)} \qquad (2.135)$$

граничные условия на части контуров $\Gamma_1^{(k)}$ и $\Gamma_2^{(k)}$ соответственно. В выражениях (2.133) – (2.135) введены следующие обозначения: $a^{[k]}$ – определитель метрического тензора; $X^i_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ – тензор внутренних и внешних сил, приложенных к срединной поверхности $S_{(k)}$; $N^{[k]}$, $N^{[k-1]}$, $Q^i_{[k]}$, $Q^i_{[k-1]}$ – тензоры трансверсальных и сдвиговых усилий в клеевых слоях, отнесенные к срединной поверхности $S_{(k)}$; $R^{ij}_{(k)}$, $M^{ij}_{(k)}$, $M^i_{(k)}$ – тензоры внутренних усилий и моментов, а также тензор внешних моментов соответственно, приведенные к срединной поверхности $S_{(k)}$; $Q^i_{(k)}$, $R^{i3}_{(k)}$ – тензор поперечных сил и усилий сдвига; $L^{i3}_{(k)}$, $L^{ij}_{(k)}$ – тензоры дополнительных обобщенных внутренних удельных усилий сдвига и моментов соответственно, которые появляются при выводе уравнений равновесия с учетом деформаций поперечного сдвига; ∇_i – символ ковариантного дифференцирования по метрике $a^{(k)}_{ij}$; $u_n^{(k)s}$, $u_\tau^{(k)s}$, $w^s_{(k)}$, $\gamma_n^{(k)s}$, $\gamma_\tau^{(k)s}$, $\psi_n^{(k)s}$, $\psi_\tau^{(k)s}$ – заданные ковариантные компоненты векторов обобщенных перемещений; $\Phi_n^{(k)s}$, $\Phi_\tau^{(k)s}$, $\Phi_m^{(k)s}$, $G_n^{(k)s}$, $H_\tau^{(k)s}$, $L_n^{(k)s}$, $\Lambda_\tau^{(k)s}$ – ковариантные компоненты заданных векторов внешних усилий $\vec{\Phi}^s_{(k)}$, моментов $\vec{G}^s_{(k)}$ и дополнительных моментов $\vec{L}^s_{(k)}$, приложенных к части граничного контура $\Gamma_1^{(k)}$; $n_i^{(k)}$, $\tau_i^{(k)}$ – ковариантные компоненты векторов единичной нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к контурной линии;

$$t' = (a^{[k]}/a^{(k)})^{1/2}, \quad t'' = (a^{[k-1]}/a^{(k-1)})^{1/2}, \; h_{[k]} = s, \; c_0 = \frac{1}{2}(h_{(k)} + h_{[k]}).$$

Если между k и $k+1$ слоями оболочки отсутствует клеевая прослойка, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k,k+1)}$ действуют неизвестные векторы усилий $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость – $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев на участках непроклея в функционал энергии ***R*** необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу силы контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k-1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{U}_z^{(m)} dS. \tag{2.136}$$

Для случая одностороннего контакта по области $S_z^{(k,k+1)}$, когда между слоями отсутствует клеевая прослойка, из выражения (2.132) следует, что усилия контактного взаимодействия будут зависеть от величины $(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)})$, и уравнения равновесия (2.133) для ***k*** Ј го жесткого слоя принимают вид

$$\nabla_i R^{ij}_{(k)} - b_i^{j(k)} R^{i3}_{(k)} + q^i_{(k)} + X^i_{(k)} = 0, \quad \nabla_i R^{i3}_{(k)} + b^{(k)}_{ij} R^{ij}_{(k)} + q^3_{(k)} + X^3_{(k)} = 0 \quad (i = 1,2),$$

$$\nabla_i M^{ij}_{(k)} - Q^i_{(k)} + M^i_{(k)} = 0 \quad (i = 1,2), \quad \nabla_i L^{ij}_{(k)} - L^{i3}_{(k)} = 0 \quad (i = 1,2). \tag{2.137}$$

Усилия контактного взаимодействия $\vec{q}_{(k)} = q^i_{(k)} \vec{r}_i^{(k)} + q^3_{(k)} \vec{m}^{(k)}$ возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \tag{2.138}$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (2.138) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k,k+1)}$ в процессе деформации, усилие $\vec{q}_{(k)}$ в формулах (2.138) принимает значение $\vec{q}_{(k)} = 0$. Статические и кинематические граничные условия на контуре области $\boldsymbol{S_z^{(k,k\text{Н}1)}}$ имеют вид зависимостей (2.134), (2.135).

Таким образом, имея уравнения равновесия (2.137) и (2.138), несложно с заданной точностью найти значение контактного давления при помощи, например, итерационного метода, предложенного в [41].

2.4. Разрешающие уравнения нелинейной теории анизотропных оболочек с учетом поперечного сдвига и обжатия (третья модель)

Предлагаемый вариант дискретно-структурной теории многослойных оболочек достаточно просто может быть использован для построения уточненной теории анизотропных оболочек, когда кинематические или статические гипотезы принимаются интегрально для всего пакета слоев в целом. При таком подходе слоистую структуру оболочки или пластины заменяют некоторой приведенной анизотропной однослойной структурой с соответствующими физико-механическими характеристиками. В этом подразделе построена уточненная теория анизотропных оболочек, которая приводит к решению системы дифференциальных уравнений 16-го порядка.

При построении предлагаемого варианта теории выполняются следующие допущения:

1. Тангенциальные и нормальные перемещения по толщине оболочки определяются обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко (2.4)

$$u_i^z = u_i + z\gamma_i + \varphi(z)\psi_i \qquad (i = 1,2), \qquad w^z = w + z\text{г}. \tag{2.139}$$

2. Деформации поперечного сдвига и обжатия задаются выражениями

$$e_{i3}^z = e_{i3}^{\text{г}} + \frac{1}{2}\varphi'(z)\text{ш}_i + \frac{1}{2}z\nabla_i e_{33}^z = \text{щ}_i + \text{г}_i + \frac{1}{2}\varphi'(z)\text{ш}_i + \frac{1}{2}z\nabla_i e_{33}^z \qquad (i = 1,2)$$

$$\varepsilon_{33}^z = \gamma. \tag{2.140}$$

3. Для аппроксимации напряжений поперечного сдвига и обжатия (нагрузки, действующие в касательных плоскостях к лицевым поверхностям оболочки, при этом не учитываются) принимаются функции

$$\sigma_{i3} = g(z)\nu_i \qquad (i = 1,2), \sigma_{33} = \nu_3, \tag{2.141}$$

где $g(z)$ - заданная функция, непрерывная по толщине оболочки и на лицевых поверхностях (рис.2.1.б), принимающая значения $g(\delta_0) = g(\delta_n) = 0$.

4. Материал каждого слоя оболочки в процессе деформации остается упругим и подчиняется обобщенному закону Гука для анизотропного тела с

одной плоскостью упругой симметрии, касательной к координатной поверхности слоя (2.67), (2.68).

Таким образом, введение гипотезы Тимошенко и аппроксимация поперечных напряжений сдвига и обжатия по заданному закону вносят некоторое приближение в рассматриваемую здесь теорию, поскольку соотношения упругости между поперечными напряжениями сдвига и обжатия и соответствующими деформациями будут выполняться интегрально для всего пакета слоев. Поэтому при расчете конструкций, слои которых существенно различаются по своим физико-механическим свойствам, теорию анизотропных оболочек следует применять с известной осторожностью.

Вывод вариационного уравнения принципа Рейсснера для многослойных оболочек дан в пункте 2.2.2 и определяется формулой (2.36). Согласно допущениям (2.139) – (2.141) и принятой гипотезы Тимошенко для всего пакета слоев оболочки, элементарную работу внешних сил δA_R и первую вариацию $\delta \Pi_R$ второго слагаемого уравнения (2.36) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\delta A_R &= \iint_S \left(\vec{X}\delta\vec{u} + M^i \vec{r}_{i*}\delta\vec{\gamma} + B^i \vec{r}_{i*}\delta\vec{\Psi} + M^3 \delta\varepsilon^z_{33}\right) dS + \\ &+ \int_{l_1} \left[\vec{\Phi}^S \delta\vec{u} + \left(G^{Sn}\vec{n} - H^{S\tau}\vec{\tau}\right)\delta\vec{\gamma} + \left(L^{Sn}\vec{n} - L^{S\tau}\vec{\tau}\right)\delta\vec{\psi} + \right. \\ &+ \left.\left(M^{3n}_S + L^{3n}_S\right)\delta\varepsilon^z_{33}\right] dl + \int_{l_2} \left[\vec{\Phi}\delta\vec{u} + \left(G^n\vec{n} - H^\tau\vec{\tau}\right)\delta\vec{\gamma} + \right. \\ &+ \left(L^n\vec{n} - L^\tau\vec{\tau}\right)\delta\vec{\psi} + \left(M^{3n} + L^{3n}\right)\delta\varepsilon^z_{33} + \left(\vec{u} - \vec{u}^S\right)\delta\vec{\Phi} + \\ &+ (\vec{\gamma} - \vec{\gamma}^S)\delta\left(G^n\vec{n}\right) - (\vec{\gamma} - \vec{\gamma}^S)\delta\left(H^\tau\vec{\tau}\right) + (\vec{\psi} - \vec{\psi}^S)\delta\left(L^n\vec{n}\right) - \\ &\left. - (\vec{\psi} - \vec{\psi}^S)\delta\left(L^\tau\vec{\tau}\right)\right] dl\ ,\end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi_R &= \delta\Pi_{1R} + \delta\Pi_{2R} = \sum_{k=1}^{n}\iint_S \int_{\delta^{(k-1)}}^{\delta^{(k)}} \left\{\sigma^{ij}\left[\delta\varepsilon_{ij} + z\delta\chi^\gamma_{ij} + \varphi(z)\nabla_i\psi_i\right] + \right. \\ &\left. + \sigma^{i3}\left(2\delta\varepsilon_{i3} + z\nabla\varepsilon^z_{33}\right) + \sigma^{33}\delta\varepsilon^z_{33}\right\} dSdz + \sum_{k=1}^{n}\iint_S \int_{\delta^{(k-1)}}^{\delta^{(k)}} \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma^{ij}} - \varepsilon^z_{ij}\right)\delta\sigma^{ij} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial\sigma^{i3}} - \varepsilon^z_{i3}\right)\delta\sigma^{i3} + \left(\frac{\partial F}{\partial\sigma^{33}} - \varepsilon^z_{33}\right)\delta\sigma^{33}\right\} dSdz\ .\end{aligned} \quad (2.143)$$

Обозначения физических величин и векторов, которые приведены в формулах (2.142) – (2.143), приняты такими же, как и их аналоги в пункте 2.2.2. Отличие заключается в том, что они представляют собой интегральные характеристики всего пакета слоев конструкции в целом и будут расшифровываться по мере дальнейшего изложения материала.

Опуская стандартные процедуры преобразований вариационных уравнений (2.142) – (2.143), которые мало отличаются от аналогичных операций подраздела 2.2, следует составить для всего пакета слоев оболочки уравнения равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия.

Полученные восемь уравнений равновесия анизотропной оболочки отличаются от уравнений равновесия k-го слоя (2.58), (2.59) индексом $\boldsymbol{k}$. Такие же замечания можно отнести и к выводу физических соотношений, геометрических и статических граничных условий. Перечисленные уравнения будут использованы при выводе разрешающей системы уравнений уточненной нелинейной теории анизотропных оболочек.

В тензорной форме восемь уравнений равновесия относительно системы координат недеформированной оболочки запишутся так:

$$\nabla_i R_0^{ij} - в_i^j R_0^{i3} + X_0^j = 0, \qquad \nabla_i R_0^{i3} + R_0^{ij} в_{ij} + X_0^3 = 0, \qquad \nabla_i M_0^{ij} - Q_0^j + M_0^j = 0,$$

$$\nabla_i L_0^{ij} - L_0^{i3} + B_0^j = 0, \ \nabla_i M_0^{i3} + M_0^{ij} в_{ij} + L_0^{ij} в_{ij} - Q_0^3 + M_0^3 = 0. \tag{2.144}$$

Для случая среднего изгиба физические компоненты тензора тангенциальных усилий $\boldsymbol{R_0^{ij}}$ и усилий поперечного сдвига $\boldsymbol{R_0^{i3}}$, которые входят в формулы (2.144), совпадают с соотношениями (2.55). Физические компоненты тензора внешней нагрузки, приложенной к лицевым поверхностям оболочки (рис. 2.1, б), принимают вид:

$$X_j^0 = -\overset{+}{q}_{j3} - \overset{-}{q}_{j3}, \quad X_3^0 = -\overset{+}{q}_{33} - \overset{-}{q}_{33}, \quad M_j^0 = -\frac{h}{2}\left(\overset{+}{q}_{j3} + \overset{-}{q}_{j3}\right), \quad M_3^0 = -\frac{h}{2}\left(\overset{+}{q}_{33} + \overset{-}{q}_{33}\right),$$

$$B_j^0 = -\varphi\left(\frac{h}{2}\right)\left(\overset{+}{q}_{j3} + \overset{-}{q}_{j3}\right) \qquad (j = 1,2). \tag{2.145}$$

Кроме вывода уравнений равновесия (2.144), вариационное уравнение принципа Рейсснера, позволяет получить восемь статических –

$$\Phi_0^{nS} = R_0^n, \quad \Phi_0^{\tau S} = R_0^\tau, \quad \Phi_0^{mS} = R_0^m, \quad G^{nS} = G_0^n, \quad H^{\tau S} = H_0^\tau,$$

$$L_0^{nS} = L_0^n, \quad L_0^{\tau S} = L_0^\tau, \quad M_S^{3n} + L_S^{3n} = M^{i3} n_i \qquad (2.146)$$

и восемь геометрических –

$$u_n^S = u_n, \quad u_\tau^S = u_\tau, \quad w^S = w, \quad \gamma_n^S = \gamma_n, \quad \gamma_\tau^S = \gamma_\tau,$$

$$\psi_n^S = \psi_n, \quad \psi_\tau^S = \psi_\tau, \quad \varepsilon_{33}^{zS} = \varepsilon_{33}^z \qquad (2.147)$$

граничных условий на контуре оболочки l_1 и l_2 соответственно.

Дополняя уравнения равновесия (2.144) физическими и геометрическими соотношениями, нетрудно составить систему из 16 разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных для определения

напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек вращения.

2.5. Выводы по второй главе

Во второй главе были структурированы и обобщены уравнения дискретно-структурной теории многослойных оболочек и пластин с дефектами структуры материала по толщине. При выводе уравнений равновесия, геометрических и физических соотношений учитываются геометрическая нелинейность деформаций, деформации поперечного сдвига и трансверсального обжатия.

На основе вариационного уравнения принципа Рейсснера была показана физическая корректность расчетной модели многослойных тонкостенных конструкций, согласно которой реализуются как идеальные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала, так и условия контакта с межфазным ослабленным слоем.

Межфазный ослабленный слой – непроклей или расслоение, моделируется поверхностью нулевой толщины, на которой претерпевают разрыв компоненты вектора перемещений. Возможное контактное давление между слоями принимается пропорциональным разности нормальных смещений смежных слоев.

Для решения контактной краевой задачи в смешанной форме составлена полная система разрешающих уравнений дискретно-структурной теории многослойных оболочек. Статические условия контакта по лицевым сопряженным поверхностям соседних слоев выполняются при помощи метода штрафных функций. Для оболочек вращения, которые включают в себя n слоев с соосными поверхностями, получена разрешающая система из $n \times 14$ дифференциальных уравнений в частных производных.

На основе предлагаемого варианта дискретно-структурной теории разработаны две расчетные модели, которые включают в себя ослабленные участки контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев.

Кроме того, в смешанной форме дан вывод разрешающих нелинейных уравнений непрерывно-структурной теории анизотропных оболочек, которая включает 16 дифференциальных уравнений в частных производных. Кусочно-неоднородные по толщине слоистые оболочки рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками. При этом выполняется допущение об идеальном жестком контакте смежных слоев.

3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ АМИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

В данной главе на основе классической теории упругости анизотропного тела исследуется напряженно деформированное состояние многослойного плоского кривого бруса. Для учета статических и кинематических условий контакта по сопряженным лицевым поверхностям соседних слоев, обладающих цилиндрической анизотропией, составлена система алгебраических уравнений. Порядок системы уравнений определяется количеством сопряженных слоев. В качестве примера рассмотрен изгиб плоского бруса при действии сосредоточенной силы на торцах.

3.1. Приведенные упругие характеристики многослойного анизотропного материала

Известно, что элементы тонкостенных конструкций из композитов, как правило, состоят из комбинации различно ориентированных однонаправленных слоев. Прочностные свойства слоистых композитов, в отличие от изотропных материалов, имеют отчетливо выраженную анизотропию. При этом разрушение более ”слабого” слоя при статическом нагружении может произойти раньше времени, когда наступит момент предельного состояния композита в целом.

Свойства материалов, проектируемых конструкций из композита и возможные варианты схем армирования весьма разнообразны. Поэтому теоретическая задача определения деформационных и прочностных свойств композиционного материала при минимальных затратах на эксперимент представляется актуальной.

В композиционном материале с регулярной структурой, как правило, присутствуют повторяющиеся элементы в виде однонаправленных слоев. Пренебрегая неоднородностью структуры на микроуровне каждого слоя, можно найти эффективные характеристики отдельных слоев на макроуровне. При этом деформационная модель материала имеет квазиоднородную структуру, составленную из различных слоев. Определение деформационных характеристик композиционных материалов по свойствам компонентов (армирующий материал, матрица) и характеру их расположения в материале представляет одну из основных задач теории армирования.

Анализ различных подходов [131, 40, 142, 144, 138, 139] к расчёту упругих характеристик композиционного материала показывает, что корректную оценку влияния схем укладки арматуры на физико-механические характеристики материала можно получить, решая граничные задачи теории упругости для многосвязной области. Однако такой расчёт не исключает погрешностей, обусловленных отклонением реальной структуры материала от ее идеализированной модели. Для учета указанных отклонений используются статистические методы и определяются корреляционные функции констант материала. Как правило, указанный подход связан с трудоемким численным анализом.

В основу приближенного расчета по Фойгту и Рейссу упругих характеристик композиционных материалов положен принцип суммирования повторяющихся элементарных слоев. Упругие характеристики элементарного слоя определяются в два этапа [131, 40, 144]. Вначале находятся характеристики приведенной матрицы за счет усреднения упругих свойств волокон ортогонально-армированного материала слоя. Считается, что компоненты материала (волокно и матрица) изотропны, линейно упруги и работают совместно на всех этапах деформирования. Кроме того, приняты допущения, согласно которым: не учитываются напряжения, перпендикулярные к волокнам при действии нормальной нагрузки вдоль волокон; поперечные деформации при растяжении – сжатии каждой компоненты пропорциональны ее объемному содержанию в материале; на границе волокно–матрица исключается рассмотрение концентрации напряжения. На втором этапе осуществляется расчет характеристик слоя, исходя из упругих свойств волокон и модифицированной матрицы.

Экспериментальные данные [138] хорошо совпадают со значениями упругих характеристик композиционных материалов, вычисленных на основе методов [40, 131, 144]. Для ортотропного материала расчётные зависимости упругих характеристик армированного высокомодульными волокнами слоя имеют вид:

$$E_1^{(k)} = \psi_1^{(k)} E_в + \frac{\left(1+\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{1-\psi_1^{(k)}} E_м, \qquad E_2^{(k)} = \frac{\left(1+\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\psi_3^{(k)}\right)\left(1-\nu_в^2\right)} E_м,$$

$$E_3^{(k)} = \psi_3^{(k)} E_в + \frac{\left(1+\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\nu_в^2\right)} E_м, \ \nu_{12}^{(k)} = \frac{\nu_в\left(1+\psi_3^{(k)}\right)\left(1+\psi_1^{(k)}\right)}{\psi_1^{(k)}\left(1-\psi_3^{(k)}\right)\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\nu_в^2\right)} \frac{E_м}{E_в}, \ \nu_{13}^{(k)} = \nu_в \psi_3^{(k)} + \left(1-\psi_3^{(k)}\right)\nu_м,$$

$$\nu_{23}^{(k)} = \nu_В \psi_3^{(k)} + \left(1-\psi_3^{(k)}\right)\nu_м, \ G_{12}^{(k)} = \frac{1+\psi_1^{(k)}}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)} G_м, \ G_{23}^{(k)} = \frac{1+\psi_3^{(k)}}{\left(1-\psi_3^{(k)}\right)\left(1-\psi_1^{(k)}\right)} G_м,$$

$$G_{13}^{(k)} = \frac{\left(1+\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\psi_3^{(k)}\right)} G_м, \tag{3.1}$$

индекс “в” относится к арматуре, “м” – к связующему; $\psi_1^{(k)}$, $\psi_3^{(k)}$.– относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении осей 1 и 3 (рис. 3.2 а));

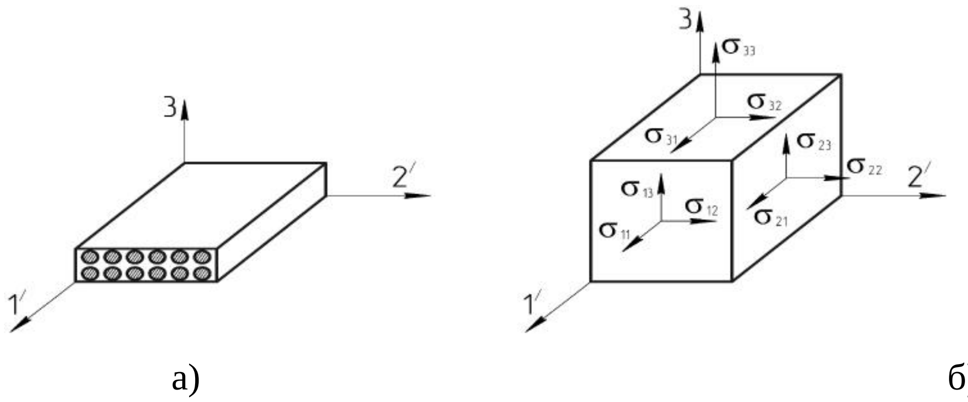
$$g = E_в / E_м, \qquad G_в = \frac{E_в}{2\left(1+\nu_в\right)}, \qquad G_м = \frac{E_м}{2\left(1+\nu_м\right)}, \tag{3.2}$$

где $\nu_в$, $\nu_м$ – коэффициенты Пуассона.

Коэффициент армирования $\psi_1^{(k)}$, характеризующий относительное объемное содержание волокон, можно определить по формуле:

$$\psi_1^{(k)} = \frac{\pi (d_в^{(k)})^2}{4h^{(k)}} i_в^{(k)}, \tag{3.3}$$

где $h^{(k)}$ – толщина армированного слоя; $d_в^{(k)}$ – диаметр волокон; $i_в^{(k)}$ – частота армирования. Геометрия однонаправленно армированного слоя показана на (рис. 2.2, а). Все величины с индексом k относим к k-му слою оболочки.



а) б)

Рисунок 3.1 - Схема армирования однонаправленного слоя

Соотношения упругости для ортотропного однонаправленно армированного слоя в его осях симметрии 1´, 2´ с учетом физико-технических постоянных (3.1) – (3.3) в матричной форме имеют вид:

$$\sigma'_{(k)} = a'_{(k)}\varepsilon'_{(k)}, \qquad \varepsilon'_{(k)} = b'_{(k)}\sigma'_{(k)}, \qquad (3.4)$$

где $\sigma'_{(k)} = [\sigma^{(k)}_{1'1'}, \sigma^{(k)}_{2'2'}, \sigma^{(k)}_{3'3'}, \sigma^{(k)}_{2'3'}, \sigma^{(k)}_{1'3'}, \sigma^{(k)}_{1'2''}]^T$, $\varepsilon'_{(k)} = [\varepsilon^{(k)z}_{1'1'}, \varepsilon^{(k)z}_{2'2'}, \varepsilon^{(k)z}_{3'3'}, \varepsilon^{(k)z}_{2'3'}, \varepsilon^{(k)z}_{1'3'}, \varepsilon^{(k)z}_{1'2''}]^T$ – матрицы – столбцы напряжений и деформаций слоя в направлении осей симметрии 1´, 2´(рис. 2.2 б));

$$a_{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)}_{11} & a^{(k)}_{12} & a^{(k)}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a^{(k)}_{21} & a^{(k)}_{22} & a^{(k)}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a^{(k)}_{31} & a^{(k)}_{32} & a^{(k)}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{(k)}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(k)}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(k)}_{66} \end{bmatrix}, \qquad (3.5)$$

$$b_{(k)} = \begin{bmatrix} b^{(k)}_{11} & b^{(k)}_{12} & b^{(k)}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b^{(k)}_{21} & b^{(k)}_{22} & b^{(k)}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b^{(k)}_{31} & b^{(k)}_{32} & b^{(k)}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{(k)}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{(k)}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{(k)}_{66} \end{bmatrix} – \qquad (3.6)$$

матрицы жесткости и податливости k–го ортотропного слоя в направлении осей симметрии 1´, 2´ соответственно.

Если тонкостенный элемент состоит из однонаправленно армированных слоев, оси локальных систем координат которых не совпадают с осями глобальной системы координат, что имеет место, например, в перекрестно армированных оболочках, тогда появляется возможность варьировать свойствами материала за счет угла армирования.

Пусть β – угол между осями симметрии k – го слоя оболочки $\alpha_1^{(k)\beta}$, $\alpha_2^{(k)\beta}$ и направлениями координатных линий $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, т.е. угол армирования. Можно видеть, что в повернутых осях $\alpha_1^{(k)\beta}$, $\alpha_2^{(k)\beta}$, z армированный слой обладает анизотропными свойствами и имеет одну плоскость упругой симметрии. Тогда становятся справедливыми соотношения упругости:

$$\sigma_{(k)} = a^{\beta}_{(k)}\varepsilon_{(k)}, \qquad (3.7)$$

где

$$a_{(k)}{}^{\beta}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{36}^{(k)\beta} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} & 0 \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix} – \qquad (3.8)$$

матрица коэффициентов жесткости k–го анизотропного слоя в направлении главных координатных линий α_1, α_2; $\sigma_{(k)}=[\sigma_{11}^{(k)},\sigma_{22}^{(k)},\sigma_{33}^{(k)},\sigma_{23}^{(k)},\sigma_{13}^{(k)},\sigma_{12}^{(k)}]^T$, $\varepsilon_{(k)}=[\varepsilon_{11}^{(k)},\varepsilon_{22}^{(k)},\varepsilon_{33}^{(k)},\varepsilon_{23}^{(k)},\varepsilon_{13}^{(k)},\varepsilon_{12}^{(k)}]^T$ – матрицы – столбцы напряжений и деформаций слоя в направлении главных координатных линий α_1, α_2.

Для дальнейшего изложения материала систему уравнений (3.7) удобно представить в виде

$$\sigma_{(k)}{}^{\alpha}=a_{(k)\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{(k)}{}^{\alpha}, \qquad \sigma_{(k)}{}^{\alpha3}=a_{(k)\alpha3}{}^{\beta}\varepsilon_{(k)}{}^{\alpha3}, \qquad (3.9)$$

где в (3.9) введены обозначения:

$$\sigma_{(k)}{}^{\alpha}=[\sigma_{11}^{(k)},\sigma_{22}^{(k)},\sigma_{33}^{(k)},\sigma_{12}^{(k)}]^T, \qquad \sigma_{(k)}^{\alpha3}=[\sigma_{23}^{(k)},\sigma_{13}^{(k)}]^T,$$

$$\varepsilon_{(k)}{}^{\alpha}=[\varepsilon_{11}^{(k)},\varepsilon_{22}^{(k)},\varepsilon_{33}^{(k)},\varepsilon_{12}^{(k)}]^T, \qquad \varepsilon_{(k)}^{\alpha3}=[\varepsilon_{23}^{(k)},\varepsilon_{13}^{(k)}]^T,$$

$$a_{(k)\alpha}{}^{\beta}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & a_{36}^{(k)\beta} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, \qquad a_{(k)\alpha3}{}^{\beta}=\begin{bmatrix} a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} \\ a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} \end{bmatrix}. \qquad (3.10)$$

В случае, когда композит представляет собой набор n разноориентированных слоев однонаправленного материала, приведенные упругие характеристики рассматриваемого пакета слоев находят из соотношений:

$$\sigma^{\alpha}=a_{\alpha}^{\beta}\varepsilon^{\alpha}, \qquad \sigma^{\alpha3}=a_{\alpha3}^{\beta}\varepsilon^{\alpha3}, \qquad (3.11)$$

где $a_{ij}^{\beta}=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{(k)\beta}h_{(k)}{}'$, $h_{(k)}{}'=h_{(k)}/h$ – относительная толщина k – го слоя.

Технические постоянные многослойного контура при растяжении можно получить, преобразовав систему уравнений (3.11) к виду

$$\sigma_{11} = a^{\beta}_{11}\varepsilon_{11} + a^{\beta}_{12}\varepsilon_{22} + a^{\beta}_{13}\varepsilon_{33} + a^{\beta}_{16}\varepsilon_{12}, \quad 0 = a^{\beta}_{21}\varepsilon_{11} + a^{\beta}_{22}\varepsilon_{22} + a^{\beta}_{23}\varepsilon_{33} + a^{\beta}_{26}\varepsilon_{12},$$
$$0 = a^{\beta}_{31}\varepsilon_{11} + a^{\beta}_{32}\varepsilon_{22} + a^{\beta}_{33}\varepsilon_{33} + a^{\beta}_{36}\varepsilon_{12}, \quad 0 = a^{\beta}_{61}\varepsilon_{11} + a^{\beta}_{62}\varepsilon_{22} + a^{\beta}_{63}\varepsilon_{33} + a^{\beta}_{66}\varepsilon_{12}. \qquad (3.12)$$

Подставив выражение $E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$ в первое уравнение системы уравнений (3.12) и предварительно выразив деформации $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}$ через ε_{11}, при помощи оставшихся 3-х уравнений (3.12), несложно найти значение E_1:

$$E_1 = \frac{\det a^{\beta}_{\alpha}}{M_{11}}. \qquad (3.13)$$

В формуле (3.13) M_{11} – минор элемента a^{β}_{11} матрицы a^{β}_{α}. Аналогичным путем находят остальные значения технических постоянных:

$$E_2 = \frac{\det a^{\beta}_{\alpha}}{M_{22}}, \qquad E_3 = \frac{\det a^{\beta}_{\alpha}}{M_{33}}, \qquad (3.14)$$

где E_2, E_3 – модули упругости первого рода;

$$G_{12} = \frac{\det a^{\beta}_{\alpha}}{M_{44}}, \qquad G_{13} = a^{\beta}_{55} - \frac{(a^{\beta}_{45})^2}{a^{\beta}_{44}}, \qquad G_{23} = a^{\beta}_{44} - \frac{(a^{\beta}_{45})^2}{a^{\beta}_{55}}, \qquad (3.15)$$

где G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига;

$$\nu_{12} = \frac{M_{12}}{M_{11}}, \qquad \nu_{13} = \frac{M_{13}}{M_{11}}, \qquad \nu_{23} = \frac{M_{23}}{M_{22}}. \qquad (3.16)$$

Здесь ν_{12}, ν_{13}, ν_{23} – коэффициенты Пуассона. Остальные три значения коэффициентов Пуассона $\nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ находятся при помощи соотношений

$$\nu_{ij}E_j = \nu_{ji}E_i \quad (i, j = 1,2,3).$$

Первый индекс коэффициента Пуассона указывает на направление приложения нагрузки, а второй – направление поперечной деформации, вызванной этой силой.

В качестве примера расчета упругих характеристик перекрестно армированного материала рассматривается углепластик [208, 209], который состоит из 31 слоя с кодом $[0^{\circ}_2 / 90^{\circ} / 0^{\circ}_2 / \pm 45^{\circ} / (0^{\circ}_2 / 90)_2 / \pm 45^{\circ} / \overline{0}^{\circ}]_S$, и стеклопластик с продольно – поперечной схемой укладки 19 – ти монослоёв $[(0^{\circ} / 90^{\circ})_S / \overline{0}^{\circ}]_S$.

Свойства составляющих композиций:

1. Углепластик. Согласно паспортным данным модули упругости $E_в$, сдвига $G_в$ и коэффициент Пуассона $\nu_в$ углеродного волокна ЛУ-03 соответственно равны

235000 МПа, 90400 МПа и 0,3. Механические характеристики связующего углепластика (блок сополимер эпокситрифенольной и анилиноформальдегидной смол): $E_м$=3500 МПа, $G_м$=1320 МПа, $\nu_м$= 0,32. В каждом монослое толщиной 0,171 мм объём, занимаемый волокнами, составляет 55 % общего объёма.

2. Стеклопластик. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер 5-211Б со следующими параметрами упругости: $E_м$= 4200 МПа, $G_м$=1500 МПа, $\nu_м$= 0,4. Армирующим элементом композиции является ткань сатиновой структуры Т-10-80. Толщина ткани равна 0,25 мм. Плотность ткани по основе составляет 36 ниток/см, по утку – 20 ниток/см. Ткань получена путем переплетения алюмоборосиликатных ниток БС6-26×1×1 (Е стекло). Диаметр волокна составляет $6 \cdot 10^{-3}$ мм. Механические характеристики волокна: $E_в$= 74800 МПа, $G_в$= 31000 МПа, $\nu_в$= 0,2. Количество волокон в одной нитке достигает 800 шт. В результате проведенных авторами работ [209] вычислений было показано, что модуль упругости нити равен 74506 МПа, модуль сдвига и коэффициент Пуассона нити может быть принят такими же, как и для волокна.

Технические постоянные упругости рассматриваемых многослойных композитов, полученные на основе представленных зависимостей (3.1) – (3.16) сведены в таблице 3.1.

При этом считалось, что стеклопластик представляет собой трасверсально изотропный материал и состоит из 19–ти однонаправлено армированных 30–ю нитями/см слоев толщиной 0,25 мм. Количество нитей в слое определялось в результате расчетов и соответствовало экспериментальному значению модуля упругости $E_{11}^{э}$. Относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении оси 3 принималось равным $\psi_3^{(k)} = 0{,}05\psi_1^{(k)}$.

Сравнение результатов, представленных в таблице 3.1, подтверждает корректность предлагаемой методики определения усредненных технических параметров многослойного композита. Исключение составили физико-механические характеристики трансверсального сдвига и обжатия – G_{13}, G_{23}, E_{33}, ν_{13}, ν_{23}. Проведенные численные исследования показали, что при малом значении $\psi_3^{(k)}$, ($\psi_3^{(k)} \le 0{,}025$), по сравнению с плотностью укладки волокон в двух других направлениях, изменение этого параметра сказывается только на величинах модулей сдвига и обжатия в плоскостях 13 и 23 и то незначительно.

Таблица 3.1 - Упругие характеристики угле – и стеклопластиков

Материал	Вид результата	E_{ii}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
Углепластик	Экспериментально - теоретический [208]	$E_{11}=91000$ $E_{22}=38700$ $E_{33}=8590$	$G_{12}=11540$ $G_{13}=2750$ $G_{23}=1070$	$\nu_{12}=0{,}26$ $\nu_{13}=0{,}30$ $\nu_{23}=0{,}30$	$\nu_{21}=0{,}110$ $\nu_{31}=0{,}028$ $\nu_{32}=0{,}067$
	Результаты расчета	$E_{11}=84457$ $E_{22}=42026$ $E_{33}=14703$	$G_{12}=12410$ $G_{13}=4287$ $G_{23}=3677$	$\nu_{12}=0{,}21$ $\nu_{13}=0{,}28$ $\nu_{23}=0{,}3$	$\nu_{21}=0{,}11$ $\nu_{31}=0{,}049$ $\nu_{32}=0{,}1$
Стеклопластик	Экспериментально - теоретический [208]	$E_{11}=26600$ $E_{22}=23300$ $E_{33}=10760$	$G_{12}=5030$ $G_{13}=1140$ $G_{23}=950$	$\nu_{12}=0{,}17$ $\nu_{13}=0{,}52$ $\nu_{23}=0{,}53$	$\nu_{21}=0{,}150$ $\nu_{31}=0{,}062$ $\nu_{32}=0{,}245$
	Результаты расчета	$E_{11}=24260$ $E_{22}=24260$ $E_{33}=9989$	$G_{12}=4254$ $G_{13}=2947$ $G_{23}=2947$	$\nu_{12}=0{,}15$ $\nu_{13}=0{,}42$ $\nu_{23}=0{,}42$	$\nu_{21}=0{,}15$ $\nu_{31}=0{,}17$ $\nu_{32}=0{,}17$

В заключении можно привести формулу, с помощью которой легко определять усилия в армирующих волокнах k-го слоя оболочки с приемлемой для инженерных расчетов точностью

$$N_в^{(k)} = \frac{\pi (d_в^{(k)})^2}{4} E_в \varepsilon_{1'1'}^{(k)}(z)$$

где z - поперечная координата серединной поверхности k–го слоя.

3.2. Анализ напряженного состояния многослойного полого цилиндра при действии внутреннего давления

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии анизотропной цилиндрической оболочки конечной длины под действием внутреннего и наружного гидростатического давления для случая безмоментного состояния предложено в [210] аналогично решению задачи Ламе для толстостенного изотропного цилиндра. При действии только внутреннего давления **p** выражения для нормальных напряжений и касательные напряжения в цилиндрической системе координат (рис. 3.2) запишутся так:

$$\sigma_r = -pr_1^{k+1}\left[1-\left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{2k}\right]\left\{\left[1-\left(\frac{r1}{r_2}\right)^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \tag{3.17}$$

$$\sigma_\theta = pkr_1^{k+1}\left[1+\left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{2k}\right]\left\{\left[1-\left(\frac{r1}{r_2}\right)^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \tag{3.18}$$

$$\sigma_z = -pr_1^{k+1}\left[\left(b_{13}+kb_{23}-g_k b_{45}\right).\left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{2k} - \left(b_{13}-kb_{23}-g_{-k}b_{45}\right)\right]\left\{b_{33}\left[1-\left(\frac{r1}{r_2}\right)^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \tag{3.19}$$

$$\sigma_{\theta z} = -pr_1^{k+1}\left[g_k.\left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{2k} + g_{-k}\right]\left\{\left[1-\left(\frac{r1}{r_2}\right)^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \quad \sigma_{rz} = 0, \tag{3.20}$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ нормальные напряжения соответственно в радиальном, окружном и продольном направлениях; $\sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$ касательные напряжения в окружном и радиальном направлениях; r_1, r_2 - внутренний и внешний радиусы цилиндра; $r_1 \le \rho \le r_2$ - координата точки цилиндра; b_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., 6)$ - коэффициенты матрицы податливости (3.6) армированного материала b_α^β и $b_{\alpha 3}^\beta$, которые связаны с коэффициентами матриц жесткости (3.5) соотношениями

$$b_\alpha^\beta = \left(a_\alpha^\beta\right)^{-1}, \quad b_{\alpha 3}^\beta = \left(a_{\alpha 3}^\beta\right)^{-1}.$$

Кроме того, в (3.17) – (3.20) введены дополнительные обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{\beta_{33}}{\beta_{22}}}; \quad g_k = \frac{\beta_{16} + k\beta_{26}}{\beta_{66}}; \quad g_{-k} = \frac{\beta_{16} - k\beta_{26}}{\beta_{66}}; \quad \beta_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{i3}b_{j3}}{b_{33}} \quad (i, j = 1, 2, ..., 6). \tag{3.21}$$

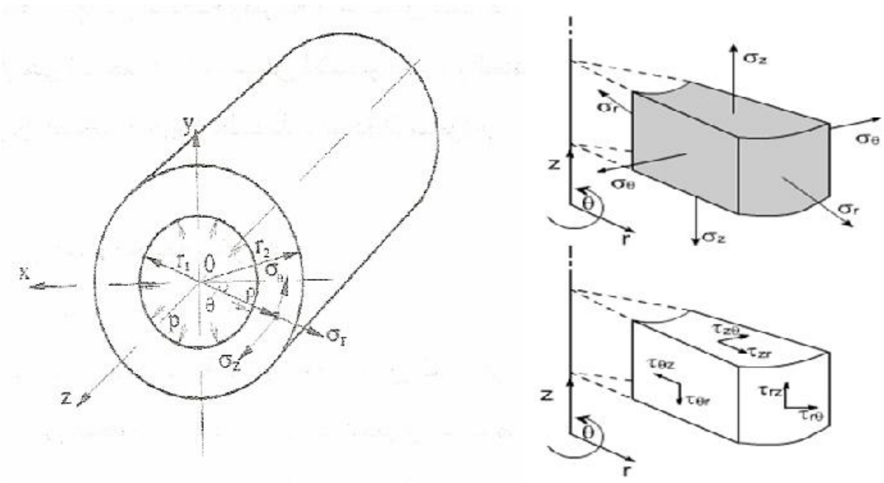


Рисунок 3.2 - Расчетная схема оболочки в цилиндрической системе координат

Напряжения σ_z на концах цилиндра приводятся к осевой силе P, а $\sigma_{\theta z}$ – к скручивающему моменту M_z.

