

**ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРЁХМАССОВОЙ МОДЕЛИ РОТОРА
ПО ДАННЫМ РАСЧЁТА ЕГО ДИНАМИКИ
С ПОМОЩЬЮ КЭ-МОДЕЛИ**

В. И. Симоновский, *д-р техн. наук, профессор;*

В. В. Квашко, *студент,*

Сумский государственный университет, г. Сумы

Рассмотрен метод оценивания масс трёхмассовой модели жёсткого ротора турбокомпрессора по данным расчёта вынужденных и собственных колебаний его КЭ-модели.

Ключевые слова: *ротор, турбокомпрессор, дискретная модель, линейная регрессия.*

ВВЕДЕНИЕ

Исследования динамики роторов турбокомпрессоров, проведенные в последние годы [1], показали, что наряду с синхронными динамическими прогибами ротора, вызванными дисбалансами, возникают вследствие гидродинамических процессов в подшипниках и внутреннего трения несинхронные составляющие колебаний, понижающие в целом вибронадёжность турбокомпрессорных установок. Для изучения этих явлений необходимо рассмотрение дискретных моделей роторных систем со сравнительно небольшим числом сосредоточенных масс. Численное интегрирование дифференциальных уравнений этих моделей позволяет исследовать закономерности появления и развития полигармонических колебаний и тем самым выявить условия их эффективного снижения.

В работе [2] был предложен метод построения дискретных моделей на основе данных расчёта собственных частот и форм колебаний "больших" КЭ-моделей роторов. Идея заключалась в использовании методов оценивания (идентификации) параметров колебательных моделей [3, 4], где данные расчёта КЭ-модели с распределёнными параметрами используются как «экспериментальные» для синтеза дискретных систем.

Однако для жёстких роторов, где целесообразно рассмотрение трёхмассовой модели, использование данных расчёта собственных частот и форм для оценивания величин трёх масс оказывается иногда недостаточно точным. Учёт только первой собственной формы может не дать удовлетворительного совпадения "большой" и трёхмассовой модели (поскольку имеется всего три "экспериментальных" числа), а использование данных по первой и второй собственным частотам и формам, как показали численные эксперименты, уточняет вторую частоту, но ухудшает значение первой. В то же время для жёстких роторов важно подобие с "большой" моделью именно по первой частоте и первой собственной форме.

Отметим, что актуальность создания моделей связана также с потребностью исследования роторов на регулируемом магнитном подвесе, где в замкнутой системе ротор – регулируемые магнитные подшипники "роторную часть" уравнений желательно по возможности упростить.

В данной работе предложен новый метод оценивания параметров (а именно масс) дискретной роторной системы, заключающийся в использовании не только первой собственной частоты и формы, получаемых из расчёта КЭ-модели, но и данных расчёта вынужденных колебаний этой модели. При этом число частот, при которых рассчитываются вынужденные колебания, может быть каким угодно – насколько это требуется для достижения требуемой точности.

ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА

На рис. 1 дана схема трёхмассовой модели ротора, дифференциальные уравнения для расчёта вынужденных колебаний которой можно получить из условия решения задачи о статических прогибах балки, если положить согласно принципу Даламбера

$$F_1 = -m_1\ddot{x}_1, \quad F_2 = -m_2\ddot{x}_2 + D\omega^2 \sin \omega t, \quad F_3 = -m_3\ddot{x}_3,$$

где m_1, m_3 – эквивалентные массы, которые надлежит расположить в опорных точках [2]; m_2 – эквивалентная средняя масса, к которой приложен дисбаланс D ; c_1, c_2 – жёсткости подшипников; l – длина ротора; a – координата второй массы.

