

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для студентів напрямку 0502 «Системна інженерія»
усіх форм навчання

Розділ
«ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ
ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ
ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ»

Затверджено на засіданні кафедри
системотехніки та інформаційних
технологій як конспект лекцій з дис-
ципліни «Теорія електричних та ма-
гнітних кіл»
Протокол № 5 від 23.12.2011 р.

Суми
Сумський державний університет
2012

Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій. Розділ «Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Сумський державний університет, 2012. – 232 с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП.....	6
1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ	7
1.1. Основні поняття про перехідні процеси	7
1.2. Закони комутації та залежні початкові умови	8
1.3. Комутації при стрибкоподібній зміні струму	12
1.4. Допоміжні функції, що використовують для аналізу перехідних процесів	14
1.5. Питання для самоперевірки	19
2. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ	20
2.1. Вільний та вимушений режими.....	20
2.2. Вигляд коренів характеристичного рівняння	23
2.3. Характеристики перехідного процесу	23
2.4. Загальна методика знаходження шуканої змінної.....	25
2.5. Перехідні процеси у послідовних RL - колах	27
2.5.1. Загальні положення	27
2.5.2. Підключення послідовного RL-кола під постійну напругу.....	28
2.5.3. Відключення послідовного RL-кола від постійної напруги	30
2.5.4. Ввімкнення послідовного RL-кола під гармонічну напругу.....	32
2.6. Перехідні процеси у послідовних RC-колах	35
2.6.1. Загальні положення	35
2.6.2. Ввімкнення послідовного RC-кола під постійну напругу.....	36
2.6.3. Вільний розряд ємності у послідовному RC-колі	39
2.6.4. Ввімкнення послідовного RC-кола під гармонічну напругу.....	41
2.7. Перехідні процеси у колах із одним реактивним елементом	43
2.8. Перехідні процеси у послідовному RLC-колі.....	45
2.8.1. Загальні положення	45

2.8.2. Аперіодичний розряд конденсатора	47
2.8.3. Граничний аперіодичний розряд ємності.....	49
2.8.4. Коливальний розряд конденсатора	50
2.8.5. Ввімкнення послідовного RLC-кола під постійну напругу.....	53
2.8.6. Ввімкнення коливального контуру під гармонічну напругу.....	57
2.9. Приклади розв'язування задач	65
2.10. Питання для самоперевірки	89
2.11. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях.....	91
3. ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ	101
3.1 Пряме та зворотне перетворення Лапласа.....	101
3.2. Основні властивості перетворень Лапласа.....	102
3.3. Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі.....	107
3.4. Загальна методика розв'язання операторним методом .	110
3.5. Приклади зображення функцій	111
3.6. Визначення оригіналів за теоремою розкладання.....	113
3.7. Приклади розв'язування задач	122
3.8. Питання для самоперевірки	144
3.9. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях.....	145
4. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСОВ ЧАСОВИМ МЕТОДОМ.....	154
4.1. Передавальна функція.....	154
4.2. Імпульсна характеристика	155
4.3. Перехідна характеристика	156
4.4. Знаходження реакції кола на дію операторним методом.....	157
4.5. Знаходження реакції кола на дію часовим методом	159
4.6. Приклади розв'язування задач	168
4.7. Питання для самоперевірки	188
4.8. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях.....	189
5. КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ СХЕМНИХ ФУНКЦІЙ.....	202

5.1. Загальні положення	202
5.2. Частотний критерій Михайлова	203
5.3. Метод Рауса-Гурвіца	204
5.4. Критерій Гурвіца.....	205
5.5. Критерій Рауса	206
5.6. Умови автогенерації гармонічних коливань	208
5.7. Узагальнена схема автогенератора	212
5.8. Індуктивна та ємнісна триточки.....	213
5.9. RC-генератори.....	216
5.10. Приклад розв'язання задачі	219
5.11. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях.....	222
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	224
Додаток А	226
Додаток Б.....	227
Додаток В	230

ВСТУП

Написання цього конспекту лекцій є надання допомоги студентам у їх самостійній та аудиторній роботі під час вивчення перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл».