Зависимости (3.17) – (3.21) составлены с учетом допущения о наличии в каждой точке цилиндра плоскости упругой симметрии перпендикулярной нормали к срединной поверхности цилиндра. В этом случае анизотропии толстостенный цилиндр под действием нормального давления будет не только изменять радиусы кривизны поперечных сечений, но и изменять первоначальную длину и закручиваться.

При помощи формул (3.17) – (3.21) несложно найти значения максимальных и минимальных напряжений, которые имеют место в точках внутренней и внешней поверхности рассматриваемого цилиндра ($\rho = r_1$, $\rho = r_2$).

Следует отметить, что при расчете напряженного состояния анизотропных цилиндрических оболочек по формулам (3.17) – (3.21) с допустимой для практики точностью могут быть получены теоретические результаты и для тонкостенных цилиндров ($r_1/r_2 \geq 0{,}8$). При этом указанные зависимости не позволяют определять изменения напряженного состояния цилиндра, вызванное наличием межфазных дефектов структуры материала и влияние условий закрепления торцов.

На основе представленных расчетных моделей, а также разработанных методик расчета такого класса задач, изучено напряженное состояние цилиндра из углепластика с радиусом внутренней поверхности $r_1 = 0{,}1$ м. Оболочка изготавливается методом намотки однонаправленной стеклоленты. В целом такая цилиндрическая оболочка состоит из 31 однонаправленного слоя. Угол намотки каждого слоя определяется кодом структуры материала. Всего рассмотрено 10 вариантов армирования оболочки (табл. 3.2).

Таблица 3.2 - Структура многослойного материала цилиндра

№	Код
1	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/90^\circ_2/-90^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
2	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/60^\circ/0^\circ_2/60^\circ_2/-90^\circ/3\overline{0}^\circ]_S$
3	$[0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/\pm 30^\circ/0^\circ_2/60^\circ/0^\circ_2/60^\circ_2/-60^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
4	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/30^\circ_2/-30^\circ/9\overline{0}^\circ]_S$
5	$[0^\circ_2/30^\circ_2/45^\circ/0^\circ_5/60^\circ/0_2/\pm 30^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
6	$[0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/30^\circ_2/0^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
7	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_3/90^\circ/0_2/90^\circ/0^\circ_2/\overline{0}^\circ]_S$
8	$[0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/\pm 30^\circ/0^\circ_2/45^\circ/30^\circ_2/0^\circ_2/-30^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
9	$[0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/60^\circ/\pm 90^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
10	$[0^\circ/\pm 30^\circ/\pm 45^\circ/\pm 60^\circ/\pm 75^\circ/\pm 90^\circ/0^\circ/30^\circ/45^\circ/75^\circ/\overline{0}^\circ]_S$

Толщина слоя составляет $\delta = 0{,}171$мм. Остальные характеристики компонент монослоя углепластика приведены ранее.

Для каждой заданной структуры углепластика были найдены физико-механические характеристики как композиционного материала с одной плоскостью упругой симметрии (табл. 3.3). При этом декартовая система координат (рис. 3.1) заменена цилиндрической (рис. 3.2).

Таблица 3.3 - Технические постоянные углепластика

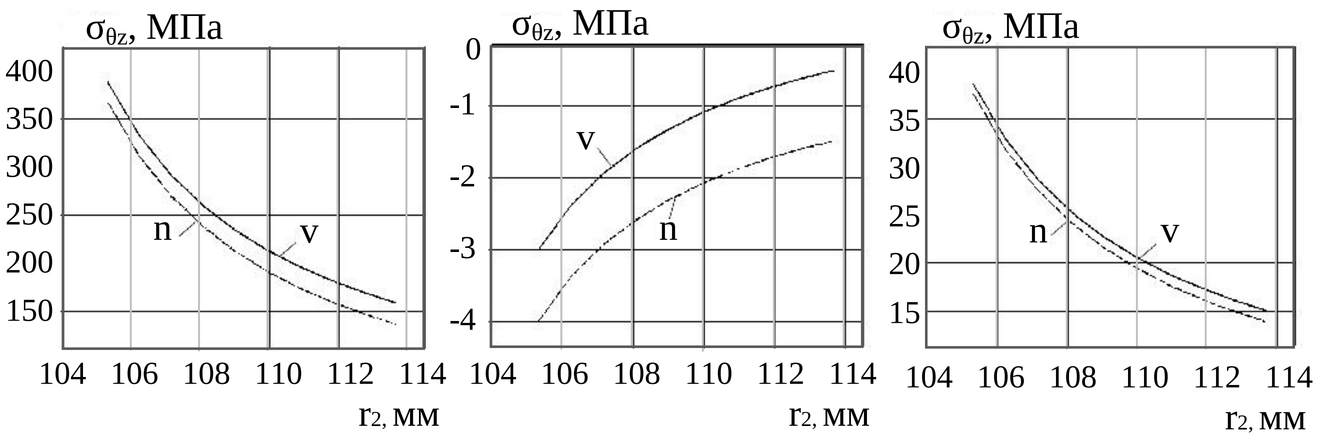
№ кода	E_z, MPa	E_θ, MPa	E_r, MPa	$G_{\theta z}$, MPa	G_{zr}, MPa	$G_{\theta r}$, MPa	$\nu_{z\theta}$	ν_{zr}	$\nu_{\theta r}$	$\nu_{\theta z}$	ν_{rz}	$\nu_{r\theta}$
1	88230	51450	17190	10970	4054	3576	0,128	0,285	0,300	0,074	0,056	0,056
2	84420	33680	16970	14010	4112	3508	0,260	0,243	0,289	0,104	0,049	0,146
3	98510	28110	16860	14360	4279	3358	0,338	0,219	0,291	0,097	0,037	0,175
4	94370	22880	16720	16800	4316	3317	0,494	0,169	0,283	0,120	0,030	0,207
5	102900	24300	16740	14480	4346	3293	0,393	0,201	0,292	0,093	0,033	0,201
6	105000	18370	16360	12750	4390	3235	0,383	0,205	0,300	0,067	0,032	0,267
7	110100	31890	16870	8277	4319	3319	0,091	0,299	0,314	0,026	0,046	0,166
8	102900	24300	16740	14480	4346	3293	0,393	0,201	0,292	0,093	0,033	0,201
9	90360	45510	17140	11820	4109	3530	0,153	0,277	0,298	0,077	0,053	0,112
10	49550	61820	17220	20350	3734	3902	0,237	0,248	0,230	0,296	0,086	0,064

Значения нормальных и касательных напряжений в точках внутренней и наружной поверхности цилиндра при интенсивности внутреннего давления $q = 20$ МПа приведены в табл. 3.4. Анализ результатов показывает, что изменение кода практически не влияет на значения нормальных напряжений в окружном направлении σ_θ. При этом имеет место существенное изменение величин напряжений $\sigma_{\theta z}$ поперечного сдвига $\sigma_{\theta z}$ и нормальных осевых напряжений σ_z.

Представляют интерес проведенные исследования напряженного состояния многослойной оболочки с кодом $[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/90^\circ_2/-90^\circ/\bar{0}^\circ]_S$, когда толщина слоя последовательно увеличивается на заданную величину (рис. 3. 3 – 3.5). В целом толщина оболочки определяется выражением $h = r_2 - r_1$, где значение r_2 показано на рис. 3.3 , а величина радиуса внутренней поверхности оболочки не изменяется и равна $r_1 = 0{,}1$м. Упругие постоянные заданного набора слоев не зависят от толщины оболочки.

Таблица 3.4 - Напряженное состояние цилиндра толщиной ***h = 5,4 мм***

№ кода	$\rho = r_1$				$\rho = r_2$			
	σ_r, MPa	σ_θ, MPa	σ_z, MPa	$\sigma_{\theta z}$, MPa	σ_r, MPa	σ_θ, MPa	σ_z, MPa	$\sigma_{\theta z}$, MPa
1	-20	388.3	38.6	-3.0	0	367.2	37.6	-4.0
2	-20	388.7	36.8	-2.4	0	367.0	35.6	-3.4
3	-20	388.8	21.5	-1.9	0	366.9	21.0	-2.9
4	-20	389.0	17.7	-1.6	0	366.9	17.4	-2.6
5	-20	389.3	15.4	-1.3	0	366.7	15.2	-2.3
6	-20	389.5	14.3	-1.1	0	366.6	14.1	-2.1
7	-20	389.5	14.3	-0.9	0	366.6	14.1	-1.9
8	-20	389.7	12.8	-0.8	0	366.5	12.7	-1.7
9	-20	390.0	12.2	-0.6	0	366.4	12.1	-1.6
10	-20	390.1	12.3	-0.5	0	366.3	12.2	-1.5



а) б) в)

Рисунок 3.3 - Зависимость напряжения а)- σ_θ, б)- напряжения $\sigma_{\theta z}$ й с)- напряжения σ_z от толщины оболочки

Следует отметить, что с увеличением толщины оболочки разность нормальных напряжений σ_θ в окружном направлении в точках внутренней и наружной поверхностях практически не меняется. Так, например, если при толщине оболочки $r_2 - r_1 = h = 5{,}4$ мм эта разность составляла $21{,}1$ МПа, то при толщине $h = 13{,}7$ мм она равняется $22{,}5$ МПа. Анализируя зависимости напряжений $\sigma_{\theta z}$ и σ_z от толщины оболочки, можно заметить, что в анизотропных оболочках, когда $r/h > 20$, при действии внутреннего давления возникают достаточно большие по величине напряжения $\sigma_{\theta z}$ и σ_z. Такие напряжения могут стать причиной разрушения связующего рассматриваемого армированного материала. Условия идеального контакта между слоями, которые применяются в непрерывно-структурной теории анизотропных пластин и оболочек, в этом случае оказываются существенно нарушенными.

3.3. Напряжённо деформированное состояние многослойного плоского кривого бруса при изгибе с учетом идеального и неидеального контакта между слоями

В основу метода расчета в данном подразделе многослойного изогнутого кривого бруса положен дискретный подход. Система разрешающих уравнений построена для всего пакета слоев с учетом как идеального, так и неидеального контакта сопряженных поверхностей соседних слоев.

3.3.1. Структурно непрерывная теория. На рис. 3.4 показана геометрия многослойного плоского изогнутого бруса толщиной t, обладающего цилиндрической анизотропией. Криволинейный брус в плане ограничен двумя концентрическими окружностями радиусов a и b, а также двумя радиальными плоскостями, образующими угол θ = π/2. Принято, что материал бруса ортотропный и плоскость упругой симметрии совпадает со срединной поверхностью бруса. Ось анизотропии проходит нормально к плоскости упругой симметрии через общий центр концентрических окружностей и совпадает с осью z цилиндрической системы координат ось x, от которой отсчитываются полярные углы θ, совпадает с осью y декартовой системы координат x-y.

Считается, что криволинейные стороны r = a и r = b не нагружены. На шарнирно закрепленыt торцы бруса действуют противоположно направленные вертикальные силы P, приложенные с эксцентриситетом e. Таким образом, используя принцип суперпозиции действия, заданную нагрузку (рис. 3.5) можно представить в виде суммы сосредоточенной силы Р и сосредоточенного изгибающего момента М = Р·е.

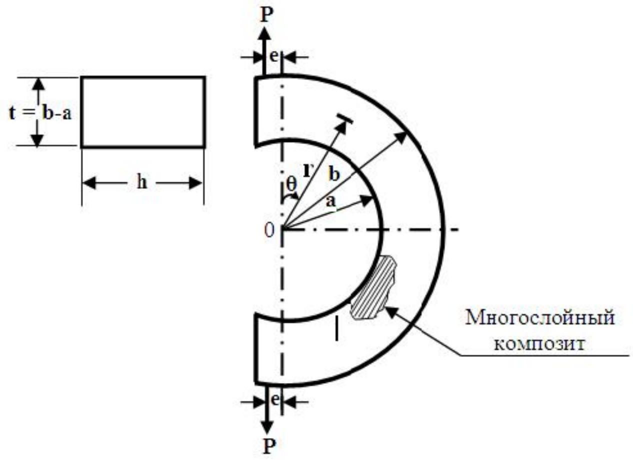


Рисунок 3.4 - Схема нагружения многослойного криволинейного бруса

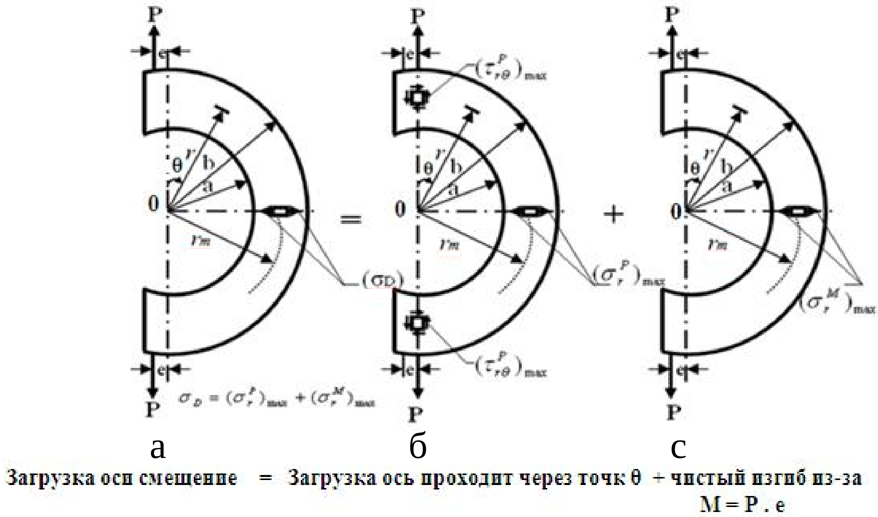


Рисунок 3.5 - Изгиб кривого бруса сосредоточенной поперечной силой Р и изгибающим моментом М

Общее решение поставленной задачи изгиба криволинейного бруса из материала с цилиндрической анизотропией приведено в [211]. При этом функции напряжения в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

при действии силы Р (рис. 3.5 б). $F = [Ar^{1+\beta} + Br^{1-\beta} + Cr + Dr\ln r]\sin\theta$; (3.22)

при действии момента М (рис. 3.7 с). $F = [A' + B'r^{2} + C'r^{1+K} + D'r^{1-k}]$. (3.23)

Здесь А, В, С, D и А’, В’, С ’, D’ произвольные константы, которые определяются из граничных условий на криволинейных поверхностях бруса и из интегральных соотношений приводимости на торцах. Параметры анизотропии β и *k* соответственно равны

$$\beta \equiv \sqrt{1+\frac{E_\theta}{E_r}(1-2\upsilon_{r\theta})+\frac{E_\theta}{E_r}}\ , \tag{3.24}$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}\ . \tag{3.25}$$

Следует отметить, что для изотропных материалов, $\beta = 2$ и $k = 1$.

Три составляющие тензора напряжений (рис. 3.5) можно записать при помощи функций напряжений –

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(\frac{F}{r}). \tag{3.26}$$

Используя физические –

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta, \qquad \varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta, \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}, \tag{3.27}$$

и геометрические –

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}, \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}), \tag{3.28}$$

соотношения для плоского напряженного состояния ортотропного материала, а также хорошо известное тождество

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}, \tag{3.29}$$

напряженно-деформированное состояния рассматриваемого бруса после несложных преобразований уравнений (3.22) – (3.29) будет определяться следующими функциями.

Напряжения при действии силы P –

$$\sigma_r^P(r,\theta) = [A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}]\sin\theta\ ,$$

$$\sigma_\theta^P(r,\theta) = [A\beta(1+\beta)r^{\beta-1} - B\beta(1-\beta)r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}]\sin\theta\ ,$$

$$\tau_{r\theta}^P(r,\theta) = -[A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}]\cos\theta \tag{3.30}$$

и при действии момента M –

$$\sigma_r^M(r) = A'(1+k)r^{k-1} + B'(1-k)r^{-k-1} + 2D',$$

$$\sigma_\theta^M(r) = A'k(1+k)r^{k-1} - B'k(1-k)r^{-k-1} + 2D', \quad \tau_{r\theta}^M = 0 . \qquad (3.31)$$

Полные напряжения в точках будут получены путем суммирования двух идентичных компонентов напряжений (3.30) – (3.31)

$$\sigma_r = \sigma_r^P + \sigma_r^M, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^P + \sigma_\theta^M, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^P + \tau_{r\theta}^M .. \qquad (3.32)$$

Подставляя (3.30) – (3.31) в физические и геометрические соотношения (3.27) – (3.29) и интегрируя полученные зависимости, несложно получить выражения для определения перемещений бруса в радиальном и окружном направлениях.

Перемещения при действии силы P –

$$u_r^P(r,\theta) = \{ Ar^\beta[\frac{1}{E_r} - (1+\beta)\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}] + Br^{-\beta}[\frac{1}{E_r} - (1-\beta)\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}] + D(\ln r)(\frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}) \}\sin\theta + C_1,$$

$$u_\theta^P(r,\theta) = \{Ar^\beta[\frac{1}{E_r} - \beta(1+\beta)\frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}] + Br^{-\beta}[\frac{1}{E_r} + (1-\beta)\frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}] +$$

$$+ D[(\ln r)(\frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}) - (\frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta})]\}\cos\theta + C_1\theta + C_2, \qquad (3.33)$$

и при действии момента M –

$$u_r^M(r) = A'\left\{(1+k)r^k(\frac{1}{k}\frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta})\right\} - B'\left\{(1-k)r^{-k}(\frac{1}{k}\frac{1}{E_r} + \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta})\right\} + D'\left\{2r(\frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta})\right\} + C_1',$$

$$u_\theta^M(r,\theta) = D'\left\{2r(\frac{1}{E_\theta} - \frac{1}{E_r})\right\}\theta + C_1'\theta + C_2'. \qquad (3.34)$$

В формулах (3.33), (3.34) неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, C_1', C_2', можно найти при помощи краевых условий на торцах бруса и из условий симметрии в сечении бруса с координатой $\theta = \pi/2$.

Согласно ранее приятой постановки задачи имеют место следующие граничные условия:

при действии силы P – $\sigma_r^P(a,\theta) = 0$, $\sigma_r^P(b,\theta) = 0$, $-P = \int_a^b \tau_{r\theta}^P(r,0)dr$; (3.35)

при действии момента M – $\sigma_r^M(a,\theta) = 0$, $\sigma_r^M(b,\theta) = 0$, $-M = \int_a^b r\sigma_\theta^M(r)dr$ (3.36)

Подставляя последовательно выражения (3.30) в (3.35) и (3.31) в (3.36), можно получить окончательные зависимости напряжений рассматриваемого бруса, когда анизотропное тело представлено как неоднородный континуум с заданными интегральными физико-механическими характеристиками.

Напряжения в плоском кривом брусе из анизотропного материала при действии силы Р –
$$\sigma_r^P(r,\theta)=\frac{P}{bhg_1}\frac{b}{r}[(\frac{r}{b})^{\beta}+(\frac{a}{b})^{\beta}(\frac{b}{r})^{\beta}-1-(\frac{a}{r})^{\beta}]\sin\theta,$$

$$\sigma_\theta^P(r,\theta)=\frac{P}{bhg_1}\frac{b}{r}[(1+\beta)(\frac{r}{b})^{\beta}+(1-\beta)(\frac{a}{b})^{\beta}(\frac{b}{r})^{\beta}-1-(\frac{a}{b})^{\beta}]\sin\theta,$$

$$\tau_{r\theta}^P(r,\theta)=\frac{P}{bhg_1}\frac{b}{r}[(\frac{r}{b})^{\beta}+(\frac{a}{b})^{\beta}(\frac{b}{r})^{\beta}-1-(\frac{a}{b})^{\beta}]\cos\theta, \quad (3.37)$$

где

$$g_1=\frac{2}{\beta}[1-(\frac{a}{b})^{\beta}]+[1+(\frac{a}{b})^{\beta}]\ln\frac{a}{b}; \quad (3.38)$$

при действии момента М –
$$\sigma_r^M(r)=-\frac{M}{b^2hg}[1-\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)^{2k}}(\frac{r}{b})^{k-1}-\frac{1-(a/b)^{k-1}}{1-(a/b)^{2k}}(\frac{a}{b})^{k+1}(\frac{b}{r})^{k+1}],$$

$$\sigma_\theta^M(r)=-\frac{M}{b^2hg}[1-\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)^{2k}}k(\frac{r}{b})^{k-1}+\frac{1-(a/b)^{k-1}}{1-(a/b)^{2k}}k(\frac{a}{b})^{k+1}(\frac{b}{r})^{k+1}],$$

$$\tau_{r\theta}^M=0, \quad (3.39)$$

где
$$g=\frac{1-(a/b)^2}{2}-\frac{k}{k+1}\frac{[1-(a/b)^{k+1}]^2}{[1-(a/b)^{2k}]}+\frac{k(a/b)^2}{k-1}\frac{[1-(a/b)^{k-1}]^2}{[1-(a/b)^{2k}]}. \quad (3.40)$$

Следуя предложенному ранее алгоритму, формулы для определения перемещений точек анизотропного бруса несложно составить при помощи выражений (3.33), (3.34), известных значений постоянных A, B, D, A´, B´, D´ и заданных краевых условий.

3.3.2. Дискретно-структурная теория многослойного бруса при идеальном контакте слоев. На рис. 3.6 показан многослойный плоский изогнутый брус в форме полукольца в плане, на каждом из торцов которого действуют сосредоточенная поперечная сила Р и изгибающий момент М. Брус состоит из N слоев. Поле напряжений и перемещений каждого i слоя (i=1, 2, …, N) определяется соотношениями (3.30) – (3.31), (3.33) – (3.34).

Имея по сопряженным поверхностям i и i+1 (i=1,2,…,N-1) слоя, когда $r = a_i$ (рис. 3.6), статические и кинематические условия идеального контакта:

при действии силы P –

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.41)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(i)}(a_i, \theta) = \tau_{r\theta}^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.42)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.43)$$

$$u_\theta^{P(i)}(a_i, \theta) = u_\theta^{P(i+1)}(a_i, \theta); \quad (3.44)$$

при действии момента M –

$$\sigma_r^{M(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{M(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.45)$$

$$u_r^{M(i)}(a_i, \theta) = u_r^{M(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.46)$$

$$u_\theta^{M(i)}(a_i, \theta) = u_\theta^{M(i+1)}(a_i, \theta). \quad (3.47)$$

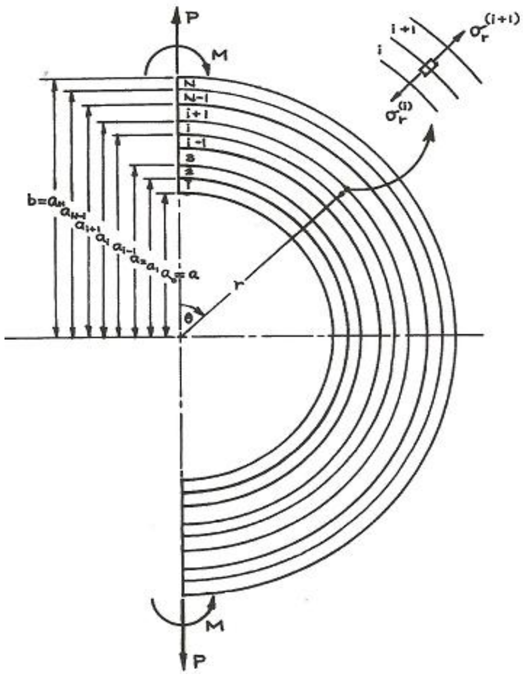


Рисунок 3.6 - Структура многослойного изогнутого плоского бруса

Кроме того, на лицевых поверхностях бруса, когда $r = a$ и $r = b$ (рис. 3.6), дополнительно имеют место статические граничные условия:

при действии силы P – $\sigma_r^{P(1)}(a, \theta) = 0$, (3.48)

$$\tau_{r\theta}^{P(1)}(a, \theta) = 0, \quad (3.49)$$

$$\sigma_r^{P(N)}(b, \theta) = 0, \quad (3.50)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(N)}(b, \theta) = 0; \quad (2.51)$$

при действии момента M – $\sigma_r^{M(1)}(a, \theta) = 0$, (3.52)

$$\sigma_r^{M(N)}(b, \theta) = 0. \quad (3.53)$$

Как упоминалось ранее, на прямолинейных торцах бруса должны выполняться следующие граничные условия равновесия:

при действии силы P –

$$-P = h \sum_{i=1}^{N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tau_{r\theta}^{P(i)}(r, 0)dr; \quad (3.54)$$

при действии момента M –

$$-M = h\sum_{i=1}^{N}\int_{a_{i-1}}^{a_i} r\sigma_\theta^{M(i)}(r)dr\,. \qquad (3.55)$$

Сравнив первое и третье уравнения (3.30), следует отметить, что напряжения σ_r^P и $\tau_{r\theta}^P$ имеют одинаковые зависимости от координаты r. Таким образом, если σ_r^P удовлетворяет граничным условиям (3.41), (3.48), (3.50), то $\tau_{r\theta}^P$ будет удовлетворять граничным условиям (3.42), (3.49), (2.51) автоматически.

Пусть многослойный брус состоит из N ортотропных слоев. Для решения поставленной задачи согласно дискретно-структурной теории следует подставить функции напряжений (3.30) – (3.31) и перемещений (3.33) – (3.34) в граничные условия (3.41), (3.43) – (3.44), (3.48), (3.50), (3.54) или (3.45) – (3.47), (3.52) – (3.53), (3.55). При этом имеют место две системы из 3×N линейных алгебраических уравнений. Решая эти две системы, можно найти значения 3×N неизвестных постоянных A_i, B_i, D_i (i = 1,2, ..., N), когда на брус действует сила P, и значения 3×N неизвестных постоянных A_i', B_i', D_i' (i = 1, 2... N) при действии момента M.

В качестве примера ниже представлены две системы из 9 уравнений каждая для определения неизвестных постоянных:

при действии силы P –

$$A_1\beta_1 a_0^{\beta_1} - B_1\beta_1 a_0^{-\beta_1} + D_1 = 0\,,$$

$$A_1\beta_1 a_1^{\beta_1} - B_1\beta_1 a_1^{-\beta_1} + D_1 - A_2\beta_2 a_1^{\beta_2} + B_2\beta_2 a_1^{-\beta_2} - D_2 = 0\,,$$

$$A_2\beta_2 a_2^{\beta_2} - B_2\beta_2 a_2^{-\beta_2} + D_2 - A_3\beta_3 a_2^{\beta_3} + B_3\beta_3 a_2^{-\beta_3} - D_3 = 0\,,$$

$$A_3\beta_3 a_3^{\beta_3} - B_3\beta_3 a^{-\beta_3} + D_3 = 0\,,$$

$$A_1 a_1^{\beta_1}[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1+\beta_1)\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}] + B_1 a_1^{-\beta_1}[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1-\beta_1)\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}] + D_1 \ln a_1[\frac{1}{E_r^{(1)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}] -$$
$$- A_2 a_1^{\beta_2}[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1+\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}] - B_2 a_1^{-\beta_2}[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1-\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}] - D_2 \ln a_1[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}] = 0,$$

$$A_2 a_2^{\beta_2}[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1+\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}] + B_2 a_2^{-\beta_2}[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1-\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}] + D_2 \ln a_2[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}] -$$
$$- A_3 a_2^{\beta_3}[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1+\beta_3)\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}] - B_3 a_2^{-\beta_3}[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1-\beta_3)\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}] - D_3 \ln a_2[\frac{1}{E_r^{(3)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}] = 0,$$

$$A_1 a_1^{\beta_1}\frac{\beta_1}{E_\theta^{(1)}}[(1+\beta_1)-\nu_{\theta r}^{(1)}]-B_1 a_1^{-\beta_1}\frac{\beta_1}{E_\theta^{(1)}}[(1+\beta_1)-\nu_{\theta r}^{(1)}]+D_1\frac{1}{E_\theta^{(1)}}(1-\nu_{\theta r}^{(1)})-$$

$$-A_2 a_1^{\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2)-\nu_{\theta r}^{(2)}]+B_2 a_1^{-\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2)-\nu_{\theta r}^{(2)}]-D_2\frac{1}{E_\theta^{(2)}}(1-\nu_{\theta r}^{(2)})=0,$$

$$A_2 a_2^{\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2)-\nu_{\theta r}^{(2)}]-B_2 a_2^{-\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2)-\nu_{\theta r}^{(2)}]+D_2\frac{1}{E_\theta^{(2)}}(1-\nu_{\theta r}^{(2)})-$$

$$-A_3 a_2^{\beta_3}\frac{\beta_3}{E_\theta^{(3)}}[(1+\beta_3)-\nu_{\theta r}^{(3)}]+B_3 a_2^{-\beta_3}\frac{\beta_3}{E_\theta^{(3)}}[(1+\beta_3)-\nu_{\theta r}^{(3)}]-D_3\frac{1}{E_\theta^{(3)}}(1-\nu_{\theta r}^{(3)})=0,$$

$$h\sum_{i=1}^{3}[A_i(a_i^{\beta_i}-a_{i-1}^{\beta_i})+B_i(a_i^{\beta_i}-a_{i-1}^{\beta_i})+D_i(\ln a_i-\ln a_{i-1})]=P \qquad (3.56)$$

при действии момента М –

$$A_1'(1+k_1)a_0^{k_1-1}+B_1'(1-k_1)a_0^{-k_1-1}+2D_1'=0,$$

$$A_1'(1+k_1)a_1^{k_1-1}+B_1'(1-k_1)a_1^{-k_1-1}+2D_1'-A_2'(1+k_2)a_1^{k_2-1}-B_2'(1-k_2)a_1^{-k_2-1}-2D_2'=0,$$

$$A_2'(1+k_2)a_2^{k_2-1}+B_2'(1-k_2)a_2^{-k_2-1}+2D_2'-A_3'(1+k_3)a_2^{k_3-1}-B_3'(1-k_3)a_2^{-k_3-1}-2D_3'=0,$$

$$A_3'(1+k_3)a_3^{k_3-1}+B_3'(1-k_3)a_3^{-k_3-1}+2D_3'=0,$$

$$A_1'\left\{(1+k_1)a_1^{k_1}\left(\frac{1}{k_1}\frac{1}{E_r^{(1)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}\right)\right\}-B_1'\left\{(1-k_1)a_1^{-k_1}\left(\frac{1}{k_1}\frac{1}{E_r^{(1)}}+\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}\right)\right\}+D_1'\left\{2a_1\left(\frac{1}{E_r^{(1)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}\right)\right\}-$$

$$-A_2'\left\{(1+k_2)a_1^{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\frac{1}{E_r^{(2)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right)\right\}+B_2'\left\{(1-k_2)a_1^{-k_2}\left(\frac{1}{k_2}\frac{1}{E_r^{(2)}}+\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right)\right\}-D_2'\left\{2a_1\left(\frac{1}{E_r^{(2)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right)\right\}=0,$$

$$A_2'\left\{(1+k_2)a_2^{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\frac{1}{E_r^{(2)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right)\right\}-B_2'\left\{(1-k_2)a_2^{-k_2}\left(\frac{1}{k_2}\frac{1}{E_r^{(2)}}+\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right)\right\}+D_2'\left\{2a_2\left(\frac{1}{E_r^{(2)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right)\right\}-$$

$$-A_3'\left\{(1+k_3)a_2^{k_3}\left(\frac{1}{k_3}\frac{1}{E_r^{(3)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}\right)\right\}+B_3'\left\{(1-k_3)a_2^{-k_3}\left(\frac{1}{k_3}\frac{1}{E_r^{(3)}}+\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}\right)\right\}-D_3'\left\{2a_2\left(\frac{1}{E_r^{(3)}}-\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}\right)\right\}=0,$$

$$D_1'\left\{2a_1\left(\frac{1}{E_\theta^{(1)}}-\frac{1}{E_r^{(1)}}\right)\right\}-D_2'\left\{2a_1\left(\frac{1}{E_\theta^{(2)}}-\frac{1}{E_r^{(2)}}\right)\right\}=0,$$

$$D_2'\left\{2a_2\left(\frac{1}{E_\theta^{(2)}}-\frac{1}{E_r^{(2)}}\right)\right\}-D_3'\left\{2a_2\left(\frac{1}{E_\theta^{(3)}}-\frac{1}{E_r^{(3)}}\right)\right\}=0,$$

$$h\sum_{i=1}^{3}[A_i'k_i(a_i^{k_i+1}-a_{i-1}^{k_i+1})-B_i'k_i(a_i^{-k_i+1}-a_{i-1}^{-k_i+1})+D_i'(a_i^2-a_{i-1}^2)]=-M\,. \qquad (3.57)$$

После подстановки неизвестных постоянных A_i, B_i, D_i (i = 1,2,3) и A_i', B_i', D_i' (i = 1,2,3), полученных в результате решения уравнений (3.56), (3.57), в функции напряжений и перемещений (3.30) – (3.34) соответственно несложно получить полную картину напряженно-деформированного состояния каждого слоя плоского криволинейного бруса.

3.3.3. Дискретно структурная теория многослойного бруса при неидеальном контакте слоев. Пусть между слоями плоского изогнутого бруса (рис. 3.8) при определенных значениях внешней нагрузки из-за разрушения клеевой прослойки [2] возможно возникновение упругого проскальзывания двух соседних слоев друг относительно друга. При этом между разностью перемещений в окружном направлении $u_\theta^{(i)}(a_i,\theta)$, $u_\theta^{(i+1)}(a_i,\theta)$ сопряженных поверхностей соседних слоев и касательными напряжениями $\tau_{r\theta}^{(i)}(a_i,\theta)$, когда $r = a_i$ (рис. 3.8), существует зависимость

$$u_\theta^{(i)}(a_i,\theta) - u_\theta^{(i+1)}(a_i,\theta) = K^{(i)}\tau_{r\theta}^{(i)}. \quad (3.58)$$

В общем случае параметр $K^{(i)} = K^{(i)}(a_i,\theta)$. В качестве предельных из уравнения (2.65) имеет место два варианта: при $1/K^{(i)} = 0$ – имеет место идеальное проскальзывание, при $K^{(i)} = 0$ – идеальный контакт. Считая, что радиальные напряжения $\sigma_r^{(i)}(a_i,\theta)$ и $u_r^{(i)}(a_i,\theta)$ при переходе через поверхность раздела слоев скачка не имеют, статические и кинематические условия неидеального контакта для заданных внешних нагрузок имеют вид:

при действии силы Р – $$\sigma_r^{P(i)}(a_i,\theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i,\theta), \quad (3.59)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i,\theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i,\theta), \quad (3.60)$$

$$u_\theta^{P(i)}(a_i,\theta) - u_\theta^{P(i+1)}(a_i,\theta) = K^{(i)}\tau_{r\theta}^{P(i)}; \quad (3.61)$$

при действии момента М – $$\sigma_r^{M(i)}(a_i,\theta) = \sigma_r^{M(i+1)}(a_i,\theta), \quad (3.62)$$

$$u_r^{M(i)}(a_i,\theta) = u_r^{M(i+1)}(a_i,\theta), \quad (3.63)$$

$$u_\theta^{M(i)}(a_i,\theta) - u_\theta^{M(i+1)}(a_i,\theta) = K^{(i)}\tau_{r\theta}^{M(i)}. \quad (3.64)$$

Также как и для случая идеального контакта слоев на лицевых поверхностях бруса, когда $r = a$ и $r = b$ (рис. 3.8), дополнительно имеют место статические граничные условия (3.48) – (3.53) и статические условия равновесия на торцах бруса (3.54) – (3.55) соответственно для заданных видов внешней нагрузки.

Для принятого варианта дискретно-структурной теории с неидеальным контактом слоев системы уравнений (3.56) в соответствии с граничными условиями (3.59) – (3.61) принимают вид при действии силы Р

$$A_1\beta_1 a^{\beta_1} - B_1\beta_1 a^{-\beta_1} + D_1 = 0,$$

$$A_1\beta_1 a_1^{\beta_1} - B_1\beta_1 a_1^{-\beta_1} + D_1 - A_2\beta_2 a_2^{\beta_2} + B_2\beta_2 a_2^{-\beta_2} - D_2 = 0,$$

$$A_2\beta_2 a_2^{\beta_2} - B_2\beta_2 a_2^{-\beta_2} + D_2 - A_3\beta_3 a_3^{\beta_3} + B_3\beta_3 a_3^{-\beta_3} - D_3 = 0,$$

$$A_N\beta_N a_N^{\beta_N} - B_N\beta_N a^{-\beta_N} + D_N = 0,$$

$$A_1 a_1^{\beta_1}\left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1+\beta_1)\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}\right] + B_1 a_1^{-\beta_1}\left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - (1-\beta_1)\frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}\right] + D_1 \ln a_1\left[\frac{1}{E_r^{(1)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(1)}}{E_\theta^{(1)}}\right] -$$

$$- A_2 a_1^{\beta_2}\left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1+\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right] - B_2 a_1^{-\beta_2}\left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1-\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right] - D_2 \ln a_1\left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right] = 0,$$

$$A_2 a_2^{\beta_2}\left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1+\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right] + B_2 a_2^{-\beta_2}\left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - (1-\beta_2)\frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right] + D_2 \ln a_2\left[\frac{1}{E_r^{(2)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(2)}}{E_\theta^{(2)}}\right] -$$

$$- A_3 a_2^{\beta_3}\left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1+\beta_3)\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}\right] - B_3 a_2^{-\beta_3}\left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - (1-\beta_3)\frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}\right] - D_3 \ln a_2\left[\frac{1}{E_r^{(3)}} - \frac{\nu_{\theta r}^{(3)}}{E_\theta^{(3)}}\right] = 0,$$

$$A_1 a_1^{\beta_1}\frac{\beta_1}{E_\theta^{(1)}}[(1+\beta_1) - \nu_{\theta r}^{(1)}] - B_1 a_1^{-\beta_1}\frac{\beta_1}{E_\theta^{(1)}}[(1+\beta_1) - \nu_{\theta r}^{(1)}] + D_1\frac{1}{E_\theta^{(1)}}(1-\nu_{\theta r}^{(1)}) A_2 a_1^{\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2) - \nu_{\theta r}^{(2)}] +$$

$$+ B_2 a_1^{-\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2) - \nu_{\theta r}^{(2)}] - D_2\frac{1}{E_\theta^{(2)}}(1-\nu_{\theta r}^{(2)}) = -K^{(1)}\left(A_1\beta_1 r^{\beta_1-1} - B_1\beta_1 r^{-\beta_1-1} + \frac{D_1}{r}\right),$$

$$A_2 a_2^{\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2) - \nu_{\theta r}^{(2)}] - B_2 a_2^{-\beta_2}\frac{\beta_2}{E_\theta^{(2)}}[(1+\beta_2) - \nu_{\theta r}^{(2)}] + D_2\frac{1}{E_\theta^{(2)}}(1-\nu_{\theta r}^{(2)}) - A_3 a_2^{\beta_3}\frac{\beta_3}{E_\theta^{(3)}}[(1+\beta_3) - \nu_{\theta r}^{(3)}] +$$

$$+ B_3 a_2^{-\beta_3}\frac{\beta_3}{E_\theta^{(3)}}[(1+\beta_3) - \nu_{\theta r}^{(3)}] - D_3\frac{1}{E_\theta^{(3)}}(1-\nu_{\theta r}^{(3)}) = -K^{(2)}\left(A_2\beta_2 r^{\beta_2-1} - B_2\beta_2 r^{-\beta_2-1} + \frac{D_2}{r}\right.$$

$$\sum_{i=1}^{3}[A_i(a_i^{\beta_i} - a_{i-1}^{\beta_i}) + B_i(a_i^{\beta_i} - a_{i-1}^{\beta_i}) + D_i(\ln a_i - \ln a_{i-1})] = P\,; \qquad (3.65)$$

При действии момента М система уравнений (3.57) как в случае идеального, так и неидеального контакта остается неизменной. Это обусловлено тем, что напряжения $\tau_{r\theta}^{M(i)}$ в граничном условии (3.64) при чистом изгибе бруса (третье уравнение (3.31)) равно 0.