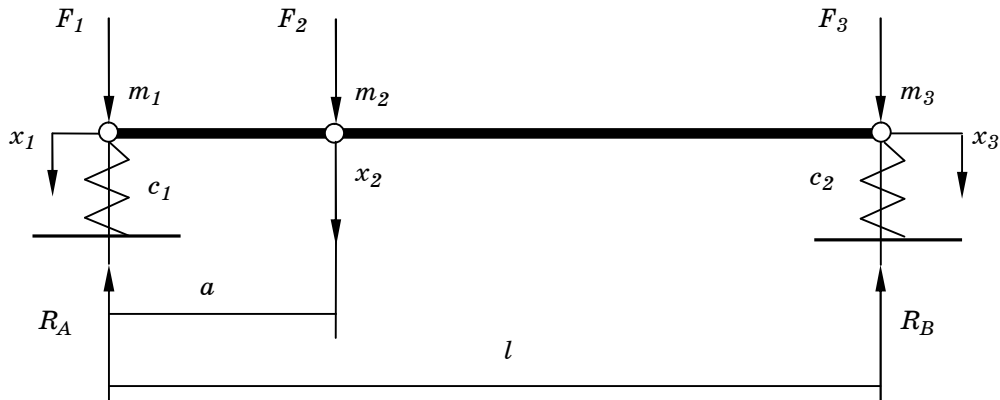


Рисунок 1 – Схема трёхмассовой роторной модели

С учетом выражений для сил [2] уравнения трёхмассовой модели могут быть приведены к виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_1}{c_1} \ddot{x}_1 - \frac{l-a}{c_1 l} m_2 \ddot{x}_2 + \frac{l-a}{c_1 l} D\omega^2 \sin \omega t; \\ x_2 &= -\frac{l-a}{l} x_1 + \frac{a}{l} x_3 - \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2 + \delta_{22} D\omega^2 \sin \omega t; \\ x_3 &= -\frac{a}{c_2 l} m_2 \ddot{x}_2 - \frac{m_3}{c_2} \ddot{x}_3 + \frac{a}{c_2 l} D\omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где δ_{22} – податливость ротора в точке расположения массы m_2 , которая может быть вычислена с помощью КЭ-модели ротора как статический прогиб ротора в точке m_2 от единичной силы, приложенной в этой точке. Положив

$$x_1 = B_1 \sin \omega t, \quad x_2 = B_2 \sin \omega t, \quad x_3 = B_3 \sin \omega t.$$

Подставив это решение в (1), получим, после сокращения на $\sin t$, уравнения для расчёта амплитуд колебаний. В матричной форме эти уравнения примут вид

$$\bar{H} \cdot \bar{B} = \bar{F}, \quad (2)$$

где

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m_1}{c_1} \omega^2; & -\frac{l-a}{c_1 l} m_2 \omega^2; & 0; \\ -\frac{l-a}{l}; & -\delta_{22} m_2 \omega^2 + 1 & 0; \\ 0; & -\frac{a}{c_2 l} m_2 \omega^2 & 1 - \frac{m_3}{c_2} \omega^2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{l-a}{c_1 l} D \omega^2 \\ \delta_{22} D \omega^2 - B_2 + \frac{a}{l} B_3 \\ \frac{a}{c_2 l} D \omega^2 \end{bmatrix}.$$

Если теперь полагать величины B_1, B_2, B_3 известными и полученными из КЭ-модели при том же дисбалансе D , то соотношения (2) можно представить как зависимости для оценивания масс m_1, m_2, m_3 в виде

$$\bar{K}_e \cdot \bar{M} = \bar{Y}_e, \quad (3)$$

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} -\omega_i^2 B_{1i}; & -\frac{l-a}{c_1 l} \omega_i^2 B_{2i}; & 0; \\ -\frac{l-a}{l}; & -\delta_{22} \omega_i^2 B_{2i} & 0; \\ 0; & -\frac{a}{c_2 l} \omega_i^2 B_{2i} & -\frac{\omega_i^2}{c_2} B_{2i} \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}_e = \begin{bmatrix} \frac{l-a}{c_1 l} D \omega_i^2 - B_{1i} \\ \delta_{33} D \omega_i^2 + \frac{l-a}{l} B_{1i} - B_{2i} \\ \frac{a}{c_2 l} D \omega_i^2 - B_{3i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, k.$$

Здесь матрица \bar{K}_e размерностью $3 \times 3k$, \bar{Y}_e - столбец размерностью $3k$; k - число частот, взятых для расчёта вынужденных колебаний КЭ-модели.