Цей конспект буде корисним для студентів, що вивчають тему «Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами» з дисциплін: «Основи теорії кіл», «Теорія електричних і магнітних кіл», «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електронних кіл», «Електротехніка». Конспект містить приклади розв'язання задач по перехідним процесам від найпростіших кіл до складних розгалужених електричних кіл із зосередженими параметрами. Таким чином, конспект також буде корисним для проведення практичних та лабораторних занять із розрахунку перехідних процесів із дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл».

Конспект лекцій складається із шести розділів. У кінці кожного розділу є питання для самоперевірки та задачі для самостійного розв'язання на практичних заняттях та вдома.

У першому розділі розглянуті причини виникнення перехідних процесів та основні математичні положення щодо аналізу перехідних процесів.

У другому розділі розглянуті загальні положення класичного методу аналізу перехідних процесів і його математичний апарат. Також подано класичний метод аналізу перехідних процесів у найпростіших послідовних RL-, RC-, RLC-колах.

У третьому розділі розглянутий операторний метод аналізу перехідних процесів та наведений його математичний апарат. Четвертий розділ розглядає аналіз перехідних процесів за допомогою часових характеристик. У п'ятому розділі розглянуті критерії стійкості схемних функцій.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

1.1. Основні поняття про перехідні процеси

У цьому розділі будемо розглядати лінійні електричні кола із зосередженими параметрами. Під лінійним електричним колом будемо розуміти коло, елементи якого можуть бути подані моделями із ідеалізованими елементами, у яких струм та напруга зв'язані лінійно. Колом із зосередженими параметрами будемо вважати таке коло, швидкість поширення хвилі у якому не залежить від геометрії кола.

У електричному колі можуть відбуватися комутації. Під **комутацією** будемо розуміти будь-які миттєві перемикання, наприклад, підключення одного елемента, блока елементів або частини кола, зміна стрибком якогось із параметрів кола або блока параметрів, таких, як амплітуда, початкова фаза джерел, номінали елементів або цілих гілок. За наявності реактивних елементів у колах можуть виникати перехідні процеси.

Характер комутації, на схемі зазначається за допомогою ключа зі стрілкою (рис. 1.1). На рис. 1.1 а показане вмикання рубильника, а на рис. 1.1 б показане вимикання.

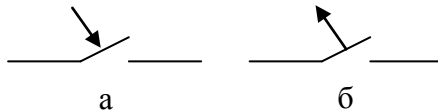


Рисунок 1.1 – Умовне зображення комутації

Перехідним процесом називають процес, що виникає у електричному колі під час переходу від одного усталеного режиму до іншого.

Під **усталеним режимом** розуміють режим постійного струму або режим, коли струми та напруги є періодичними функціями, що забезпечуються дією джерел періодичних струмів та напруг. Періодичний струм та напругу можна розкласти у ряд

Фур'є на суму синусоїд та для знаходження реакції на таку дію використати метод комплексних амплітуд та метод накладання.

Усталений режим визначається дією джерела енергії та обумовлений енергетичним станом кола.

За наявності реактивних елементів (індуктивностей та ємностей) перехід від одного усталеного режиму до іншого миттєво не відбувається. Це пов'язане з тим, що не можна розвинути нескінченну потужність. Якщо припустити, що стрибком можуть змінитися струми у котушках індуктивностей і напруги на ємностях, то енергія, що запасується у них, теж повинна змінитися стрибком. При цьому потужність буде прямувати в нескінченність (потужність є похідною від енергії), а це фізично неможливо, оскільки суперечить закону збереження енергії.

Отже, перехідний процес у колі триває певний час, що називається часом перехідного процесу.

Очевидно, що у лінійних колах джерела постійної напруги (струму) викликають постійний струм, джерела синусоїдальної напруги викликають синусоїдальний струм тієї ж частоти, що й частота джерела. Під час перехідного процесу струми у електричному колі та напруги на її ділянках визначаються не тільки джерелами енергії, але й накопиченою енергією безпосередньо перед перехідним процесом (у котушках індуктивності та конденсаторах).

Початком відліку для перехідного процесу вважають момент комутації та позначають його $t = 0$. У момент часу, що передує комутації, струми та напруги позначають $i(0-)$, $u(0-)$, відразу після комутації – $i(0+)$, $u(0+)$, у момент комутації – $i(0)$, $u(0)$.