3.4. Пример расчета

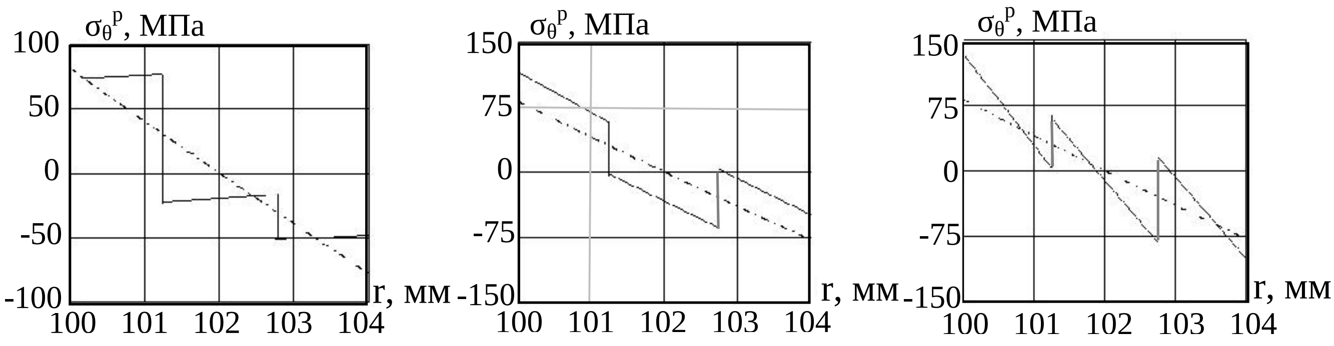
В качестве примера расчета рассмотрено напряженно-деформированное состояние плоского криволинейного бруса при изгибе. Считалось, что брус состоит из трех однонаправленных слоев (N = 3). Геометрические параметры бруса: размеры поперечного сечения – h = 48 мм, t = 4мм; радиусы внутренней и внешней поверхностей бруса – a = 100 мм, b = 104 мм.

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе в подразделе 3.1. Модули упругости $E_в$, сдвига $G_в$ и коэффициент Пуассона $\nu_{в}$ наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_{в} = 55000 МПа$, $G_{в} = 22000 МПа$, $\nu_{в} = 0{,}25$. Матрица стеклопластика – эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_{м} = 3550 МПа$, $G_{м} = 1270 МПа$, $\nu_{м} = 0{,}4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70% общего объема.

Представленные результаты получены при действии сосредоточенной растягивающей силы Р = 100Н. Для проведения сравнительного анализа рассмотрены четыре варианта армирования бруса. При помощи штрих пунктирной линии даны графики напряжений и перемещений, полученные согласно непрерывно-структурной теории. Сплошными линиями показаны результаты, которые соответствуют дискретно-структурной теории многослойного бруса с учетом как идеального, так и неидеального контакта сопряженных лицевых поверхностей соседних слоев. Значения коэффициентов K_i (i=1, 2) для рассматриваемого трехслойного бруса считаются одинаковыми, т.е. $K_1 = K_2 = K$.

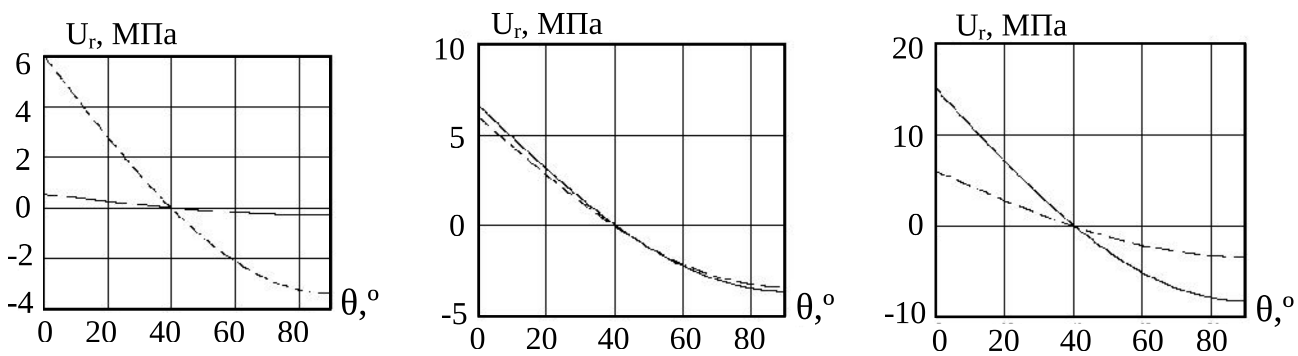
Рассмотрим различные варианты армирования слоев стеклопластика.

1. Симметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. При этом все три слоя имеют примерно одинаковые физико-механические характеристики. Первый и третий слои с кодом $[0^{\circ}{}_4 / -75^{\circ}]$ и $[-75^{\circ} / 0^{\circ}{}_4]$ имеют такие параметры – $E_{\theta}^{(1)} = E_{\theta}^{(3)} = 35500 МПа$, $E_{r}^{(1)} = E_{r}^{(3)} = 23800 МПа$, $E_{z}^{(1)} = E_{z}^{(3)} = 22900 МПа$, $\nu_{\theta r}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(3)} = 0{,}402$, $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = 2{,}63$, $k^{(1)} = k^{(3)} = 1{,}22$; второй слой с кодом $[0^{\circ}_2 / -75^{\circ} / 75^{\circ} / 0^{\circ}_2]$ – $E_{\theta}^{(2)} = 33600 МПа$, $E_{r}^{(2)} = 23900 МПа$, $E_{z}^{(2)} = 24800 МПа$, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0{,}403$, $\beta^{(2)} = 2{,}59$, $k^{(2)} = 1{,}17$. Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 3.7 – 3.10, позволяет отметить следующее. При учете идеального контакта между слоями (рис. 3.7, а) распределение напряжений σ_{θ}^{P} существенно отличается от результатов, полученных



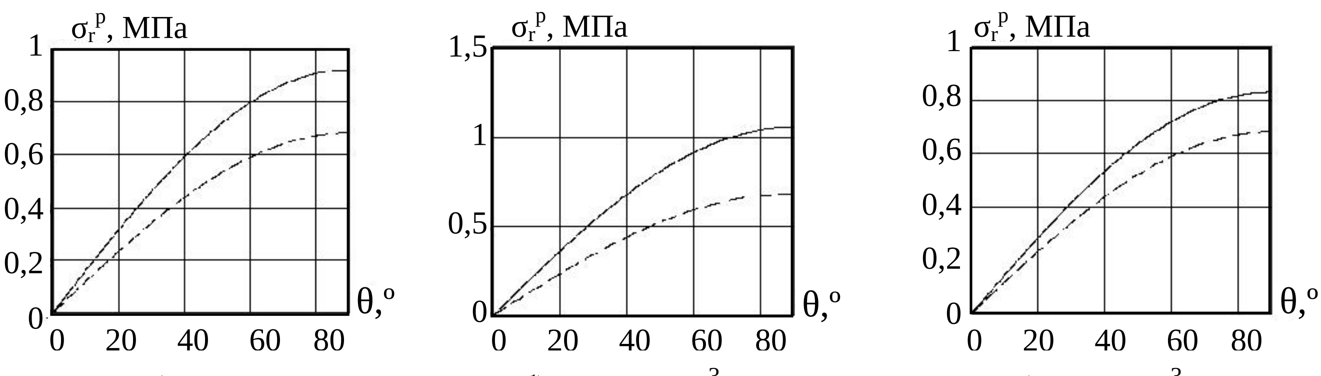
а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.7 - График изменения тангенциальных напряжений $\boldsymbol{\sigma_\theta^P}$ по толщине бруса в сечении с координатой **$\theta = \pi/2$**



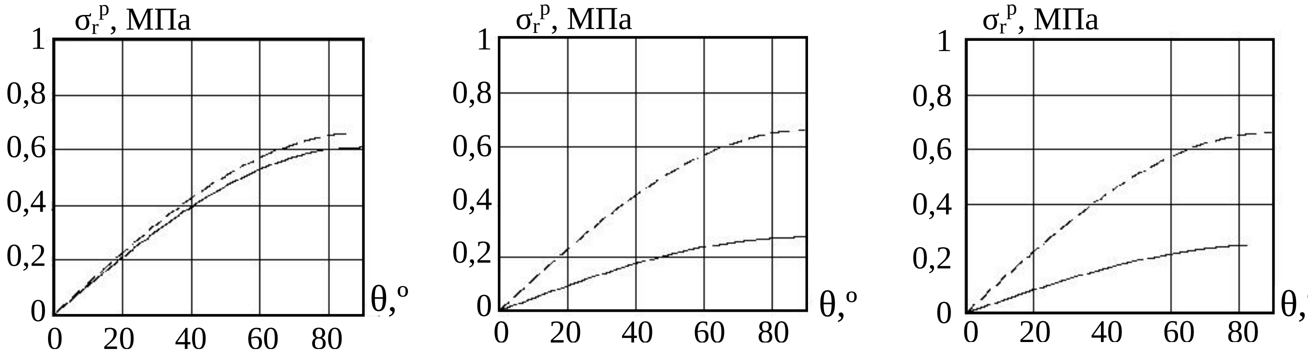
а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.8 - График изменения радиальных перемещений $\boldsymbol{u_r^P}$ по внешнему контуру бруса



а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.9 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе первого и второго слоев.



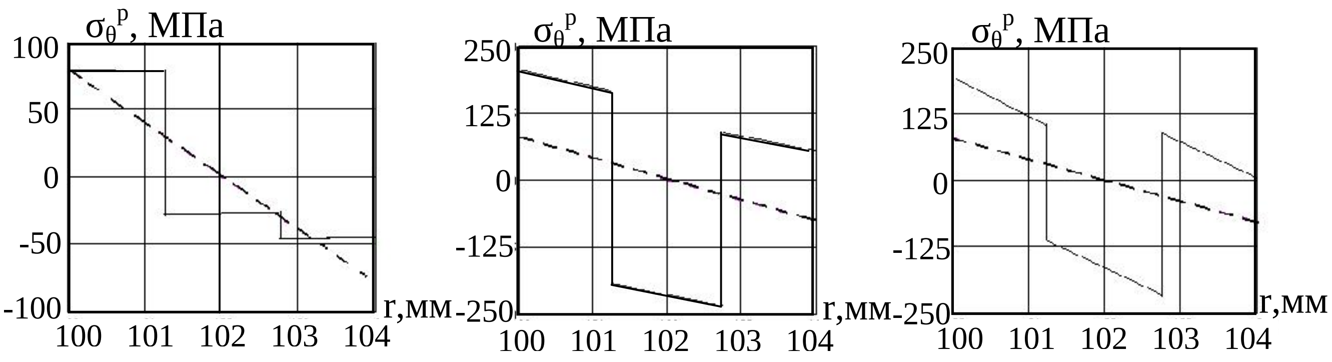
а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.10 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

по классической анизотропной теории. Так, например, тангенциальные напряжения сжатия на внешней поверхности бруса соответственно теории с учетом идеального контакта слоев равняются σ_θ^P = – 48,6 МПа, что в 1,5 раза меньше соответственных напряжений, полученных по классической теории. Как видно из рис. 3.7, б и 3.8, б учет неидеального контакта позволяет получить реальную картину напряженно деформированного состояния бруса при действии сосредоточенной силы, так напряжения и деформации, полученные как по дискретно-структурной так и по структурно-непрерывной теориям, практически совпадают при K =1,5 мм^3/Н. При увеличение же коэффициента K=4 мм^3/Н (рис. 3.7, в и 3.8, в) наблюдается существенный рост тангенциальных напряжений σ_θ^P (на внутренней поверхности бруса σ_θ^P с учетом неидеального контакта между слоями в 1,8 раз больше чем по классической анизотропной теории) и радиальных перемещений u_r^P, которые больше чем в два раза превышают значения, полученные по классической теории. Учет только кинематических (рис. 3.8, а) условий идеального жесткого контакта между слоями существенно снижает радиальные перемещения u_r^P в сравнении с классической анизотропной теорией. При анализе изменения напряжений σ_r^P на границах между слоями (рис. 3.9, 3.10) можно заметить, что при учете идеального контакта графики изменения этих напряжений практически совпадают с аналогичными результатами, полученными по анизотропной теории, а при учете неидеального контакта отмечается рост напряжений в 1,5-2 раза между первым и вторым слоем а также снижение значения σ_r^P практически в 3 раза между вторым и третьим слоем.

2. Симметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. Модуль упругости 1-го рода первого и третьего слоя в окружном направлении превышает аналогичный модуль упругости второго примерно в 1,5 раза. Первый и третий слои с кодом $[0^\circ{}_4/-15^\circ]$ имеет такие параметры – $E_\theta^{(1)} = 38800$ МПа, $E_r^{(1)} = 23400$МПа, $E_z^{(1)} = 19500$МПа, $\nu_{\theta r}^{(1)} = 0{,}405$, $\beta^{(1)} = 2{,}68$, $k^{(1)} = 1{,}288$; второй слой с кодом $[75^\circ/0/-75_2^\circ/0/75^\circ]$ соответственно $E_\theta^{(2)} = 26000$МПа, $E_r^{(2)} = 24000$МПа, $E_z^{(2)} = 29300$МПа, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0{,}392$, $\beta^{(2)} = 2{,}46$, $k^{(2)} = 1{,}04$.

Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 3.11 – 3.14, позволяет отметить следующее. Согласно дискретно-структурной теории (рис. 3.11) распределение напряжений σ_θ^P существенно отличается от результатов, полученных по классической анизотропной теории. Так, например, тангенциальные напряжения сжатия на внешней поверхности бруса соответственно теории с учетом идеального контакта слоев равняются σ_θ^P = – 39,6 МПа, что в 1,9 раза меньше соответственных напряжений, полученных по классической теории. При учете неидеального контакта тангенциальные напряжения σ_θ^P на внутренней стороне примерно в 2,5 раза больше чем по классической теории. Как видно из рис. 3.12, б, в учет неидеального контакта позволяет получить реальную картину деформированного состояния кривого бруса при действии сосредоточенной силы. Следует отметить, что



а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.11 - График изменения тангенциальных напряжений $\boldsymbol{\sigma_\theta^P}$ по толщине бруса в сечении с координатой **θ = π/2**

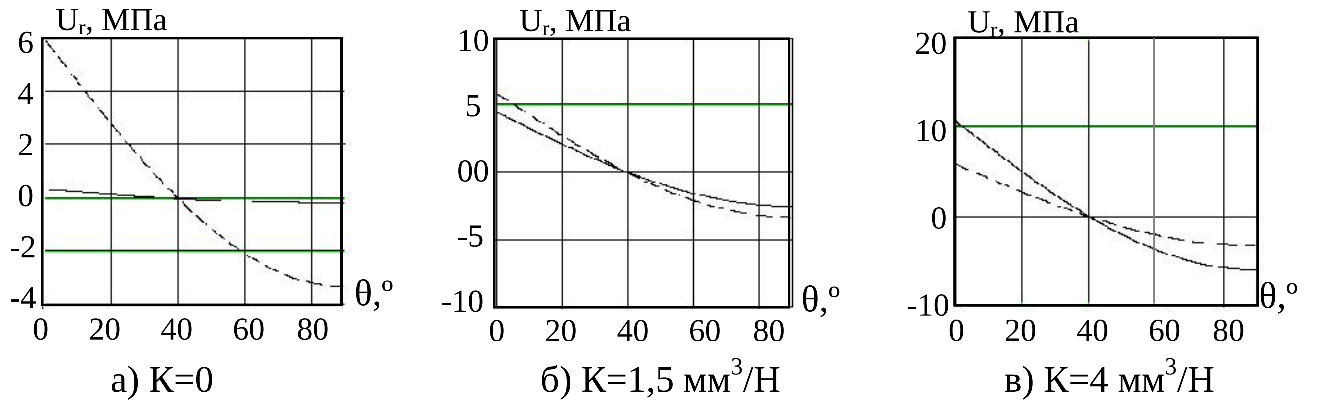


Рисунок 3.12 - График изменения радиальных перемещений $\mathbf{u_r^P}$ по внешнему контуру бруса

радиальные перемещения, полученные как по дискретной, так и по анизотропной теории, практически совпадают при K =1,5 мм^3/Н. При увеличении же коэффициента до K=4 мм^3/Н наблюдается существенный рост радиальных перемещений u_r^P, которые практически в два раза больше чем по классической теории. Учет только кинематических (рис. 3.12, а) условий идеального жесткого контакта между слоями существенно снижает радиальные перемещения u_r^P в сравнении с классической анизотропной теорией. При анализе изменения напряжений σ_r^P на границах между первым и вторым слоями (рис. 3.13) можно заметить, что при расчете согласно дискретно-структурной теории отмечается рост таких напряжений в 1,5-2 раза по сравнению с результатами, полученными по классической теории. На границе между вторым и третьим слоями (рис. 3.14)

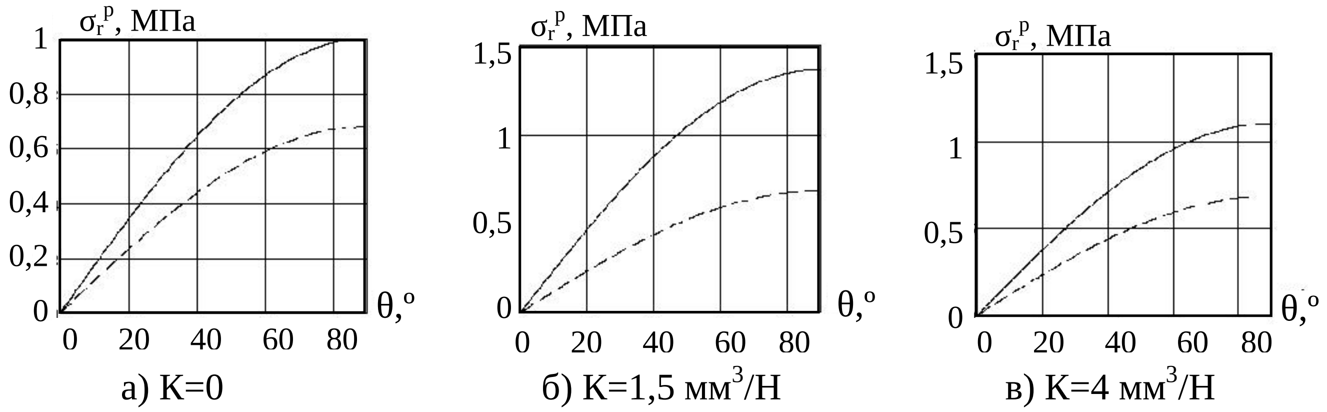
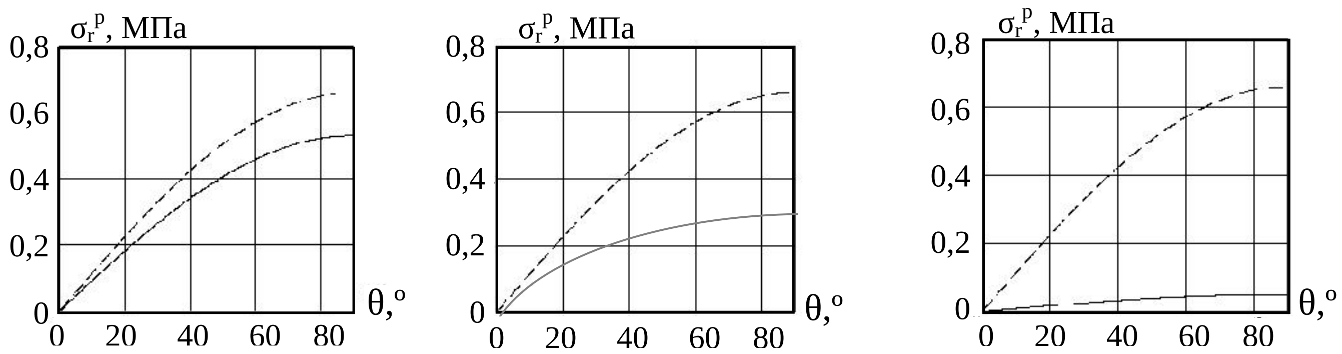


Рисунок 3.13 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе первого и второго слоев



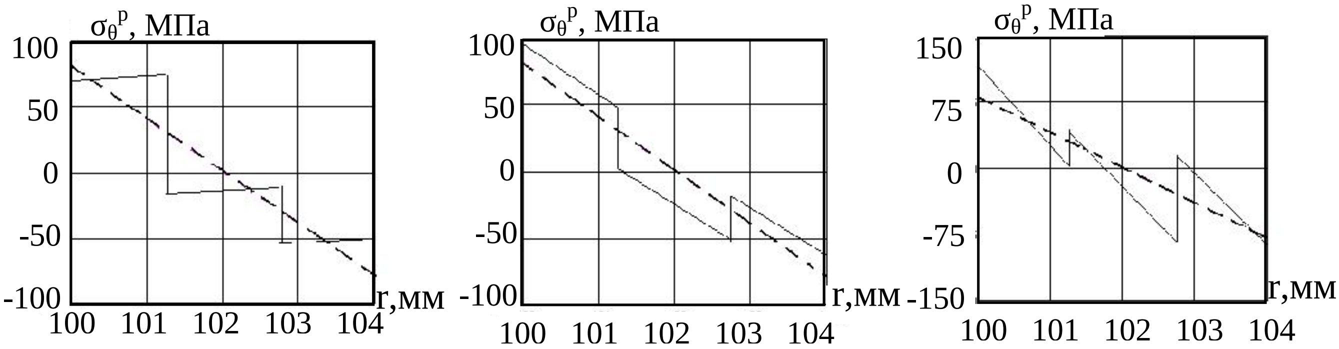
а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.14 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

вторым и третьим слоями (рис. 3.14) наблюдается незначительное снижение напряжений σ_r^P по сравнению с результатами классической теории. При неидеальном контакте напряжения σ_r^P между вторым и третьим слоями практически отсутствуют. Это говорит о том, что основную часть внешней нагрузки воспринимают на себя первый и второй слой.

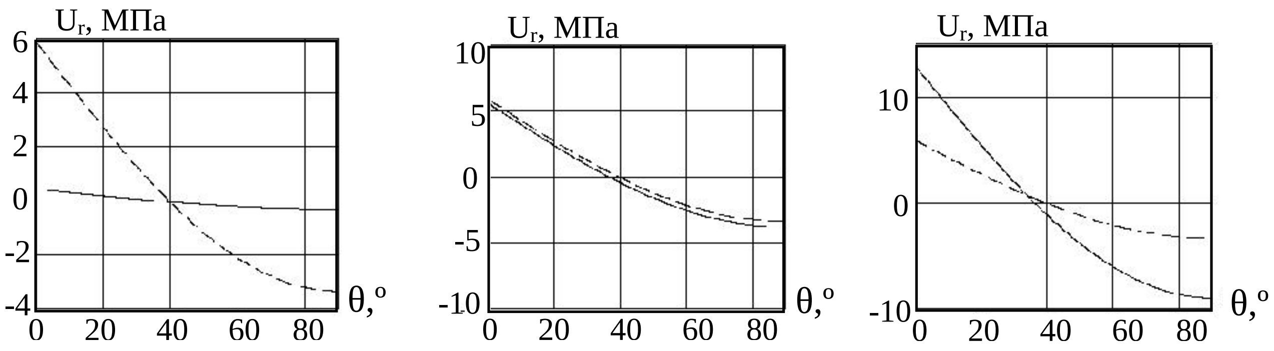
3. Несимметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. Модуль упругости 1-го рода первого, второго и третьего слоев в окружном направлении постепенно уменьшаются примерно в 1,3 раза. Первый слой с кодом $[0^\circ_4/-15^\circ]$ имеет такие параметры – $E_\theta^{(1)} = 38800\,\text{МПа}$, $E_r^{(1)} = 23400\text{МПа}$, $E_z^{(1)} = 19500\,\text{МПа}$, $\nu_{\theta r}^{(1)} = 0{,}405$, $\beta^{(1)} = 2{,}68$, $k^{(1)} = 1{,}288$; второй слой с кодом $[0^\circ_2/-75^\circ/75^\circ/0^\circ_2]$ – $E_\theta^{(2)} = 32800\text{МПа}$, $E_r^{(2)} = 23900\,\text{МПа}$, $E_z^{(2)} = 24800\,\text{МПа}$, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0{,}403$, $\beta^{(2)} = 2{,}59$, $k^{(2)} = 1{,}17$; третий слой с кодом $[0^\circ_3/-75^\circ_2]$ – $E_\theta^{(3)} = 31400\,\text{МПа}$, $E_r^{(3)} = 23900\text{МПа}$, $E_z^{(3)} = 25800\,\text{МПа}$, $\nu_{\theta r}^{(3)} = 0{,}401$, $\beta^{(3)} = 2{,}57$, $k^{(3)} = 1{,}46$.

Анализируя теоретические результаты для заданной структуры армирования бруса, представленные на рис. 3.15 – 3.18, можно отметить следующее. Тангенциальные напряжения σ_θ^P, полученные по дискретно-структурной теории и классической теории, отличаются не более чем на 50%. Такое же замечание относится и к напряжениям σ_r^P . Заметное расхождение результатов можно увидеть, сравнивая величины радиальных перемещения u_r^P .



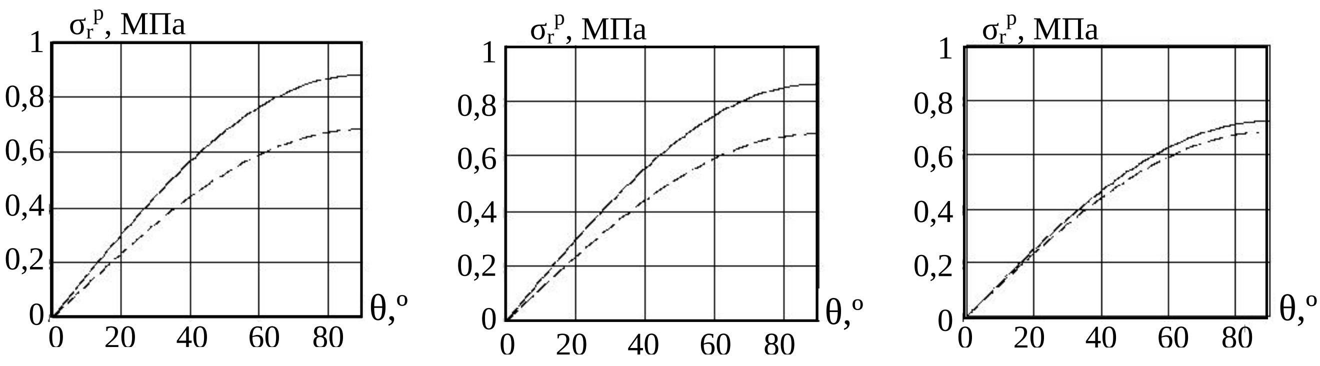
а) K=0 б) K=1,5 мм³/Н в) K=4 мм³/Н

Рисунок 3.15 - График изменения тангенциальных напряжений σ_θ^P по толщине бруса в сечении с координатой **θ = π/2**



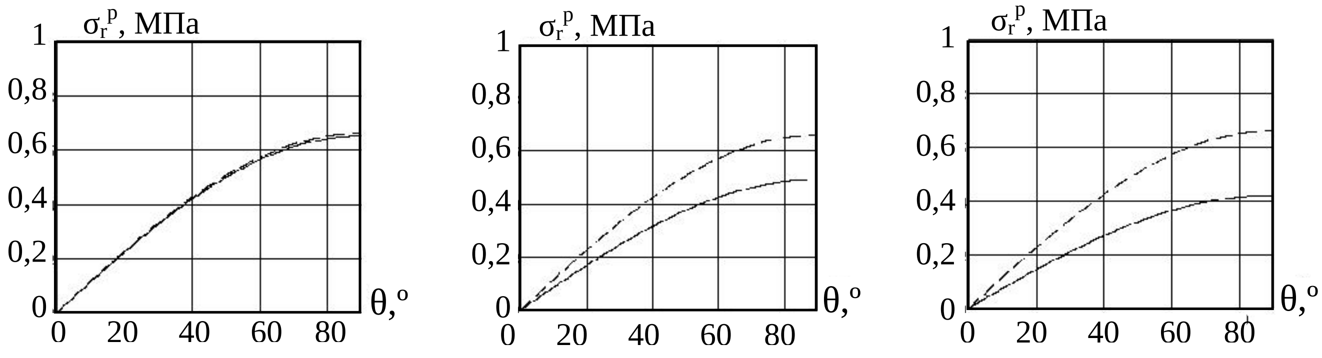
а) K=0 б) K=1,5 мм³/Н в) K=4 мм³/Н

Рисунок 3.16 - График изменения радиальных перемещений u_r^P по внешнему контуру бруса



а) K=0 б) K=1,5 мм³/Н в) K=4 мм³/Н

Рисунок 3.17 - График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе первого и второго слоев

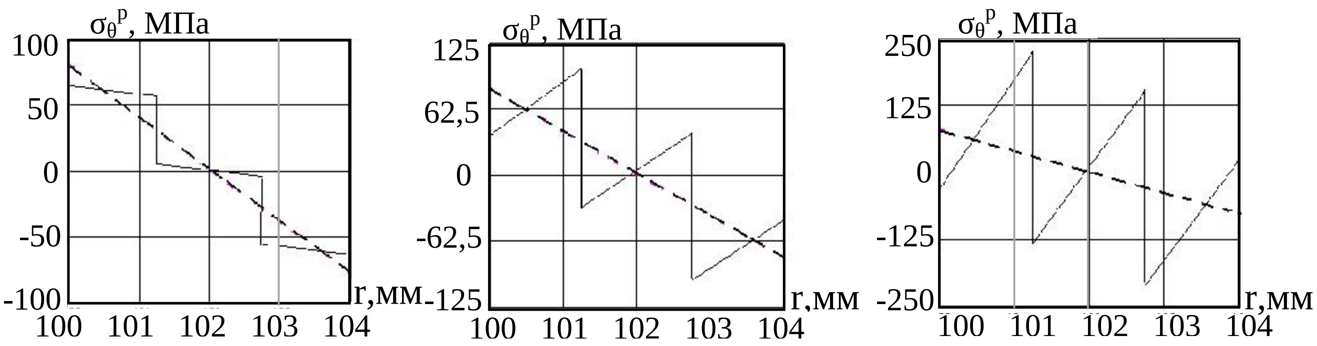


а) K=0 б) K=1,5 мм³/Н в) K=4 мм³/Н

Рисунок 3.18 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

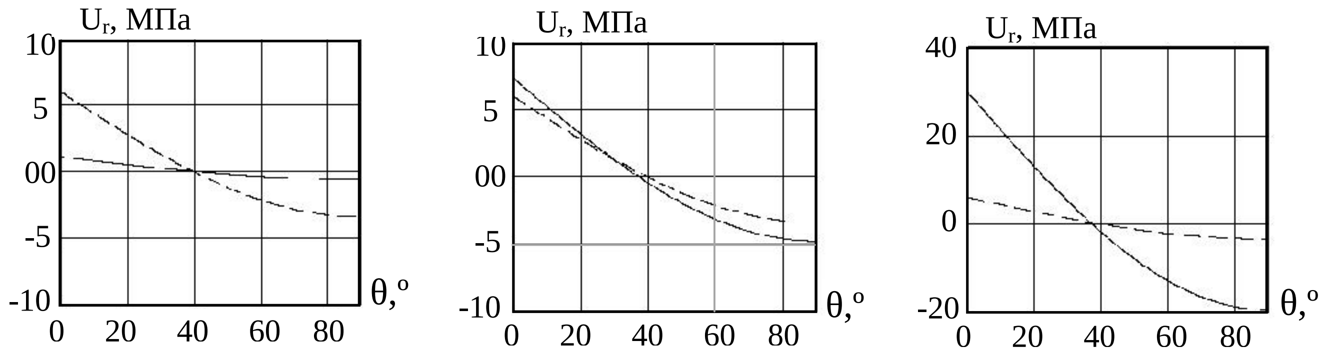
4. Симметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. Модуль упругости 1-го рода каждого слоя в окружном направлении одинаковы. При этом модуль упругости в продольном направлении превышает модуль упругости в окружном направлении в 1,7 раза. Первый и третий слои с кодом $[75^\circ_4/-75^\circ]$ и $[-75^\circ/75^\circ_4]$ имеют такие параметры – $E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(3)} = 19000$ МПа, $E_r^{(1)} = E_r^{(3)} = 23200$МПа, $E_z^{(1)} = E_z^{(3)} = 33000$МПа, $\nu_{\theta r}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(3)} = 0{,}382$, $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = 2{,}91$, $k^{(1)} = k^{(3)} = 0{,}91$; второй слой с кодом $[75^\circ_2/-75^\circ/75^\circ/-75^\circ_2]$ – $E_\theta^{(2)} = 19000$МПа, $E_r^{(2)} = 23200$ МПа, $E_z^{(2)} = 33000$МПа, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0{,}382$, $\beta^{(2)} = 2{,}91$, $k^{(2)} = 0{,}91$.

Сравнивая графики, приведенные на рис. 3.19 – 3.22, можно утверждать следующее. При неидеальном контакте между слоями (рис. 3.19) распределение напряжений σ_θ^P качественно отличается от результатов, полученных по классической теории. Наблюдается рост напряжений σ_θ^P (рис. 3.19,б, в) на границах контакта сопряженных слоев, что объясняется, прежде всего, существенным отличием модулей упругости 1-го рода в окружном и продольном направлении. При увеличение коэффициента K=4 мм³/Н (неидеальный контакт слоев) наблюдается существенный рост радиальных перемещений u_r^P, которые практически в 5 раз больше чем по классической теории. Эти результаты соответствуют характеру заданной структуры армирования бруса и подтверждают выводы о необходимости учета структурной нелинейности при расчетах тонкостенных конструкций из композиционных материалов.



а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

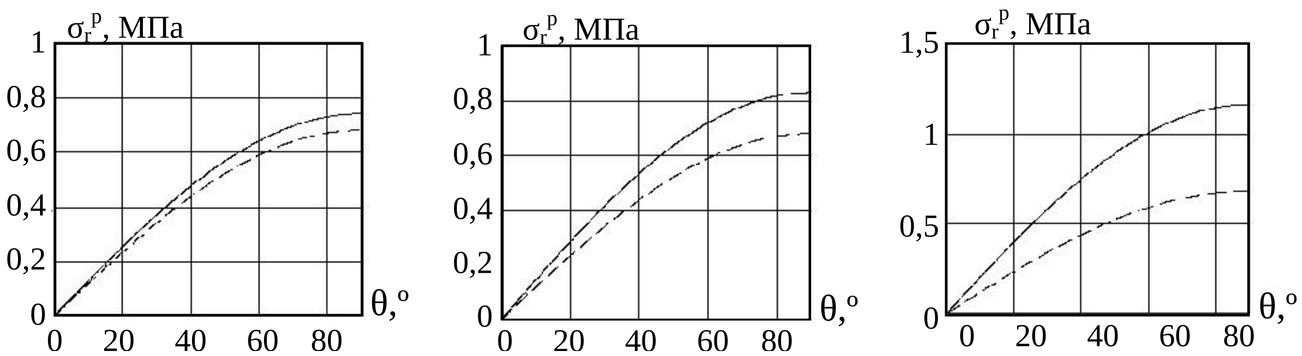
Рисунок 3.19 - График изменения тангенциальных напряжений $\boldsymbol{\sigma_\theta^P}$ по толщине бруса в сечении с координатой **θ = π/2**



а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

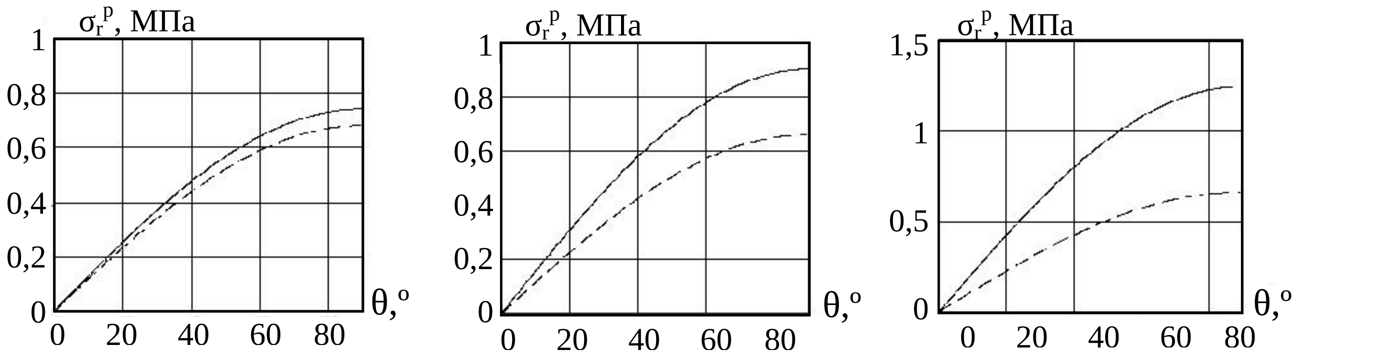
Рисунок 3.20 - График изменения радиальных перемещений $\boldsymbol{u_r^P}$ по внешнему контуру бруса

При анализе изменения напряжений σ_r^P на границах между слоями (рис. 3.21, 3.22) можно заметить, что при идеальном контакте наблюдается хорошая сходимость результатов, при K=1,5 мм^3/Н – небольшое расхождение результатов,



а) K=0 б) K=1,5 мм^3/Н в) K=4 мм^3/Н

Рисунок 3.21 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе первого и второго слоев



а) К=0 б) К=1,5 мм³/Н в) К=4 мм³/Н

Рисунок 3.22 - График изменения напряжений $\boldsymbol{\sigma_r^P}$ по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

при К=4мм³/Н рост напряжений, максимальное значение практически в 2 раза больше значения, полученного с помощью классической теории.

