

УДК 539.3

**НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
АНИЗОТРОПНОГО КРИВОЛИНЕЙНОГО БРУСА ПРИ ИЗГИБЕ С
УЧЕТОМ ИДЕАЛЬНОГО И НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТОВ МЕЖДУ
СЛОЯМИ**

С. М. Верещака, д-р техн. наук, профессор;

А. В. Дейнека, аспирант;

О. Н. Орел, студентка;

А. Г. Хализева, студентка,

Сумский государственный университет, г. Сумы, Украина

На основе классической теории упругости анизотропного тела исследуется напряженно деформированное состояние многослойного плоского криволинейного бруса. Для учета статических и кинематических условий контакта по сопряженным лицевым поверхностям соседних слоев, обладающих цилиндрической анизотропией, составлена система алгебраических уравнений. Порядок системы уравнений определяется количеством сопряженных слоев. В качестве примера рассмотрен изгиб плоского бруса при действии сосредоточенной силы на торцах. Показано влияние способов армирования трех отдельно взятых слоев бруса на его напряженно-деформированное состояние. Проведено сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: многослойная теория, расслоения, композитный материал, изогнутый брус.

ВВЕДЕНИЕ

Композиты многослойной структуры широко используются в различных областях современной техники, например в конструкциях планеров военных и гражданских самолетов. Известно, что тонкостенные элементы из композитов значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с изотропными аналогами. Однако для практической реализации этих преимуществ необходимо и дальше накапливать опыт проектирования такого рода конструкций, а также совершенствовать технологию производства армированных материалов.

При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например участков непрочности или отслоений. Традиционно используемое в расчетных моделях предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта жестких армированных слоев оказывается существенно нарушенным. Подробный анализ основных результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзоре [1].

В основу метода расчета рассмотренного в данной работе многослойного изогнутого криволинейного бруса положен дискретный подход. Система разрешающих уравнений построена для всего пакета слоев с учетом как идеального, так и неидеального контакта сопряженных поверхностей соседних слоев.

1. Дискретно-структурная теория многослойного бруса при идеальном контакте слоев

На рис. 1 показан многослойный плоский криволинейный брус состоит из N слоев, который в плане ограничен двумя концентрическими окружностями радиусов a и b , а также двумя радиальными плоскостями, образующими угол $\theta = \pi/2$. На каждый из торцов бруса действует сосредоточенная поперечная сила P . Принято, что материал бруса ортотропный и плоскость упругой симметрии совпадает со срединной поверхностью бруса. Ось анизотропии проходит нормально к плоскости упругой симметрии через общий центр концентрических окружностей и совпадает с осью z цилиндрической системы координат. Ось x , от которой отсчитываются полярные углы θ , совпадает с осью y декартовой системы координат xy . Считается, что криволинейные поверхности $r=a$ и $r=b$ не нагружены.

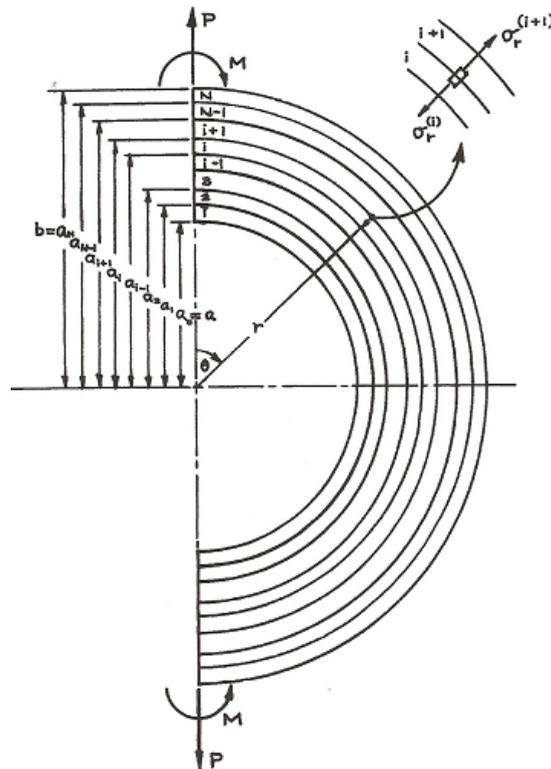


Рисунок 1 - Структура многослойного изогнутого плоского бруса

Общее решение поставленной задачи изгиба криволинейного бруса из материала с цилиндрической анизотропией приведено в [2]. При этом функции, которые определяют его напряженно деформированное состояние в цилиндрической системе координат, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^P(r, \theta) &= [A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \sin \theta, \\ \sigma_\theta^P(r, \theta) &= [A\beta(1 + \beta)r^{\beta-1} - B\beta(1 - \beta)r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \sin \theta, \\ \tau_{r\theta}^P(r, \theta) &= -[A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
u_r^P(r, \theta) = & \left\{ Ar^\beta \left[\frac{1}{E_r} - (1 + \beta) \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + Br^{-\beta} \left[\frac{1}{E_r} - (1 - \beta) \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + \right. \\
& \left. + D(\ln r) \left(\frac{1}{E_r} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right) \right\} \sin \theta + C_1, \\
u_\theta^P(r, \theta) = & \left\{ Ar^\beta \left[\frac{1}{E_r} - \beta(1 + \beta) \frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + Br^{-\beta} \left[\frac{1}{E_r} + (1 - \beta) \frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right] + \right. \\
& \left. + D \left[(\ln r) \left(\frac{1}{E_r} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right) - \left(\frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta} \right) \right] \right\} \cos \theta + C_1 \theta + C_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь A, B, C_1, C_2, D – произвольные константы, которые определяются из граничных условий на криволинейных поверхностях бруса и из интегральных соотношений приводимости на торцах. Параметры анизотропии и k соответственно равны

$$\beta \equiv \sqrt{1 + \frac{E_\theta}{E_r} (1 - 2\nu_{r\theta}) + \frac{E_\theta}{E_r}}, \quad k \equiv \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}},$$

где E, E_r – модули упругости 1-го рода материала бруса в кольцевом радиальном направлениях, $\nu_{r\theta}$ – коэффициент Пуассона. Следует отметить, что для изотропных материалов, $\nu_{r\theta} = 2$ и $k = 1$.