1.2. Закони комутації та залежні початкові умови

Під час аналізу перехідних процесів використовують вирази для струмів та напруг в індуктивності та ємності.

Заряд конденсатора визначається за формулою

$$q(t) = C u_c(t).$$

Тоді струм у конденсаторі визначається так:

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C(t))}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Визначимо вираз для напруги на конденсаторі

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt = \\ &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо вираз для напруги на ємності

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt. \quad (1.2)$$

Потокозчеплення котушки індуктивності без сталевго осердя визначається

$$\psi(t) = Li_L(t).$$

Тоді згідно із законом електромагнітної індукції

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d(Li_L(t))}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

Звідси можна одержати вираз для струму:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt. \end{aligned}$$

Звідси можна одержати вираз для струму в індуктивності:

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt. \quad (1.4)$$

Напруга на ємності $u_C(0)$ та струм в індуктивності $i_L(0)$ називають незалежними початковими умовами, оскільки стрибком не змінюються.

Закони комутації випливають із законів збереження енергії для магнітного та електричного полів. Енергія кола до комутації дорівнює енергії кола після комутації:

$$W_M(0-) = W_M(0) = W_M(0+), \quad W_E(0-) = W_E(0) = W_E(0+).$$

Ця енергія стрибком змінитися не може, як було зазначено вище.

Вирази для енергії електричного та магнітного полів

$$W_M(t) = \frac{Li^2}{2}, \quad W_E(t) = \frac{Cu^2}{2}.$$

Дійсно, якщо у одержані вирази для законів збереження енергії підставити значення для виразів енергії електричного та магнітного полів

$$\frac{Li^2(0-)}{2} = \frac{Li^2(0)}{2} = \frac{Li^2(0+)}{2}, \quad \frac{Cu^2(0-)}{2} = \frac{Cu^2(0)}{2} = \frac{Cu^2(0+)}{2},$$

то після скорочення на величини $\frac{L}{2}$ та $\frac{C}{2}$ одержимо закони комутації.

Перший закон комутації. У будь-якій гілці з індуктивністю струм і магнітний потік у момент комутації стрибком змінитися не можуть.

Отже, струм котушки індуктивності до комутації $i_L(0-)$ дорівнює струму у момент комутації $i_L(0)$ та дорівнює струму у момент після комутації $i_L(0+)$:

$$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+). \quad (1.5)$$

Покажемо це на прикладі RL-кола (рис. 1.2).

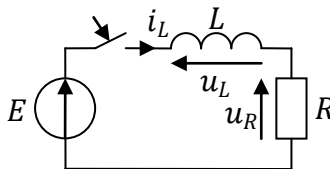


Рисунок 1.2

Запишемо за другим законом Кірхгофа напругу у колі:

$$E = u_R + u_L.$$

Підставимо замість напруги u_L її значення за формулою (1.2) і одержимо

$$E = i_L R + L \frac{di_L}{dt}.$$

Якщо припустити, що струм у колі зміниться стрибком, то напруга на індуктивності u_L буде нескінченно великою, оскільки похідною від стрибка є нескінченність. Але таке припущення не правильне, оскільки воно суперечить другому закону Кірхгофа.

Оскільки потокозчеплення визначається $\psi(t) = Li_L(t)$, то запишемо

$$\psi_L(0 -) = \psi_L(0) = \psi_L(0 +), \quad (1.6)$$

де $\psi_L(0 -)$ – магнітний потік у котушці індуктивності до комутації; $\psi_L(0)$ – магнітний потік у котушці індуктивності у момент комутації; $\psi_L(0 +)$ – магнітний потік у котушці індуктивності після комутації.

Другий закон комутації. У будь-якій гілці напруга і заряд на ємності у момент комутації стрибком змінитися не можуть.

Отже, напруга на конденсаторі до комутації $u_C(0 -)$ дорівнює напрузі під час комутації $u_C(0)$ та дорівнює напрузі після комутації $u_C(0 +)$:

$$u_C(0 -) = u_C(0) = u_C(0 +). \quad (1.7)$$

Покажемо це на прикладі послідовного RC-кола (рис. 1.3).