3.5. Выводы по третьей главе

В данной главе предложена методика определения упругих постоянных анизотропного материала, который состоит из набора армированных слоев. Рассмотрены десять вариантов многослойных анизотропных полых цилиндров с различной структурой армирования. Для каждого варианта армирования определено напряженное состояние цилиндра при действии внутреннего давления. Показано, что с увеличением толщины оболочки напряжения поперечного сдвига и нормальные напряжения в продольном направлении уменьшаются.

Проведенные на основе классической теории упругости анизотропного тела и дискретно-структурной теории исследования напряженно-деформированного состояния плоского полукруглого бруса, позволяют сделать следующий вывод. Модель многослойного бруса, когда допускается упругое проскальзывание сопряженных поверхностей соседних слоев относительно друг друга, качественно верно отражает реальную картину деформации такого конструктивного элемента. На примере полукруглого бруса при действии сосредоточенной силы показано, что при учете неидеального контакта слоев наблюдается рост радиальных перемещений. Эти результаты подтверждаются экспериментально, то есть наблюдается эффект так называемой структурной нелинейности. Кроме того, проведенные исследования показали, что из всех вариантов армирования бруса самым эффективным является вариант с симметричной структурой армирования слоев относительно срединной поверхности, так как при несимметричном армировании один из слоев практически не несет нагрузки. С помощью данной методики расчета зная, что слои меняют модуль упругости, можно фиксировать момент разрушения слоев и получить картину напряженно-деформированного состояния бруса для новых параметров его нагружения.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРУБ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА И ИХ ФЛАНЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Конструкционные преимущества ориентированных стеклопластиков общеизвестны. В первую очередь – это высокая удельная прочность в направлении армирования. Однако реализация этого основного преимущества натолкнулась на ряд трудностей, связанных со сравнительно низкой жесткостью стеклопластиков при поперечном сдвиге и трансверсальном отрыве. Сопротивление межслойному сдвигу и поперечному отрыву стеклопластиков соответственно равно $\tau_{xz}^{\pm}$ = 25÷50 МПа, G_{xz} = 2000÷2500 МПа и σ_{z}^{+} = 20÷55 МПа.

Потеря несущей способности стеклопластиковых пластин и оболочек при действии сжимающей нагрузки из-за слабого сопротивления поперечному отрыву и межслойному сдвигу происходит задолго до достижения напряжениями предельных значений. Указанные недостатки особенно заметны, если композиционный материал имеет различного рода дефекты структуры.

4.1. Технология изготовления и технические характеристики образцов из стеклопластика

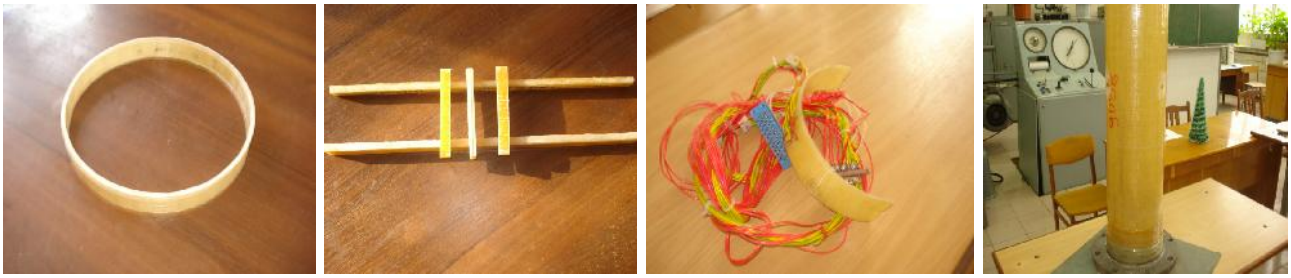
В качестве арматуры при изготовлении конструкций из стеклопластика используются высокомодульное стекловолокно или алюмоборосиликатное волокно. Прочность моноволокна находится в пределах от 3,4 ГПа до 4,5 ГПа. Стандартное отклонение составляет примерно ± 10 %. Основной причиной такого широкого разброса является наличие дефектов в волокнах и влияние на них атмосферной влаги.

Результаты испытаний на растяжение пучков или стренг волокна примерно на 20% ниже, чем средние значения для моноволокна. Это объясняется тем, что после разрыва отдельных волокон в пучке происходит существенный перегруз остальных волокон. Максимальное значение модуля упругости однонаправленных композитов находится в пределах 41,0 – 55,2 ГПа.

В качестве связующего широко применяются эпоксидные смолы марки

ЭД-20, а также полиэфирные смолы. Находят применение и другие типы эпоксидных смол: бромированные – с повышенным сопротивлением возгоранию; эластичные эпоксидные смолы с повышенным коэффициентом ударной вязкости и пластичности. В составе композиций с эпоксидной смолой дополнительно применяются различного рода отвердители, ускорители и пластификаторы. Наиболее широко применяемый отвердитель — метилнадикангидрид и триэтаноламин. В качестве пластификатора можно применять дибутилфталат. Прочность на разрыв отливок из эпоксидной смолы находится в пределах 55 – 130МПа, модуль упругости при растяжении - 2,8 – 4,2ГПа, предел прочности при изгибе — 120 МПа.

4.1.1. Материал и структура образцов. Результаты исследований, изложенные в данной главе, получены для четырех типов образцов (рис. 4.1), которые были изготовлены на основе стеклопластиковых труб, выпускаемых ООО «СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫЕ ТРУБЫ» г.Харьков: кольцевые образцы (рис.4.1, а); полосы прямоугольного сечения, вырезанные из стеклопластиковых труб в продольном направлении (рис. 4.1, б); криволинейные брусья круглой формы, полученные путем разрезания по диаметру кольцевых образцов (рис. 4.1, с); часть стеклопластиковой трубы со стальным фланцем на одном из ее торцов (рис. 4.1, д).



а) б) с) д)

Рисунок 4.1 - Типы образцов для экспериментальных исследований

Внутренний диаметр, исследуемых стеклопластиковых труб, составлял 200мм, наружный диаметр – 208мм. Стеклопластиковая труба включает 16 однонаправленных армированных слоев с заданной схемой укладки $[0^{\circ}_4/-75^{\circ}/0^{\circ}_2/-75^{\circ}/75^{\circ}/0^{\circ}_2/-75^{\circ}/0^{\circ}_4]$. Модули упругости $E_в$, сдвига $G_в$ и коэффициент Пуассона $\nu_в$ наматываемых алюмоборосиликатных лент, набранных из ровинга Е-600 (изготовлено в КНР), соответственно равны $E_в = 55000 МПа$, $G_в = 22000 МПа$, $\nu_в = 0{,}25$. Матрица стеклопластика – эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_м = 3550 МПа$, $G_м = 1270 МПа$, $\nu_м = 0{,}4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70% общего объема.

Стеклопластиковая труба изготавливалась методом намотки на разборную цилиндрическую оправку. Связующая композиция включала 100 массовых частей (мас.ч.) эпоксидной смолы Epicot 828, предварительно прогретой до температуры 70 ^{0}С. В приготовленный объем эпоксидной смолы добавляли 2 мас.ч. ускорителя УП-606/2 и 80 мас. ч. отвердителя МТНРА (изготовлено в КНР).

В качестве экспериментальных образцов 1-го типа для определения модуля упругости E_θ и предела прочности σ_θ^+ в окружном направлении при растяжении из стеклопластиковой трубы согласно ГОСТ 25.603-82 были вырезаны пять колец. Образцы 2-го типа для определения модуля упругости E_Z и предела прочности $\pm_Z^н$ в продольном направлении при растяжении были вырезаны из стеклопластиковой трубы в форме полос прямоугольного сечения ГОСТ 25.601-80. Геометрические размеры испытываемых образцов приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 - Геометрические размеры образцов 1-го и 2-го типов

№ типоразмера	Количество образцов	Ширина кольца, мм	Коэффициент анизотропии K	Внутренний диаметр образца, мм	Толщина стенки, мм	Размеры полосы, мм			Площадь поперечного сечения, см^2	
						длина	Ширина	толщина	кольца	полосы
1	5	50,0 ї 0,1	1,5	200,0 ї 0,1	4,0 ї 0,1	–	–	–	25,62	–
2	5	–	1,5	–	–	250,0	12,0 ї 0,1	4,0 ї 0,1	–	0,48

4.1.2. Технические характеристики стеклопластика. Для определения технических постоянных стеклопластика предлагается следующая теоретико-экспериментальная методика. Вначале, согласно ГОСТ 25.603 – 82 и ГОСТ 25.601-80, определяется модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении образцов из стеклопластика. Проведенные механические испытания позволяют утверждать, что материал рассматриваемых пластинок можно классифицировать как анизотропный материал с одной плоскостью упругой симметрии.

Определение деформаций двух партий образцов проводилась методом тензометрирования при помощи разрывной машины Р-20 в сертифицированной лаборатории Сумского государственного университета.

Образец нагружают при помощи специального приспособления (рис.4.2) Разница между внутренним диаметром кольцевого образца и диаметром полудисков в сборе не должна превышать 0,4 мм; шероховатость опорных поверхностей полудисков должна быть не более 0,63 мкм. Крепление приспособления в испытательной машине должно обеспечивать самоцентрирование, то есть направление приложенной растягивающей нагрузки должно быть перпендикулярным к плоскости разъема полудисков и проходить через центр испытуемого кольца. Конструктивное оформление приспособления может быть различным.

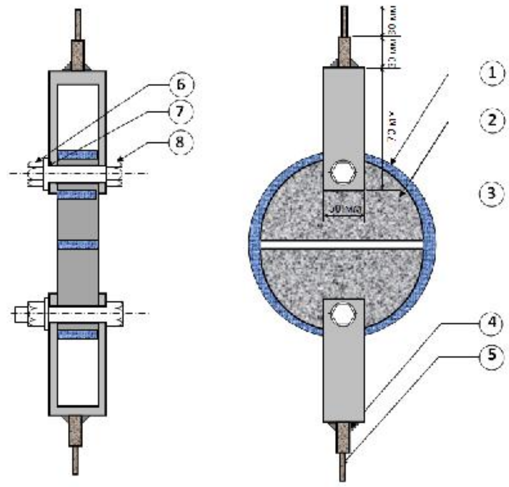


Рисунок 4.2 - Специальное приспособление для испытания кольцевых образцов на растяжение

Конструкция приспособления для испытания на растяжения кольцевых образцов приведена на рис. 4.2 и состоит из двух тяг 4 с двумя стальными полудисками 2, фиксируемых стальными пальцами 7, и кольцевого образца 3.

По результатам измерений были получены усредненные значения напряжений и деформаций, а также доверительные интервалы на основе критерия Стьюдента с заданной вероятностью $1-\alpha=0{,}95$. При этом погрешность аппроксимации s экспериментальной прямой: $\varepsilon=\sigma/E$ при растяжении стеклопластика и значения модулей упругости каждого типа образцов приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 - Экспериментально – теоретические значения упругих характеристик стеклопластиков

№ типо-размера	Результаты эксперимента		Экспериментально – теоретические значения			
	$E_i^Э$, МПа	$S, \%$	E_{ii}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
1	$E_\theta^Э=36050$	0,91	$E_z=23800$ $E_\theta=35500$ $E_r=22900$	$G_{\theta z}=7340$ $G_{rz}=4870$ $G_{r\theta}=6760$	$\nu_{z\theta}=0{,}069$ $\nu_{zr}=0{,}399$ $\nu_{\theta r}=0{,}406$	$\nu_{\theta z}=0{,}107$ $\nu_{rz}=0{,}415$ $\nu_{r\theta}=0{,}272$
2	$E_z^Э=24100$	0,92				

Остальные экспериментально-теоретические значения механические характеристика стеклопластика (таблица 4.2) определялись интегрально для всего пакета слоев пластинки по методике, изложенной в разделе 3, при помощи зависимостей (3.1) – (3.16).

Для определения предельных напряжений образцы каждой серии доводили до разрушения при испытании на растяжение (ГОСТ 25.601 – 80), сжатие (ГОСТ 25.602 – 80). Считая, что определенные значения предельных напряжений представляют собой нормально распределенную генеральную совокупность параметров, в таблице 4.3 приведены доверительные интервалы среднего значения предельных напряжений $\pm a_{\sigma_{ср}}$ при доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}95$.

Таблица 4.3 - Экспериментальные значения предельных напряжений стеклопластиков

$\pm^{H}_{-}$, МПа	$\pm a_{\sigma_{ср}}$, МПа	$\pm^{H}_{z}$, МПа	$\pm a_{\sigma_{ср}}$, МПа	$\pm^{J}_{-}$, МПа	$\pm a_{\sigma_{ср}}$, МПа	$\pm^{J}_{z}$, МПа	$\pm a_{\sigma_{ср}}$, МПа
410	5	240	6	360	7	190	5

Как отмечается в работах [116] разброс экспериментальных значений предельных разрушающих напряжений поперечного сдвига и обжатия достаточно большой, что в первую очередь связано с особенностью строения армированных пластиков, трудоемкостью и сложностью проведения эксперимента. Поэтому для проведения дальнейших исследований были приняты средние значения $\sigma_{33}^{-} = 90\text{МПа}$, $\sigma_{33}^{+} = 16\text{МПа}$, $\sigma_{13}^{-} = \sigma_{13}^{+} = \sigma_{23}^{-} = \sigma_{23}^{+} = 30\text{МПа}$, $\sigma_{12}^{-} = \sigma_{12}^{+} = 50\text{МПа}$ на основе экспериментальных данных, которые были приведены в работе [208] для стеклопластиков похожей структуры.

4.2. Нагружение образцов

4.2.1. Изгиб криволинейного бруса из стеклопластика. Для проведения экспериментальных исследований была разработана и изготовлена установка, общий вид которой показана на рис. 4.3. Растяжение бруса противоположно направленными сосредоточенными поперечными силами P, приложенными к его торцам, осуществлялось при помощи экспериментальной установки. Она включает разрывную машину Р–0.5, два металлических захвата торцов бруса, два индикатора часового типа с точностью до 0,01 мм для измерения радиальных перемещений и измерительную систему СИИТ-3.

Рисунок 4.3 - Общий вид установки для испытания криволинейного бруса на изгиб

4.2.2. Нагружение стеклопластиковой трубы внутренним давлением. Схема установки для испытания образцов 4-го типа под действием внутреннего давления показана на рис. 4.4. Общий вид установки приведен на рис. 4.5.

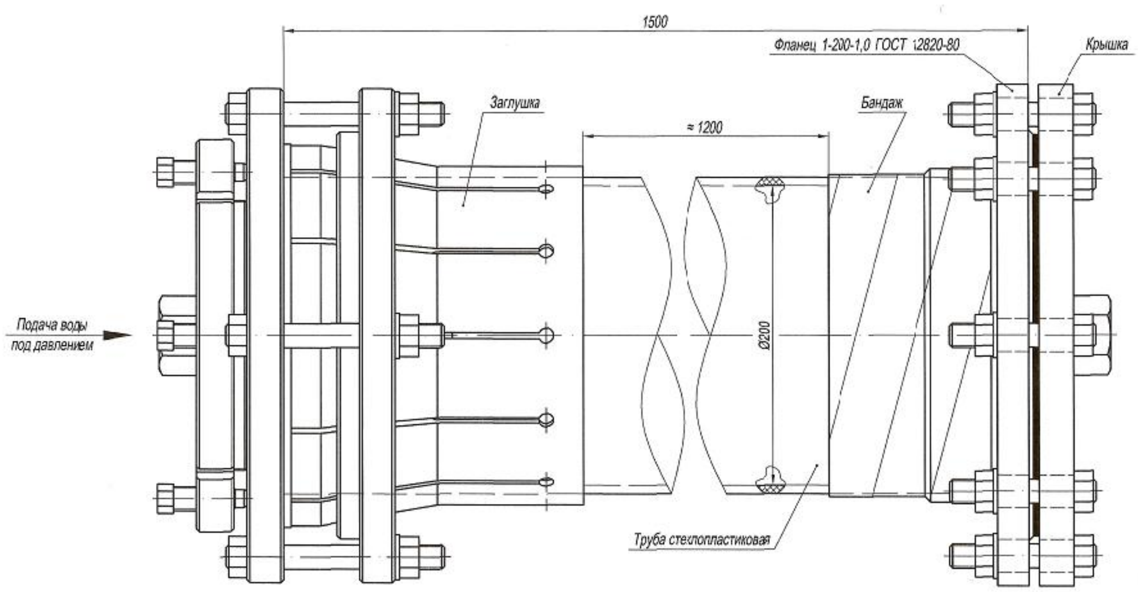


Рисунок 4.4 - Схема установки для проведения гидростатических испытаний

Рисунок 4.5 - Общий вид установки для проведения гидростатических испытаний

Испытательная установка, созданная на заводе ООО «СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫЕ ТРУБЫ» г. Харьков, включает насосную станцию с возможностью создавать любое заданное давление в диапазоне (0 – 25,0 МПа). Вода подаётся через специальный штуцер, размещенный в одной из заглушек, внутрь стеклопластиковой трубы. Для защиты от брызг воды во время возможного разрушения образца в процессе испытания, объект помещён в специальный наклонный короб. Наклон короба обеспечивает быстрый слив воды при внештатных ситуациях и в конце испытаний.

Заглушка состоит из 3-х стальных цилиндров с канавками, в которые помещены 2 тороидальные резиновые прокладки. Эти цилиндры жестко прикреплены к круглому стальному диску диаметром 300мм и толщиной 20мм Диск имеет 4 проходные отверстия, через которые проходят болты, прижимающие тороидальные прокладки до полной герметизации испытуемого объекта.

Кроме того, по периметру диска имеется 16 отверстий диаметром 16 мм для болтовых соединений разрезного многолепесткового конуса, накладываемого снаружи испытуемого цилиндра. Таким образом, усилие передаётся от диска на специальное кольцо, которое сжимает разрезной многолепестковый конус, обжимающий испытываемый цилиндр снаружи и тем самым создает необходимое усилие, противодействующего выталкивающему действию испытательной среды (воды).

С другого торца образец крепится к испытательной установке при помощи стального фланца. Размеры стального фланца указаны на рис. 5.15.

Объект испытаний: стеклопластиковая труба диаметром 200мм, толщиной стенки 4мм и длиной – 1200мм.

4.3. Измерение и регистрация деформаций и напряжений

Для измерения деформаций использовались тензорезисторы КФ4П1-3-200 с базой 3мм, 5мм и 10мм. Розетки состояли из двух тензодатчиков. Точки наклейки тензорезисторов на испытуемые пластинки показаны на рис. 4.6 – 4.11. Среднее значение коэффициента тензочуствительности равно – $K = 2 \cdot 10^{-6}$.

4.3.1. Кольцевые образцы. На рис.4.7, 4.8 показана схема контакта стальных полудисков с кольцевым образцом из стеклопластика и приведен общий вид испытательной установки, при помощи которой кольцо растягивается двумя сосредоточенными и противоположно направленными внешними силами. Испытываемое кольцо представляет собой три раза статически неопределимую систему.

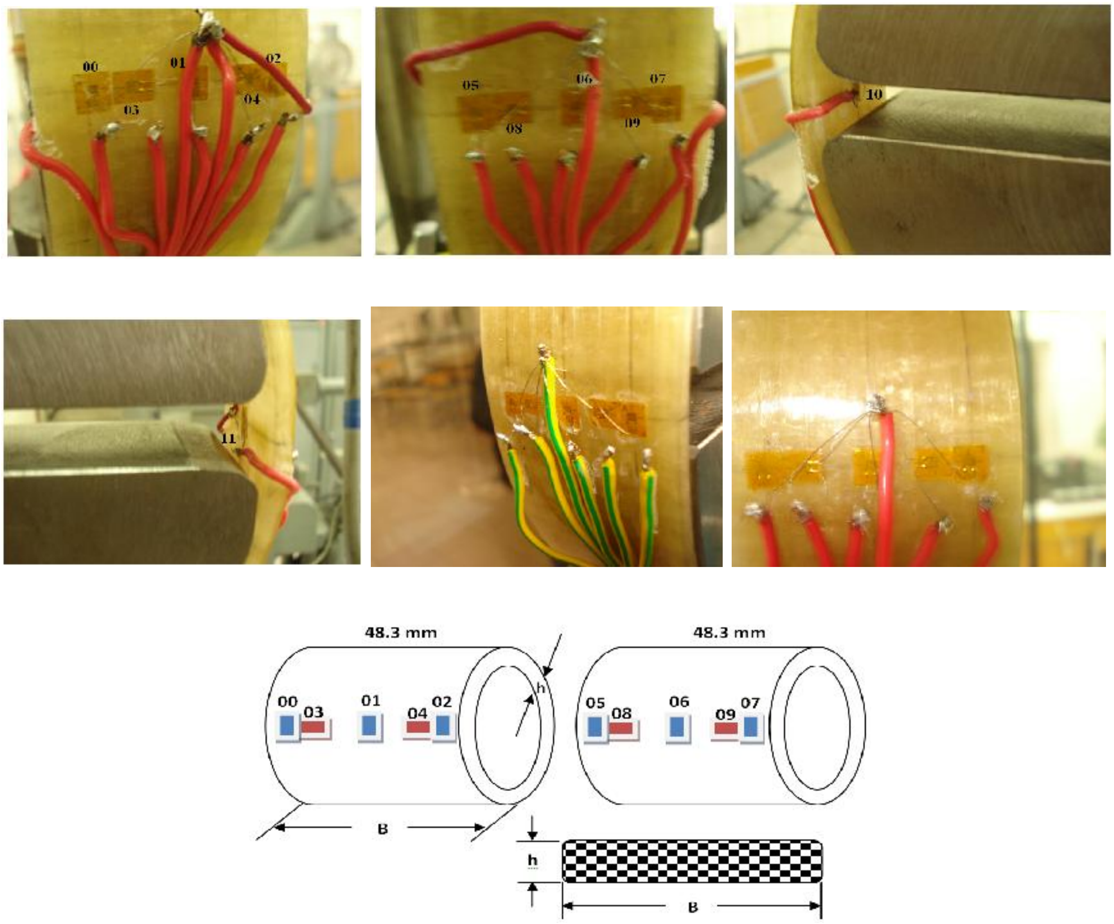


Рисунок 4.6 -Точки наклейки тензорезисторов на кольцевые образцы

Рисунок 4.7 - Схема контакта стальных полудисков и колцевого образца

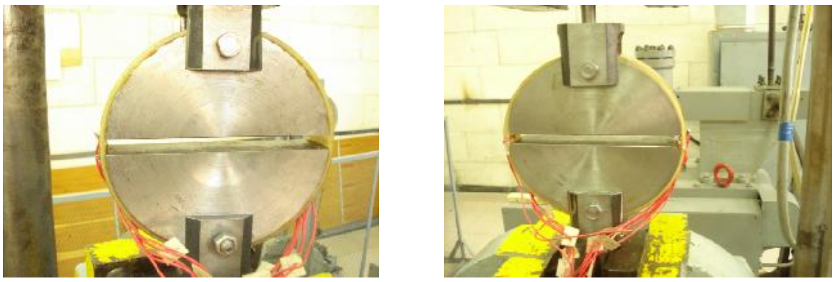
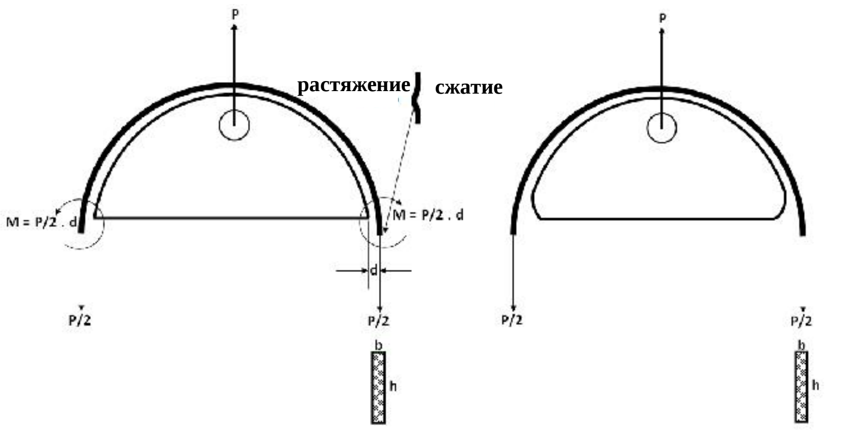


Рисунок 4.8 - Схема нагружения кольцевого образца

Расчетная схема рассматриваемого кольца дана на рис. 4.9. представлен анализ сил и моментов в модели 1 и модели 2. Для расчетов будем использовать следующее уравнение: $\pm \, - \, = \frac{P}{2\,A} \pm \frac{M\;.C}{I}$.



а) б)

Ррисунок 4.9 - Эквивалентная система статически

Как видно, в рассматриваемых поперечных сечения кольца возникают продольные усилия равные половине внешней растягивающей силе и неизвестные изгибающие моменты. Определение неизвестных моментов M в анизотропном криволинейном брусе представляет собой достаточно сложную математическую задачу. Поэтому предлагается простой алгоритм определения модуля упругости кольца в окружном направлении.

В точках внутренней и внешней поверхности кольца (рис.4.6) приклеены тензорезисторы для измерения деформаций в окружном направлении. Величину напряжений, которые возникают в точках наклейки тензорезисторов, можно найти при помощи таких уравнений:

$$\sigma_\theta^+ = E_\theta \varepsilon^+ = \frac{P}{2A} + \frac{M}{W}, \qquad \sigma_\theta^- = E_\theta \varepsilon^- = \frac{P}{2A} - \frac{M}{W}$$

где E_θ– неизвестный модуль упругости, $W = \frac{bh^2}{6}$– момент сопротивления поперечного сечения рассматриваемого кольца, ε^+, ε^- –величины деформаций в точках внутренней и наружной поверхностей кольца.

Складывая правые и левые части этих уравнений, получим выражение для определения модуля упругости E_θ:

$$E_\theta = \frac{P}{A(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)} \qquad (4.1)$$

4.3.2. Криволинейный брус в форме полукруга.

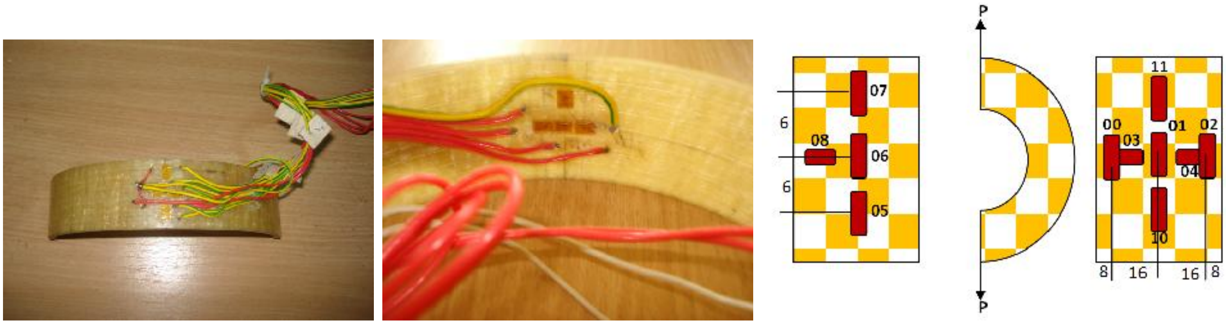


Рисунок 4.10 - Точки наклейки тензорезисторовна образцы 3-го типа

Наклейка тензорезисторов осуществлялась согласно инструкции по наклейке АЖВ2.782.001 ТО. Для измерения выходных сигналов тензорезисторов и представления отчетов в цифровом виде использовалась измерительная система СИИТ-3 Руководство по эксплуатации 4Т2.739.004 РЭ. К испытаниям было подготовлено по четыре образца каждой серии. В качестве экспериментально результата принималось усредненная величина четырех измеренных значений.

4.3.3.Стеклопластиковая труба сфланцем на одном из торцов.

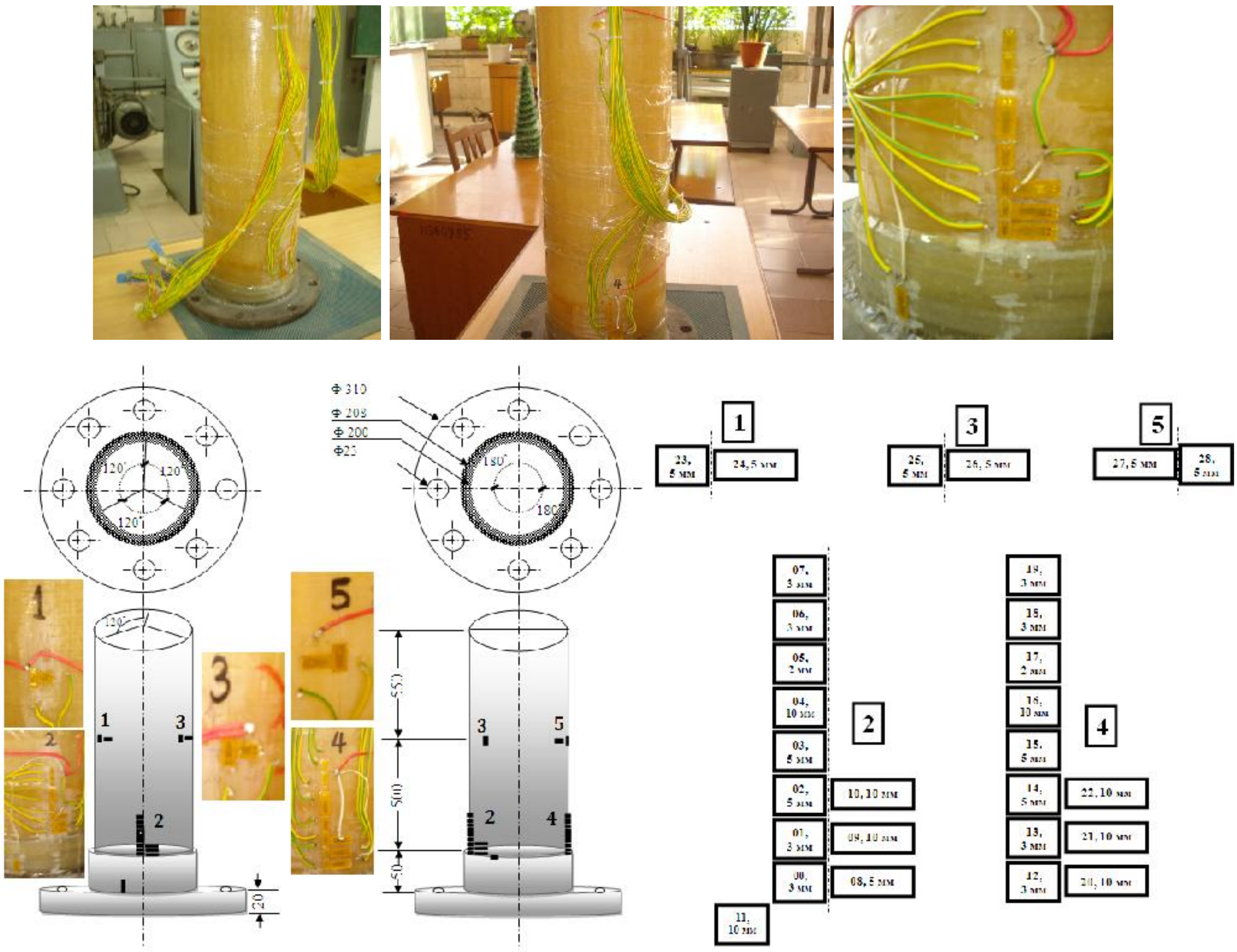


Рисунок 4.11 - Точки наклейки тензорезисторов стеклопластиковую трубу

4.4. Изгиб криволинейного бруса полукруглой формы

Испытывались образцы 3-го типа (рис. 4.1, с), выполненные в виде криволинейного бруса полукруглой формы. Размеры поперечного сечения бруса – h = 48 мм, t = 4мм; радиусы внутренней и внешней поверхностей бруса – a = 100 мм, b = 104 мм. Стеклопластик включает 16 однонаправленных армированных слоев с заданной схемой укладки $[0^{\circ}_4/-75^{\circ}/0^{\circ}_2/-75^{\circ}/75^{\circ}/0^{\circ}_2/-75^{\circ}/0^{\circ}_4]$. Остальные физико-механические характеристики стеклопластика приведены в подразделе 4.1.2.

Экспериментальные образцы полукруглых криволинейных брусьев получены путем разрезания стеклопластикового кольца на две половины. Схема наклейки тензорезисторов на внутреннюю и внешнюю поверхности бруса показана на рис. 4.7. Растяжение бруса противоположно направленными сосредоточенными поперечными силами P, приложенными к его торцам, осуществлялось при помощи экспериментальной установки. Общий вид установки показан на рис. 4.3. Теоретические и экспериментальные результаты при силе P = 100Н приведены в табл. 4.4.

Анализ результатов табл. 4.4 показывает, что наиболее адекватно реальную картину напряженно деформированного состояния рассматриваемого криволинейного бруса отражает дискретно-структурная теория с учетом неидеального контакта слоев.

Таблица 4.4 - Напряжения и перемещения в криволинейном брусе

Напряжения и перемещения	σ_r^{1-2}, Мпа	σ_r^{2-3}, МПа	$\sigma_\theta^{в}$, МПа	$\sigma_\theta^{н}$, МПа	u_r, мм $\theta = \pi/2$	u_θ, мм $\theta = 0$
Классическая теория	0,68	0,66	81,3	- 78,1	-3,55	5,93
ANSYS теория	0,66	0,58	76,8	-73,9	-3,32	4,04
Дискретно структурная теория (идеальный контакт)	0,92	0,61	72,5	- 47,8	- 0,31	0,52
Дискретно структурная теория (неидеальный контакт K=1,5 мм^3/Н)	1,05	0,27	114,7	- 49,9	- 3,62	6,62
искретно структурная теория (неидеальный контакт K=4,0 мм^3/Н)	0,83	0,25	123,4	- 79.3	- 8,23	14,99
Результаты эксперимента	–	–	89,4	-62,1	- 8,6	13,4

4.5. Экспериментальные исследования стеклопластиковой трубы на действие внутреннего давления

Объект испытаний: композитный цилиндр диаметром 200мм, толщина стенки 4мм, длина - 1200мм. Шаг нагружения – 0,5 МПа.

При давлении $p^*_{IЭ} = 3{,}5МПа$ произошло разрушение стеклопластика в зоне контакта стеклопластиковой оболочки и стального фланца. После разрушения фланцевого соединения было принято решение: срезать фланец и продолжить испытания до разрушения цилиндра (рис.4.12).

Вместо срезанного фланца установили еще одну заглушку, описанную выше, предварительно убрав тензорезисторы и провода к ним, регистрировавшие деформации в районе фланца. Нагружение, как и прежде, проводили с шагом $\Delta p = 0{,}5МПа$.

Начиная с давления $p = 4{,}0МПа$, на каждой ступени нагружения слышался характерный треск, которым сопровождается образование микротрещин в связующей матрице. При давлении $p^*_{IIЭ} = 14{,}9МПа$ произошло разрушение стеклопластиковой трубы. Величина прогиба w в точке 3 цилиндра отличается от теоретических значений, найденных по методике, приведенной в подразделе 5.4.4, не более чем на 12%.

Рисунок 4.12 - Картина разрушение стеклопластика в зоне фланца

Отдельно, следует отметить, что в случае безмоментного плоского напряженного состояния первая и третья расчетная модель многослойной трансверсально изотропной оболочки дают практически одинаковый результат, который достаточно точно совпадает с величиной окружных $\sigma_\theta = \frac{pr}{h}$ и продольных $\sigma_z = \frac{pr}{2h}$ напряжений. Зная эти напряжения и деформации в точках 1, 3, 5 (рис.4.11) наклейки тензорезисторов, несложно экспериментально найти осредненные значения модулей упругости $E_{\theta}^{э}$, $E_{z}^{э}$, окончательные значения которых приведены в таблице 4.2. На рис. 4.13 показаны экспериментальные результаты напряженного состояния стеклопластиковой трубы в районе фланцевого соединения. Эти результаты отличаются от теоретических, представленных в виде графиков в подразделе 5.4.4, менее чем на 10%.

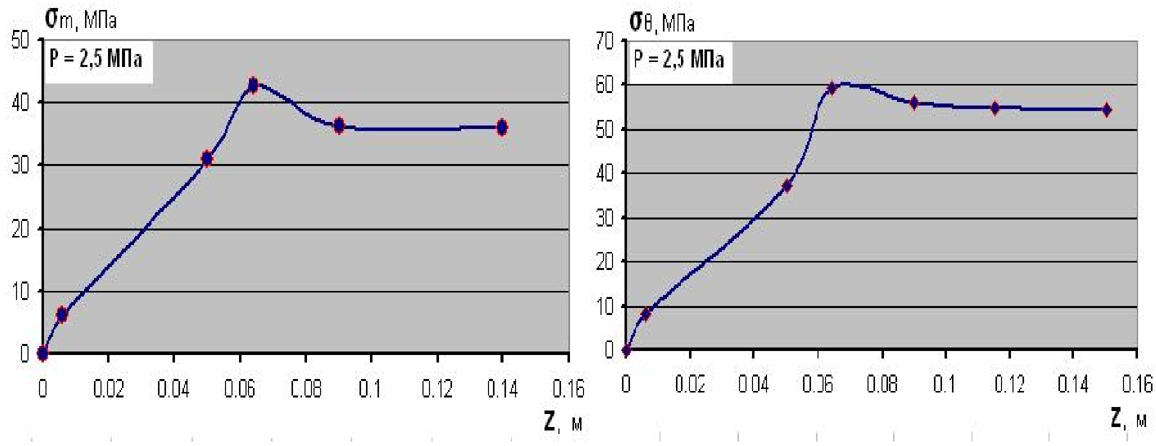


Рисунок 4.13 - Напряженное состояние стеклопластикоой трубы в зоне фланцевого соединения

В таблице 4.5 показаны экспериментально полученные значения модуля упругости E_{θ} стеклопластиковой трубы при гидростатическом нагружении.

Таблица 4.5 - Экспериментальное определение упругих свойств

Количество Эксперимент ов	Нагрузка (МПа)	Максимальна я нагрузка (МПа)	Количество тензодатчика	Модуль упругости, E (МПа)	Средний модуль упругости, E (МПа)
1	0,5	3	6	$3{,}984.10^{4}$	
2	0,5	3	6	$4{,}034.10^{4}$	
3	0,5	3	6	$3{,}539.10^{4}$	$3{,}632.10^{4}$
4	0,5	6,5	6	$3{,}333.10^{4}$	
5	1	13	6	$3{,}269.10^{4}$	

4.6. Выводы по четвертой главе

В четвертой главе разработана экспериментальная методика для проверки достоверности теоретических результатов и оценки погрешностей, которые вносят различного рода допущения в расчеты на прочность тонкостенных элементов с межслойными дефектами. Приведены физико-механические характеристики основных компонент стеклопластика – стекловолокна и вяжущих материалов, дано краткое описание технологии изготовления образцов.

На основе методов математической статистики определены доверительные интервалы экспериментально полученных средних значений модуля упругости и предела прочности стеклопластика при растяжении и сжатии, предела прочности стеклопластика при изгибе.