Имея по сопряженным поверхностям i и $i+1$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) слоя, когда $r = a_i$, статические и кинематические условия идеального контакта:

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \tag{3}$$

$$\tau_{r\theta}^{P(i)}(a_i, \theta) = \tau_{r\theta}^{P(i+1)}(a_i, \theta), \tag{4}$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \tag{5}$$

$$u_\theta^{P(i)}(a_i, \theta) = u_\theta^{P(i+1)}(a_i, \theta). \tag{6}$$

Кроме того, на лицевых поверхностях бруса, когда $r = a$ и $r = b$ (рис. 1), дополнительно имеют место статические граничные условия:

$$\sigma_r^{P(1)}(a, \theta) = 0, \tag{7}$$

$$\tau_{r\theta}^{P(1)}(a, \theta) = 0, \tag{8}$$

$$\sigma_r^{P(N)}(b, \theta) = 0, \tag{9}$$

$$\tau_{r\theta}^{P(N)}(b, \theta) = 0. \tag{10}$$

На прямолинейных торцах бруса должны выполняться следующие граничные условия равновесия:

$$-P = h \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tau_{r\theta}^{P(i)}(r, 0) dr; \tag{11}$$

Для решения поставленной задачи согласно дискретно структурной теории следует подставить функции напряжений (1) и перемещений (2) в граничные условия (3), (5) – (7), (9), (11). При этом имеет место система из $3 \times N$ линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему, можно найти значения $3 \times N$ неизвестных постоянных A_i, B_i, D_i ($i = 1, 2, \dots, N$). После подстановки неизвестных постоянных в функции напряжений и перемещений (1), (2) несложно получить полную картину напряженно-деформированного состояния каждого слоя бруса.

2. Дискретно-структурная теория многослойного бруса при неидеальном контакте слоев

Пусть между слоями плоского изогнутого бруса (рис. 1) при определенных значениях внешней нагрузки из-за разрушения клеевой прослойки [3] возможно возникновение упругого проскальзывания двух соседних слоев друг относительно друга. При этом между разностью перемещений в окружном направлении $u_\theta^{(i)}(a_i, \theta)$, $u_\theta^{(i+1)}(a_i, \theta)$ сопряженных поверхностей соседних слоев и касательными напряжениями $\tau_{r\theta}^{(i)}(a_i, \theta)$, когда $r = a_i$ (рис. 1), существует зависимость

$$u_\theta^{(i)}(a_i, \theta) - u_\theta^{(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{(i)}. \quad (12)$$

В качестве предельных из уравнения (12) имеют место два варианта: при $1/K^{(i)} = 0$ – имеет место идеальное проскальзывание, при $K^{(i)} = 0$ – идеальный контакт. Считая, что радиальные напряжения $\sigma_r^{(i)}(a_i, \theta)$ и $u_r^{(i)}(a_i, \theta)$ при переходе через поверхность раздела слоев скачка не имеют, статические и кинематические условия неидеального контакта имеют вид

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (13)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (14)$$

$$u_\theta^{P(i)}(a_i, \theta) - u_\theta^{P(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{P(i)}. \quad (15)$$

Так же, как и для случая идеального контакта слоев на лицевых поверхностях бруса, когда $r = a$ и $r = b$ (рис. 1), дополнительно имеют место статические граничные условия (7) – (10) и статические условия равновесия на торцах бруса (11).

3. Пример расчета

В качестве примера расчета рассмотрено напряженно-деформированное состояние плоского криволинейного бруса при изгибе. Считалось, что брус состоит из трех однонаправленных слоев ($N=3$). Геометрические параметры бруса: размеры поперечного сечения – $h=48$ мм, $t=4$ мм; радиусы внутренней и внешней поверхностей бруса – $a=100$ мм, $b=104$ мм.

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе [4]. Модули упругости E_ϵ , сдвига G_ϵ и коэффициент Пуассона ν_ϵ наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_\epsilon = 55000$ МПа, $G_\epsilon = 22000$ МПа, $\nu_\epsilon = 0,25$. Матрица стеклопластика – эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости:

$E_m = 3550 \text{ МПа}$, $G_m = 1270 \text{ МПа}$, $\nu_m = 0,4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70 % общего объема.

Представленные результаты получены при действии сосредоточенной растягивающей силы $P=100 \text{ Н}$. Для проведения сравнительного анализа рассмотрены четыре варианта армирования бруса. При помощи штрих-пунктирной линии даны графики напряжений и перемещений, полученные согласно непрерывно структурной теории. Сплошными линиями показаны результаты, которые соответствуют дискретно-структурной теории многослойного бруса с учетом как идеального, так и неидеального контакта сопряженных лицевых поверхностей соседних слоев. Значения коэффициентов K_i ($i=1, 2$) для рассматриваемого трехслойного бруса считаются одинаковыми, т. е. $K_1 = K_2 = K$.

Рассмотрим различные варианты армирования слоев стеклопластика.

1. Симметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. При этом все три слоя имеют примерно одинаковые физико-механические характеристики. Первый и третий слой с кодом $[0^\circ_4 / -75^\circ]$ и $[-75^\circ / 0^\circ_4]$ имеют такие параметры – $E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(3)} = 35500 \text{ МПа}$, $E_r^{(1)} = E_r^{(3)} = 23800 \text{ МПа}$, $E_z^{(1)} = E_z^{(3)} = 22900 \text{ МПа}$. $\nu_{\theta r}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(3)} = 0,402$, $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = 2,63$, $k^{(1)} = k^{(3)} = 1,22$; второй слой с кодом $[0^\circ_2 / -75^\circ / 75^\circ / 0^\circ_2]$ – $E_\theta^{(2)} = 33600 \text{ МПа}$, $E_r^{(2)} = 23900 \text{ МПа}$, $E_z^{(2)} = 24800 \text{ МПа}$, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0,403$, $\beta^{(2)} = 2,59$, $k^{(2)} = 1,17$.

Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 2–5, позволяет отметить следующее. При учете идеального контакта между слоями (рис. 2 а) распределение напряжений σ_θ^P существенно отличается от результатов, полученных по классической анизотропной теории. Так, например, тангенциальные напряжения сжатия на внешней поверхности бруса соответственно теории с учетом идеального контакта слоев равняются $\sigma_\theta^P = -48,6 \text{ МПа}$, что в 1,5 раза меньше соответствующих напряжений, полученных по классической теории.

Как видно из рис. 2 б и 3 б учет неидеального контакта позволяет получить реальную картину напряженно-деформированного состояния бруса при действии сосредоточенной силы, так напряжения и деформации, полученные как по дискретно-структурной, так и по структурно непрерывной теории, практически совпадают при $K=1,5 \text{ мм}^3/\text{Н}$. При увеличении же коэффициента $K=4 \text{ мм}^3/\text{Н}$ (рис. 2 в и 3 в) наблюдается существенный рост тангенциальных напряжений σ_θ^P (на внутренней поверхности бруса σ_θ^P с учетом неидеального контакта между слоями в 1,8 раза больше чем по классической анизотропной теории) и радиальных перемещений u_r^P , которые больше чем в два раза превышают значения, полученные по классической теории. Учет только кинематических (рис. 3 а) условий идеального жесткого контакта между слоями существенно снижает радиальные перемещения u_r^P в сравнении с классической анизотропной теорией. При анализе изменения напряжений σ_r^P на границах между слоями (рис. 4, 5) можно заметить, что при учете идеального контакта графики изменения этих напряжений практически совпадают с аналогичными результатами, полученными по анизотропной теории, а при учете неидеального контакта отмечается рост напряжений в 1,5 – 2 раза между первым и вторым слоями, а также снижение значения σ_r^P практически в 3 раза между вторым и третьим слоями.

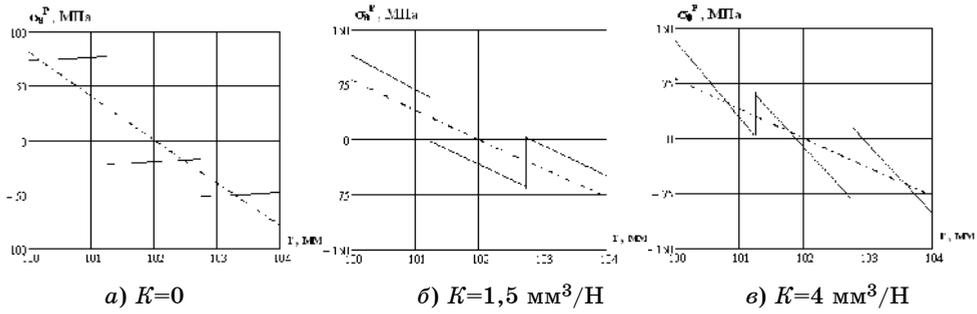


Рисунок 2 – График изменения тангенциальных напряжений σ_θ^P по толщине бруса в сечении с координатой $\theta = \pi/2$

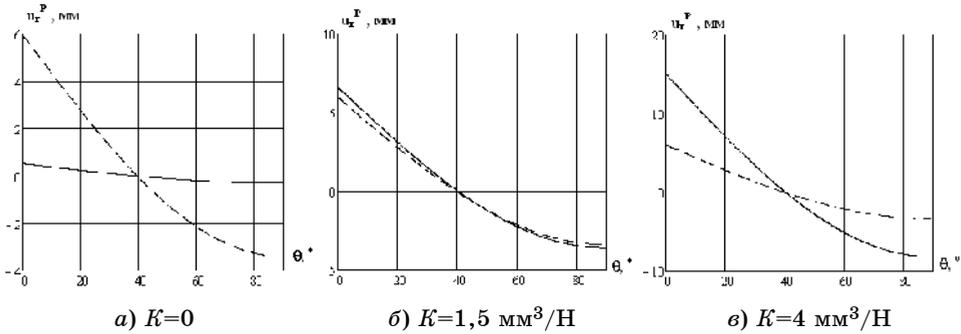


Рисунок 3 – График изменения радиальных перемещений u_r^P по внешнему контуру бруса

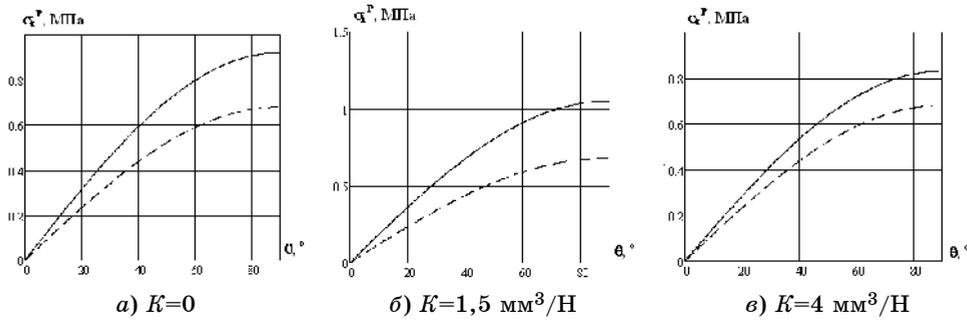


Рисунок 4 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе первого и второго слоев