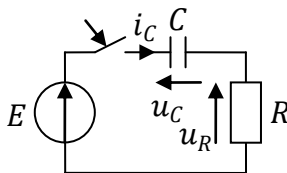


Рисунок 1.3

Запишемо для кола (рис. 1.3) другий закон Кірхгофа :

$$E = u_R + u_C.$$

Запишемо напругу на резисторі R через струм у колі i_C , а цей струм визначимо через напругу u_C за формулою (1.2) :

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Якщо припустити, що напруга u_C зміниться стрибком, то її похідна du_C/dt буде прямувати у нескінченність, що буде суперечити другому закону Кірхгофа, оскільки напруга джерела E має скінченне значення, а отже, напруга u_C не може змінитися стрибком.

Оскільки заряд визначається виразом $q(t) = Cu_C(t)$, то запишемо

$$q_C(0 -) = q_C(0) = q_C(0 +), \quad (1.8)$$

де $q_C(0 -)$ – електричний заряд на ємності до комутації, $q_C(0)$ – електричний заряд на ємності у момент комутації, $q_C(0 +)$ – електричний заряд на ємності після комутації.

Запишемо *наслідки із законів комутації*:

1. У момент комутації ємність за наявності початкового заряду еквівалентна джерелу напруги величиною $E = u_C(0)$, а без нього – замиканню кола у місті її включення.

2. У момент комутації індуктивність із нульовим струмом $i_L(0)$ еквівалентна джерелу струму величиною $i_L(0)$, а без нього – розриву кола.

1.3. Комутації при стрибкоподібній зміні струму

Існує ряд комутацій, що відносять до комутацій при стрибкоподібній зміні струму. Прикладом такої комутації є схема, що зображена на рис. 1.4. До комутації струм у котушці індуктивності L_2 дорівнює 0, а у котушці індуктивності L_1 не дорівнює 0.

У момент комутації (відключення ключа) струм у котушці індуктивності L_1 змінюватися не повинен, а струм у L_2 у цей самий час дорівнює нулю. Тому на підставі 1-го закону Кірхгофа струм повинен замкнутися через дугу (при різкій зміні струму напруга на котушці індуктивності L_2 стане досить великою, у

ключі відбудеться пробій і буде горіти іскра). У реальній котушці струм також частково може замкнутися через міжгілкову ємність.

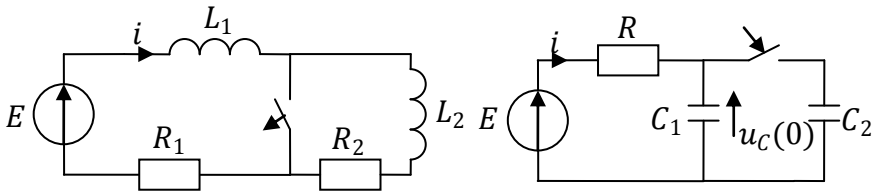


Рисунок 1.4

Після згасання дуги струми у котушках зрівнюються (все це відбувається практично миттєво). Для подальшого розрахунку перехідного процесу необхідно знати струм після комутації $i(0+)$. Це значення можна одержати, якщо використати принцип безперервності сумарного потокозчеплення при комутації (1.6). Після комутації значення індуктивності збільшується до виразу $L_1 + L_2$.

Тоді запишемо $L_1 i(0-) = (L_1 + L_2) i(0+)$ і остаточно одержимо

$$i(0+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i(0-) = i_{L_1}(0+).$$

Стрибкоподібна зміна струмів та відповідних їм потоків у L_1 та L_2 у момент комутації не призводить у цьому випадку наведення нескінченно великої сумарної ЕРС самоіндукції, оскільки сумарне потокозчеплення не може змінитися стрибком. При нових значеннях струмів у L_1 та L_2 магнітна енергія, що запасена у котушках, буде менше енергії, що запасена у першій котушці до комутації. Частина енергії перетвориться у тепло іскри, а також випроміниться. Знайдений таким чином струм $i(0)$ у L_1 та L_2 може розглядатися як незалежна початкова умова для розрахунку перехідного процесу у всьому колі (рис. 1.4) після розриву дуги.

При комутаціях у колах із ємностями (рис. 1.4) за відсутності опорів також можливі досить швидкі перерозподіли зарядів, що умовно розглядаються як миттєві. У цьому випадку за-

стосовується принцип постійності сумарного заряду. Одержані при цьому значення зарядів та напруг на окремих ємностях використовуються при розрахунках наступного перехідного процесу як незалежні початкові умови.