Созданы две экспериментальные установки, которые были разработаны и изготовлены для проведения испытаний кольцевых образцов, криволинейных брусьев полукруглой формы и труб из стеклопластика на действие равномерно распределенного давления. Разработана методика проведения экспериментальных исследований. Конструкции экспериментальных установок позволяют производить замеры прогибов образцов с помощью индикаторов часового типа с точностью измерений до $0{,}5\cdot10^{-5}$м. Измерение относительных деформаций проводится методом тензометрирования.

Предложена экспериментально-теоретическая методика для определения физико-механических характеристик стеклопластиковых труб.

5. МЕТОДИКА РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С МЕЖСЛОЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

Характерным повреждением слоистых композитов с продольно-поперечной и квазиизотропной укладкой слоев типа $[0, 90]_s$, $[0, 90, \pm 45]_S$ при растяжении является образование массива трещин в матрице слоев, ориентированных под углом к направлению действия нагрузки. Как правило, образование сетки трещин происходит задолго до разрушения конструкции в целом. При этом наблюдаются снижение жесткости композиционного материала, разрывы волокон, инициируемые трещинами в матрице, что, в свою очередь, снижает несущую способность и срок службы конструкций из слоистых материалов.

Концентрация межслойных нормальных и касательных напряжений вблизи трещин на границе смежных слоев инициирует расслоение в прилегающих областях. Прогнозирование момента начала расслоения осуществляется, как правило, путем определения всех компонент трехмерного напряженного состояния в рассматриваемой области слоистого композита.

Таким образом, расслоение представляет собой наиболее опасный вид разрушения при прогнозировании несущей способности конструкций из композиционных материалов. Тем не менее, как это отмечено в ряде известных публикаций по этой проблеме [212], условия возникновения расслоения и связанный с этим процесс перераспределения напряжений исследованы недостаточно.

5.1. Напряжённое состояние слоистых композитов с межслойными дефектами структуры материала

Высокая прочность в направлении армирования и низкая сопротивляемость поперечному сдвигу и поперечному отрыву являются характерными особенностями композиционных материалов слоистой структуры.

Однонаправленный слой является конструктивным элементом многослойных пластин и оболочек. Прочность композита как в процессе эксплуатации, так и в момент создания в значительной степени зависит от уровня нормальных напряжений в трансверсальном направлении и касательных напряжений межслоевого сдвига. Кроме того, прочность однонаправленного слоя в направлении армирования значительно выше его прочности в направлении, перпендикулярном направлению армирования.

Так, например, одноосное растяжение трехслойного материала с крайними слоями, армированными в направлении растяжения и со средним слоем, армированным в ортогональном направлении (рис. 5.1 а), рассмотрено в [213]. Каждый слой представляет собой однонаправленно армированный материал.

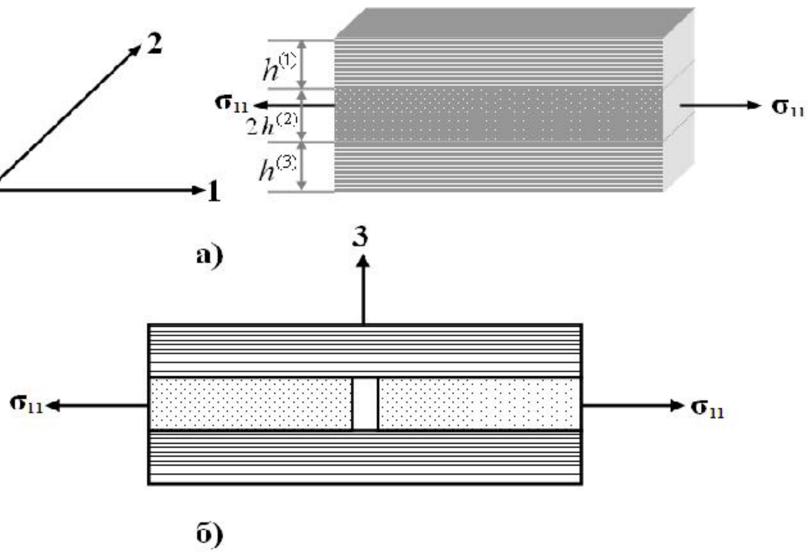


Рисунок 5.1 - Структура трехслойного композиционного материала

Считалось, что толщины внешних слоев одинаковы, т.е. $h^{(1)} = h^{(3)}$, и деформации ε_{11}, ε_{22} для всех слоев одинаковы. В случае плоской деформации, когда $\varepsilon_{22} = 0$, напряжения и деформации в слоях в направлении оси OX находим из условия равновесия

$$2\left(\sigma_{11}^{(1)}\overline{h}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)}\overline{h}^{(2)}\right) = \sigma_{11}$$

по следующим зависимостям:

$$\sigma_{11}^{(i)} = \frac{\sigma_{11} E_i^{(i)}}{2\left(E_1^{(1)}\bar{h}^{(1)} + E_2^{(2)}\bar{h}^{(2)}\right)} \qquad (i = 1,2), \tag{5.1}$$

$$\varepsilon_{11}^{(i)} = \frac{\sigma_{11}}{2\left(E_1^{(1)}\bar{h}^{(1)} + E_2^{(2)}\bar{h}^{(2)}\right)}, \qquad \varepsilon_{22}^{(i)} = 0 \quad (i = 1,2). \tag{5.2}$$

Здесь $E_1^{(1)}$, $E_2^{(2)}$ – модули упругости однонаправленного материала соответственно в продольном и поперечном направлениях; $\bar{h}^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{2(h^{(1)} + h^{(2)})}$ $(i = 1,2)$ – относительные толщины слоев. Характерная особенность современных однонаправленных композиционных материалов – заметное различие жесткости таких материалов вдоль и поперек волокон армирования. Очевидным представляется вывод, что разрушение рассматриваемого материала (рис. 5.1 б) начинается со второго слоя. Как следует из формулы (5.1), разрушение этого слоя происходит при напряжениях σ_{11} равных

$$\sigma_{11}^{*} = 2\frac{\sigma_{22}^{(2)+}}{E_2^{(2)}}(E_1^{(1)}\bar{h}^{(1)} + E_2^{(2)}\bar{h}^{(2)}), \tag{5.3}$$

где $\sigma_{22}^{(2)+}$ – предел прочности материала в поперечном направлении для среднего слоя при растяжении. Решение рассматриваемой задачи [213] с учетом дополнительных напряжений, вызванных образованием трещин, определяется соотношениями:

$$\sigma_{11}^{(1)*} = \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)}\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}}e^{-k_1 x}\left(\frac{k_1}{k_2}\sin k_2 x + \cos k_2 x\right),$$

$$\sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)}\left[1 - e^{-k_1 x}\left(\frac{k_1}{k_2}\sin k_2 x + \cos k_2 x\right)\right],$$

$$\sigma_{13}^{(1)*} = -\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}}\left[z - \left(h^{(1)} + h^{(2)}\right)\right]\frac{\sigma_{11}^{(2)}}{k_2}\left(k_1^2 + k_2^2\right)e^{-k_1 x}\sin k_2 x,$$

$$\sigma_{13}^{(2)*} = \frac{\sigma_{11}^{(2)}}{k_2}\left(k_1^2 + k_2^2\right) z\, e^{-k_1 x}\sin k_2 x,$$

$$\sigma_{33}^{(1)*} = \frac{h^{(2)}}{2h^{(1)}}\left[z - \left(h^{(1)} + h^{(2)}\right)\right]^2\frac{\sigma_{11}^{(2)}}{k_2}\left(k_1^2 + k_2^2\right)e^{-k_1 x}\left(k_1\sin k_2 x - k_2\cos k_2 x\right),$$

$$\sigma_{33}^{(2)*} = -\frac{\sigma_{11}^{(2)}}{2}\left[z^2 - h^{(2)}\left(h^{(1)} + h^{(2)}\right)\right]\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}e^{-k_1 x}\left(k_1\sin k_2 x - k_2\cos k_2 x\right). \tag{5.4}$$

Параметры k_1 и k_2 равны

$$k_{1,2} = \sqrt{0,5(b^2 \pm a^2)} \quad , \tag{5.5}$$

где
$$a^2 = \left[\frac{h^{(2)^3}}{3G_{23}^{(2)}} + \frac{h^{(2)^2} h^{(1)}}{3G_{13}^{(1)}} - \frac{\nu_{13}}{E_2^{(2)}} (2\frac{h^{(2)^3}}{3} + h^{(1)} h^{(2)^2}) + \frac{\nu_{12}}{3E_1^{(1)}} h^{(1)} h^{(2)^2} \right] / A,$$

$$b^4 = 2h^{(2)^2} (\frac{1}{E_2^{(2)} h^{(2)}} + \frac{1}{E_1^{(1)} h^{(1)}}) / A,$$

$$A = \frac{1}{2E_2} \left[\frac{h^{(2)^5}}{5} - \frac{2h^{(2)^4}}{3} (h^{(1)} + h^{(2)}) + h^{(2)^3} \left(h^{(1)} + h^{(2)} \right)^2 + \frac{1}{5} h^{(1)^3} h^{(2)^2} \right].$$

При этом ос ох совпадёт с осью 01 анализ выражений (5.4) – (5.5) показывает, что напряжения $\sigma_{33}^{(2)*}$ и $\sigma_{13}^{(2)*}$ быстро затухают при удалении от края трещины и когда $x = 2\pi/k_2$ практически равны нулю. Аналогичный характер распределения имеют напряжения $\sigma_{11}^{(2)*}$, которые при $x = 2\pi/k_2$ асимптотически приближаются к величине $\sigma_{11}^{(2)}$. При этом максимальные напряжения $\sigma_{11}^{(2)*}$ возникают на расстоянии π/k_2 от края трещины:

$$\max \sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} \left(1 + e^{-\frac{\pi k_1}{k_2}} \right) . \tag{5.6}$$

Следуя выводам [213], возможно дальнейшее растрескивание матрицы второго слоя, характер которого будет определяться соотношением пределов прочности слоя при растяжении поперек волокон, межслоевого сдвига и отрыва в направлении нормали. Для трехслойного материала, внешние слои которого имеют толщину $h^{(1)} = 2,5 \cdot 10^{-3}$м, а внутренний слой – $2h^{(2)} = 0,5 \cdot 10^{-3}$м физико-механические характеристики трансверсально-изотропного материала внешних слоев равны: $E_1^{(1)} = E_2^{(1)} = 1,5 \cdot 10^4$МПа, $G_{13}^{(1)} = G_{23}^{(1)} = 1,715 \cdot 10^3$МПа, $\nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)} = 0,242$. Материал клеевого среднего слоя считается изотропным: $E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = E = 3,5 \cdot 10^3$МПа, $G = G_{13}^{(2)} = G_{23}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1,296 \cdot 10^3$МПа, $\nu_{13}^{(2)} = \nu_{22}^{(2)} = \nu = 0,35$.

Считается, что предел прочности клеевого слоя приблизительно имеет величину: $\sigma_{22}^{(2)+} = 25$МПа – при растяжении, $\sigma_{13}^{(2)-} = \sigma_{13}^{(2)+} = 16$МПа – при поперечном сдвиге. Возможно несколько вариантов появления новых трещин рис. 5.2. Возникают трещины, которые параллельны начальной трещине, вызванные напряжениями $\sigma_{11}^{(2)*}$. Появляются дополнительные трещины на границе между слоями от действия поперечных касательных напряжений $\sigma_{13}^{(2)*}$ и трещины на границе между слоями или внутри слоя от действия межслоевых нормальных напряжений $\sigma_{33}^{(2)*}$, а также трещины во втором слое, связанные с комбинацией действующих напряжений.

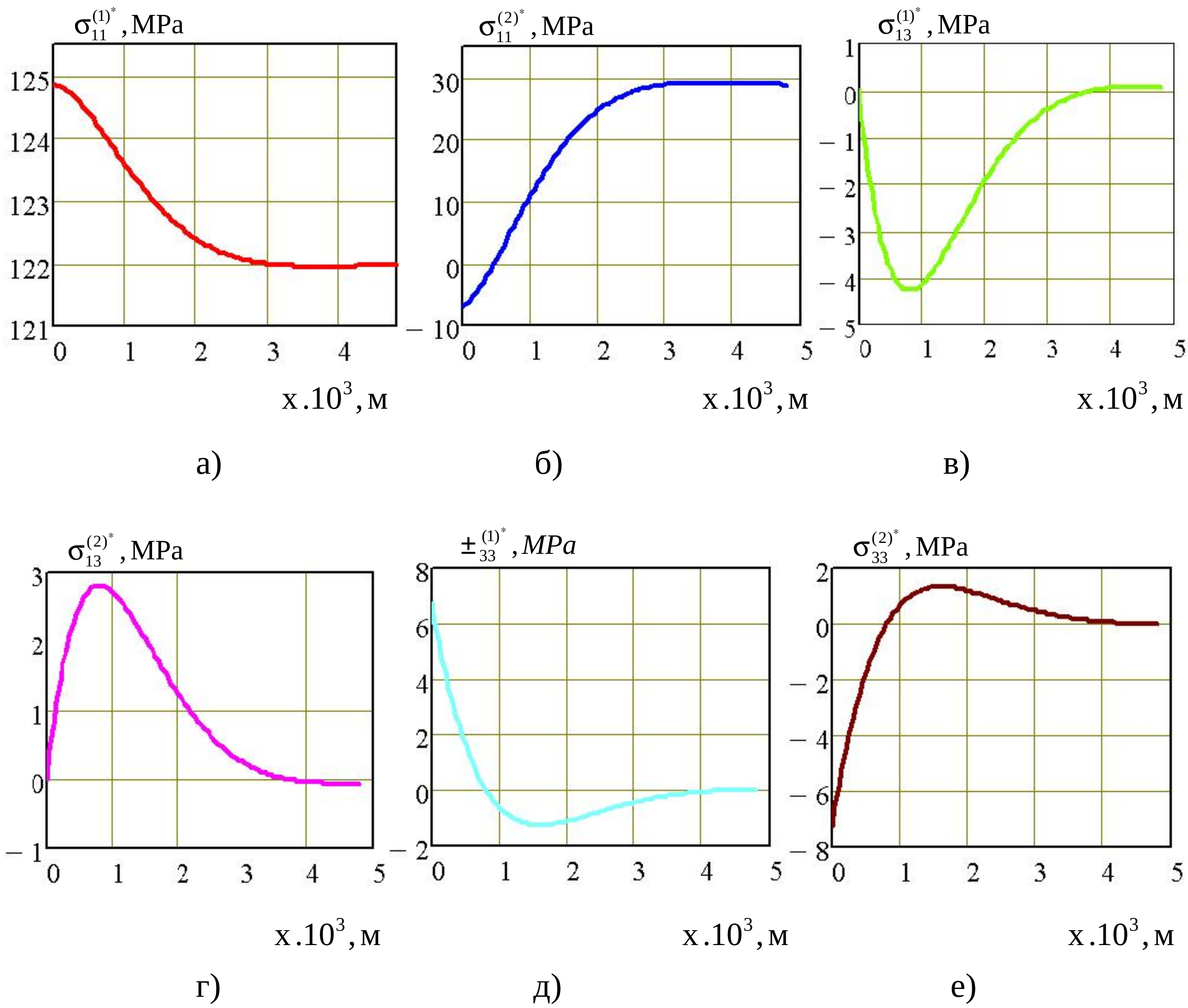


Рисунок 5.2 - Напряженное состояние в области трещины

Результаты многочисленных экспериментов позволяют утверждать, что при растяжении образцов, как правило, реализуется первый вариант образования трещин. При этом расстояние между трещинами согласно (5.1) равно $x=\pi/k_2$.

Напряженное состояние отдельного блока среднего слоя между соседними трещинами описывается при помощи следующих выражений:

$$\sigma_{11}^{(1)*} = \sigma_{11}^{(1)} + \frac{\sigma_{11}^{(2)} h^{(2)}}{h^{(1)} \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2}} \left(\frac{k_1}{k_2} \mathrm{ch} k_1 x \cos k_2 x + \mathrm{sh} k_1 x \sin k_2 x \right),$$

$$\sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} [1 - \frac{1}{\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2}} \left(\frac{k_1}{k_2} \mathrm{ch} k_1 x \cos k_2 x + \mathrm{sh} k_1 x \sin k_2 x \right)],$$

$$\sigma_{13}^{(1)*} = \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{\sigma_{11}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \mathrm{sh}\frac{\pi k_1}{2k_2}} \mathrm{sh} k_1 x \cos k_2 x, \quad \sigma_{13}^{(2)*} = -\frac{\sigma_{11}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \mathrm{sh}\frac{\pi k_1}{2k_2}} z \,\mathrm{sh} k_1 x \cos k_2 x,$$

$$\sigma_{33}^{(1)*} = \frac{h^{(2)}}{2h^{(1)}} \sigma_{11}^{(2)} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})]^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \mathrm{sh}\frac{\pi k_1}{2k_2}} (k_1 \mathrm{ch} k_1 x \cos k_2 x - k_2 \mathrm{sh} k_1 x \sin k_2 x),$$

$$\sigma_{33}^{(2)*} = -\frac{1}{2} \sigma_{11}^{(2)} [z^2 - h^{(2)} (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \mathrm{sh}\frac{\pi k_1}{2k_2}} (k_1 \mathrm{ch} k_1 x \cos k_2 x - k_2 \mathrm{sh} k_1 x \sin k_2 x). \tag{5.7}$$

Анализ напряженного состояния блока трещин проводится на примере рассмотренного ранее трехслойного материала. Графики изменения напряжений $\sigma_{11}^{(2)*}$, $\sigma_{13}^{(2)*}$, $\sigma_{33}^{(2)*}$ по длине блока представлены на рис. 5.3.

Максимальное значение напряжение $\sigma_{11}^{(2)*}$ имеет в центре блока при x=0 (рис. 5.3 б) и равно

$$\sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} [1 - k_1 / (k_2 \mathrm{sh}\frac{\pi k_1}{2k_2})] k_2 \mathrm{sh}\frac{\pi k_1}{2k_2} = 18{,}04 \text{ МПа} .$$

При последующем нагружении вероятность трещинообразования по первому варианту по-прежнему остается высокой. Новые трещины будут делить слой на блоки, длина которых будет примерно равна $0{,}5\pi / k_2$.

На рис. 5.4 показаны графики напряжений $\sigma_{11}^{(2)*}$, $\sigma_{13}^{(2)*}$, $\sigma_{33}^{(2)*}$ для блока длиной $0{,}5\pi / k_2$.

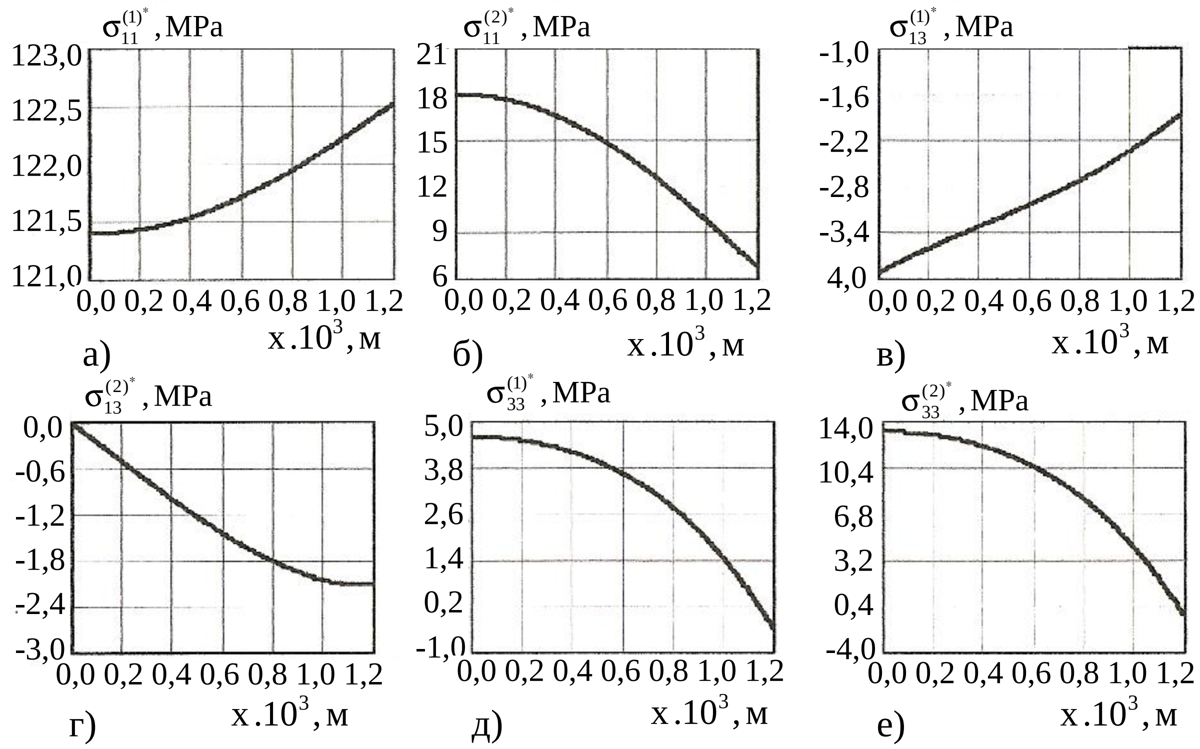


Рисунок 5.3 - Напряженное состояние отдельного блока среднего слоя длиной π/k_2.

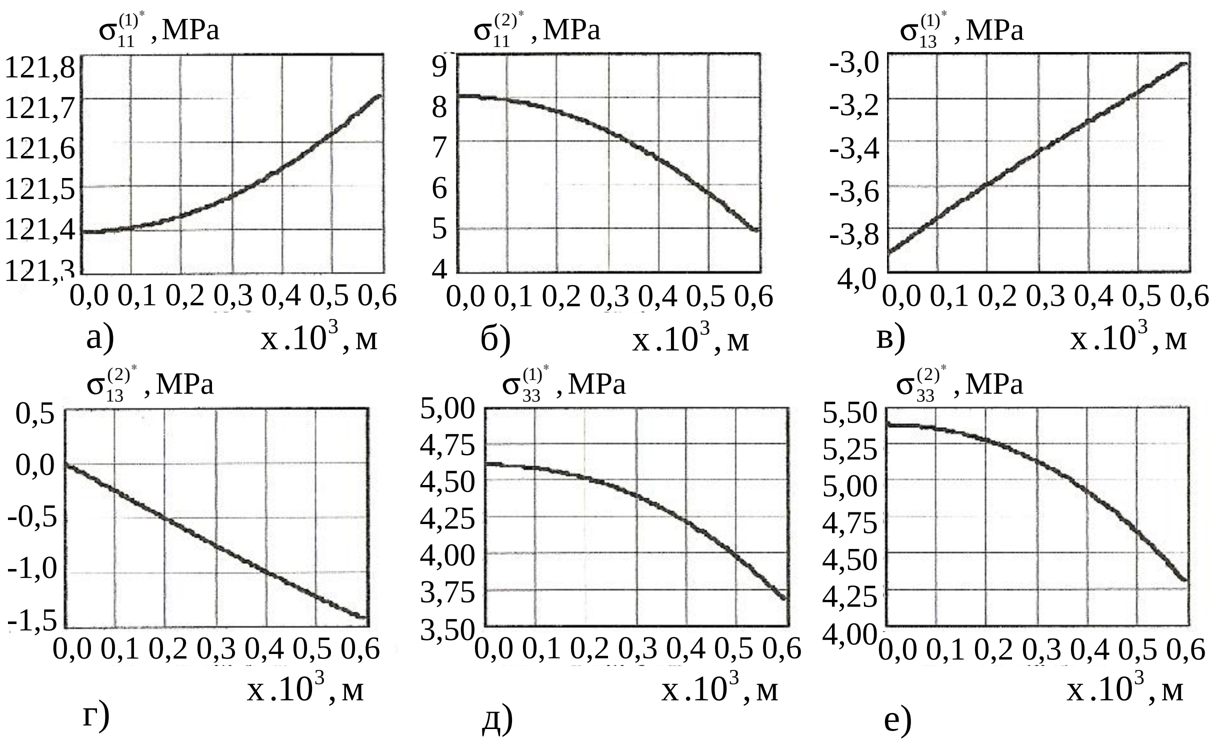


Рисунок 5.4 - Напряженное состояние отдельного блока среднего слоя длиной $0{,}5\pi/k_2$.

Акцентируя внимание на двух основных видах повреждения (трещины в матрице, располагающиеся по толщине слоя $h^{(2)}$ параллельно поперечным волокнам, и расслоения), необходимо помнить, что окончательной причиной разрушения слоистого композита является разрыв волокон.

Несмотря на многообразие подходов к исследованию физико-механических свойств композиционных материалов, оценка их точности и обоснованности осуществляется в результате сравнения теоретических данных с деформационными и прочностными характеристиками материала, полученными при испытаниях образцов в условиях одноосного нагружения. На диаграммах деформирования слоистого композита растрескивание и пластичность матрицы проявляются уменьшением наклона касательной, т.е. зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Следуя терминологии, введенной в [213], слоистые композиты проявляют свойства структурной нелинейности, которые, в конечном счете, во многом и определяют несущую способность конструкции.

5.2. Модифицированный критерий прочности композита слоистой структуры с концентраторами напряжёний на границе раздела слоев

Наиболее общая формулировка критерия прочности анизотропных тел имеет вид

$$\left(R_{ij}\sigma_{ij}\right)^{\alpha}+\left(R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)^{\beta}+\left(R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\right)^{\gamma}+\ldots=1 \quad (i, j, k, l=1,2,3), \tag{5.8}$$

где $R_{ij}, R_{ijkl}, R_{ijklmn}$ – матричные обозначения тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов.

В инженерной практике более удобным в плане практического применения оказался критерий прочности следующей тензорно–полиноминальной формы:

$$R_{ij}\sigma_{ij}+R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}+\ldots=1 \quad (i, j, k, l, m, n=1,2,3), \tag{5.9}$$

который легко получить из (5.8), принимая $\alpha, \beta, \gamma, \ldots=1$. Большинство известных полиноминальных критериев прочности являются, как правило, частным случаем критерия (5.9).

Используя критерий прочности (5.9) в форме

$$R_{ij}\sigma_{ij}+R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}=1 \quad (i,j,k,l,m,n=1,2,3), \qquad (5.10)$$

можно рассмотреть условия разрушения слоистого композита в целом. Предположения о независимости пути нагружения, о линейно-упругом поведении материала и об отсутствии межслоевых взаимодействий позволили уменьшить число тензоров прочности в уравнении (5.10) для ортотропного композита при плоском напряженном состоянии до десяти. Критерий прочности слоистого композита (5.10) для практического применения оказался достаточно сложным, так как предполагает проведение сложных экспериментов для нахождения коэффициентов тензоров поверхности прочности.

В большинстве случаев разрушение слоистого композита начинается с разрушения одного слоя или связей между ними. Поэтому при построении предельных поверхностей считается, что разрушение локализовано в одном слое и критерий прочности следует составлять именно для этого слоя.

Аппроксимация предельной поверхности прочности ортотропного слоя полиномом второй степени рассмотрена в [214]. Уравнение (5.10) приводится к виду

$$R_{ij}\sigma_{ij}+R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=1 \qquad \left(i,j,k,l=1,2,3\right), \qquad (5.11)$$

где R_{ij}, R_{ijkl} – тензоры поверхности прочности слоя второго и четвертого порядков.

В случае плоского напряженного состояния уравнение (5.11) изображает предельную поверхность (эллипсоид) в трехмерном пространстве напряжений

$$\begin{aligned} &R_{11}\sigma_{11}+R_{22}\sigma_{22}+2R_{12}\sigma_{12}+R_{1111}\sigma_{11}^{2}+R_{2222}\sigma_{22}^{2}+4R_{1212}\sigma_{12}^{2}+\\ &+2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}+4R_{1112}\sigma_{11}\sigma_{12}+4R_{2212}\sigma_{22}\sigma_{12}=1. \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Коэффициенты уравнения (5.12) определяются с использованием экспериментально установленных предельных характеристик прочности $\sigma_{ij}^{+}, \sigma_{ij}^{-}$ $(i,j=1,2)$. Индекс „+” означает, что данная компонента – предельное напряжение при растяжении, индексом „–” обозначено предельное напряжение при сжатии. Для компонент тензоров поверхности прочности (5.12) в [182] предложены следующие соотношения:

$$R_{11}=\frac{\sigma_{11}^{-}-\sigma_{11}^{+}}{\sigma_{11}^{-}\sigma_{11}^{+}};\ R_{22}=\frac{\sigma_{22}^{-}-\sigma_{22}^{+}}{\sigma_{22}^{-}\sigma_{22}^{+}};\ R_{12}=\frac{\sigma_{12}^{-}-\sigma_{12}^{+}}{\sigma_{12}^{-}\sigma_{12}^{+}};\ R_{1111}=\frac{1}{\sigma_{11}^{-}\sigma_{11}^{+}};\ R_{2222}=\frac{1}{\sigma_{22}^{-}\sigma_{22}^{+}};$$

$$4R_{1212}=\frac{1}{\sigma_{12}^{-}\sigma_{12}^{+}};\ 2R_{1122}=\frac{R_{11}-R_{22}}{\sigma_{12}^{-}}+R_{1111}+R_{2222}-\frac{1}{\left(\sigma_{12}^{-}\right)^{2}} \qquad (5.13)$$

В (5.12) – (5.13) тензоры прочности учитывают возможное различие характеристик прочности материала при растяжении и сжатии. Следует отметить, что прочность материала не зависит от знака предельных значений касательных напряжений: $\sigma_{ij}^{-}=\sigma_{ij}^{+}$. Для ортотропного материала в осях симметрии справедливо тождество $R_{1112}=R_{2212}=0$. Значений величин $\sigma_{ij}^{+},\ \sigma_{ij}^{-}\ (i,j=1,2)$, которые удается определить экспериментальным путем, недостаточно для определения компонент тензоров прочности типа R_{1122}, что, в свою очередь, обусловливает необходимость в проведении тщательно планируемых экспериментов для получения и обоснования эмпирических зависимостей, составленных для R_{1122}. Большая часть методов построения предельных поверхностей основана на представлении армированного материала как набора анизотропных слоев. Поэтому изучение физико-механических свойств отдельных слоев при нагружении представляется актуальной задачей. При помощи теории слоистых сред можно перейти от усредненных напряжений и деформаций композита к локальным напряжениям и деформациям в любом слое. Следует отметить, что, исключая единичные работы, во всех подходах не учитываются напряжения и деформации поперечного сдвига $\sigma_{i3}^{+},\sigma_{i3}^{-}\ (i,j=1,2)$ и трансверсального отрыва или сжатия. $\sigma_{33}^{+},\sigma_{33}^{-}$. Значительное различие предельных характеристик несущих слоев и свойств промежуточных межфазных слоев обусловливает выбор той или иной модели дискретно-структурной теории пластин и оболочек. Становится очевидным, что расслоение следует рассматривать не как отдельный вид разрушения, а как фактор, определяющий вид дискретно-структурной модели многослойной конструкции. Таким образом, для оценки степени влияния ослабленного межфазного контакта слоев критерий (5.12) следует записывать в модифицированном виде

$$\begin{aligned}&R_{11}\pm_{11}+R_{22}\pm_{22}+R_{33}\pm_{33}+R_{1111}\pm_{11}^{2}+R_{2222}\pm_{22}^{2}+\\&+R_{3333}\pm_{33}^{2}+4R_{1212}\pm_{12}^{2}+4R_{1313}\pm_{13}^{2}+4R_{2323}\pm_{23}^{2}+\\&+2R_{1122}\pm_{11}\pm_{22}+2R_{1133}\pm_{11}\pm_{33}+2R_{2233}\pm_{22}\pm_{33}=1,\end{aligned} \tag{5.14}$$

где к тензорам поверхности прочности (5.13) следует по аналогии добавить дополнительные компоненты:

$$R_{33}=\frac{\sigma_{33}^{-}-\sigma_{33}^{+}}{\sigma_{33}^{-}\sigma_{33}^{+}};\quad R_{3333}=\frac{1}{\sigma_{33}^{-}\sigma_{33}^{+}};\quad 4R_{1313}=\frac{1}{\sigma_{13}^{-}\sigma_{13}^{+}};\quad 4R_{2323}=\frac{1}{\sigma_{23}^{-}\sigma_{23}^{+}};$$

$$2R_{1133}=\frac{R_{11}-R_{33}}{\sigma_{13}^{-}}+R_{1111}+R_{3333}-\frac{1}{\left(\sigma_{13}^{-}\right)^{2}};$$

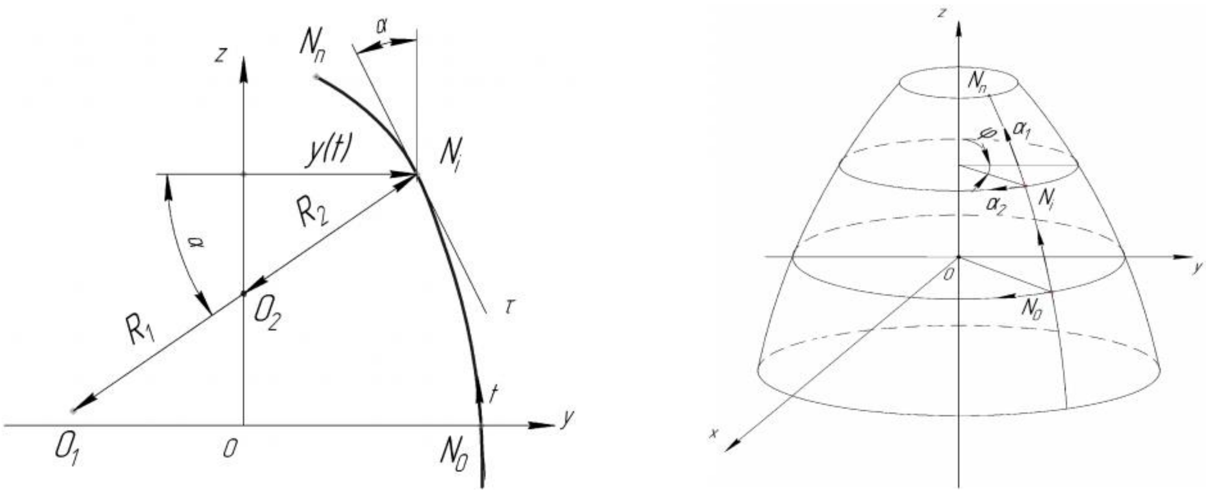
$$2R_{2233}=\frac{R_{22}-R_{33}}{\sigma_{23}^{-}}+R_{2222}+R_{3333}-\frac{1}{\left(\sigma_{23}^{-}\right)^{2}}. \tag{5.15}$$

При этом считается, что межслойная прочность материала на сдвиг не зависит от знака поперечных касательных напряжений, т.е. $\sigma_{13}^{+}=\sigma_{13}^{-}$; $\sigma_{23}^{+}=\sigma_{23}^{-}$.

Для использования модифицированного критерия (5.14), (5.15) необходимо экспериментально определить предельные характеристики слоя на поперечный сдвиг и трансверсальное сжатие или отрыв.

5.3. Осесимметричная деформация тонкостенных конструкций слоистой структуры

5.3.1. Способ вычисления геометрических параметров оболочек вращения. Известно, что поверхность оболочек вращения образуется вращением кривой линии, лежащей в плоскости YOZ, вокруг оси OZ (рис. 5.5 а).



а) б)

Рисунок 5.5 - Поверхность оболочки вращения

Положение точки N_i на поверхности оболочки вращения определяется с помощью криволинейных координат α_1, α_2, которые совпадают с линиями главных кривизн [109]. При этом компонента тензора второй квадратичной формы поверхности, характеризующая кручение поверхности, равна нулю.

Для оболочек вращения характерны следующие геометрические параметры, которые входят в геометрические соотношения и уравнения равновесия: коэффициенты Ламе A и B, главные кривизны $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$ и дополнительные параметры – $\rho_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}$, $\rho_2 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}$.

Так как коэффициент Ламе A не зависит от координаты α_2, дополнительный параметр $\rho_2 = 0$.

Кривую N_0N_n (рис.5.5 б)) называют меридианом. Пусть уравнение меридиана задано в параметрической форме – $z = z(t)$, $y = y(t)$, где t - дуговая координата, которая отсчитывается от начальной точки N_0 до конечной точки N_n. Используя известные соотношения кривизн для дуги N_0N_n в точке N_i - $k_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ и производные от функций $z = z(t)$, $y = y(t)$ (рис. 5.5 а)):

$$z'_t = \frac{dz}{dt} = \cos\alpha, \quad y'_t = \frac{dy}{dt} = \sin\alpha, z''_t = \frac{d^2z}{dt^2} = -k_1 \sin\alpha, \quad y''_t = \frac{d^2y}{dt^2} = k_1 \cos\alpha,$$

несложно получить следующую формулу кривизны меридиана

$$.\,k_1 = z'_t\, y''_t - y'_t\, z''_t \qquad (5.16)$$

Квадрат длины поверхностного линейного элемента, концы которого расположены в точках $N(t,\varphi)$ и $N'(t+dt,\varphi+d\varphi)$, запишется

$$ds^2 = (dt)^2 + (y d\varphi)^2 . \qquad (5.17)$$

где φ - угол цилиндрической системы координат $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Таким образом, для вычисления параметров Ляме можно записать выражения

$$A = 1,\ B = y(t)\ . \qquad (5.18)$$

Кривизна сечения, нормального к меридиану оболочки вращения, определяется выражением (рис. 5.5 а))

$$k_2 = \cos\alpha / y = z'_t / y\ . \qquad (5.19)$$

Дополнительный параметр ρ_1 принимает вид

$$\rho_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{AB}\frac{dB}{dt} = -y'_t / y\ . \qquad (5.20)$$

Когда оболочка вращения имеет сложную форму поверхности, меридиан такой поверхности удобно аппроксимировать в виде B – сплайнов, заданных в виде параметрических функций $(z(t),\ y(t))$ на равномерной сетке

$$z_i = (i-1)\Delta t,\ \ y_i = (i-1)\Delta t,\ \ i = 1,\ldots,n\ .$$

В основу процедуры положены алгоритмы [215] реализации, B – сплайн аппроксимаций. Задача аппроксимации решается как известная задача наименьших квадратов для заданных граничных условий. С помощью, B – сплайнов: $z(t) = \sum_{j=1}^{k} C_j B_j(t),\ \ y(t) = \sum_{j=1}^{k} C'_j B_j(t),$

где C_j, C'_j – коэффициенты, k – порядок сплайн – функции, несложно найти значения геометрических параметров (5.16) – (5.20).