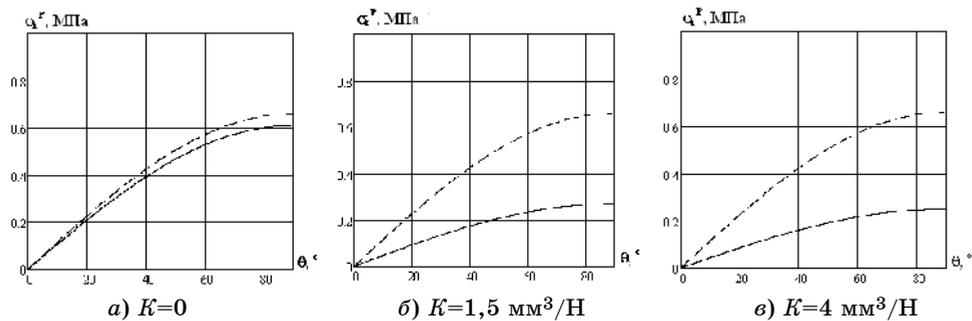


Рисунок 5 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

2. Симметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. Модуль упругости 1-го рода первого и третьего слоев в окружном направлении превышает аналогичный модуль упругости второго примерно в 1,5 раза. Первый и третий слои с кодом $[0^\circ_4 / -15^\circ]$ имеет такие параметры: $E_\theta^{(1)} = 38800$ МПа, $E_r^{(1)} = 23400$ МПа, $E_z^{(1)} = 19500$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(1)} = 0,405$, $\beta^{(1)} = 2,68$, $k^{(1)} = 1,288$; второй слой с кодом $[75^\circ / 0 / -75^\circ_2 / 0 / 75^\circ]$, соответственно, $E_\theta^{(2)} = 26000$ МПа, $E_r^{(2)} = 24000$ МПа, $E_z^{(2)} = 29300$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0,392$, $\beta^{(2)} = 2,46$, $k^{(2)} = 1,04$.

Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 6–9, позволяет отметить следующее. Согласно дискретно структурной теории (рис. 6) распределение напряжений σ_θ^P существенно отличается от результатов, полученных по классической анизотропной теории. Так, например, тангенциальные напряжения сжатия на внешней поверхности бруса соответственно теории с учетом идеального контакта слоев равняются $\sigma_\theta^P = -39,6$ МПа, что в 1,9 раза меньше соответствующих напряжений, полученных по классической теории. При учете неидеального контакта тангенциальные напряжения σ_θ^P на внутренней стороне примерно в 2,5 раза больше, чем по классической теории. Как видно из рис. 7 б, в учет неидеального контакта позволяет получить реальную картину деформированного состояния кривого бруса при действии сосредоточенной силы. Следует отметить, что радиальные перемещения, полученные как по дискретной, так и по анизотропной теории, практически совпадают при $K=1,5$ мм³/Н. При увеличении же коэффициента до $K=4$ мм³/Н наблюдается существенный рост радиальных перемещений u_r^P , которые практически в два раза больше, чем по классической теории. Учет только кинематических (рис. 7 а) условий идеального жесткого контакта между слоями существенно снижает радиальные перемещения u_r^P в сравнении с классической анизотропной теорией. При анализе изменения напряжений σ_r^P на границах между первым и вторым слоями (рис. 8) можно заметить, что при расчете согласно дискретно структурной теории отмечается рост таких напряжений в 1,5–2 раза по сравнению с результатами, полученными по классической теории. На границе между вторым и третьим слоями (рис. 9) наблюдается незначительное снижение напряжений σ_r^P по сравнению с результатами классической теории. При неидеальном контакте напряжения σ_r^P между вторым и третьим слоями практически отсутствуют. Это говорит о том, что основную часть внешней нагрузки воспринимают на себя первый и второй слои.

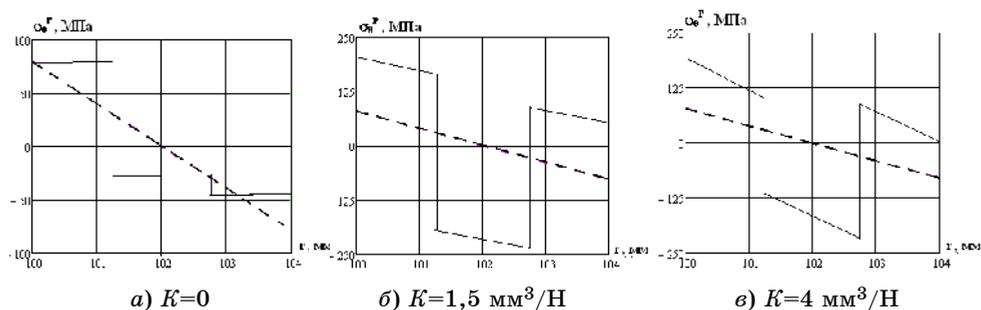


Рисунок 6 – График изменения тангенциальных напряжений σ_θ^P по толщине бруса в сечении с координатой $\theta = \pi/2$

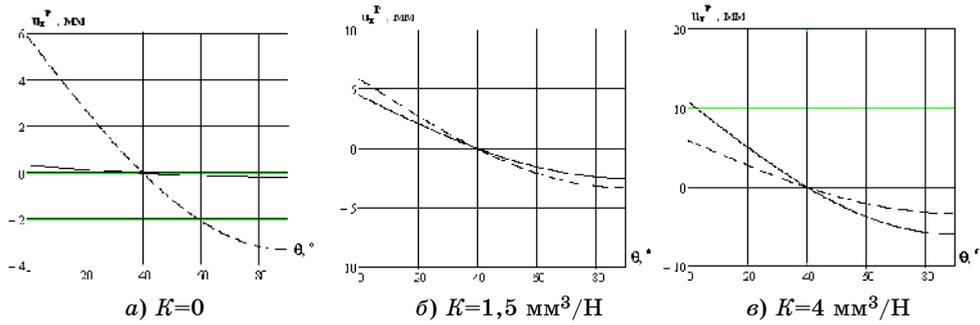


Рисунок 7 – График изменения радиальных перемещений u_r^P по внешнему контуру бруса