Після комутації значення ємності збільшується до значення $C_1 + C_2$.

Тоді запишемо $C_1 u_c(0 -) = (C_1 + C_2) u_c(0 +)$ і остаточно одержимо

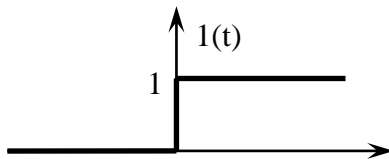
$$u_c(0 +) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_c(0 -).$$

Може бути такий випадок, що початкові умови відповідають сталому режиму, тоді перехідного процесу не буде.

1.4. Допоміжні функції, що використовують для аналізу перехідних процесів

Для математичного опису перехідного процесу використовують функції Хевісайда та Дірака.

Функцію Хевісайда по-іншому називають функцією одиничної сходинок (рис. 1.5), $\mathbf{1}(t)$ визначається у такий спосіб :



$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & t < 0, \\ \mathbf{1}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Рисунок 1.5

При дослідженні перехідних процесів будемо вважати, що $\mathbf{1}(0) = 0$. Іноді вважають, що $\mathbf{1}(0) = 1/2$. Це можна пояснити способом одержання функції Хевісайда. Для цього розглянемо функцію $f(t)$ (рис. 1.6).

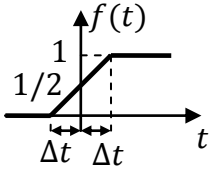


Рисунок 1.6

Отже, $1(t) = 1/2 + 1/2 \text{sign}(t)$.

Функція $\text{sign}(t)$ – це знакова функція. Функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ зображені на рис. 1.7.

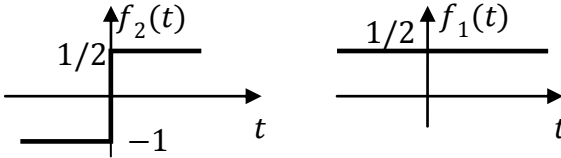


Рисунок 1.7

Властивості функції Хевісайда

1. Множення на константу та зсув у часі (рис. 1.8) :

$$A \cdot 1(t - t_0) = \begin{cases} A, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

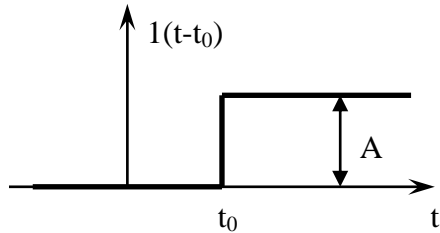


Рисунок 1.8

2. Інтегрування функції (рис. 1.9) :

$$\int_{-\infty}^{t_1} A \cdot 1(t - t_0) dt = \begin{cases} A, & t_1 < t_0, \\ A \cdot 1(t - t_0), & t_1 > t_0. \end{cases}$$

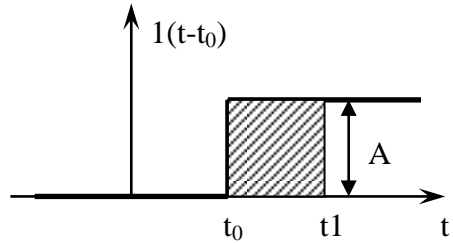


Рисунок 1.9

3. Диференціювання одиничної функції (рис. 1.10) :

$$\frac{d}{dt} 1(t - t_0) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \infty, & t = t_0. \end{cases}$$

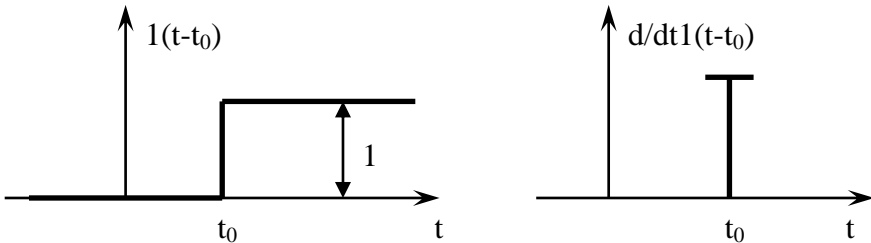


Рисунок 1.10

4. Зображення за Лапласом :

$$1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad A \cdot 1(t - t_0) \rightarrow \frac{A}{p} \cdot e^{-pt}.$$

Застосування функції Хевісайда

1. Функцію одиничної сходинок $1(t)$ називають функцією включення, таким чином, вона заміняє ключ (рис. 1.11).