5.3.2. Обобщенная жесткость многослойного анизотропного пакета по теории С.П.Тимошенко. Используя соотношения (2.69) – (2.80), можно получить физические соотношения многослойного элемента симметричной структуры по толщине. Закон деформирования всего пакета слоев по теории С.П.Тимошенко будет определяться соотношениями

$$T = A\varepsilon \ , \qquad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} M \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & K \\ K & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}, \qquad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} Q^\gamma \\ L^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & R \\ R & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^\gamma \\ \psi^\gamma \end{bmatrix}, \qquad (5.23)$$

где $T = \left[T^{11}, T^{22}, Q^3, T^{12}\right]^T$, $M = \left[M^{11}, M^{22}, M^{12}\right]^T$, $L = \left[L^{11}, L^{22}, L^{12}\right]^T$, $Q^\gamma = \left[Q^2, Q^1\right]^T$, $L^\gamma = \left[L^{23}, L^{13}\right]^T$ – отнесенные к единице длины координатных линий недеформированной срединной поверхности многослойного элемента контравариантные компоненты тензоров тангенциальных усилий T^{ij}, изгибающих и крутящих моментов M^{ij}, дополнительного изгибающего и крутящего момента L^{ij}, поперечных сил деформаций сдвига и обжатия Q^i, Q^3; $\varepsilon = \left[\varepsilon_{11}, \ \varepsilon_{22}, \ \varepsilon_{33}, \ \varepsilon_{12}\right]^T$, $\chi = \left[\chi^{\gamma}_{11}, \ \chi^{\gamma}_{22}, \ \chi^{\gamma}_{12}\right]^T$, $\psi = \left[\psi_{11}, \ \psi_{22}, \ \psi_{12}\right]^T$, $\varepsilon^\gamma = \left[\varepsilon^\gamma_{23}, \ \varepsilon^\gamma_{13}\right]^T$, $\psi^\gamma = \left[\psi_2, \ \psi_1\right]^T$ – соответственно компоненты тензоров тангенциальных деформаций ε_{ij} и изменения кривизн $\chi^\gamma_{ij}, \psi_{ij}$ серединной поверхности слоистого материала, а также деформаций поперечного сдвига ε^γ_{i3}, ψ_{i3} и обжатия ε_{33}. Компоненты матриц жесткости A, D, K, F, C, R, G вычисляются в результате суммирования интегрируемых по толщине оболочки соответствующих жесткостей слоя:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} a^{(k)}_{ij} dz \quad (i, j = 1,2,3,6),$$

$$(D_{ij}, K_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} (z^2, z\varphi(z), \varphi^2(z)) a^{(k)}_{ij} dz \ \ (i, \ j = 1,2,6), \qquad (5.24)$$

$$(C_{ij,} \ R_{ij}, \ G_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} a^{(k)}_{ij} [1, \ 0{,}5\varphi^{/}(z), \ (0{,}25\varphi^{/}(z))^2 \,] dz \quad (i, j = 4{,}5).$$

где $a_{ij}^{(k)}$ – постоянные параметры жесткости k-го слоя, n – количество слоев, $\varphi(z)$ – функция, которая определяет нелинейный характер распределения тангенциальных перемещений по толщине многослойного пакета.

Можно представить функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = zf(z) = \frac{z[-2z^2 + 3(\delta_0 - \delta_N)z - 6\delta_0\delta_N]}{h^3}, \qquad (5.25)$$

где $f(z) = [-2z^2 + 3(\delta_0 - \delta_N)z - 6\delta_0\delta_N]/h^3$ – функция, характеризующая параболический закон распределения поперечных касательных напряжений по толщине пакета h. Функция $f(z)$ удовлетворяет условию нормирования, т.е. $\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} f(z)dz = 1$. Предполагая, что механические характеристики в пределах каждого слоя оболочки не зависят от поперечной координаты, выражения для матриц жесткости (2.25) перепишутся в упрощенной форме:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\delta_k - \delta_{k-1})a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 1,2,3,6), \quad D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3)a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 1,2,6),$$

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[\lambda_1(\delta_k) - \lambda_1(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 1,2,6) \; F_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[\lambda_2(\delta_k) - \lambda_2(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 1,2,6),$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\delta_k - \delta_{k-1})a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 4,5), \quad R_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[\lambda_3(\delta_k) - \lambda_3(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 4,5) \qquad (5.26)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[\lambda_4(\delta_k) - \lambda_4(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j = 4,5).$$

Здесь введены обозначения:

$$\lambda_1(z) = \frac{6z^3[-z^2/15 + (\delta_0 + \delta_N)z/8 - \delta_0\delta_N/3]}{h^3},$$

$$\lambda_2(z) = 36z^3[z^4/63 - (\delta_0 + \delta_N)z^3/18 + 3(\delta_0 + \delta_N)^2 z^2/60 +$$
$$+ 8\delta_0\delta_N z^2/60 - \delta_0\delta_N(\delta_0 + \delta_N)z/4 + (\delta_0\delta_N)^2/3]/h^6,$$

$$\lambda_3(z) = \frac{0{,}5z\,[-2z^2 + 3(\delta_0 + \delta_N)z - 6\delta_0\delta_N/3]}{h^3},$$

$$\lambda_4(z) = 9z^3[z^2/5 - (\delta_0 + \delta_N)z\,/2 + (\delta_0 + \delta_N)^2/3 + 2\delta_0\delta_N/3 -$$
$$- 9z^2\delta_0\delta_N(\delta_0 + \delta_N) + 9z(\delta_0\delta_N)^2]/h^6.$$

Можно получить зависимости, связывающие деформации и усилия, которые возникают в элементах слоистой структуры при нагружении:

$$\varepsilon = bT\,,\ \begin{bmatrix}\chi_{(k)}\\ \psi_{(k)}\end{bmatrix} = d\begin{bmatrix}M_{(k)}\\ L_{(k)}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\varepsilon^{\gamma}_{(k)}\\ \psi^{\gamma}_{(k)}\end{bmatrix} = g\begin{bmatrix}Q^{\gamma}_{(k)}\\ L^{\gamma}_{(k)}\end{bmatrix} \qquad (5.27)$$

где b, d, g – матрицы податливости. После преобразований матрицы податливости принимают вид

$$\left(b_{ij}\right) = \left(A_{ij}\right)^{-1}\left(i, j = 1,2,...,4\right),\ \left(d_{ij}\right) = \begin{bmatrix}D & K\\ K & F\end{bmatrix}^{-1}\left(i, j = 1,2,...,6\right), \qquad (5.28)$$

$$\left(g^{(k)}_{ij}\right) = \begin{bmatrix}C_{(k)} & R_{(k)}\\ R_{(k)} & G_{(k)}\end{bmatrix}^{-1} \quad \left(i, j = 1,2,...,4\right). \qquad (5.29)$$

Используя интеграл дополнительной работы деформации $F^{(k)}_{p}$ функционала Рейсснера, можно получить уточненные зависимости (2.86) – (2.90) физических соотношений (5.28), (5.29) для всего пакта слоев в целом.

Характер изменения напряжений поперечного сдвига и обжатия σ_{i3}, σ_{33} $\left(i = 1,2\right)$ по толщине пакета слоев зависит от величины деформаций $\varepsilon^{(k)z}_{i3}$, $\varepsilon^{(k)z}_{33}$ каждого k-го слоя и определяется соотношениями (2.111) – 2.120).

Алгоритм определения приведенных характеристик композита с регулярной структурой слоев приведен в подразделе 3.1.

5.3.3. Осесимметричная деформация многослойных оболочек вращения с ослабленным контактом между слоями. Пусть оболочка вращения слоистой структуры является осесимметричной конструкцией относительно механических, геометрических параметров в направлении окружной координаты, подверженной действию осесимметричной внешней нагрузки. Таким образом, если не рассматривать возможность перехода от осесимметричной формы равновесия к неосесимметричным формам, все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние таких конструкций, не зависят от координаты α_2 и является функциями, лишь одной координаты α_1.

С учетом введенных допущений система уравнений (2.102) – (2.108) запишется

$$\frac{d\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}d\alpha_1} = F\left(\alpha_1, \quad \vec{Y}^{(k)}, \ \vec{f}^{(k)}\right), \qquad k = 1,2,\ldots,n\,. \tag{5.30}$$

Здесь

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{\vec{Y}_1^{(k)}, \vec{Y}_2^{(k)}, \ldots, \vec{Y}_{14}^{(k)}\right\}^T =$$

$= \left\{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\right\}^T$ - вектор решений; компоненты вектора правых частей F в развернутой форме имеют вид

$$F_1^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_1^{(k)} - \rho_1^{(k)} T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_3^{(k)} - X_1^{(k)}; \quad F_2^{(k)} = 2\rho_1^{(k)} Y_2^{(k)} - k_2^{(k)} R_{23}^{(k)} - X_2^{(k)};$$

$$F_3^{(k)} = k_1^{(k)} Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)} Y_3^{(k)} + k_2^{(k)} T_{22}^{(k)} - X_3^{(k)};\ F_4^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_4^{(k)} - \rho_1^{(k)} M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2} X_1^{(k)};$$

$$F_5^{(k)} = 2\rho_1^{(k)} Y_5^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2} X_2^{(k)};\ F_6^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_6^{(k)} - \rho_1^{(k)} L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) X_1^{(k)}; \tag{5.31}$$

$$F_7^{(k)} = 2\rho_1^{(k)} Y_7^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) X_2^{(k)}; \quad F_8^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)^2;$$

$$F_9^{(k)} = \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_9^{(k)} + k_2^{(k)} Y_9^{(k)}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right); \quad F_{10}^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)} Y_8^{(k)};$$

$$F_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma}; \quad F_{12}^{(k)} = 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)};\ F_{13}^{(k)} = \psi_{11}^{(k)};\ F_{14}^{(k)} = 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)},$$

где

$$\rho_1 = -\frac{\partial B^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial\alpha_1}\,.$$

Все неизвестные, которые входят в правую часть системы уравнений (5.30), необходимо выразить через компоненты вектора решений $\vec{Y}^{(k)}$. Эти зависимости, если пренебречь нелинейными слагаемыми более высокого порядка малости и ввести допущение

$$C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)} \approx C_{55}^{(k)}, \tag{5.32}$$

можно получить,

$$M_{22}^{(k)} = m_1^{(k)} Y_4^{(k)} - m_2^{(k)} Y_5^{(k)} + m_3^{(k)} Y_6^{(k)} - m_4^{(k)} Y_7^{(k)} + m_5^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} + m_6^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{13}^{(k)};$$

$$L_{22}^{(k)} = l_1^{(k)} Y_4^{(k)} - l_2^{(k)} Y_5^{(k)} + l_3^{(k)} Y_6^{(k)} - l_4^{(k)} Y_7^{(k)} + l_5^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} + l_6^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{13}^{(k)};$$

$$T_{22}^{(k)} = t_1^{(k)} Y_1^{(k)} + t_2^{(k)} Y_2^{(k)} + t_3^{(k)} Y_4^{(k)} - t_4^{(k)} Y_5^{(k)} + t_5^{(k)} Y_6^{(k)} -$$
$$- t_6^{(k)} Y_7^{(k)} - t_7^{(k)} Y_8^{(k)} - t_8^{(k)}\left(Y_9^{(k)}\right)^2 + t_9^{(k)} Y_{10}^{(k)} + t_{10}^{(k)} Y_{11}^{(k)} + t_{11}^{(k)} Y_{13}^{(k)};$$

$$Q_2^{(k)}=\frac{C_{44}^{(k)}}{2}\left(-k_2^{(k)}Y_9^{(k)}+Y_{12}^{(k)}\right)+\frac{C_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)}}\left(Y_3^{(k)}+\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)}-R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)}-R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)}+Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)}\right)+R_{44}^{(k)}Y_{14}^{(k)}+R_{45}^{(k)}Y_{13}^{(k)};$$

$$Q_1^{(k)}=Y_3^{(k)}+Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)};$$

$$L_{23}^{(k)}=\frac{R_{44}^{(k)}}{2}\left(-k_2^{(k)}Y_9^{(k)}+Y_{12}^{(k)}\right)+\frac{C_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)}}\left(Y_3^{(k)}+\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)}-R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)}-R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)}+Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)}\right)+G_{44}^{(k)}Y_{14}^{(k)}+G_{45}^{(k)}Y_{13}^{(k)};$$

$$L_{13}^{(k)}=\frac{R_{54}^{(k)}}{2}\left(-k_2^{(k)}Y_9^{(k)}+Y_{12}^{(k)}\right)+\frac{R_{55}^{(k)}}{C_{55}^{(k)}}\left(Y_3^{(k)}+\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)}-\right. \qquad (5.33)$$

$$\left.-\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)}-R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)}-R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)}+Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)}\right)+G_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)}+G_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)};$$

$$R_{23}^{(k)}=Q_2^{(k)}-\frac{Y_2^{(k)}}{C_{55}^{(k)}}\left(C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)}+2R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)}+2R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)}\right)-Y_2^{(k)}Y_{11}^{(k)}.$$

В соответствии с допущениями первого варианта модели дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек предполагается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, т.е. по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта. Статические условия контакта по сопряженным лицевым поверхностям k-го слоя учитываются при помощи метода штрафных функций (2.110).

Введение допущения о том, что рассматриваемое напряженно-деформированное состояние оболочки будет симметричным относительно оси вращения, существенно упрощает алгоритм решения. Учитывая геометрическую нелинейность в квадратичном приближении, исходную краевую задачу можно свести к решению системы 14×k обыкновенных дифференциальных уравнений (5.30) относительно вектор – функции $\vec{Y}^{(k)}$. Систему дифференциальных уравнений (5.30) следует дополнить граничными условиями – по семь на каждом торце жесткого слоя оболочки вращения. С учетом введенных обозначений они имеют вид

$$Y_j^{(k)}(\alpha_1^0)l_j+Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^0)(1-l_j)=0;\ Y_j^{(k)}(\alpha_1^z)l_{j+6}+Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^z)(1-l_{j+6})=0. \qquad (5.34)$$

Параметры $l_j,\ l_{j+6}\,(j=1,2,...,7)$ принимают значения 0, 1 и определяют однородные как статические, так и кинематические граничные условия на торцах жестких слоев оболочки $\alpha_1=\alpha_1^0,\ \alpha_1=\alpha_1^z$.

Решение геометрически нелинейной краевой задачи (5.30) – (5.34) можно получить на основе итерационного метода Ньютона–Канторовича, алгоритм которого приведен в подразделе 5.3.4, и устойчивого метода дискретной ортогонализации С.К.Годунова [128].

В данном подразделе также рассматривается осесимметричная деформация многослойной анизотропной оболочки вращения на основе модели, состоящей из нескольких жестких анизотропных слоев. Контакт слоев осуществляется при помощи клеевой прослойки ненулевой толщины. Допускается, что на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, поэтому в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями. Задача решается на основе геометрически нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига.

Введение допущения о том, что рассматриваемое напряженно-деформированное состояние оболочки будет симметричным относительно оси вращения, существенно упрощает алгоритм решения. Учитывая геометрическую нелинейность в квадратичном приближении, задачу можно свести к решению системы 14×k обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}d\alpha_1}=F\left(\alpha_1,\quad \vec{Y}^{(k)},\ \vec{f}^{\,(k)}\right),\qquad k=1,2,...,n\,. \tag{5.35}$$

Здесь

$$\vec{Y}^{(k)}=\left\{\vec{Y}_1^{(k)},\vec{Y}_2^{(k)},...,\vec{Y}_{14}^{(k)}\right\}^T=\{T_{11}^{(k)},\,T_{12}^{(k)},\,R_{13}^{(k)}+\frac{h_{(k)}+h_{[k]}}{2h_{[k]}}(Q_1^{[k]}+Q_1^{[k-1]}),$$

$M_{11}^{(k)},\,M_{12}^{(k)},\,L_{11}^{(k)},\,L_{12}^{(k)},\,u_1^{(k)},\,u_2^{(k)},\,w^{(k)},\,\gamma_1^{(k)},\,\gamma_2^{(k)},\,\psi_1^{(k)},\,\psi_2^{(k)}\}^T$ - вектор решений; компоненты вектора правых частей F в развернутой форме имеют вид:

$$F_1^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_1^{(k)} - \rho_1^{(k)} T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_3^{(k)} - \frac{1}{h_{[k]}} (Q_1^{[k]} - Q_1^{[k-1]}) - X_1^{(k)};$$

$$F_2^{(k)} = 2\rho_1^{(k)} Y_2^{(k)} - k_2^{(k)} R_{23}^{(k)} - X_2^{(k)};$$

$$F_3^{(k)} = k_1^{(k)} Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)} Y_3^{(k)} + k_2^{(k)} T_{22}^{(k)} + \frac{1}{h_{[k]}} (N^{[k]} - N^{[k-1]}) - X_3^{(k)};$$

$$F_4^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_4^{(k)} - \rho_1^{(k)} M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2} X_1^{(k)}; \quad F_5^{(k)} = 2\rho_1^{(k)} Y_5^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2} X_2^{(k)};$$

$$F_6^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_6^{(k)} - \rho_1^{(k)} L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) X_1^{(k)}; \tag{5.36}$$

$$F_7^{(k)} = 2\rho_1^{(k)} Y_7^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) X_2^{(k)}; \quad F_8^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)^2;$$

$$F_9^{(k)} = \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_9^{(k)} + k_2^{(k)} Y_9^{(k)}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right); \quad F_{10}^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)} Y_8^{(k)};$$

$$F_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma}; \; F_{12}^{(k)} = 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)}; \; F_{13}^{(k)} = \psi_{11}^{(k)}; \; F_{14}^{(k)} = 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)},$$

где

$$\rho_1 = -\frac{1}{A^{(k)} B^{(k)}} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1}.$$

Систему уравнений (5.35) – (5.36) можно значительно упростить, если вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки k-го жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек Тимошенко представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\omega}^{(k)} + g(z) \psi^{(k)},$$

где $\vec{\omega}^{(k)}$ - вектор угла поворота нормали, который вводится вместо вектор-функции углов поворота волокон $\vec{\gamma}^{(k)}$. Тогда систему уравнений (5.35) – (5.36) можно свести к системе 12×k обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{A} \frac{d\vec{Y}_{(k)}}{d\alpha_1} = f\left(\alpha_1, \vec{Y}_{(k)}\right) \tag{5.37}$$

относительно вектор-функции

$$\vec{Y}_{(k)} = [T_{11}^{(k)},\; T_{12}^{(k)} + 2k_2^{(k)} M_{12}^{(k)},\; Q_1^{(k)} + \frac{h_{(k)} + h_{[k]}}{2h_{[k]}} (Q_1^{[k]} + Q_1^{[k-1]}),\; M_{11}^{(k)},\; L_{11}^{(k)},\; L_{12}^{(k)},$$

$$u_1^{(k)},\; u_2^{(k)},\; w^{(k)},\; \omega_1^{(k)},\; \psi_1^{(k)},\; \psi_2^{(k)}]^T$$

Правая часть системы (5.37) запишется

$$f_1=\rho_1^{(k)}(T_{22}^{(k)}-Y_1^{(k)})-k_1^{(k)}Y_3^{(k)}-\frac{1}{h_{[k]}}\underline{(Q_1^{[k]}-Q_1^{[k-1]})}-X_1^{(k)};$$

$$f_2=-2\rho_1^{(k)}Y_2^{(k)}+k_2^{(k)}(T_{22}^{(k)}\omega_2^{(k)}+T_{12}^{(k)}Y_{10}^{(k)});$$

$$f_3=k_1^{(k)}Y_1^{(k)}+\rho_1^{(k)}Y_3^{(k)}+k_2^{(k)}T_{22}^{(k)}+\frac{1}{h_{[k]}}\underline{(N^{[k]}-N^{[k-1]})}-X_3^{(k)};$$

$$f_4=-\rho_1^{(k)}(M_{22}^{(k)}-Y_4^{(k)})+Y_3^{(k)}+Y_1^{(k)}Y_{10}^{(k)}+T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)};$$

$$f_5=\rho_1^{(k)}(L_{22}^{(k)}-Y_5^{(k)})+L_{13}^{(k)};\ f_6=2\rho_1^{(k)}Y_6^{(k)}+L_{23}^{(k)};$$

$$f_7=\varepsilon_{11}^{(k)}-k_1^{(k)}Y_9^{(k)}-\frac{1}{2}Y_{10}^{(k)}Y_{10}^{(k)};\ f_8=\varepsilon_{12}^{(k)}-\rho_1^{(k)}Y_8^{(k)}-Y_{10}^{(k)}\omega_2^{(k)}; \tag{5.38}$$

$$f_9=k_1^{(k)}Y_7^{(k)}-Y_{10}^{(k)};\ f_{10}=\chi_{11}^{(k)};\ f_{11}=\psi_{11}^{(k)};\ f_{12}=2\psi_{12}^{(k)}-\rho_1^{(k)}Y_{12}^{(k)}.$$

Когда клеевая прослойка между жесткими слоями отсутствует, в правой части (5.38) следует опустить подчеркнутые слагаемые, а в f_3 дополнительно ввести функцию [41] –

$$\pm q_{(k)}\chi_{(k)}, \tag{5.39}$$

которая позволяет учесть нормальную составляющую контактного давления $q_{(k)}$. Кроме того, считается, что на слой с индексом k контактное давление действует со знаком плюс, а на слой с индексом k+1 - со знаком минус. При этом контактное давление пропорционально трансверсальному обжатию в зоне контакта жестких слоев оболочки:

$$q_{(k)}=c_{(k)}\frac{E_{(k)}^{z}}{h_{(k)}}(w_{(k)}-h_{[k]}-w_{(k+1)}), \tag{5.40}$$

где $E_{(k)}^{z}$ – модуль упругости k-го слоя оболочки в направлении нормали, $c_{(k)}$ - коэффициент понижения жесткости обжатия k-го слоя оболочки. Конструктивная нелинейность, связанная с появлением зоны контакта между слоями оболочки при действии внешней нагрузки, учитывается при помощи множителя:

$$\chi=[1+\mathrm{sign}(w_{(k)}-h_{[k]}-w_{(k+1)})]/2. \tag{5.41}$$

Здесь $h_{[k]}$ - величина зазора между жесткими слоями.

Систему дифференциальных уравнений (5.40) – (5.41) следует дополнить граничными условиями – по шесть на каждом торце жесткого слоя оболочки вращения. С учетом введенных обозначений они имеют вид

$$Y_j^{(k)}(\alpha_1^0)l_j + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^0)(1-l_j) = 0; \quad Y_j^{(k)}(\alpha_1^z)l_{j+6} + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^z)(1-l_{j+6}) = 0. \qquad (5.42)$$

Параметры l_j, $l_{j+6}\,(j = 1,2,...,6)$ принимают значения 0, 1 и определяют однородные как статические, так и кинематические граничные условия на торцах жестких слоев оболочки $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_1 = \alpha_1^z$.

При построении системы уравнений (5.37) – (5.38) применялись следующие геометрические соотношения для k-го жёсткого слоя:

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} + \frac{1}{2}\omega_1^{(k)}\omega_1^{(k)}; \ \varepsilon_{22}^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} + \frac{1}{2}\omega_2^{(k)}\omega_2^{(k)}; \ \varepsilon_{12}^{(k)} = \omega^{(k)} + \omega_1^{(k)}\omega_2^{(k)};$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{1}{A_1^{(k)}}\frac{d\omega_1^{(k)}}{d\alpha_1}; \ \chi_{22}^{(k)} = -\rho_1^{(k)}\omega_1^{(k)}, \ \chi_{12}^{(k)} = \frac{k_2^{(k)}}{A^{(k)}}\frac{du_2^{(k)}}{d\alpha_1} + k_2^{(k)}\rho_1^{(k)}u_2^{(k)}; \qquad (5.43)$$

$$\psi_{11}^{(k)} = \frac{1}{A^{(k)}}\frac{d\psi_1^{(k)}}{d\alpha_1}; \ \psi_{22}^{(k)} = -\rho_1^{(k)}\psi_1^{(k)}; \ \psi_{12}^{(k)} = \frac{1}{A^{(k)}}\frac{d\psi_2^{(k)}}{d\alpha_1} + \rho_1^{(k)}\psi_2^{(k)},$$

Где $\varepsilon_1^{(k)} = \frac{1}{A^{(k)}}\frac{du_1^{(k)}}{d\alpha_1} + k_1^{(k)}w^{(k)}; \ \varepsilon_2^{(k)} = k_2^{(k)}w^{(k)} - \rho_1^{(k)}u_1^{(k)};$

$$\omega^{(k)} = \frac{1}{A^{(k)}}\frac{du_2^{(k)}}{d\alpha_1} + \rho_1^{(k)}u_2^{(k)};$$

$$\omega_1^{(k)} = k_1^{(k)}u_1^{(k)} - \frac{1}{A^{(k)}}\frac{dw^{(k)}}{d\alpha_1}; \ \omega_2^{(k)} = k_2^{(k)}u_2^{(k)}; \ \rho_1^{(k)} = \frac{1}{A^{(k)}B^{(k)}}\frac{dB^{(k)}}{d\alpha_1}. \qquad (5.44)$$

Для клеевой прослойки компоненты деформаций поперечного сдвига и обжатия имеют вид:

$$e_{13}^{[k]} = \frac{h_{[k]} + h_{(k)}}{h_{[k]}}[\frac{1}{A^{(k)}}\frac{d}{d\alpha_1}(w^{(k+1)} + w^{(k)})] +$$
$$+\frac{1}{2h_{[k]}}(u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}) - \frac{1}{4h_{[k]}}(h_{(k+1)}\omega_1^{(k+1)} + h_{(k)}\omega_1^{(k)}), (1 \leftrightarrow 2); \qquad (5.45)$$

$$e_{33}^{[k]} = \frac{1}{h_{[k]}}(w^{(k+1)} - w^{(k)}). \qquad (5.46)$$

Выражения для трансверсальных и сдвиговых усилий в мягких слоях запишутся:

$$N^{[k]}=E_z^{[k]}(w^{(k+1)}-w^{(k)});$$

$$Q_1^{[k]}=G^{[k]}[\frac{h_{(k)}+h_{[k]}}{2}\frac{1}{A^{(k)}}\frac{d}{d\alpha_1}(w^{(k+1)}+w^{(k)})+u_1^{(k+1)}-u_1^{(k)}-$$
$$-\frac{1}{2}(h_{(k+1)}\omega_1^{(k+1)}+h_{(k)}\omega_1^{(k)})] \quad (1\leftrightarrow 2). \qquad (5.47)$$

В соотношениях (5.37) – (5.47) приняты допущения

$$A^{[k]}\approx A^{(k)}\approx A^{[k+1]}\approx A^{(k+1)};\; 1\pm(h_{(k)}+h_{[k]})k_1^{(k)}\approx 1.$$

На основе представленных выше зависимостей геометрически нелинейной дискретно-структурной теории слоистых элементов конструкций исследовано напряженно-деформированное состояние анизотропных пластин и оболочек. Сопряжение жестких анизотропных слоев на межслойных границах моделируются тремя расчетными моделями, в которых учитываются условия их идеального и ослабленного контакта.

5.3.4. Линеаризация разрешающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Следуя [70], решение геометрически нелинейной задачи несложно получить на основе итерационного метода Ньютона–Канторовича. Можно представить систему дифференциально-алгебраических соотношений в виде:

$$\Phi\left(\vec{Y}\right)=0, \qquad (5.48)$$

где Φ – дифференциально-алгебраический оператор. Тогда согласно методу Ньютона–Канторовича система (5.48) перепишется

$$\Phi\left(\vec{Y}+\Delta\vec{Y}\right)=\Phi\left(\vec{Y}\right)+\Phi'_y\left(\vec{Y}\right)\Delta\vec{Y}=0\,. \qquad (5.49)$$

Здесь $\Delta\vec{Y}$ – малое приращение вектор – функции $\vec{Y}$.

Задавая два последовательных приближения в виде $\vec{Y}^{(i+1)}=\vec{Y}^{(i)}+\Delta\vec{Y}$,

систему (5.49) можно переписать

$$\Phi\left(\vec{Y}^{(i)}\right)+\Phi'_y\left(\vec{Y}^{(i)}\right)\left(\vec{Y}^{(i+1)}-\vec{Y}^{(i)}\right)=0\,. \qquad (5.50)$$

Оператор $\Phi\left(\vec{Y}\right)$ (5.48) следует представить в форме

$$\Phi\left(\vec{Y}\right)=\Phi^{л}\left(\vec{Y}\right)+\Phi^{н}\left(\vec{Y}\right)=0, \qquad (5.51)$$

где $\Phi^{л}(\vec{Y})$, $\Phi^{н}(\vec{Y})$ – линейный и нелинейный операторы. Тогда, учитывая соотношения $\Phi_{Y}^{л\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i)} = \Phi^{л}(\vec{Y}^{(i)})$, $\Phi_{Y}^{л\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i+1)} = \Phi^{л}(\vec{Y}^{(i+1)})$, составим вместо системы (5.50) итерационную схему метода Ньютона-Канторовича

$$\Phi^{л}(\vec{Y}^{(i+1)}) + \Phi_{Y}^{н\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i+1)} + \Phi^{н}(\vec{Y}^{(i)}) - \Phi_{Y}^{н\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i)} = 0. \qquad (5.52)$$

Таким образом, на $(i+1)$ – ой итерации метода Ньютона - Канторовича система сохраняет тот же вид, исключая нелинейные слагаемые.

Итерационный процесс заканчивается, когда разность двух последних величин оказывается менее заданной величины ε. В качестве первого приближения рекомендуется использовать решение линейной краевой задачи.

5.4. Прочность многослойных тонкостенных элементов в форме оболочек вращения

5.4.1. Баллон из стеклопластика. Рассмотрена стеклопластиковая оболочка, которая состоит из цилиндрической части длиной $l = 2{,}163\,м$ и радиуса $R = 0{,}188\,м$, а также днищ, выполненных в виде полусфер. Полезный объем баллона равен $V = 0{,}2\,м^3$. Оболочка изготавливается методом намотки однонаправленной стеклоленты со следующими характеристиками: $E_1 = 5{,}486 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1{,}252 \cdot 10^4$ МПа, $E_3 = 1{,}431 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0{,}058$, $\nu_{13} = 0{,}394$, $\nu_{23} = 0{,}394$, $G_{12} = 3{,}925 \cdot 10^3$ МПа, $G_{23} = 2{,}683 \cdot 10^3$ МПа, $G_{13} = 4{,}293 \cdot 10^3$ МПа. В целом такой баллон включает двадцать однонаправленных слоёв, двенадцать из которых наматываются в кольцевом направлении и восемь – перекрестно армированных спиральных слоя. Угол намотки спиральных слоев составляет $\pm 24°$. Толщина слоя составляет $\delta = 0{,}0005\,м$. При помощи методики **[216]** определялись технические постоянные всего пакета слоёв стеклопластика как композиционного материала с одной плоскостью упругой симметрии: $E_1 = 2{,}358 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 3{,}747 \cdot 10^4$ МПа, $E_3 = 1{,}55 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0{,}092$, $\nu_{13} = 0{,}367$, $\nu_{23} = 0{,}352$, $G_{12} = 6{,}702 \cdot 10^3$ МПа, $G_{23} = 3{,}756 \cdot 10^3$ МПа, $G_{13} = 3{,}22 \cdot 10^3$ МПа.

Напряженное состояние точек внутренней поверхности баллона при нтенсивности внутреннего давления $q = 20\,МПа$ показано на рис. 5.6. Следует отметить, что на границе соединения сферических днищ и цилиндрической оболочки имеет место краевой эффект. Наблюдается значительное увеличение касательных напряжений поперечного сдвига σ_{13} в точках срединой поверхности баллона (рис. 5.7).

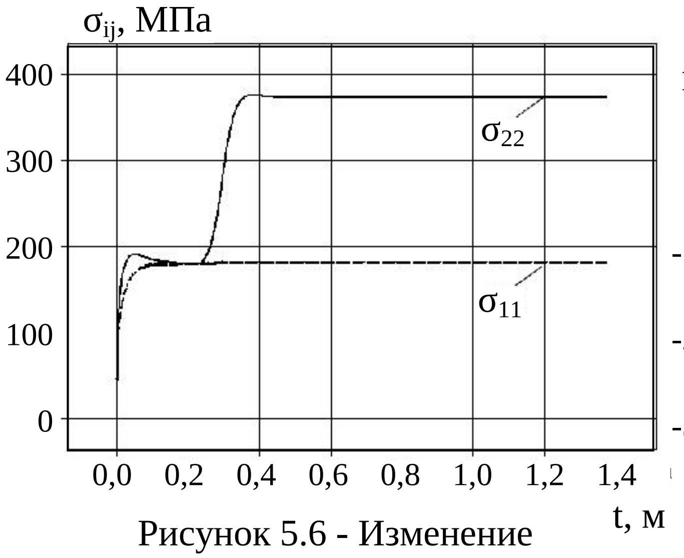


Рисунок 5.6 - Изменение меридиональных σ_{11} и окружных σ_{22} напряжений по длине стеклопластиковой оболочки

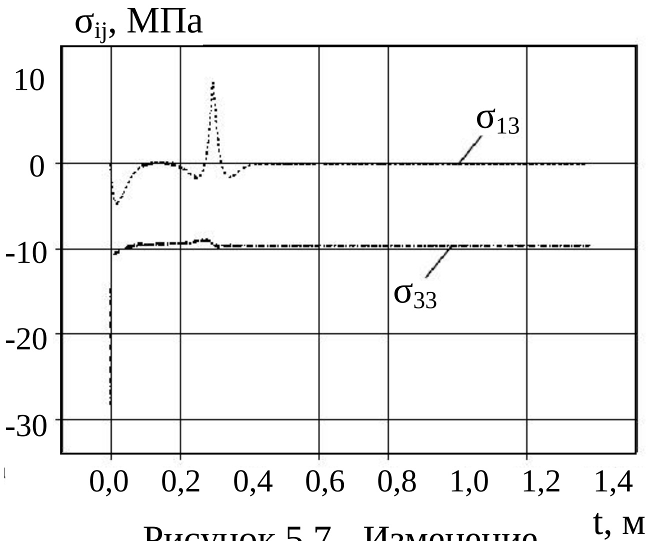


Рисунок 5.7 - Изменение напряжений поперечного сдвига σ_{13} и трансверсального обжатия σ_{33} по длине стеклопластиковой оболочки

При исследовании несущей способности баллона рассматривалось два этапа разрушения армированной оболочки. На первом этапе определялась величина давления, когда происходит разрушение связующего. Для этого использовался модифицированный полиноминальный критерий прочности (5.14), включающий поперечные касательные σ_{i3} (i=1,2) и трансверсальные напряжения σ_{33}.

Для рассматриваемой структуры стеклопластика были приняты следующие значения предельных характеристик прочности материала: $\sigma_{11}^{+} = 290\,МПа$, $\sigma_{22}^{+} = 490\,МПа$, $\sigma_{11}^{-} = 200\,МПа$, $\sigma_{22}^{-} = 290\,МПа$, $\sigma_{33}^{+} = 50\,МПа$, $\sigma_{33}^{-} = 100\,МПа$, $\sigma_{12}^{+} = 110\,МПа$, $\sigma_{13}^{+} = \sigma_{23}^{+} = 35\,МПа$. Разрушение связующего происходило в точках срединной поверхности при давлении $q_1^{*} = 16\,МПа$ (рис. 5.6). Дальнейший расчёт несущей способности проводился на основе второй расчетной модели оболочки. На втором этапе фиксировалось предельное давление $q_2^* = 23\,МПа$, при котором происходило разрушение стеклопластика в точках внутренней поверхности цилиндрической оболочки. При этом вместо (5.14) использовался критерий прочности для случая плоского напряженного состояния в точке (5.12).

5.4.2. Напряженное состояние на границе контакта стеклопластиковой оболочки и металлической обшивки. Между отдельными сопряжёнными слоями дюралюминиевой обшивки и внутренней стеклопластиковой оболочки комбинированного газового баллона в районе сферического днища имеет место односторонний контакт. Задача определения контактных давлений на соприкасающиеся поверхности разно модульных тонкостенных элементов представляет практический интерес, так как в этой области возможно возникновение краевых эффектов и, как следствие, резкое увеличение нормальных и касательных напряжений.

Моделирование одностороннего контакта металлической и стеклопластиковых сфер днища было проведено по трем расчетным схемам, которые отличались друг от друга радиусом кривизны срединной поверхности наружной оболочки $R_1 = 0{,}11 м$ (первая схема), $R_1 = 0{,}12 м$ (вторая схема) и $R_1 = 0{,}17 м$ (третья схема). Радиус кривизны стеклопластиковой оболочки не изменялся и был равен $R_1 = 0{,}10\,м$. Функция зазора между сферическими оболочками, центры кривизн которых находятся по одну сторону от точки их соприкосновения в полюсе, дана в [43]. Решение контактной задачи получено на основе методики, изложенной во второй и третьей главах. Торцы контактирующих сферических оболочек считались шарнирно опертыми, а относительно полюса были заданы условия симметрии. Изнутри сфера нагружена гидростатическим давлением $q = 20\,МПа$.

Картина напряженно – деформированного состояния элементов баллона для трех расчетных моделей без учета влияния сил трения в области контакта представлена на рис. 5.8 – 5.10. На основе предложенных расчетных моделей, а также разработанных методов расчета такого класса задач, на языке программирования ФОРТРАН создан пакет прикладных программ.