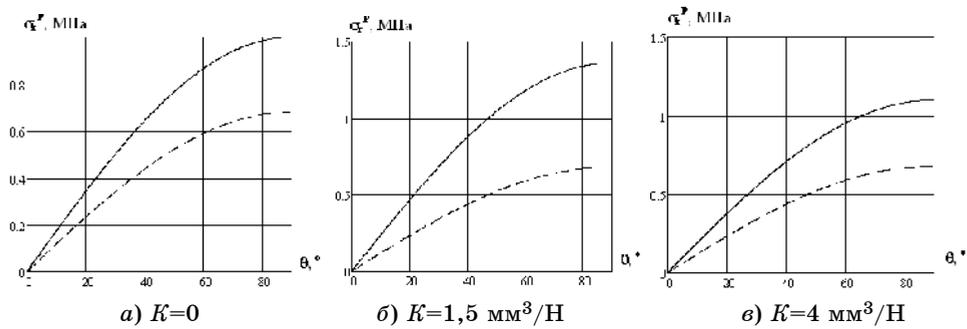


Рисунок 8 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе первого и второго слоев

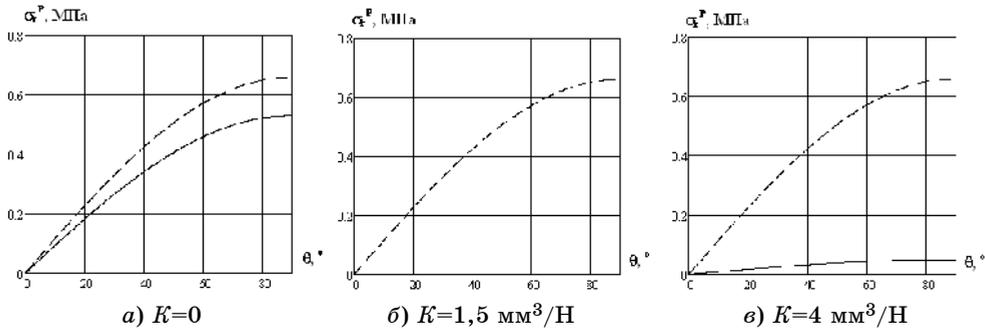


Рисунок 9 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

3. Несимметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. Модуль упругости 1-го рода первого, второго и третьего слоев в окружном направлении постепенно уменьшаются примерно в 1,3 раза. Первый слой с кодом $[0_4^- / -15^\circ]$ имеет такие параметры: $E_\theta^{(1)} = 38800$ МПа, $E_r^{(1)} = 23400$ МПа, $E_z^{(1)} = 19500$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(1)} = 0,405$, $\beta^{(1)} = 2,68$, $k^{(1)} = 1,288$; второй слой с кодом $[0_2^- / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^+]$ – $E_\theta^{(2)} = 32800$ МПа, $E_r^{(2)} = 23900$ МПа, $E_z^{(2)} = 24800$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0,403$, $\beta^{(2)} = 2,59$, $k^{(2)} = 1,17$; третий слой с

кодом $[0^{\circ}_3 / -75^{\circ}_2]$ – $E_{\theta}^{(3)} = 31400$ МПа, $E_r^{(3)} = 23900$ МПа, $E_z^{(3)} = 25800$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(3)} = 0,401$, $\beta^{(3)} = 2,57$, $k^{(3)} = 1,46$.

Анализируя теоретические результаты для заданной структуры армирования бруса, представленные на рис. 10–13, можно отметить следующее. Тангенциальные напряжения σ_{θ}^P , полученные по дискретно-структурной теории и классической теории, отличаются не более чем на 50 %. Такое же замечание относится и к напряжениям σ_r^P . Заметное расхождение результатов можно увидеть, сравнивая величины радиальных перемещения u_r^P .

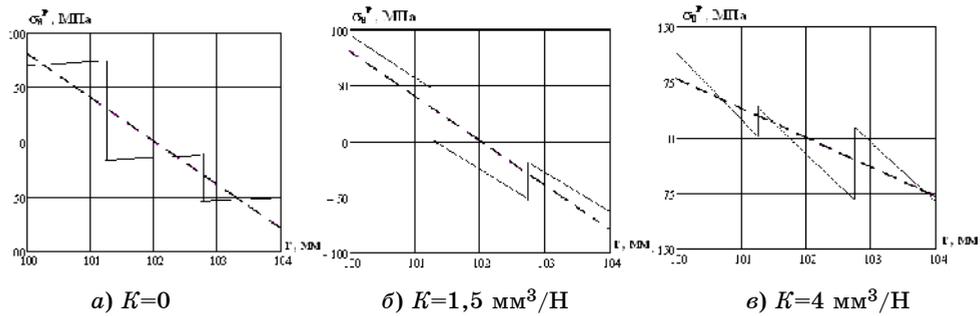


Рисунок 10 – График изменения тангенциальных напряжений σ_{θ}^P по толщине бруса в сечении с координатой $\theta = \pi/2$