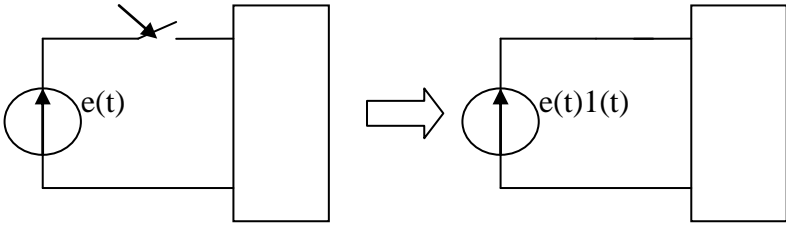


Рисунок 1.11

2. Одиничний прямокутний імпульс можна подати суперпозицією (накладенням) зсунутих у часі функцій Хевісайда (рис. 1.12).

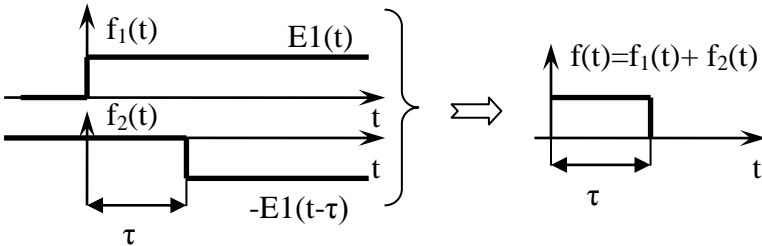


Рисунок 1.12

Функція Дірака – це імпульс нескінченно малої тривалості з нескінченно великою амплітудою (рис. 1.13). Площа, обмежена цим імпульсом, дорівнює одиниці. Тому цей імпульс ще називають одиничним імпульсом.

Функція Дірака визначається

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0; \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases} \quad (1.10)$$

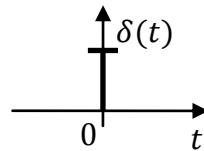


Рисунок 1.13

Візьмемо прямокутний імпульс $f(t)$ з амплітудою $1/\tau$, тоді $S = 1$ (рис. 1.14).

Для того щоб площа під ним залишалася незмінною при зменшенні тривалості імпульсу τ , необхідно пропорційно збільшувати його амплітуду (рис. 1.14).

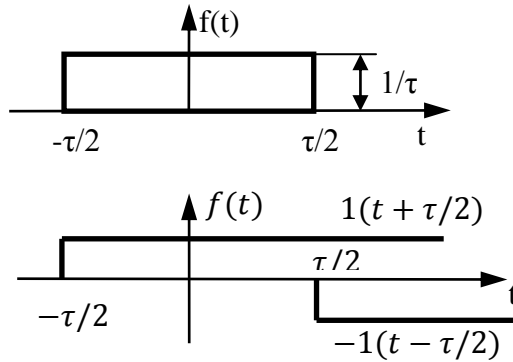


Рисунок 1.15

Функцію $f(t)$ можна подати сумою функцій Хевісайда (рис. 1.15) :

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \left[1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - 1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Функцію Дірака можна одержати граничним переходом :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [f(t)].$$

Властивості функції Дірака

1. Зсув у часі та множення на константу

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} A \cdot \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

2. Множення на функцію

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} f(t_0) \cdot \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

3. Інтегрування

$$\int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} A \cdot \delta(t - t_0) dt = A \cdot 1 = A, \quad \delta - \text{околі точки } t_0.$$

4. Фільтруюча властивість

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt = \\ = f(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

5. Згортка

Оскільки $\delta(t) * f(t) = f(t)$, то $\int f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = f(t)$.

6. Зв'язок із функцією Хевісайда

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

7. Зображення за Лапласом $\delta(p) = 1$.

8. Розмірність $\delta(t)$ [1/c].