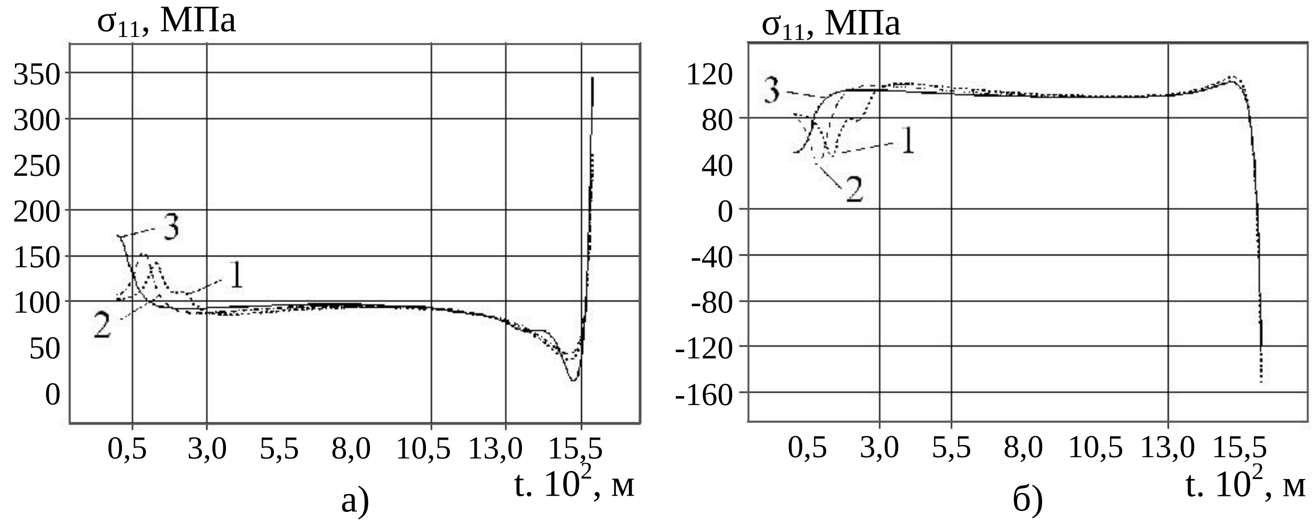


Рисунок 5.8 - Изменение меридиональных напряжений по длине сферы из стеклопластика: а) – внутренняя поверхность; б) – наружная поверхность

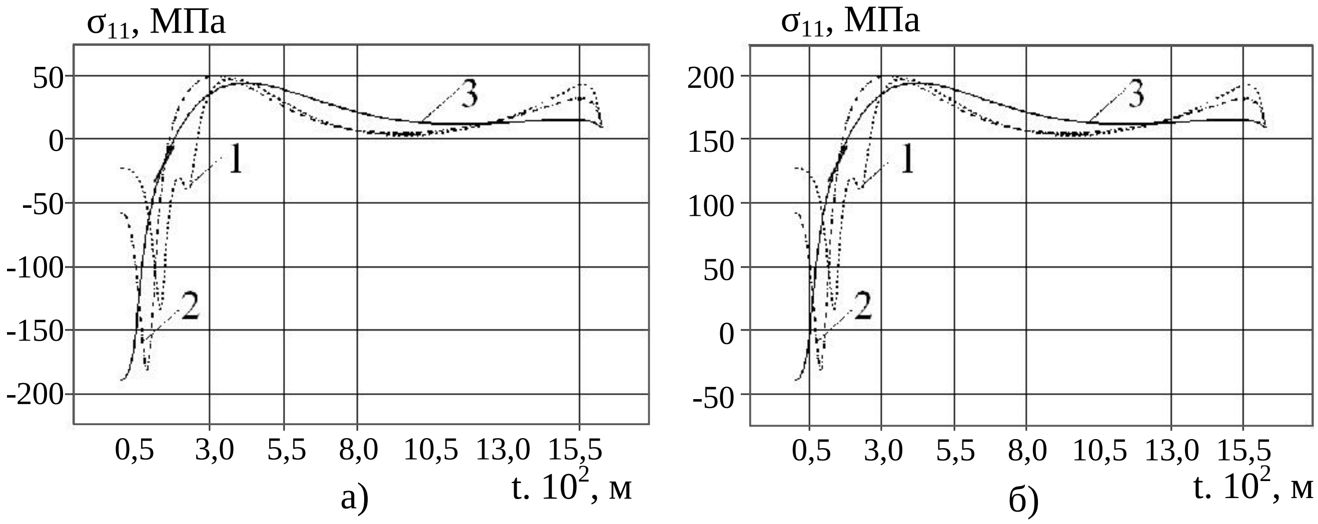


Рисунок 5.9 - Изменение меридиональных напряжений по длине сферы из дюралюминия: а) – внутренняя поверхность; б) – наружная поверхность

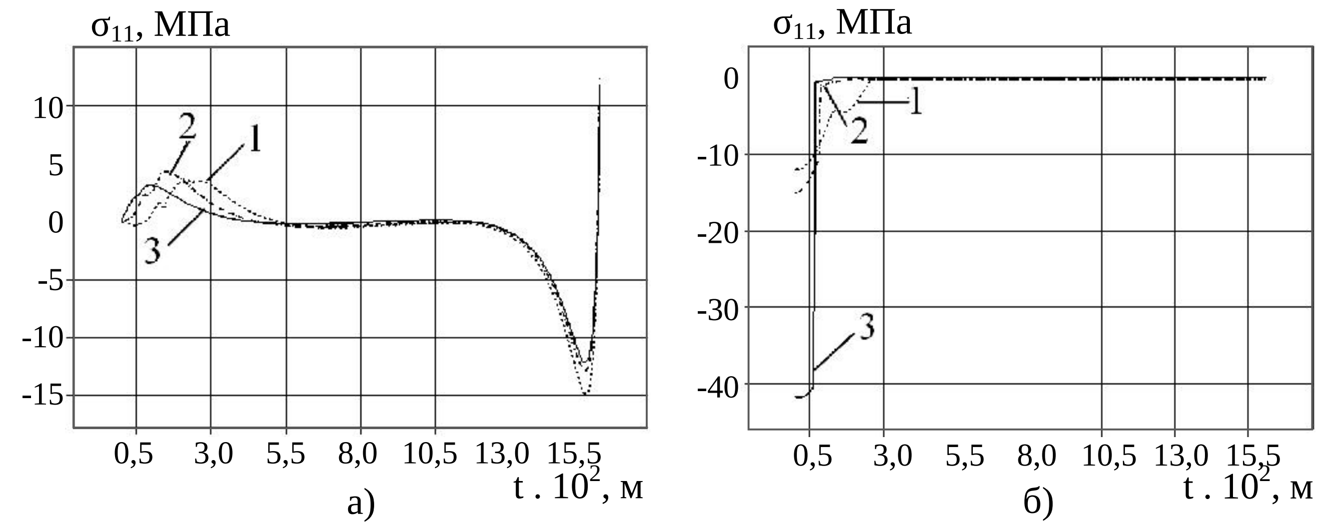


Рисунок 5.10 - Изменение напряжений поперечного сдвига и обжатия на границе контакта сопряженных слоев: а) – напряжения поперечного сдвига; б) – трансверсальные напряжения

Анализ результатов расчета рассматриваемой контактной задачи рис. 5.8 – 5.10 показывает существенное влияние площади контактирующих поверхностей на величину меридиональных и трансверсальных напряжений. С увеличением площади контакта заметно уменьшается их величина.

5.4.3. Прочность торовых баллонов высокого давления. В настоящее время весьма перспективным направлением [217] являются работы, связанные с созданием композитных торовых баллонов для дыхательных аппаратов. Как показывают исследования М.А.Комкова (МГТУ им.Н.Э.Баумана), замена цилиндрических баллонов на равновеликие композитные торовые баллоны дает значительный экономический эффект, а также снижение веса конструкции. Параметр конструктивного совершенства $W_{об} = q_{раз} V_{бал} / m_{бал}$ ($V_{бал}$, $m_{бал}$ – объем и масса баллона) стеклопластиковой силовой оболочки торового баллона равен 183 кДж/кг, в то время как для аналогичной стальной оболочки (марка стали Х18Н10Т) значение этого параметра равно 31 кДж/кг . Тем не менее, указанные преимущества до настоящего времени остаются нереализованными из-за нерешенного ряда задач проектирования и технологии намотки. К таким задачам можно отнести создание надежной методики расчета торовых баллонов слоистой структуры и переменной толщины в меридиональном направлении с наличием межслойных дефектов структуры материала. Указанная задача решается на основе первой модели дискретно-структурной теории и прикладного метода расчета несущей способности слоистых тонкостенных элементов, предложенного в шестой главе диссертации.

Оценка несущей способности торовых баллонов из композиционных материалов, которые изготавливаются методом намотки, на основе достаточно простых аналитических зависимостей, проведена в [217]. Рассматривался торовый баллон с продольно-поперечной схемой армирования. Стеклопластиковая оболочка изготавливалась методом намотки двух продольных и трех поперечных слоев лентами, набранными из 10 нитей ВМ–1. Максимальный диаметр торового баллона равен $2r_C = 0{,}403$ м и диаметр сечения $2R = 0{,}083$ м (рис. 5.11). Толщина одного слоя составляла $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ м. Толщина тора в поперечном сечении в направлении меридиана изменяется по закону – $h_1 = h_{10} \dfrac{a+1}{a + a\cos\alpha}$, где h_1 – толщина слоя при угле $\alpha = 0$, $a = r_c / R$.

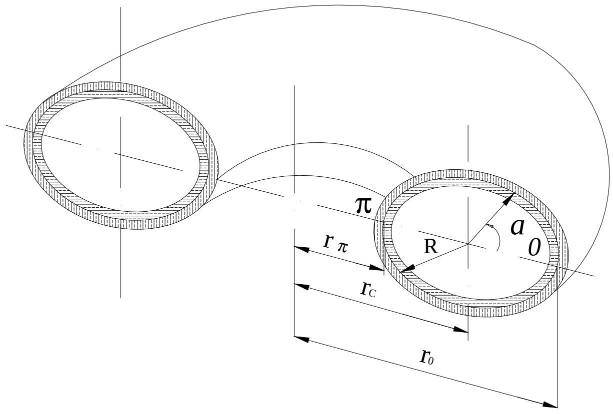


Рисунок 5.11 – Композитный торовый баллон

Механические характеристики однонаправленного стеклопластика по результатам испытаний кольцевых образцов-свидетелей: $\sigma_к = 1620$ МПа, $E_к = 60$ ГПа. Остальные приведенные технические параметры стеклопластика определялись по методике подраздела 3.1.

Задача решалась с учетом симметрии торовых баллонов на основе третьей расчетной модели (рис. 5.12) и первой расчетной модели дискретно-структурной теории многослойных оболочек (рис. 5.13, 5.14). Согласно первой расчетной модели, рассматривалась двухслойная оболочка при действии внутреннего давления $q = 3{,}0$ МПа.

Расчетные кривые напряженно деформированного состояния тора вдоль меридиана $0 \le \alpha \le \pi/2$ показаны на рис. 5.12 – 5.14. Цифрами на рисунке указаны напряжения на лицевых поверхностях тора, полученных по первой и третьей моделям. Становится очевидным, что в случае безмоментного напряженного состояния оболочки выбор модели практически не влияет на результат.

Как видно из представленных рисунков, максимальные напряжения и прогибы в торовой оболочке с продольно-поперечной схемой армирования имеют

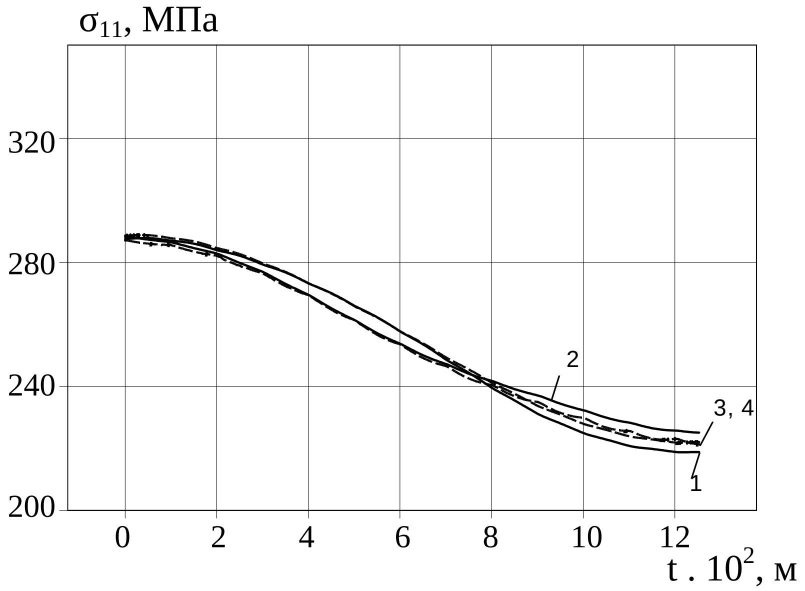
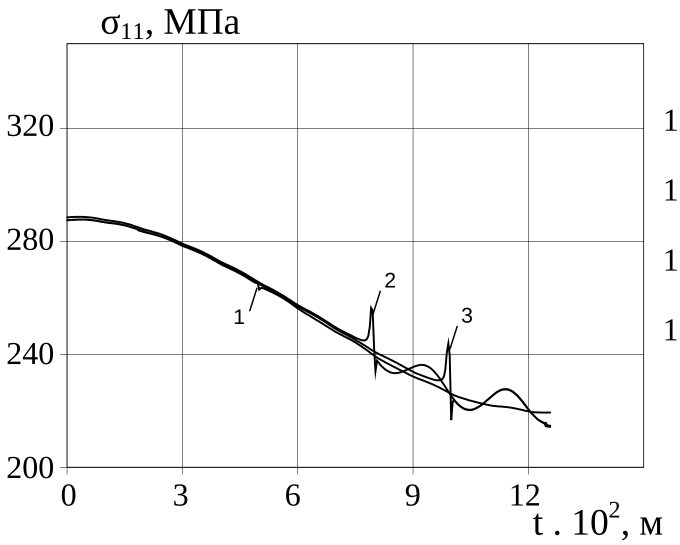


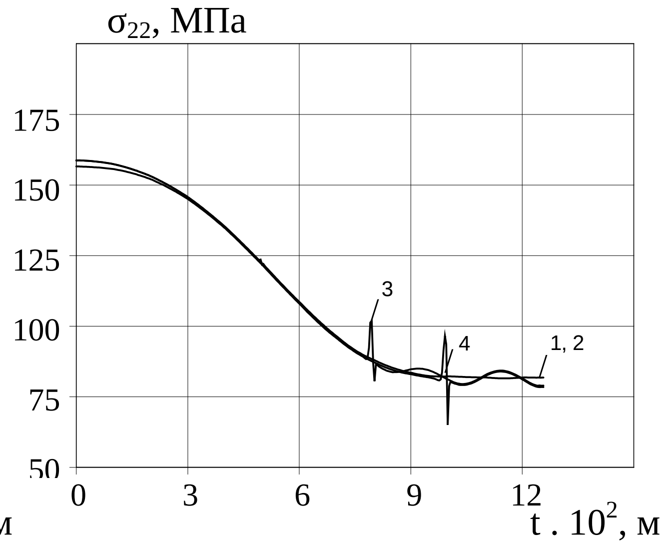
Рисунок 5.12 - Изменение меридиональных напряжений вдоль меридиана тора (третья модель)

место вблизи вершины тора. С этой области начинается разрушение оболочки тора, что совпадает с результатами эксперимента [217].

На границах участков расслоения оболочки торового баллона возможно возникновение краевого эффекта (рис. 5.13). Амплитуда напряжений в зоне краевого эффекта увеличивается с ростом длины участка расслоения.



а)



б)

Рисунок 5.13 - Изменение напряжений вдоль меридиана тора (первая модель) при наличии кольцевых участков непроклея: а) – меридиональные напряжения; б) – окружные напряжения

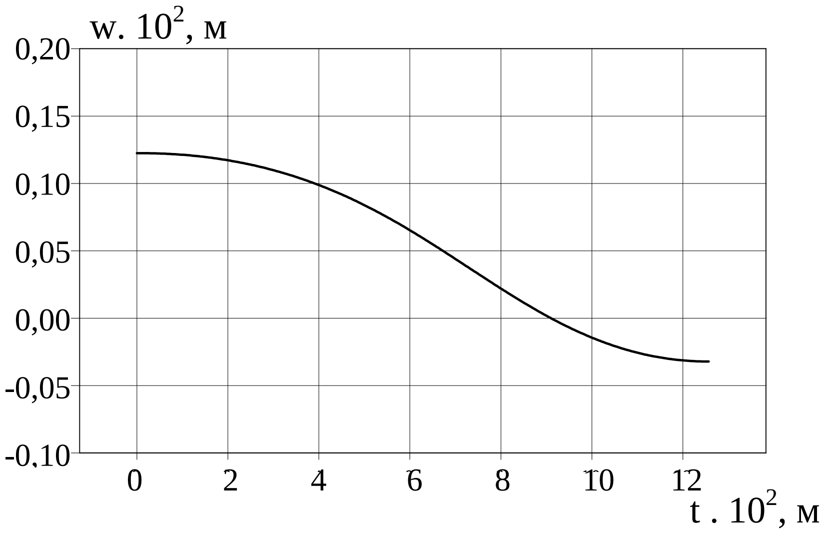


Рисунок 5.14 - Изменение прогиба оболочки вдоль меридиана тора (первая модель).

Полученная величина предельного внутреннего давления отличается от экспериментального значения, приведенного в работе М.А.Комкова, не более чем на 5%.

5.4.4. Расчет на прочность стеклопластиковой трубы в зоне фланцевых соединений. Стеклопластиковые трубопроводы имеют четыре вида соединений:

– раструбно-шиповое соединение с двойным кольцевым уплотнением, что обеспечивает быструю и надежную сборку труб и фасонных элементов. В зависимости от характеристик транспортируемой по трубопроводу среды применяются кольцевые уплотнения из различных марок резиновых смесей;

– раструбно-шиповое соединение с двойным кольцевым уплотнением и стопорным элементом, который используется для компенсации действия на трубопровод осевых сил;

– фланцевое соединение, применяемое для соединения элементов стеклопластикового трубопровода с металлическими трубопроводами и арматурой;

– клеевое стыковое соединение, которое выполняется послойным нанесением на гладкие торцы труб пропитанных полиэфирным связующим "холодного" отверждения армирующих стекло материалов. В отличие от остальных видов соединений клеевое является неразборным.

Согласно [218] соединительные детали изготавливают методом непрерывной пространственной компьютерной намотки стеклоровинга, пропитанного эпоксидной смолой с отвердителем на оправку соответствующей формы. Фланцы, муфты, ниппели, переходники и адаптеры изготавливают методом спиральной намотки. Соединения изготавливаются заодно целое с деталью. Присоединительные размеры стеклопластиковых фланцев выполняются по ГОСТ 12815-80 [219]. Прочность соединений и соединительных деталей должна быть не ниже прочности труб.

Трубы и соединительные детали сертифицированы Американским Нефтяным Институтом (API лицензия № 15LR – 0006.1), а также разрешены к применению Госгортехнадзором РФ на объектах ТЭК и нефтегазовой промышленности России. При экспериментальных исследованиях предельного состояния стеклопластиковых труб, выпускаемых ООО “Стеклопластиковые трубы” (глава 4), первое разрушение стеклопластика было зафиксировано при внутреннем давлении $p_I^{*Э} = 3{,}5\text{МПа}$ в районе фланцевого соединения. Геометрические размеры фланца, изготовленного из стали, показаны на рис. 5.15. Размеры сечения части трубы в продольном направлении приведены на рис. 5.16.

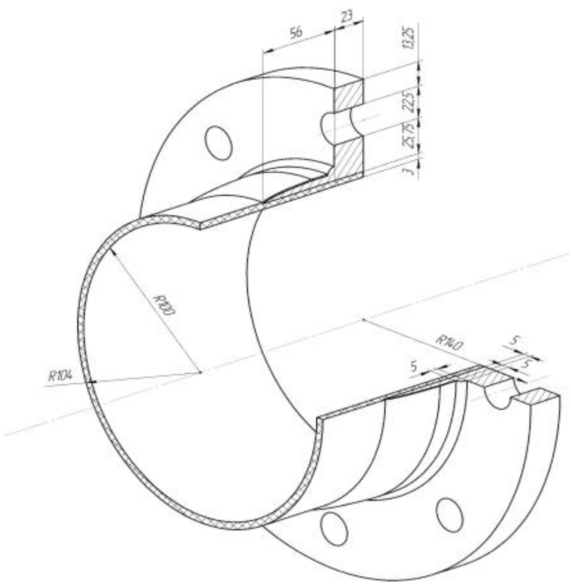


Рисунок 5.15 - Геометрические размеры фланца

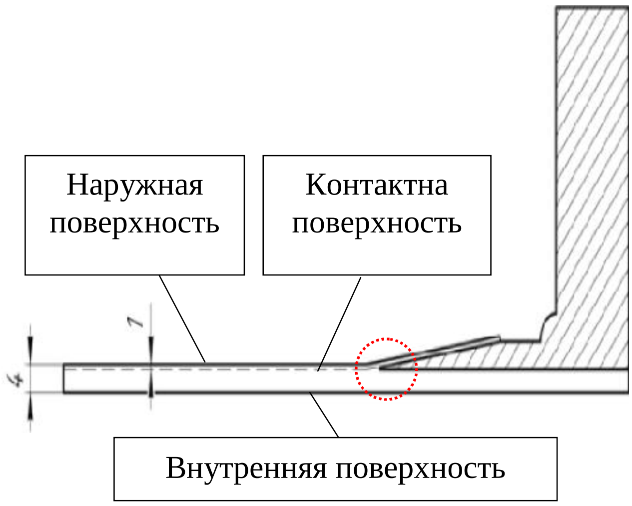


Рисунок 5.16 - Сечение части трубы в районе фланца

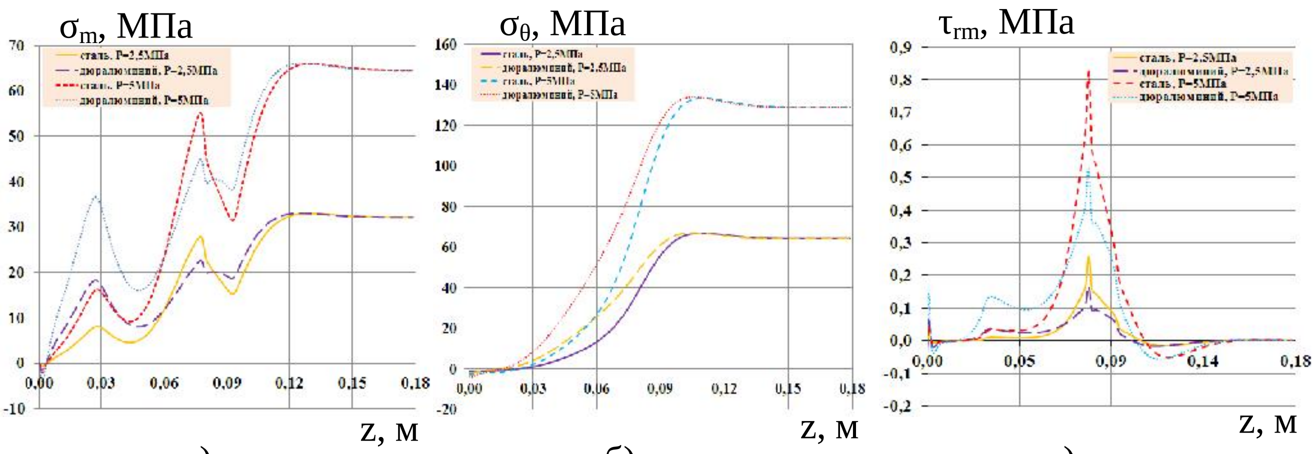
Как уже отмечалось, испытываемая стеклопластиковая труба представляла собой многослойную цилиндрическую оболочку диаметром 200 мм с толщиной стенки 4мм и длиной – 1200 мм. Технические упругие постоянные и предельные характеристики стеклопластика приведены в табл. 4. Физико-механические характеристики стального фланца имели следующие значения: E= 210000 МПа, ν= 0,25.

В данном подразделе проведены теоретические исследования влияния жесткости фланцев на напряженно-деформированное состояние стеклопластиковых труб в зоне их соединения. В качестве альтернативы стальному фланцу рассматривался фланец, выполненный из дюралюминия В–95: E= 70000 МПа, ν= 0,3. Следует отметить, что значение модуля упругости дюралюминия в три раза меньше величины модуля упругости стали.

На основе метода перемещений составлены алгоритм и программа расчета на прочность многослойных оболочек вращения сложной формы. Для оценки достоверности полученных теоретических и экспериментальных данных использован метод конечных элементов, реализованный в программном комплексе ANSYS. Задача решается в осесимметричной постановке. Стеклопластиковая труба рассматривается как многослойная оболочка вращения (рис. 5.16).

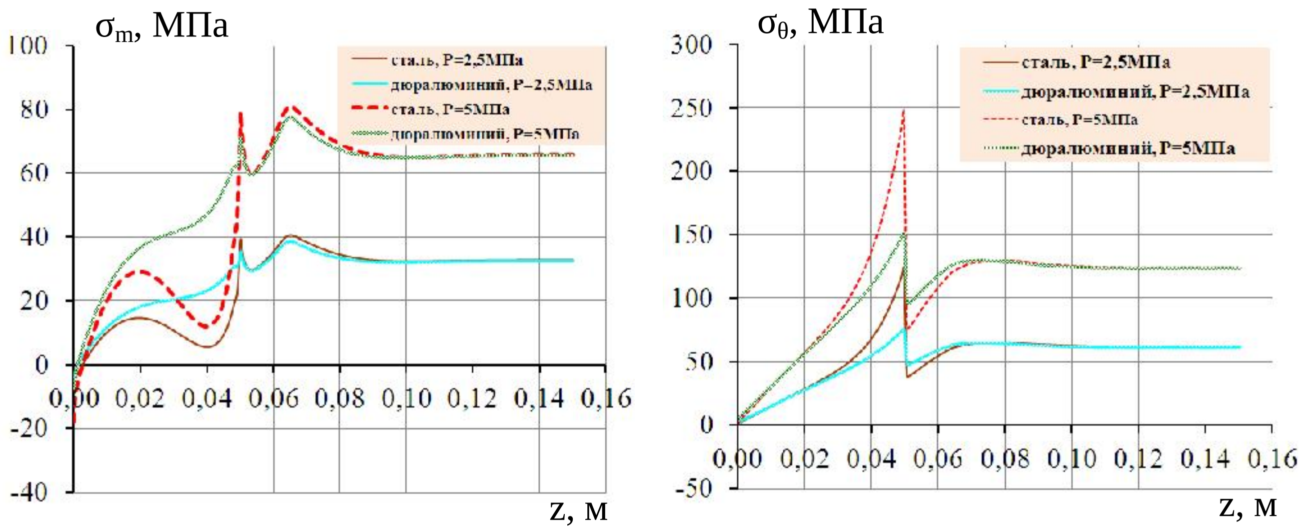
Результаты расчета напряженного состояния стеклопластиковой трубы в зоне фланцевого соединения представлено в виде графиков на рис. 5.17 – 5.21. Исследовалось напряженное состояние в точках внутренней, наружной и контактной поверхностям трубы (рис. 5.16) при двух значениях внутреннего давления – $p = 2{,}5 МПа$ и $p = 5{,}0 МПа$.

Анализ представленных результатов показывает, что максимальные напряжения возникают в точках контакта металлического фланца и стеклопластиковой трубы вдоль поверхности контакта. При этом величины поперечных касательных и трансверсальных напряжений значительно превышают аналогичные напряжения, возникающие на внутренней и внешней поверхности трубы, при действии одной и той же нагрузки.



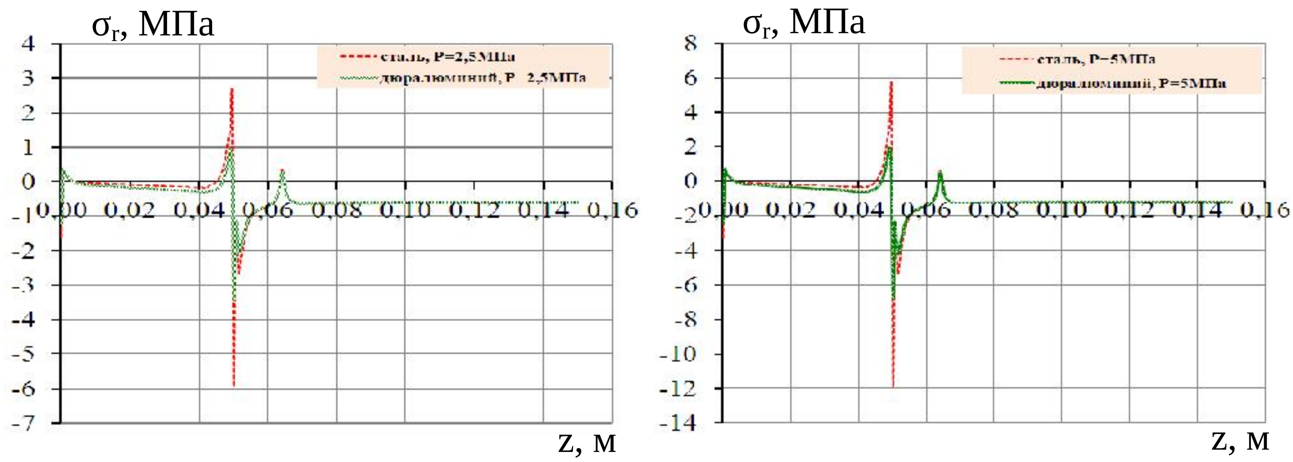
а) б) с)

Рисунок 5.17 - Графики изменения меридиональных напряжений σ_m , окружных напряжений σ_θ , касательных напряжений τ_{rm} вдоль внутренней поверхности трубы в зоне фланцевого соединения



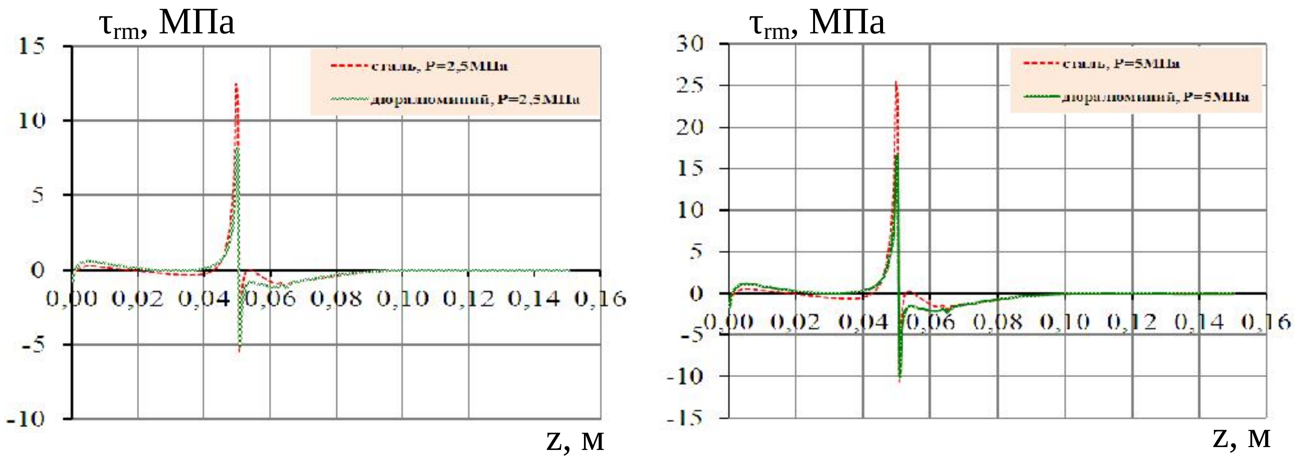
а) б)

Рисунок 5.18 - График изменения меридиональных напряжений σ_m , окружных напряжений σ_θ вдоль контактной поверхности трубы в зоне фланцевого соединения



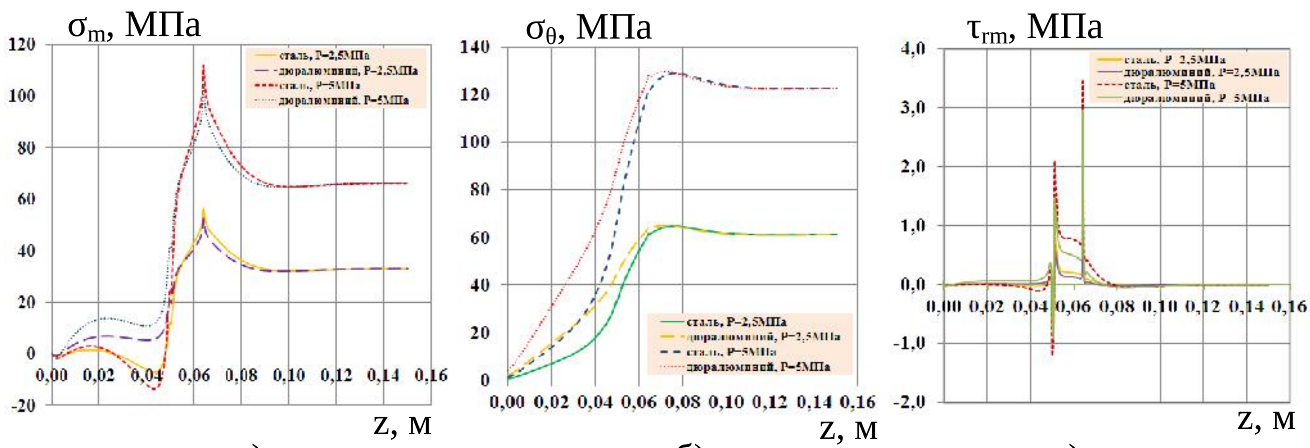
а) б)

Рисунок 5.19 - График изменения трансверсальных напряжений σ_r вдоль контактной поверхности трубы в зоне фланцевого соединения



а) б)

Рисунок 5.20 - График изменения касательных напряжений τ_{rm} вдоль контактной поверхности трубы в зоне фланцевого соединения



а) б) с)

Рисунок 5.21 - График изменения меридиональных напряжений σ_m , окружных напряжений σ_θ , касательных напряжений τ_{rm} вдоль внешней поверхности трубы в зоне фланцевого соединения

Сравнивая значения касательных и трансверсальных напряжений, которые возникают в точках контакта стальных и дюралюминиевых фланцев со стеклопластиковой оболочкой, можно отметить, что указанные напряжения отличаются друг от друга почти в 1,5 раза. Так, например, при z = 0,05м и $p = 2{,}5\text{МПа}$ поперечные касательные напряжения равны: для стальных фланцев – τ_{rm} = 12,39 МПа; для дюралюминиевых фланцев – τ_{rm} = 8,19 МПа.

Для определения теоретического значения предельного давления, при котором происходит разрушение стеклопластиковой трубы в точках поверхности ее контакта с металлическими фланцами, использовался модифицированный полиномиальный критерий прочности (5.14). Полученные теоретические значения величин предельного давления равны: для стальных фланцев – $p_{IC}^{*T} = 3{,}4\text{МПа}$; для дюралюминиевых фланцев – $p_{IД}^{*T} = 4{,}9\text{МПа}$.

Таким образом, варьируя жёсткостью фланцев, можно достичь оптимальных условий работы рассматриваемой конструкции стеклопластиковой трубы.

5.5. Выводы по пятой главе

В пятой главе на основе метода ортогональной прогонки С.К.Годунова разработан алгоритм решения задач прочности и несущей способности тонкостенных осесимметричных конструкций сложной геометрии вдоль меридиана. На основе предложенных расчетных моделей, а также рассмотренных ранее алгоритмов расчета такого класса задач на языке программирования ФОРТРАН создан пакет прикладных программ.

Изучено напряжено-деформированное состояние новой конструкция комбинированного баллона высокого давления и проведены расчеты на прочность и несущую способность с учетом контактного взаимодействия внутренней стеклопластиковой оболочки и металлической обшивки.

Анализ напряжённого состояния баллона в районе сферических днищ, расчет которого проведен с учетом контактного взаимодействия оболочек из разномодульного материала, позволяет сделать вывод, что внутренняя стеклопластиковая оболочка (модуль упругости стеклопластика в три раза ниже модуля упругости дюралюминия) практически передаёт большую часть нагрузки на более жесткую внешнюю металлическую оболочку.

Для оценки несущей способности комбинированного баллона высокого давления предложена новая методика расчёта его конструкционной прочности. Применяя алгоритм пошагового нагружения и модифицированный тензорно-полиномиальный критерий прочности, который включает напряжения поперечного сдвига σ_{i3}^{-}, σ_{i3}^{+} $(i=1,2)$ и трансверсального отрыва или сжатия σ_{33}^{+}, σ_{33}^{-}, несложно найти момент разрушения связующего и нарушения статических и кинематических условий контакта между слоями.

Изучена несущая способность торовых баллонов из композиционных материалов, которые изготавливаются методом намотки. Как показывают исследования М.А.Комкова (МГТУ им.Н.Э.Баумана), замена цилиндрических баллонов на равновеликие композитные торовые баллоны дает значительный экономический эффект, а также снижает массу конструкции. Тем не менее, указанные преимущества до настоящего времени остаются нереализованными из-за ряда нерешенных задач проектирования и технологии намотки. К таким задачам можно отнести создание надежной методики расчета торовых баллонов слоистой структуры и переменной толщины в меридиональном направлении с наличием межслойных дефектов структуры материала. Указанная задача решается на основе первой модели дискретно-структурной теории и прикладного метода расчета несущей способности слоистых тонкостенных элементов, предложенного в третьей главе диссертации. Полученная величина предельного внутреннего давления отличается от экспериментального значения, приведенного в работе М.А.Комкова, не более чем на 5%.

Установлено влияние жесткости фланцев на напряженно-деформированное и предельное состояние стеклопластиковых труб в зоне их соединения.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе решены ряд важных научно-технических задач, которые включают в себя обоснование моделей и методов расчета на прочность и несущую способность многослойных оболочек вращения с межслойными дефектами структуры. Разработанные алгоритмы, программы, методики исследований и полученные на их основе теоретико-экспериментальные результаты показали наличие новых особенностей при решении рассмотренных задач.

1. Проведен анализ конструкторско-технической документации регламентирующий проектирование, изготовление и эксплуатацию стеклопластиковых труб, сосудов высокого давления, выполненных в форме многослойных оболочек вращения, который показал, что на основе современных методик расчета конструкций из композиционных материалов в странах СНГ идет активная работа по созданию отраслевых межгосударственных и национальных стандартов.

2. Построена расчетная модель деформирования многослойных оболочек вращения с неидеальным контактом сопряженных поверхностей соседних армированных слоев (зоны непроклеев, расслоений, проскальзывания); принято, что, когда условия непрерывности перемещений и напряжений (идеального контакта) при переходе от одного соседнего армированного слоя к другому не выполняются, допускается упругое проскальзывание по контактным поверхностям.

3. Получены новые численные решения геометрически линейной и нелинейной задачи о деформации тонкостенных элементов слоистой структуры при действии статической нагрузки с неидеальным межслойным контактом, выявлены основные закономерности изменения напряженного состояния и контактного давления в зоне локальных участков непроклея или расслоений. Показано, что напряженное состояние многослойных элементов, определенное на основе дискретно-структурной теории анизотропных оболочек, качественно отличается, а деформации – выше значений, найденных согласно структурно-непрерывной теории.

4. Разработана и апробирована экспериментально-теоретическая методика оценки достоверности основных положений и результатов работы; доказано, что уже на начальной стадии нагружения, особенно при деформациях продольно поперечного изгиба, структурно-непрерывная модель оболочек слоистой структуры неадекватно отображает работу таких конструкций из-за их низкой жесткости деформациям поперечного сдвига и обжатия. Предложен эффективный алгоритм определения приведенных физико-механических характеристик стеклопластиковых труб.

5. Дано решение задачи одностороннего контакта двух анизотропных слоев оболочки, который может возникать в зоне участков непроклея или расслоений. Контактное давление между слоями определяется коэффициентом понижения жесткости обжатия и разностью нормальных перемещений смежных слоев. Полученные численные результаты доказывают то, что при увеличении указанного коэффициента зона контакта между слоями уменьшается с одновременным увеличением контактного давления на границе контакта. Установлено влияние жесткости фланцев на напряженно-деформированное состояние стеклопластиковых труб в зоне их соединения.

6. На основе модифицированного полиноминального критерия прочности для тонкостенных элементов из слоистых композитов с межслойными дефектами структуры материала, который включает предельные характеристики слоя на поперечный сдвиг и трансверсальное сжатие (отрыв), разработана методика оценки несущей способности многослойных армированных элементов.

7. Даны рекомендации относительно оптимальных схем армирования отдельных слоев и эффективных вариантов их закрепления по контуру, которые позволяют увеличить несущую способность конструкции в целом и создать условия равнопрочной работы материала слоистых элементов без увеличения массы.

8. Практическая ценность работы подтверждена актами внедрения результатов диссертации при расчете конструкций из композиционных материалов для химического машиностроения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Караш И. Т. Анализ напряжённого состояния многослойного полого цилиндра при действии внутреннего давления / С. М. Верещака, И. Т. Караш // Вісник Сумського державного університету. Серія “Технічні науки”.– 2010. – № 3. – С. 7 –19.

2. Караш И. Т. Прочность многослойного полого цилиндра с дефектами структуры / С. М. Верещака, И. Т. Караш // Вісник Сумського державного університету. Серія “Технічні науки”. – 2011. – № 1. – С. 70 – 83.

3. Karash E. T. Analysis stress state of multilayer hollow cylinder under axial forces and bending moments / S. M. Vershchaka, E. T. Karash // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ. – 2011. – Вип. 64. – С. 127 – 137.

4. Karash E. T. Stress state of multilayered hollow cylinder under internal and external pressure. / S. M. Vershchaka, R. A. AL-Allaf, E. T. Karash // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2011. – № 3(25).– С.40– 44.

5. Karash E. T. Delamination stresses in thin-wall structures of composite materials / S. M. Vershchaka, R. A. AL-Allaf, E. T. Karash // Праці Одеського політехнічного університету: науковий та науково-виробничий збірник. – Одеса. – 2011. – Вип. 1(38). – С. 24 – 30.

6. Karash E. T. Bundle stress theory of semicircular layered composite curved bars / S. M. Vershchaka, R. A. AL-Allaf, E. T. Karash // Праці Одеського політехнічного університету: науковий та науково-виробничий збірник. – Одеса. – 2011. – Вип. 2(36). – С. 19 – 27.