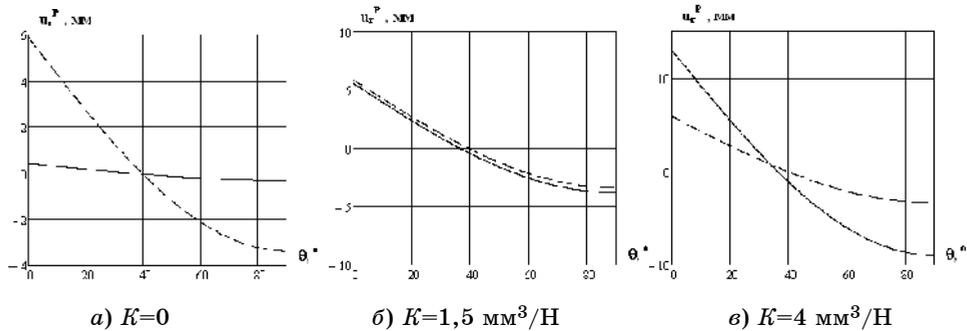


Рисунок 11 – График изменения радиальных перемещений u_r^P по внешней контуру бруса

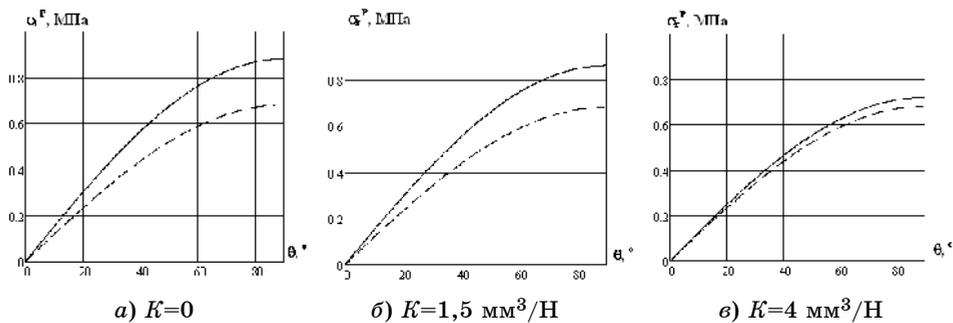


Рисунок 12 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе первого и второго слоев

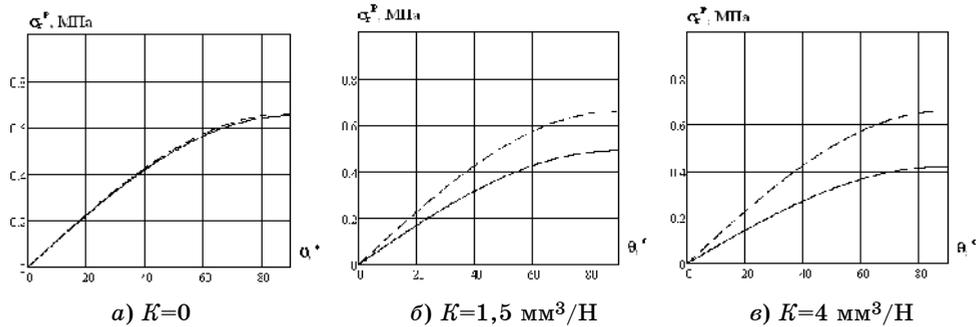


Рисунок 13 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

4. Симметричная структура армирования относительно срединной поверхности бруса. Модуль упругости 1-го рода каждого слоя в окружном направлении одинаковы. При этом модуль упругости в продольном направлении превышает модуль упругости в окружном направлении в 1,7 раза. Первый и третий слой с кодом $[75^\circ_4 / -75^\circ]$ и $[-75^\circ / 75^\circ_4]$ имеют такие параметры: $E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(3)} = 19000$ МПа, $E_r^{(1)} = E_r^{(3)} = 23200$ МПа, $E_z^{(1)} = E_z^{(3)} = 33000$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(3)} = 0,382$, $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = 2,91$, $k^{(1)} = k^{(3)} = 0,91$; второй слой с кодом $[75^\circ_2 / -75^\circ / 75^\circ / -75^\circ_2]$ – $E_\theta^{(2)} = 19000$ МПа, $E_r^{(2)} = 23200$ МПа, $E_z^{(2)} = 33000$ МПа, $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0,382$, $\beta^{(2)} = 2,91$, $k^{(2)} = 0,91$.

Сравнивая результаты, показанные на рис. 14–17, можно утверждать следующее. При учете неидеального контакта между слоями (рис. 14 а, б, в) распределение напряжений σ_θ^P качественно отличается от результатов, полученных по классической теории. Наблюдается существенный рост напряжений σ_θ^P (рис. 14 б, в) на границах контакта сопряженных слоев. Это объясняется прежде всего существенным отличием модулей упругости 1-го рода в окружном и продольном направлениях. При увеличении коэффициента $K=4$ мм³/Н (неидеальный контакт слоев) наблюдается существенный рост радиальных перемещений u_r^P , которые практически в 5 раз больше, чем по классической теории. Эти результаты соответствуют характеру заданной структуры армирования бруса и подтверждают выводы [5] о необходимости учета структурной нелинейности при расчетах тонкостенных конструкций из композиционных материалов.

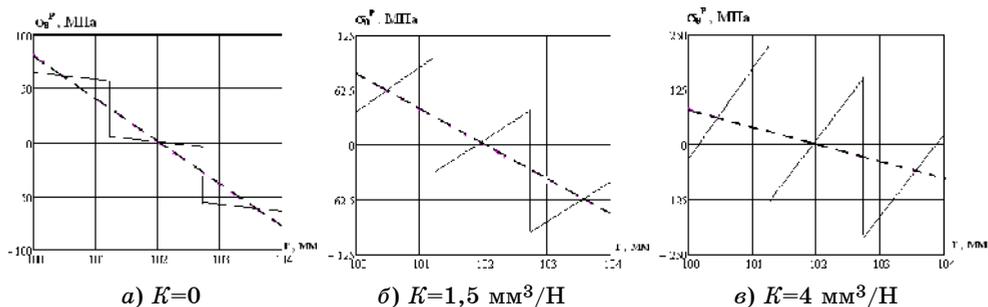


Рисунок 14 – График изменения тангенциальных напряжений σ_θ^P по толщине бруса в сечении с координатой $\theta = \pi/2$