1.5. Питання для самоперевірки

1. Що таке комутація? Навести приклади комутацій.
2. Дайте визначення перехідного процесу.
3. Які причини виникнення перехідних процесів?
4. Поняття про усталені режими.
5. Запишіть вирази для струму та напруги на індуктивності.
6. Запишіть вираз для струму та напруги на ємності.
7. Сформулювати перший закон комутації.
8. Доведіть 1-й закон комутації за допомогою закону Кірхгофа.
9. Доведіть 1-й закон комутації із енергетичної точки зору.
10. Сформулюйте другий закон комутації.
11. Доведіть 2-й закон комутації за допомогою закону Кірхгофа.
12. Доведіть 2-й закон комутації з енергетичної точки зору.
13. Як сформулювати по-іншому перший і другий закони комутації?
14. Які є наслідки із законів комутації?
15. Що таке некоректна комутація? Навести приклади.
16. Що таке функція Хевісайда, де її використовують?
17. Які властивості має функція Хевісайда?
18. Що таке функція Дірака, де її використовують?
19. Які властивості має функція Дірака?

2. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ

2.1. Вільний та вимушений режими

Розглянемо загальну методику розрахунку перехідного процесу на прикладі підключення нерозгалуженого послідовного кола (рис. 2.1) до джерела ЕРС після комутації (замикання ключа).

Запишемо для схеми (рис. 2.1) другий закон Кірхгофам :

$$e(t) = u_R + u_L + u_C. \quad (2.1)$$

У цьому прикладі будемо складати рівняння для напруги u_C , тобто зведемо рівняння до вигляду, де u_C буде єдиною змінною.

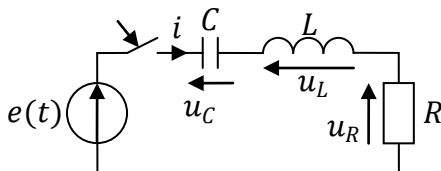


Рисунок 2.1

Запишемо напругу на опорі R через напругу ємності :

$$u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}.$$

Запишемо напругу на індуктивності L через напругу ємності :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}.$$

Підставимо одержані формули у вираз 2.1, тоді одержимо

$$e(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (2.2)$$

Якщо значення елементів кола L , R , C не залежать від напруги u_C і струму i , то отримане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням. Із курсу диференціальних рівнянь відомо, що розв'язання такого рівняння можна подати у вигляді

$$u_C = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{в}},$$

де $u_{C.ВИМ}$ – власне розв’язання лінійного неоднорідного рівняння; $u_{C.B}$ – загальне розв’язання лінійного однорідного.

Однорідне рівняння одержуємо, коли прирівняємо до нуля ліву частину рівняння (2.2), тобто $E = 0$, і тоді одержимо

$$LC \frac{d^2 u_{C.B}}{dt^2} + RC \frac{du_{C.B}}{dt} + u_{C.B} = 0. \quad (2.3)$$

На підставі цього рівняння складемо характеристичне рівняння, зробивши таку заміну :

$$\frac{d^2 u_{C.B}(t)}{dt^2} \rightarrow \lambda^2 u_{C.B}(t), \quad \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \rightarrow \lambda u_{C.B}(t). \quad (2.4)$$

Підставимо заміну у вираз 2.3 :

$$LC\lambda^2 u_{C.B}(t) + RC\lambda u_{C.B}(t) + u_{C.B}(t) = 0.$$

Винісши $u_{C.B}(t)$ за дужки, одержимо характеристичне рівняння

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0. \quad (2.5)$$

Корені рівняння будуть визначатися

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \mp \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}. \quad (2.6)$$

Якщо скласти рівняння щодо струму i , то після перетворень одержимо рівняння вигляду :

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + RC \frac{di_L}{dt} + u_C = 0. \quad (2.7)$$

Зробимо відповідну заміну :

$$\frac{d^2 i_{L.B}(t)}{dt^2} \rightarrow \lambda^2 i_{L.B}(t), \quad \frac{di_{L.B}(t)}{dt} \rightarrow \lambda i_{L.B}(t). \quad (2.8)$$

Одержимо аналогічний вигляд характеристичного рівняння, як і у рівнянні (2.3). Відповідно розв’язок буде аналогічним.