Для расчёта собственных частот трёхмассовой модели надо положить в (1) $D=0$, а решение искать в виде

$$x_1 = A_1 \sin pt, \quad x_2 = A_2 \sin pt, \quad x_3 = A_3 \sin pt.$$

Подставив $D=0$ и это решение в (1), получим после сокращения на $\sin pt$ уравнения для собственных форм

$$\bar{L}\bar{A} = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{L} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{m_1}{c_1} p^2; & -\frac{l-a}{c_1 l} m_2 p^2; & 0; \\ -\frac{l-a}{l}; & \delta_{22} m_2 p^2 - 1 & 0; \\ 0; & -1 + \frac{a}{c_2 l} m_2 p^2 & \frac{m_3}{c_2} p^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь обозначено: p – собственная частота; \bar{A}_2, \bar{A}_3 – относительные прогибы собственной формы: $\bar{A}_2 = A_2 / A_1$, $\bar{A}_3 = A_3 / A_1$, A_1, A_2, A_3 – величины прогибов собственной формы, взятые из расчёта КЭ-модели. Соотношение (4) можно преобразовать как зависимость для оценивания масс к виду

$$\bar{K}_c \cdot \bar{M} = \bar{Y}_c, \quad (5)$$

где (если в основу расчёта взять только данные по первой собственной частоте)

$$\bar{K}_c = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{c_1}; & \frac{l-a}{cl} z_1 \bar{A}_2; & 0; \\ 0; & -\delta_{22} z_1 \bar{A}_2; & 0; \\ 0; & \frac{a}{c_2 l} z_1 \bar{A}_2 & \frac{z_1}{c_1} \bar{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 - \frac{l-a}{l} - \frac{a}{l} \bar{A}_3 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix},$$

$z_1 = p_1^2$ – квадрат первой собственной частоты, полученный для КЭ-модели.

Объединяя соотношения (3) и (4), окончательно получим линейную модель оценивания в виде

$$\bar{K} \cdot \bar{M} = \bar{Y}, \quad (6)$$

где

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ei} \\ (i=1, k) \\ \bar{K}_c \end{bmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{ei} \\ (i=1, k) \\ \bar{Y}_c \end{bmatrix},$$

k – число частот вращения, на которых берутся данные расчёта вынужденных колебаний КЭ-модели.

Массы оцениваются по формуле линейной регрессии

$$\bar{M} = [\bar{K}^T \bar{K}]^{-1} \bar{K}^T \bar{Y}. \quad (7)$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

В качестве примера приведем оценивание масс трёхмассовой модели центробежного компрессора для перекачки газа (ГПА) мощностью 16МВт 16ГЦ2-395/53-76С, общий вид которого приведен на рис.2.

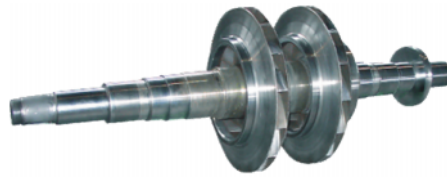


Рисунок 2 – Общий вид ротора ГПА

Диапазон рабочих частот 380 рад/с – 570 рад/с, первая собственная (критическая) частота равна 735 рад/с.

На рис. 3 приведена расчетная схема ротора компрессора и данные расчёта первых трёх форм и критических частот его КЭ-модели.

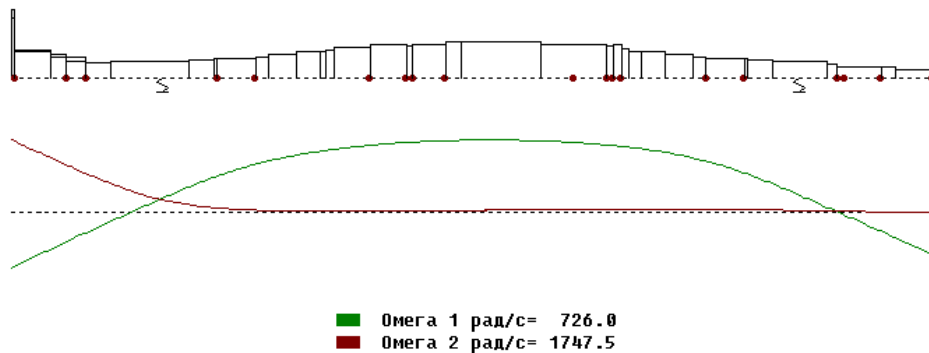


Рисунок 3 – Собственные частоты и формы КЭ-модели

Ниже приведена маткадовская распечатка данных и результатов оценивания масс согласно предложенному методу. Расчёт был проведен по 4 группам данных КЭ-модели: расчётные данные для вынужденных колебаний по трём рабочим частотам 400 рад/с, 570 рад/с, 735 рад/с и собственных форм по первой собственной частоте.