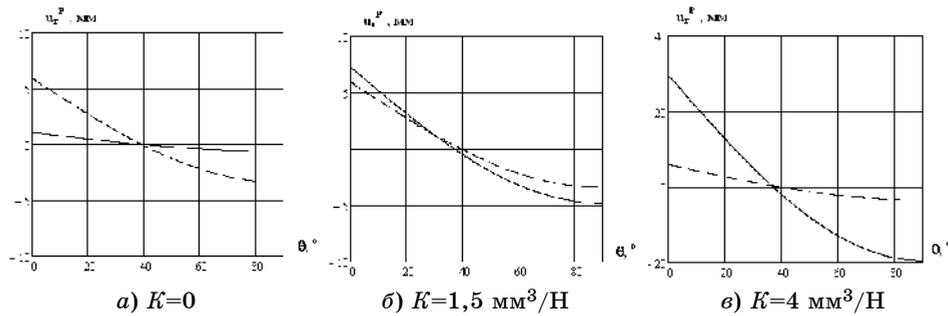


Рисунок 15 – График изменения радиальных перемещений u_r^P по внешнему контуру бруса

При анализе изменения напряжений σ_r^P на границах между слоями (рис. 16, 17) можно заметить, что при идеальном контакте наблюдается хорошая сходимость результатов, при $K=1,5 \text{ мм}^3/\text{Н}$ – небольшое расхождение результатов, при $K=4 \text{ мм}^3/\text{Н}$ – рост напряжений, максимальное значение практически в 2 раза больше значения, полученного с помощью классической теории.

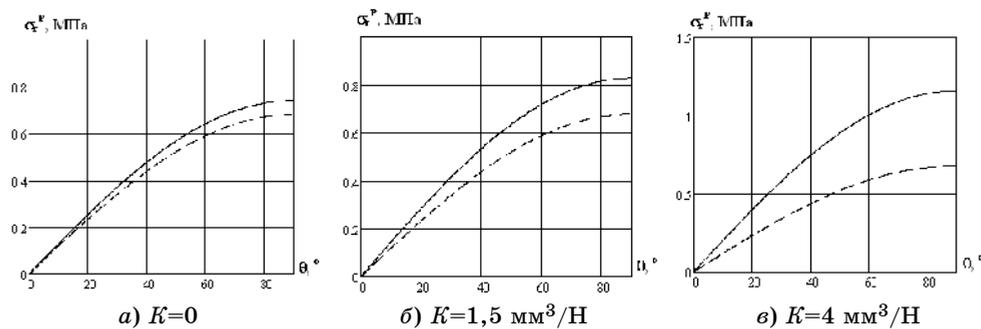


Рисунок 16 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе первого и второго слоев

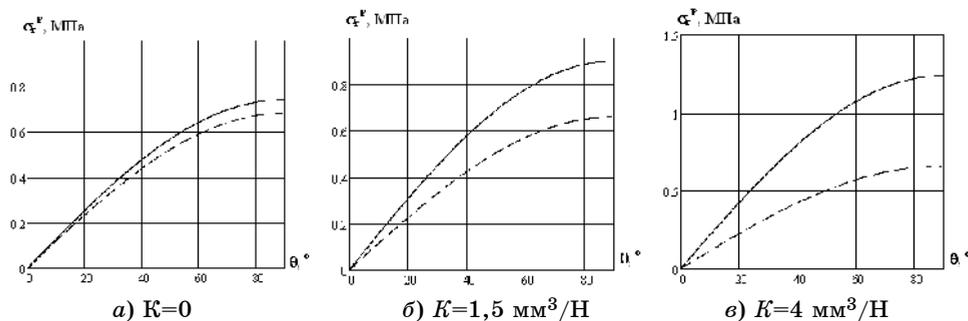


Рисунок 17 – График изменения напряжений σ_r^P по контуру бруса на границе второго и третьего слоев

4. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными

В качестве экспериментальных образцов из стеклопластиковой трубы, изготовленной методом намотки, были вырезаны пять колец. Размеры поперечного сечения кольца – $h=48 \text{ мм}$, $t=4 \text{ мм}$; радиусы внутренней и

внешней поверхностей бруса – $a=100$ мм, $b=104$ мм. Стеклопластиковая труба включает 16 однонаправленных армированных слоев с заданной схемой укладки $[0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ]$. Модули упругости E_e , сдвига G_e и коэффициент Пуассона ν_e наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_B = 55000$ МПа, $G_e = 22000$ МПа, $\nu_e = 0,25$. Матрица стеклопластика – эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_m = 3550$ МПа, $G_m = 1270$ МПа, $\nu_m = 0,4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70 % общего объема.

Определение деформаций каждого образца проводилось методом тензометрирования при помощи разрывной машины в сертифицированной лаборатории Сумского государственного университета. Для измерения деформаций использовались тензорезисторы КФ4П1-3-200. Среднее значение коэффициента тензочувствительности равно – $K=2,0 \cdot 10^{-6}$. Наклейка тензорезисторов осуществлялась согласно инструкции по наклейке АЖВ2.782.001 ТО. Для измерения выходных сигналов тензорезисторов и представления отчетов в цифровом виде использовалась измерительная система СИИТ-3.

Осредненные значения модуля упругости 1-го рода в окружном и продольном направлениях, полученные экспериментальным путем, соответственно равны – $E_\theta^o = 36050$ МПа, $E_z^o = 24100$ МПа.