7. Караш И. Т. Моделирование одностороннего контакта металлической и стеклопластиковой оболочек / С. М. Верещака, А. В. Стрелец, И. Т. Караш // Вісник СевНТУ. Серія “Механіка, енергетика, екологія”: збірник наукових праць. – Севастополь. – 2011. – Вип. 120. – С. 304 – 305.

8. Karash E. T. Stress state analysis of multi-layered hollow cylinder under

bending moment / S. M. Vershchaka, E. T. Karash // Вісник СНАУ. Серія "Механізація та автоматизація виробничих процесів". – Суми. – 2011. – Вип. 8(23). – С. 104 – 109.

9. Караш И. Т. Напряженно-деформированное состояние многослойного плоского кривого бруса при изгибе с учетом идеального и неидеального контакта между слоями / С. М. Верещака, И. Т. Караш // Вісник Сумського державного університету. Серія "Технічні науки". – 2012. – №3. – С. 105 – 120.

10. Караш И. Т. Конструкционная прочность торообразных баллонов высокого давления / С. М. Верещака, Д. А. Жигилий, И. Т. Караш, А. В. Дейнека // Вісник СевНТУ. Серія "Механіка, енергетика, екологія": збірник наукових праць. – Севастополь. – 2012. – Вип. 133. – С. 329 – 334.

11. Karash E. T. Experimental study of thin-walled structural fiberglass elements / S. M. Vershchaka, E. T. Karash // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2012. – №2(28). – С.24 – 29.

12. Караш И. Т. Исследование механических свойств стеклопластикового цилиндра с межслойными дефектами структуры / С. М. Верещака, И. Т. Караш, Д. А. Жигилий, А.В. Дейнека // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2012. – №3(29). – С. 32 – 34.

13. Karash E. T. Experimental model of the semicircular laminated composite curved bars / S. M. Vershchaka, E. T. Karash // International Journal of Structronics & Mechatronics. – 2012. – Volume 1. – Issue 1. – P. 67 – 73.

14. Karash E. T. Effect of Change Angle the Template used in Tests of Composite Materials on the Value of Modulus of Elasticity / S. M. Vershchaka, D. A. Zhigiliy, E. T. Karash // International Journal of Science and Engineering Investigations.– May 2012. – Volume 1. – Issue 4. – ISSN: 2251 – 8843. – P. 19 – 23.

15. Karash E. T. Modeling of multi-layer composite material pipes under internal pressure / S. M. Vershchaka, E. T. Karash // International Journal of Structronics & Mechatronics. – 2012. – Volume 1. – Issue 2. – P. 1 – 12.

16. Karash E. T. The experimental model of the pipe of a composite material under the effect of internal pressure / S. M. Vershchaka, D. A. Zhigiliy, E. T. Karash // International Journal of Science and Engineering Investigations. – June 2012. –Volume 1. – Issue 5. – ISSN: 2251 – 8843. – P. 1 – 4.

17. Karash E. T. Modeling of Unilateral Contact of Metal and Fiberglass Shells / E. T. Karash // International conference Applied Mechanics and Manufacturing Technology (AMMT 2011). – August 4 – 7. – 2011. – Bali, Indonesia, Applied Mechanics and Materials. – 2011. –Vol. 87. – P. 206 – 208.

18. Karash E. T. Evaluation of load carrying ability of multilayer cylindrical shell / S. M. Vershchaka, E. T. Karash // International conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro composite structures. Politecnico di Torino. Department of Mechanical and Aerospace Engineering . – June 18 – 20. – 2012. – Italy. – P.10.

19. Стеклопластиковые трубы в России [АСТМ]. Демонстрационная версия. Объединение независимых консультантов и экспертов в области минеральных ресурсов, металлургии и химической промышленности. – Апрель. – 2008. – Москва. – 18 с.

20. ТУ 2296-250-24046478-95. Трубы стеклопластиковые. Научно-производственная фирма "Новация". – г. Пермь, шоссе Космонавтов 111.

21. ТУ У 30037621.001-99. Трубы стеклопластиковые для нефтегазодобывающей промышленности. – Харьков: АО "Композит-нефть".

22. ТУ 2296-001-26757545-2005. Трубы стеклопластиковые. ООО РосПромТехСнаб (Россия). – г. Челябинск, ул. Батумская 15 «А».

23. ASTM D4161 - 01(2010) Standard Specification for "Fiberglass" (Glass Fiber-Reinforced Thermosetting-Resin) Pipe Joints Using Flexible Elastomeric Seals, ICS Number Code 23.040.60.

24. АО «Актюбинский завод неметаллических труб». Краткая техническая характеристика выпускаемой продукции. – Актобе, 2005.– Республика Казахстан.

25. Fiberglass Pipe Design Manual in Avax Home, File Crop Search Engine 2007-2012. , AWWA M-45.

26. ASTM D3262 - 11 Standard Specification for "Fiberglass" (Glass Fiber-Reinforced Thermosetting-Resin) Sewer Pipe, ICS Code : ICS Number Code 27.040.20 (Plastic pipes), DOI: 10.1520/D3262-11 , ASTM D3262 (Plastics Standards), 1996-2012 ASTM.

27. ТУ 2296-001-26757545-2005. ООО «НПП «Завод стеклопластиковых труб». Стандарты производства стеклопластиковых труб [ASTM 33517].

28. DIN 16868-1: Wound and filled glass fibre reinforced polyester resin pipes - Дименсионс, Publication Date: Nov 1, 1994 SDO: DIN: Deutsches Institut Fur Normung E.V.

29. Gas cylinders — High pressure cylinders for the on-board storage of natural gas as a fuel for automotive vehicles: ISO 11439-2003. – [First edition 2000-09-15]. – ISO, 2003. – 80 p. (International Standard).

30. Баллоны высокого давления для сжатого природного газа, используемого в качестве моторного топлива на автомобильных транспортных средствах. Общие технические условия: ГОСТ Р 51753.

31. Transportable gas cylinders. Compatibility of cylinder and valve materials with gas contents : BS EN ISO 11114 [in 3 parts]. – BS, 1998. – (British Standards / European Norm). Part 1: Metallic materials; Part 2: Non-metallic materials; Part 3: Autogenous ignition test in oxygen atmosphere.

32. Информационный бюллетень "Национальной газомоторной ассоциации" (НГА) [Електронний ресурс]. - 2003 г. - №2 (13).

33. Усошин В. А. Современные тенденции проектирования и производства баллонов для компримированного природного газа [Електронний ресурс] / В. А. Усошин, В. В. Семенюга, Л. А. Попова, В. А. Третьяков // Информационный бюллетень "Национальной газомоторной ассоциации" (НГА). – 2001. - № 4 (8).

34. А. с. 69973 А UA, МПК F 17 С 1/04/ Комбінований балон тиску // Верещака Сергій Михайлович, Хворост Володимир Андрійович, Львів Геннадій Іванович, Верещака Олексій Сергійович (UA). – № 20031211882; заявл. 18.12.2003; опубл. 15.09.2004.

35. Елпатьевский А. Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов // А. Н. Елпатьевский, В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1972. - 168 с.

36. Васильев В. В. Нелинейные деформации оболочек вращения из упругих нитей при действии внутреннего давления / В. В. Васильев, А. Н. Елпатьевский // Расчёты на прочность. – М.: 1968. – № 13. – С. 128 - 142.

37. Елпатьевский А. Н. Расчёт цилиндрических оболочек из ориентированного стеклопластика с учётом внутренних трещин / А. Н. Елпатьевский, А. А. Дудченко - М.– Тр. МАИ, 1971.- Вып. 180. – 234 с.

38. Молодцов Г. А. Напряжённые элементы конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов / Г.А. Молодцов. – М.: Машиностроение, 1993. – 224 с.

39. Образцов И. Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композитных материалов / И. Ф. Образцов, В. В. Васильев, В. А. Бунаков – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.

40. Зиновьев П. А. К теории проектирования конструкций минимального веса / Зиновьев П. А. // Известия вузов. Машиностроение. - 1972.- № 12. – С. 32-36.

41. Ривлин Р. Проектирование сосудов высокого давления минимального веса, усиленных нерастяжимыми нитями/ Ривлин Р., Пипкин А. // Труды американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика.-1963.- № 1.- С. 123-129.

42. Болотин В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. - М.: Машиностроение, 1980. - 375 с.

43. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Б. Я. Кантор Б. Я. [Отв. ред. Подгорный А. Н. АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения]. - Киев: Наук. думка, 1990. -136 с.

44. Амиро И. Я. Ребристые цилиндрические оболочки // Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. - К.: Наук. думка, 1973. - 248 с.

45. Андреев Л. В. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации /Андреев Л. В, Ободан Н. И., Лебедев А. Г.- М.: Наука, 1988.-208 с.

46. Григолюк Э. И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники // Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. - М.: Наука, 1971. - Т. 5. - 271 с.

47. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ //Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. - К.: Вища шк., 1983.- 286 с.

48. Гузь А. Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов // А. Н. Гузь - К.: Наук. думка, 1990. - 630 с.

49. Гуляев В. И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач // Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П. - Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1978. - 192 с.

50. Дудченко А. А. Анизотропные многослойные пластины и оболочки //Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. - М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. - 1983. - Вып. 15. - С. 3 - 68.

51. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек /Кантор Б. Я.// - К.: Наук. думка, 1971. - 136 с.

52. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек /Л. М. Куршин // Расчет пространственных конструкций. - М.: Гос. изд-во лит. по строительству, архитектуре и строит. матер. - 1962. - Вып. 7. - С. 163 - 192.

53. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3 т. //Под ред. А. Н. Гузя. - К.: Наук. думка, 1982. - Т.1. - 368 с.

54. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3 т. //Под ред. А.Н.Гузя. - К.: Наук. думка, 1983. - Т.2. - 464 с.

55. Тетерс Г. А. Сложные нагружение и устойчивость оболочек из полимерных материалов // Г. А. Тетерс - Рига: Зинатне, 1969. - 274 с.

56. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек // С. А. Амбарцумян - М.: Наука, 1974. - 448 с.

57. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин // С. А. Амбарцумян - М.: Наука, 1987. - 360 с.

58. Григоренко Я. М. Задачи теории упругости неоднородных тел //Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. - К.: Наук. думка, 1991. - 216 с.

59. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс // В. И. Королев - М.: Машиностроение, 1965. -272 с.

60. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины // С. Г. Лехницкий. - М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1957. - 463 с.

61. Григолюк Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикл. механика. - 1972. - 8, №6. - С. 3 -17.

62. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пискунов, А. А. Рассказов // Прикл. механика. - 2002. - 38, № 2. - С. 22 - 57.

63. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.

64. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. and Phys. - 1944. - № 33. - P.184 - 191.

65. Гольденвейзер А. Л. О теории изгиба пластинок Рейсснера / А. Л. Гольденвейзер // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. - 1958. - № 4. - С. 102 - 109.

66. Новиков Е. А. Явные методы для жёстких систем. // Е. А. Новиков. - Новосибирск: Наука. Сиб. Предприятие РАН, 1997.- 195 с.

67. Прусаков А.П. О построении погранслоев для пологой оболочки энерго-асимтотическим методом / А. П. Прусаков // Прикл. механика. - 2000. - 36, № 2. - С. 99 - 104.

68. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости // А. И. Лурье - М.: Гостехиздат, 1955. - 492 с.

69. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек / С. А. Амбарцумян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ. - мат. наук. - 1964. - 17, № 3. - С. 29 - 53.

70. Амбарцумян С.А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки // С. А. Амбарцумян //Докл. АН Арм. ССР. - 1948. - 8, № 5. - С. 203 - 210.

71. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов // В. В. Васильев. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с.

72. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты / Б. Ф. Власов // Вестн. МГУ, 1957. - № 2. - С. 25 - 34.

73. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И. И. Ворович // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела. - М.: Наука, 1965. - Вып. 3. - С. 116 - 136.

74. Григоренко Я. М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек // Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. - М.: Наука, 1992. - 336 с.

75. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости // Я. М. Григоренко. - Киев: Наук. думка, 1973.- 228 с.

76. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках /Я.М.Григоренко // Прикл. механика. - 1996. № 6. - С. 3 - 40.

77. Гузь А.Н. Механика элементов конструкций // Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Бабич И. Ю. - К.: Наук. думка, 1983. - 484 с.

78. Донелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Донелл. - М.: Наука, 1982. - 567 с.

79. Муштари Х. М. К теории оболочек средней толщины /Х. М. Муштари, И. Г. Терегулов // Докл. АН СССР. - 1959. - 128, № 6.- С. 1144 - 1148.

80. Терегулов А. Г. К теории многослойных анизотропных оболочек / А. Г. Терегулов // Исследования по теории пластин и оболочек. - Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та. - 1970. - Вып. 6 - 7. - С. 762 - 767.

81. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells / P. M. Naghdi // Quarterly of Applied Mathematics. - 1957. - V.14, № 4. - P. 369 - 380.

82. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью // Б. Л. Пелех. - К.: Наук. думка, 1973. - 247 с.

83. Прусаков А. П. Нелинейные уравнения изгиба многослойных оболочек / А. П. Прусаков // Прикл. механика.- 1971. - 7, № 3. - С. 3 - 8.

84. Рябов О. Ф. Розрахунок багатошарових оболонок. - К.: Будівельник, 1968. - 96 с.

85. Абовский Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек // Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.-М.: Наука, 1978.-288 с.

86. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности // К. Васидзу - М.: Мир, 1987. - 542 с.

87. Галимов К.З. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко / К. З. Галимов // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. - С. 36 – 95

88. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике // С. Г. Михлин. - М.: Гостехиздат, 1957. - 476 с.

89. Рейсснер Г. К вариационному выводу уравнений теории оболочек / Г. Рейсснер // Прикл. механика. - М.: Мир, 1964. - № 2. - С. 83 - 88.

90. Vasiliev V. V. Modern conceptions of plate theory / V. V. Vasiliev // Composite structures. - 2000. - № 48. - P. 39 - 48.

91. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин / В. Г.Пискунов // Прикл. механика. - 1979. - 15, № 11. - С. 76 - 81.

92. Бондарь А. Г. Исследование изгиба многослойных пластин на основе уточненной теории / А. Г. Бондарь, А. О. Рассказов // Прикл. механика. -1982. - № 12. - с. 69 - 72.

93. Рассказов А.О. К уточнению сдвиговой теории слоистых пологих ортотропных оболочек / А.О.Рассказов, А.В.Бурыгина //Прикл. механика. - 1988. - 24, № 4. - С. 31- 37.

94. Рассказов А.О. Экспериментальное исследование статики и динамики многослойных пластин / А.О.Рассказов, И.И.Соколовская // Прикл. механика. - 1981. - 17, № 2. С. 65 – 70.

95. Рассказов А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек // Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. - К.: Вища шк., 1986. - 192 с.

96. Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин // Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. - М.: Машиностроение, 1988. - 280 с.

97. Пикуль В. В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек / В. В. Пикуль // Изв. АН СССР. МТТ. - 1992. - №3. - С. 18 - 25.

98. Пикуль В. В. Прикладная механика деформируемого твердого тела // В. В. Пикуль. - М.:Наука, 1989. - 221 с.

99. Пикуль В. В. Теория и расчет оболочек вращения // В. В. Пикуль. - М.:Наука, 1983. - 160 с.

100. Родионова В. А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек // Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. – СПб.:Изд-во С.- Петербург. ун-та, 1996. - 278 с.

101. Родионова В.А. Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия // Родионова В.А. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.-116 с.

102. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко, В. К. Присяжнюк, В. С. Сипетов, В. С. Карпиловский. - К.: Вища шк., 1987. - 200 с.

103. Швабюк В. И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах трасверсально-изотропных плит / В. И. Швабюк // Прикл. механика. - 1980. - 16, № 4. - С. 71 - 77.

104. Гуртовой А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А. Г. Гуртовой // Механика композитных материалов. - 1999. - 35, №1. - С. 13 - 28.

105. Григоренко Я. М. Статика анизотропных толстостенных оболочек // Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.- К.: Вища шк.,1985.-190 с.

106. Немиш Ю. Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела // Ю. Н. Немиш. - К.: Наук. думка, 1989.- 312 с.

107. Немиш Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел / Ю. Н. Немиш // Прикл. механика.- 2000.- 36, № 2. - С. 3 - 38.

108. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек // И. Н. Векуа. - М.: Наука, 1982. - 288 с.

109. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек // А. Л. Гольденвейзер. - М.: Наука, 1976. - 512 с.

110. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений // Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. - К.: Наук. думка, 1982. - 296 с.

111. Прусаков А. П. О построении теории изгиба пластин средней толщины энерго-асимптотическим методом / А. П. Прусаков // Прикл. механика. - 1975.- 11, № 10.- С. 44 - 51.

112. Григолюк Э. И. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: Сб. науч. статей. - М.: Изд-во МГУ, 2000. - С. 56 - 109.

113. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем / А. С. Сахаров, О. Л. Козак, А. В. Гондлях, С. Л. Мельников // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1984. - №44. - С.13 - 16.

114. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек // Баженов В. А. , Сахаров А. С., Гондлях А. В., Мельников С. Л. - К.: НДІ Будмеханіка, 1994.- 264 с.

115. Александров А. Я. Конструкции с заполнителем из пенопластов // Александров А. Я., Бородин И. Я., Павлов В. В. - М.: Машиностроение, 1972. - 211 с.

116. Композиционные материалы: Справочник // В.В.Васильев, Ю.М.Тарнопольский. - М.: Машиностроение, 1990. - 512 с.

117. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщенной теории трехслойных пологих оболочек с учетом обжатия физически нелинейного заполнителя / Ю. Н. Тамуров //Прикл. механика.- 1990. - 26, № 12. - С. 39 - 45.

118. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L.Librescu, T.Hause // Composite structures. - 2000. - V.48. - P. 1 - 17.

119. Noor A. K. Computational models for sandwich panels and shells / A. K. Noor, W. S. Burton, C. W. Bert // Appl.Meeh. Rev. - 1996, - V.9, № 3. - P. 155 - 199.

120. Болотин В. В. Теория армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями / В. В. Болотин // Механика полимеров.– 1966. - № 1. - С. 11 - 19.

121. Болотин В.В. К теории слоистых плит / В. В.Болотин // Изв. АН СССР. ОТН. - Механика и машиностроение. - 1963. - № 3. - С. 65 - 72.

122. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В. В. Болотин // Механика полимеров. - 1965. - № 2. - С. 27 - 37.

123. Пискунов В. Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко. - К.: Будівельник, 1986.-176 с.

124. Рассказов А. О. Расчет многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов / А. О. Рассказов // Прикл. механика. - 1978. - 14, № 8. - С. 51 - 57.

125. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко, В. К. Присяжнюк, В. С Сипетов, В. С Карпиловский. – К.: Вища шк., 1987. - 200 с.

126. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений / А. С. Сахаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1974 - №24. - С.147- 156.

127. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко // Прикл. механика.- 2002.- 38, №11.- С.32 - 68.

128. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. К. Годунов //Успехи мат. наук. - 1961. - 16, №3. - С. 171 - 174.

129. Григоренко Я. М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я. М. Григоренко, Н.Н.Крюков // Прикл. механика - 1995.- 31, № 6. - С. 3 - 27.

130. Александров А. Я. Расчет трехслойных панелейт // Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М. - М.: Оборонгиз, I960. - 270 с.

131. Алфутов Н. А. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов /Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г.- М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.

132. Бессонов В. Г. Масштабные коэффициенты подобия для конструкций из стеклопластика / В. Г. Бессонов // Механическое подобие конструкций из армированного материала; под ред. Г. Н. Савина. - Киев: Наук. думка, 1970. - С. 108 – 137.

133. Брюккер Л. Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин / Л. Э. Брюккер // Расчеты элементов авиационных конструкций. - М.: Машиностроение, 1965. - Вып. 3. - С. 74 - 99.

134. Исаханов Г. В. Прочность армированных пластиков и ситалов // Г. В. Исаханов, А. Е. Журавель. - М.: Машиностроение, 1981. - 234 с.

135. Королёв В. И. Упругопластические деформации оболочек // В. И. Королёв. - М: Машиностроение, 1971. - 303 с.

136. Остерник Э. С. Анизотропные слоистые пластины средней толщины / Э. С. Остерник // Изв. АН Арм. ССР. Механика. - 1967. - 20, № 5. - С. 48 - 57.

137. Потапов А. И. Неразрушающий контроль конструкций из композиционных материалов // А. И. Потапов, Ф. П. Пеккер. - Л.: Машиностроение, 1977. - 192 с.

138. Скудра А. М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков // Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А.-Рига: Зинатне,1971.-239 с.

139. Тарнопольский Ю. М. Особенности расчета деталей из армированных

пластиков // Ю. М. Тарнопольский, А .В. Розе. - Рига: Зинатне, 1969.- 274 с.

140. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями // Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. - К.: Наук. думка, 1988. - 279 с.

141. Кучерявый В.И., Мильков С.Н. Расчет прочностной надежности бурильных труб на устье скважины // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005, №1,с. 53-57.

142. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов // Г. А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1971. – 304 с.

143. Люлько В.Г. Совершенствование графо-аиалитического метода комплексного анализа порошковых материалов по симплексным поликомпонентным диаграммам / Люлько В.Г.,Краснобаев А.Г., Жмайлов Б.Б.,Хлебунов С.А. и др. // См.- 25.- С.215-216.

144. Малмейстер А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов // Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. - Рига: Зинатне, 1980.- 572 с.

145. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов // Б. Е. Победря. - М.: Наука, 1984. - 400 с.

146. Шульга Н. А. Моделирование и расчет элементов конструкций из неоднородных материалов // Шульга Н. А., Кривов Г. А., Федоренко Ю. М. - К.: Техника, 1996. - 244 с.

147. Noor A. K. Assessment of computational models for multilayered composite shells / A. K. Noor, W. S. Burton // Appl. Mech. Rev. - 1990.-V.43, № 4. - P. 67-97.

148. Noor A. K. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates / A. K. Noor, W. S. Burton // Appl. Mech. Rev. - 1989. - V.42, № 1. - P. 1 - 13.

149. Reddy J. N. An evaluation of equivalent-single-layer and layer wise theories of composite laminates / J. N. Reddy // Composite Structures. - 1993. - №25. - P. 21 - 35.

150. Reddy J. N. On the generalization of displacement-based laminated theories / J. N. Reddy // Appl. Mech. Rev. - 1993. - V.42, № 11, pt. 2. - P. 213 - 222.

151. Reddy J. N. Theories and computational models for composite laminates / J. N. Reddy, D. H. Robbins // Appl.Mech. Rev. - 1994. - V.47, № 6, pt. 1. - P. 21 - 35.

152. Васильев В. В. Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении / В. В. Васильев, А. А. Дубченко, А. Н. Елпатьевский // Механика полимеров. - 1970. - № 1. - С. 144 - 146.

153. Григоренко Я. М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами // Я. М. Григоренко, Н. Н. Крюков. - К.: Наук. думка, 1988. - 264 с.

154. Механика композитов: в 8 т. - Т. 8: Статика элементов конструкций // Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов, Н. Н. Крюков, Ю. Н. Немиш, Н. Д. Панкратова, Б. Л. Пелех, Г. Г. Влайков, А. В. Максимук, Г. П. Урусова. - К.: Наук. думка, 1999. - 379 с.

155. Никишин В. С. Задачи теории упругости для многослойных сред // В. С. Никишин, Г. С. Шапиро. - М.: Наука, 1973. - 132 с.

156. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела // В. С. Саркисян. - Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 1976. - 534 с.

157 Роуландс Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных / Р. Роуландс // Неупругие свойства композитных материалов. - М.: Мир, 1978. - С. 140 - 179.

158. Захаров В.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов / В. В. Захаров, Л. В. Никитин // Механика композитных материалов. - 1983.- № 1. - С. 20 - 25.

159. Кобелев В. Н. Расчёт трёхслойных конструкций // Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. - М.: Машиностроение, 1984. - 304 с.

160. Кристенсен Р. Введение в механику композитов // Р. Кристенсен. - М.: Мир, 1982. - 334 с.

161. Серенсен С. В. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами // С.В. Серенсен, Г. П. Зайцев. -

К.: Наук. думка, 1982. - 295 с.

162. Тарнопольский Ю. М. Расслоение сжимаемых стержней из композитов / Ю. М. Тарнопольский // Разрушение композитных материалов: тр. 1-го советско-американского симпозиума. - Рига: Зинатне, 1979. - С.160 - 166.

163. Ашбаух В. Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов / Ашбаух В. // Прикл. механика, 1973.- т.40.- сер.Е, № 2.- С. 312 - 314.

164. Люкшин Б.А. Анализ напряженно-деформированного состояния элемента клапана химического реактора / Люкшин Б.А., Люкшин П.А., Матолыгина Н.Ю., Липовка М.В. // Известия Томского политехнического университета.- 2004.- том 307.- № 4.- С. 116 - 120.

165. Вайншельбаум В.М. Осесимметричная задача о трещние на границе раздела слоев в многослойной среде / Вайншельбаум В.М., Голъдштейн Р.В. // Изв. Ан СССР, МТТ, 1976, №2.

166. Кулиев В.Д. К теории разрушения n-слойных материалов с трещиной / Кулиев В.Д, Сеидов Э.Э. // Мат. XIII международного семинара «Технологические проблемы прочности». Подольск. МГОУ, 2006 г., С. 209 - 211.

167. Кучерявый В.И. Расчет обсадных труб заданной надежности при растягивающих нагрузках и внутреннем давлении / Кучерявый В.И., Мильков С.Н. // Проблемы машиностроения и надежности машин.- 2003.- № 5.- С. 30-36.

168. Левин В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. // М. ФИЗМАТЛИТ.- 2004. - 408 с. - ISBN 5-9221-0514-0.

189. Акопян В.Н. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин / Акопян В.Н., Саакян А.В. // Известия РАН.- Механика твердого тела.- 1999.- № 3.- С. 106 - 113.

170. Акопян В.Н. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение / Акопян В.Н., Саакян А.В. // Известия РАН.- Механика твердого тела.- 2002.- № 6.- С. 76 - 82.

171. Неупругие свойства композиционных материалов // Под ред. К. Гераковича [Пер. с англ.]. - М.: Мир, 1978. - 294 с.

172. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс // А. Я. Гольдман. - Л.: Машиностроение, 1979. - 320 с.

173. Тамуж В. П. Микромеханика разрушения полимерных материалов // В. П. Тамуж, В. С. Куксенко. - Рига: Зинатне, 1978. - 294 с.

174. Фудзии Т. Механика разрушения композиционных материалов // Т. Фудзии, М. Дзако [Пер. с яп.]. - М.: Мир, 1982. - 232 с.

175. Болотин В.В. Влияние технологических факторов на механическую надёжность конструкций из композитов / Болотин В.В. // Механика полимеров.- 1972.- Л 3.- С. 529 – 540

176. Зайцев Г.П. Теоретическое и экспериментальное исследование трещиностойкости и скорости роста макро-трепшны в органопластиках при чистом сдвиге / Зайцев Г.П., Кайков К.В. // Механика композитных материалов.-

1984.- № I.- о.- С. 149 - 152.

177. Малмейстер А.К. Проблемы механики композитных материалов / Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетере Г.А. // В кн.: Современные цроблемы теоретической и прикладной механики. - Киев: Наукова думка.- 1978.- С. 359 - 372.

178. Маркочев В.М. Методика исследования роста усталостных трещин при постоянном значении размаха коэффициента интенсивности напряжений / Маркочев В.М., Краев А.Т. // Заводская лаборатория.- 1976.- № 4.- С. 469 - 473.

179. Пархизгар Ш. Оцределение вязкости разрушения композитов, армированных однонаправленными волокнами / Пархизгар Ш., Захари Л.В., Сан Ч.Т. // В кн.: Прочность и разрушение композитных материалов.- Тр. второго советско-американского симпозиума. – Рига.- 1983.- С. 293 - 303.

180. Alwar R.S. Three-dimensional finite element analysis of cracked plates in bending / Alwar R.S., Ramachandran Nambissan K.E. // Int. J. Humer.- Meth. Eng., 1983.- v.2.- Ж 2.- pp. 293 - 303.

181. Псахье С.Г. Моделирование поведения сложных сред на основе совместного использования дискретного и континуального подходов / Псахье С.Г., Смолин А.Ю., Стефанов Ю.П., Макаров П.В., Чертов М.А. // Письма в ЖРТ.- 2004.- том 30.- вып. 17.- С. 7 13.

182. Kollar L. Buckling of complete spherical shells and spherical caps subjected to uniform overall radial pressure / Kollar L. // Proc. colloq. on buckling of shells.- Stuttgart.- Mai 6-7.- 1982. -Berlins Springer.- 1982.- pp. 401 425.

183. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций // В. В. Болотин. - М.: Машиностроение, 1984. - 312 с.

184. Чумичев А.М. Техника и технология неразрушающих методов контроля деталей горных машин и оборудования: Учеб. пособие— 2-е изд., доп. и испр. 2006. - 335 с.

185. Ушаков В.М. Неразрушающий контроль и диагностика горно-шахтного и нефтегазового оборудования / Ушаков В.М. // Учеб.- пособие. - 2006.- 318 с.

186. Стружанов В.В. Об одном подходе к расчету долговечности при циклическом нагружении / Стружанов В.В., Миронов В.И., Тарташник К.А. // Вестник СамГТУ. - 2004.- Вып.26. - С. 51 - 54.

187. Лебедев А. А. Модель накопления повреждений в металлических материалах при статическом растяжении / Лебедев А. А., Чаусов Н. Г., Недосека С. А. и др. // Проблемы прочности. 1995. - №7. - С. 31-40.

188. Косарев Н.П. Подготовка кадров высшей квалификации в области геолого-минералогических и технических наук / Косарев Н.П., Хазин М.Л. // Учебное пособие. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ.- 2008.- 481 с.

189. Ефимов В.П. Разработка и проведение комплекса испытаний перспективных тележек для грузовых вагонов нового поколения / Ефимов В.П., Пранов А.А., Белоусов К.А., Еленевский Е.Н. // Тяжелое машиностроение.- 2005.- №8.- С. 23 - 28.

190. Кожушко Г.Г. Определение сдвиговых деформаций многослойного пакета резинотканевой конвейерной ленты / Кожушко Г.Г. // Изв. вузов. -Горный журнал. 1997.- № Ю-11.- С. 83-89.

191. Миронов В.И. Проблемы усталостной прочности конструкций подъемно-транспортных машин (ПТМ) / Миронов В.И., Кожушко Г.Г. // Конструирование и технология изготовления машин: Сб. научных трудов.- Екатеринбург: УГТУ-УПИ.- 2000.- С. 139 - 141.

192. Малмейстер А. К. Геометрия теорий прочности / А. К. Малмейстер // Механика полимеров. - 1966. - № 4. - С. 519-526.

193. Мошев В.В. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / Мошев В.В., Свистков А.Л., Гаришин О.К. и др. // Екатеринбург: УрО РАН.- 1997. - 508 с.

194. Сидоренко Ю.Н. Численный статистический подход к оценке эффективных свойств структурно-неоднородных материалов / Сидоренко Ю.Н.,

Вознюк Ю.П. // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады конференции.- Томск: Изд-во Том. -Ун-та.- 2000.- С. 89 90.

195. Бурьян О.Ю. Моделирование межфазного слоя в композитах с полимерной матрицей. Определение его структуры и механических свойств / Бурьян О.Ю., Новиков В.У. // Механика композитных материалов.- 2002.- № 3.- 289 с.

196. Светашков А.А. Определение эффективных характеристик неоднородных вязкоупругих тел / Светашков А.А. // Вычислительные технологии 2001.- т. 6.-№ 1.- с.10. Schraad M.W. О макроскопических свойствах дискретных сред с почти периодической микроструктурой. // Int. J. Solids and Structur.- 2001.- № 38.- pp. 42 - 43.

197. Бочкарева С.А. Определение вероятностей безотказной работы конструкций из полимерных материалов / Бочкарева С.А., Люкшин Б.А., Реутов А.И. // Физическая мезомеханика.- Томск.- 2004.- Т. 7.- 43 с.

198. Люкшин Б.А., Люкшин П.А. Влияние свойств межфазных слоев на напряженно-деформированное состояние полимерного композита в окрестности включения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1998, т. 4, № 2, с. 56 - 68.

199. Яновский Ю.Г. Некоторые аспекты компьютерного моделирования структуры и микромеханических свойств перспективных полимерных композиционных материалов / Яновский Ю.Г., Образцов И.Ф. // Физическая мезомеханика. -1999,.- т.2, № 1 2, С. 135-142.

200. Устинов К.Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения. Успехи механики, 2003, № 2, с. 126 152.

201. Кучерявый В.И. Расчет надежности конструкционных элементов при растяжении с кручением / Кучерявый В.И., Юдин А.В. // Проблемы машиностроения и надежности машин.- 2001.- № 5.- С. 50 - 55.

202. Бочкарева С.А. Критерии качества материала для бампера автомобиля / Бочкарева С.А., Люкшин Б.А., Филатов И.С. // Проблемы и перспективы развития Томского нефтехимического комбината.- Тезисы докладов VIII отраслевого совещания.- Томск.- 1994.- 24 с.

203. Скудра А. М. Обобщенные структурные критерии прочности армированных пластиков для плоского напряженного состояния / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс // Прочность и разрушение композитных материалов. - Рига: Зинатне, 1983. - С. 241-249.

204. Скудра А. М. Структурная теория армированных пластиков // А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. - Рига: Зинатне, 1978. - 192 с.

205. Викарио А. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов / А. Викарио, Р. Толанд // Композиционные материалы [под ред. Л. Браутмана, Р. Крока]. - М.: Машиностроение, 1978. - Т. 7, ч. 1: Анализ и проектирование конструкций / [под ред. К. Чамиса; пер. с англ]. - С. 62 - 107.

206. Протасов В. Д. Исследование несущей способности слоистых цилиндрических оболочек при помощи моделирования процесса разрушения на ЭВМ / Протасов В. Д., Ермоленко А. Ф., Филипенко А. А., Димитриенко И. П. // Механика композит. материалов. - 1980. - № 2. - С. 254 - 261.

207. Верещака С.М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры // Верещака С.М. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. - 286 с.

208. Кучер Н. К. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных однонаправленными волокнами и тканью сатинового переплетения / Н. К. Кучер, М. П. Немцов, М.Н.Заразовский // Пробл. прочности. - 2006. - № 1. - С. 41 - 58.

209. Кучер Н. К. Оценка прочности слоистых эпоксикарбоволокнитов, армированных однонаправленными волокнами / Н. К. Кучер, М. Н. Заразовский //Пробл. прочности. - 2006. - № 6. - С. 95 - 112.

210. А. с. 82000 С2 UA, МПК F 17 C 1/00/ Балон / Савицький Михайло Михайлович, Кулик Віктор Михайлович, Савиченко Олександр Онисимович, Лупан Аркадій Пилипович, Мельничук Георгій Михайлович, Черторильський Леонід Олексійович, Голуб Микола Олександрович, Супруненко Володимир Олександрович (UA). - № a200606715; заявл. 16.06.2006; опубл. 25.02.2008.

211. KO w.l. Delamination stresses in semicircular laminated composite bars / KO w.l. // NASA TM 4026 . - 1988.- 24 p.

212. Tsai S.W., Hahn Ht. Analysis of composite fracture // In: Inelastic behaviour of composite materials. - Vol. 13 /Ed. Carl T. Herakovich. N.-Y.: ASME, 1975. - VII. - 211 p.: - P. 73 - 96 /Перевод: С. Цай, Х. Хан. Анализ разрушения композитов //В кн.: Неупругие свойства композитных материалов /Под ред. К. Гераковича. - М.: Мир, 1978. - 295 с. - С. 104 -139.

213. Алфутов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Алфутов Н.А., Зиновьев, Попов Б.Г. // М.: Машиностроение.- 1984.- 264 с.

214. Бочкарева С.А. Определение вероятностей безотказной работы конструкций из полимерных материалов / Бочкарева С.А., Реутов А.И. // Научная сессия ТУСУР 2004.- Всероссийская научно-техническая конференция студентов и молодых специалистов.- Томск.- 2004.- 162 с.

215. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам // Де Бор К. - М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

216. Верещака С. М. Один вариант уравнений статики многослойных оболочек с учётом участков технологического непроклея / С. М. Верещака, В. А. Хворост //Вестник Национального технического университета “ХПИ”. - Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. - Харьков: НТУ “ХПИ”. - 2002. - №9.- Т. 8. - С. 23 - 28.

217. Комков М.А. Композитный торовый баллон для дыхательных аппаратов с продольно - поперечной схемой армирования силовой оболочки /М.А.Комков, Ч.Н.Тхань // Известия вузов. Машиностроение. - 2006. - № 3. - С. 10 - 18.

218. ТУ 2296-001-452Америон-03. Трубы стеклопластиковые, соединительные детали и соединения серии Бондстренд® 3400. Общие технические условия.

219. ГОСТ 12815-80 (СТ СЭВ 3249-81, СТ СЭВ 3250-81, СТ СЭВ 3251-81), Государственный комитет СССР по управлению качеством продукции и стандартам. Фланцы, арматуры, соединительных частей трубопроводов на $p_у$ от 0,1 до 20,0 МПа.

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет

ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор
__________ В.Д.Карпуша
«16» 10 2012р.

АКТ

15.10.2012 р. м, Суми № 1

Про впровадження
результатів дисертаційної
роботи у навчальний процес

Складений комісією у складі:
Голова комісії – зав.кафедрою опору матеріалів і машинознавства,
к.т.н., професор І.Б.Карінцев.
Члени комісії - доцент кафедри опору матеріалів і машинознавства,
к.т.н., доцент С.І.Катаржнов;
доцент кафедри опору матеріалів і машинознавства,
к.т.н., доцент В.В. Стрелец.

Встановлено, що за результатами дисертаційної роботи Караш Імад Бане «Конструкційна міцність склопластикових оболонок обертання з міжшаровими дефектами структури» у навчальний процес Сумського державного університету для студентів спеціальностей інженерного спрямування факультету технічних систем та енергоефективних технологій і зокрема спеціальності «Динаміка та міцність» впроваджено наступне:

1 Результати дисертації використовуються при викладанні навчальних дисциплін «Опір матеріалів» та «Механіка композиційних матеріалів».

2 Впроваджена експериментально-теоретична методика при проведенні лабораторних робіт з композиційних матеріалів.

Голова комісії І.Б.Карінцев

Члени комісії С.І.Катаржнов
В.В.Стрелец

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Директор
ТОВ «Склопластикові труби»
_______________ Данільцев В. Г.
« __ » _______________ 2012 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Караш Имад Тома Бане

Даним актом посвідчується, що наукові результати та рекомендації отримані в дисертаційній роботі Караш Имад Тома Бане **«Конструкционная прочность стеклопластиковых оболочек вращения с межслойными дефектами структуры»**, впроваджені під час проектування та виготовлення тонкостінних конструкцій із композиційних матеріалів ТОВ «Склопластикові труби»

Зокрема надані методики та програми розрахунків шаруватих оболонок, згідно яких можна буде враховувати різного роду структурні та технологічні недосконалості, тобто початкові прогини серединної поверхні несучих шарів, непроклеї, розшарування, тощо, дозволяють частково вирішувати питання надійності при експлуатації такого типу конструкцій.

Експериментально отримані показники фізико-механічних властивостей склопластиків, результати теоретичних досліджень та пропозиції щодо збільшення несучоЇ здатності шаруватих конструкцій мають важливе практичне значення і плануються до використання в подальших проектах.

Заступник директора
ТОВ «Склопластикові труби» В. В. Данільцев