Исходные данные:

$$a := 1.1105 \quad l := 2.355 \quad c := 10^9 \quad \delta_{22} := 2.484961973E - 3 \quad D := 0.1$$

$$B_{11} := 1.209 \cdot 10^{-5} \quad B_{12} := 4.414 \cdot 10^{-4} \quad B_{13} := 1.733 \cdot 10^{-2}$$

$$B_{21} := 4.642 \quad B_{22} := 4.804 \quad B_{23} := 5.155$$

$$B_{31} := 0.893 \quad B_{32} := 0.994 \quad B_{33} := 1.188$$

$$D_1 := \frac{D}{B_{11}} \quad D_2 := \frac{D}{B_{12}} \quad D_3 := \frac{D}{B_{13}}$$

$$\omega_1 := 400 \quad \omega_2 := 570 \quad \omega_3 := 735$$

$$z_1 := 5.271 \cdot 10^5$$

$$A_{31} := 1.205 \quad A_{21} := 5.262$$

Оценивание по трём рабочим частотам и первой форме:

$$K := \begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2}{c} & \frac{-(1-a) \cdot B_{21} \cdot \omega_1^2}{c \cdot l} & 0 \\ 0 & -\delta_{22} \cdot \omega_1^2 B_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{a \cdot \omega_1^2 \cdot B_{21}}{c \cdot l} & -\omega_1^2 \cdot \frac{B_{31}}{c} \\ \frac{\omega_2^2}{c} & \frac{-(1-a) \cdot B_{22} \cdot \omega_2^2}{c \cdot l} & 0 \\ 0 & -\delta_{22} \cdot \omega_2^2 B_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{a \cdot \omega_2^2 \cdot B_{22}}{c \cdot l} & -\omega_2^2 \cdot \frac{B_{32}}{c} \\ \frac{\omega_3^2}{c} & \frac{-(1-a) \cdot B_{23} \cdot \omega_3^2}{c \cdot l} & 0 \\ 0 & -\delta_{22} \cdot \omega_3^2 B_{23} & 0 \\ 0 & -\frac{a \cdot \omega_3^2 \cdot B_{23}}{c \cdot l} & -\omega_3^2 \cdot \frac{B_{33}}{c} \\ \frac{z_1}{c} & \frac{(1-a) \cdot z_1 \cdot A_{21}}{c \cdot l} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \cdot z_1 A_{21} & 0 \\ 0 & \frac{a \cdot z_1 \cdot A_{21}}{c \cdot l} & z_1 \cdot \frac{A_{31}}{c} \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} -1 + \frac{(l-a) \cdot D_1 \cdot \omega_1^2}{l \cdot c} \\ \frac{a \cdot B_{31}}{l} - B_{21} + \delta_{22} \cdot D_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{l-a}{l} \\ -B_{31} + a \cdot D_1 \cdot \frac{\omega_1^2}{l \cdot c} \\ -1 + \frac{(l-a) \cdot D_2 \cdot \omega_2^2}{l \cdot c} \\ \frac{a \cdot B_{32}}{l} - B_{22} + \delta_{22} \cdot D_2 \cdot \omega_2^2 + \frac{l-a}{l} \\ -B_{32} + a \cdot D_2 \cdot \frac{\omega_2^2}{l \cdot c} \\ -1 + \frac{(l-a) \cdot D_3 \cdot \omega_3^2}{l \cdot c} \\ \frac{a \cdot B_{33}}{l} - B_{23} + \delta_{22} \cdot D_3 \cdot \omega_3^2 + \frac{l-a}{l} \\ -B_{33} + a \cdot D_3 \cdot \frac{\omega_3^2}{l \cdot c} \\ 1 \\ \frac{-a \cdot A_{31}}{l} + A_{21} + \frac{-(l-a)}{l} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

$$M := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y,$$

$$M = \begin{pmatrix} 528.107 \\ 628.558 \\ 683.32 \end{pmatrix}.$$

Оценивание только по первой собственной форме:

$$K_1 := \begin{bmatrix} \frac{z_1}{c} & \frac{(1-a) \cdot z_1 \cdot A_{21}}{c \cdot l} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \cdot z_1 \cdot A_{21} & 0 \\ 0 & \frac{a \cdot z_1 \cdot A_{21}}{c \cdot l} & z_1 \cdot \frac{A_{31}}{c} \end{bmatrix},$$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -a \cdot \frac{A_{31}}{l} + A_{21} + \frac{-(l-a)}{l} \\ A_{31} \end{bmatrix},$$

$$M_1 := (K_1^T \cdot K_1)^{-1} \cdot K_1^T \cdot Y_1,$$

$$M_1 := \begin{pmatrix} 216.664 \\ 604.347 \\ 652.723 \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты для трёхмассовой модели определяются по соотношениям:

$$f(z) := \begin{bmatrix} \frac{z \cdot m_1}{c} - 1 & \frac{z \cdot m_2(l-a)}{c \cdot l} & 0 \\ \frac{l-a}{l} & m_2 \cdot \delta_{22} \cdot z - 1 & 0 \\ 0 & \frac{a \cdot z \cdot m_2}{c \cdot l} & \frac{z \cdot m_3}{c} - 1 \end{bmatrix},$$

$$f(z) \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 2.1940322843491207291e6 \\ 552547.56484022169754 \\ 1.4634432929404764494e6 \end{pmatrix},$$

$$\omega_1 = \sqrt{552547.56484022169754} = 743.335.$$

Расчёт первой собственной формы трёхмассовой модели

$$A'_{21} := \frac{l \cdot (c - z_1 \cdot m_1)}{z_1 \cdot m_2 (a - l)} = 4.122,$$

$$A'_{31} := \frac{A'_{21} \cdot a \cdot z_1 \cdot m_2}{c \cdot l - z_1 \cdot l \cdot m_3} = 1.006.$$

В итоге оцененные массы получены такими: $m_1=528$ кг, $m_2=628$ кг, $m_3=683$ кг.

При этом собственные частоты трехмассовой модели составили величину $\omega_{c1}^*=743$ рад/с, в то время как на КЭ-модели она равна $\omega_{c1}=726$ рад/с. Погрешность по величине первой собственной частоты трёхмассовой модели по отношению к точной КЭ-модели составила 2,3 %. Заметим, что оценивание только по первой собственной форме даёт значение собственной частоты $\omega_{c1}^*=768$ рад/с, т. е. с погрешностью 5,8 %.

ВЫВОДЫ

В работе изложен метод оценивания параметров трёхмассовой модели ротора, основанный на данных расчёта не только собственных частот и форм КЭ-модели, но и вынужденных колебаний при произвольном количестве рабочих частот. Метод может быть эффективно использован для создания достоверных расчётных моделей роторов сравнительно невысокого порядка.

ESTIMATION OF PARAMETERS OF THREE-MASS MODEL OF THE ROTOR ACCORDING TO THE CALCULATION OF ITS DYNAMICS USING THE FE-MODEL

*V. I. Simonovsky, V. V. Kvashko,
Sumy State University, Sumy*

In the paper the authors consider the method of the masses of three mass models of a rigid rotor turbo compressor estimating according to the calculation of natural and forced vibrations of the finite element model.

Key words: rotor, turbo compressor, a discrete model, the linear regression.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гадяка В. Г. Экспериментальные исследования динамики ротора в неустойчивой области частот вращения / В. Г. Гадяка, Д. В. Лейких, В. И. Симоновский // Проблемы машиностроения. – 2009. - Т. 12, № 5. – С. 81-85.
2. Гадяка В. Г. Математическая модель ротора турбокомпрессора для исследования несинхронных составляющих вибраций /В. Г. Гадяка, Д. В. Лейких, В. И. Симоновский // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2010. – № 2 (20). – С. 48–50.
3. Симоновский В. И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин / В. И. Симоновский. – Харьков: Изд-во «Вища школа», 1986. – 128 с.
4. Симоновський В. І. Уточнення математичних моделей коливальних систем за експериментальними даними / В. І. Симоновський. – Суми : Вид-во СумДУ, 2010. – 91 с.

Поступила в редакцію 5 сентября 2012 г.