Теоретические значения упругих характеристик стеклопластика, которые находились по методике [4], приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Упругие характеристики стеклопластика

Схема армирования	E , МПа	G , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
$[0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ]$	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7340$	$\nu_{z\theta} = 0,069$	$\nu_{\theta z} = 0,107$
	$E_\theta = 35500$	$G_{rz} = 4870$	$\nu_{zr} = 0,399$	$\nu_{rz} = 0,415$
	$E_r = 22900$	$G_{r\theta} = 6760$	$\nu_{\theta r} = 0,406$	$\nu_{r\theta} = 0,272$

Относительная погрешность величины модуля упругости 1-го рода, полученная экспериментальным и теоретическим путем, не превышает 5%.

Экспериментальные образцы полукруглых криволинейных брусков получены путем разрезания стеклопластикового кольца на две половины. Схема наклейки тензорезисторов на внутреннюю и внешнюю поверхности бруса показана на рис. 18.

Растяжение бруса противоположно направленными сосредоточенными поперечными силами P , приложенными к его торцам, осуществлялось при помощи экспериментальной установки. Общий вид установки показан на рис. 19. Она включает разрывную машину $P-0.5$, два металлических захвата торцов бруса, два индикатора часового типа с точностью до 0,01 мм для измерения радиальных перемещений и измерительную систему СИИТ-3.

Теоретические и экспериментальные результаты при силе $P=100$ Н приведены в табл. 2.

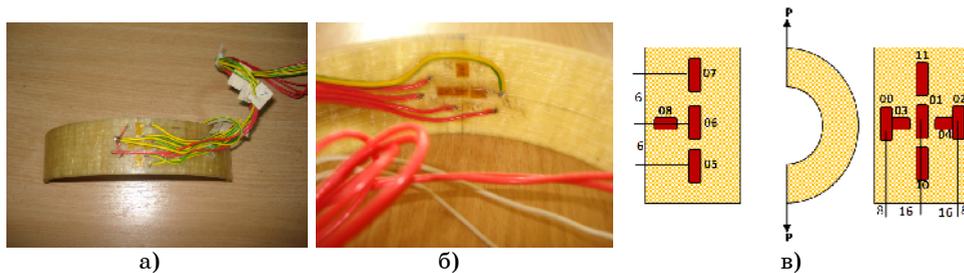


Рисунок 18 – Схема наклейки тензорезисторов



Рисунок 19 – Принцип работы устройств и оборудования, используемых при тестировании различных составных изогнутых стержней для получения модуля упругости и смещений

Таблица 2 – Напряжения и перемещения в криволинейном брус

Напряжения и перемещения	σ_r^{1-2}	σ_r^{2-3}	σ_θ^e	σ_θ^H	$u_r, \theta = \pi/2$	$u_r, \theta = 0$
Классическая теория	0,68	0,66	81,3	- 78,1	3,55	5,93
Дискретно-структурная теория (идеальный контакт)	0,92	0,61	72,5	- 47,8	- 0,31	0,52
Дискретно-структурная теория (неидеальный контакт $K=1,5$ ммЗ/Н)	1,05	0,27	114,7	- 49,0	- 3,62	6,62
Дискретно-структурная теория (неидеальный контакт $K=4,0$ ммЗ/Н)	0,83	0,25	133,4	- 81,2	- 8,23	14,99
Результаты эксперимента	-	-	89,4	- 62,1	-8,6	13,4

Анализ результатов табл. 2 показывает, что наиболее адекватно реальную картину напряженно-деформированного состояния рассматриваемого криволинейного бруса отражает дискретно-структурная теория с учетом неидеального контакта слоев.

ВЫВОДЫ

Таким образом, проведенные на основе классической теории упругости анизотропного тела и дискретно структурной теории исследования напряженно деформированного состояния плоского полукруглого бруса позволяют сделать следующий вывод. Модель многослойного бруса, когда допускается упругое проскальзывание сопряженных поверхностей соседних слоев относительно друг друга, качественно верно отражает

реальную картину деформации такого конструктивного элемента. На примере полукруглого бруса при действии сосредоточенной силы показано, что при учете неидеального контакта слоев наблюдается рост радиальных перемещений. Эти результаты подтверждаются экспериментально, то есть наблюдается эффект так называемой структурной нелинейности. Кроме того, проведенные исследования показали, что из всех вариантов армирования бруса самым эффективным является вариант с симметричной структурой армирования слоев относительно срединной поверхности, так как при несимметричном армировании один из слоев практически не несет нагрузки. С помощью данной методики расчета зная, что слои меняют модуль упругости, можно фиксировать момент разрушения слоев и получить картину напряженно-деформированного состояния бруса для новых параметров его нагружения.

STRESS-STRAIN STATE OF ANISOTROPIC CURVED BAR AT BENDING CONSIDERING IDEAL AND NON-IDEAL CONTACT BETWEEN LAYERS

*S. M. Vereshchaka; A. V. Deineka; O. N. Orel; A. G. Halizeva,
Sumy State University, Sumy, Ukraine*

The stress-strain behavior of laminated curved flat bar based on the classical theory of elasticity of an anisotropic body is investigated. To account the static and kinematic conditions of contact for dual front surfaces of adjacent layers with cylindrical anisotropy a system of algebraic equations was composed. The order of the system of equations is determined by the number of conjugated segments. As an example, the authors consider a flat bar bending under the action of concentrated forces on the ends. The influence of different variants of unidirectional reinforcement of three layers on the stress-strain state of the rod is shown. A comparison of theoretical results with experimental data is made.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Верещака С. М. Прочность многослойного полого цилиндра с дефектами структуры / С. М. Верещака, Е. Т. Караш // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки. – 2011. – №1. – С. 75 – 88.
4. Верещака С. М. Анализ напряженного состояния многослойного полого цилиндра при действии внутреннего давления / С. М. Верещака, Е. Т. Караш // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 7 – 19.
5. Алфуртов Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфуртов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М. : Машиностроение, 1984. – 264 с.

Поступила в редакцию 19 июля 2012 г.