Отже, для розрахунку перехідних процесів рівняння можна складати щодо будь-якої змінної, але доцільніше складати характеристичне рівняння щодо струму у котушці індуктивності або напруги на ємності, щоб можна було застосувати закони комутації.

Корені рівняння у загальному випадку можуть бути дійсними, кратними або комплексними.

Для дійсних та комплексних коренів розв'язок однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$u_{C.B}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.9)$$

Для стійких кіл перша та друга складові виразу (2.9) повинні мати згасаючий характер, тому експоненти повинні згасати, а отже, корені характеристичного рівняння повинні бути від'ємними. Складова $u_{C.B}$ описує коло за відсутності джерела та називається *вільною складовою*, а $u_{C.ВИМ}$ залежить від джерела та називається *вимушеною складовою*.

Щоб перехідний процес закінчився, необхідно, щоб вільна складова прямувала до нуля (дійсна частина $\lambda_{1,2}$ повинна бути від'ємною). Після закінчення перехідного процесу залишиться тільки вимушена складова напруги $u_{C.ВИМ}$. Якщо джерела є джерелами постійної, або гармонічної, або будь-якої періодичної ЕРС, тоді вимушену складову можна трактувати як *усталений режим*. Струми та напруги усталеного режиму можна знайти, використовуючи відомі методи розрахунку для кіл постійного струму, метод комплексних амплітуд у випадку гармонічної дії, за допомогою ряду Фур'є для періодичної негармонічної дії.

Рівняння (2.2) та (2.3) справедливі у будь-який момент часу для перехідного та усталеного режимів. В усталеному режимі $u_{C.B} = 0$.

Оскільки $u_C = u_{C.ВИМ} + u_{C.B}$, то запишемо рівняння (2.2) у вигляді

$$LC \frac{d^2}{dt^2} (u_{C.ВИМ} + u_{C.B}) + RC \frac{d}{dt} (u_{C.ВИМ} + u_{C.B}) + (u_{C.ВИМ} + u_{C.B}) = E. \quad (2.10)$$

Віднявши від рівняння (2.10) рівняння (2.3), одержимо

$$LC \frac{d^2 u_{C.ВИМ}}{dt^2} + RC \frac{du_{C.ВИМ}}{dt} + u_{C.ВИМ} = E.$$

Звідси випливає, що вимушена напруга $u_{C.ВИМ}$ настала ніби миттєво, і це є усталеним режимом.

Отже, власне розв'язання неоднорідного рівняння може трактуватися як усталений режим (вимушена складова). Загальне розв'язання однорідного диференціального рівняння можна трактувати як *вільний режим*.

2.2. Вигляд коренів характеристичного рівняння

Розділимо характеристичне рівнянь на LC (2.5) у вигляді

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0. \quad (2.11)$$

Введемо заміну $R/L = 2\alpha$, $1/LC = \omega_0^2$ та перепишемо рівняння

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (2.12)$$

Корені рівняння визначаються виразом

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}. \quad (2.13)$$

Залежно від вигляду коренів вільна складова може набувати вигляду:

1) корені різні, дійсні та від'ємні ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}; \\ u_{C.B}(t) &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}; \end{aligned} \quad (2.14)$$

2) корені рівняння однакові та дійсні ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$):

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= A_1 e^{\lambda t} + t A_2 e^{\lambda t}; \\ u_{C.B}(t) &= B_1 e^{\lambda t} + t B_2 e^{\lambda t}; \end{aligned} \quad (2.15)$$

3) корені комплексно-спряжені ($\lambda_1 = -\alpha + j\omega_0$ і $\lambda_2 = -\alpha - j\omega_0$):

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi); \\ u_{C.B}(t) &= B e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \gamma), \end{aligned} \quad (2.16)$$

де A , B і φ , γ – сталі коефіцієнти.

Рівняння (2.13) використовують для зручності побудови вільних складових із комплексно-спряженими коренями. Далі ці рівняння будуть виведені.

2.3. Характеристики перехідного процесу

Корені характеристичного рівняння λ_i завжди від'ємні через те, що відповідна йому окрема вільна складова характеризує згасаючі за часом фізичні процеси.

За час

$$t = \tau = \frac{1}{|\lambda|} \quad (2.17)$$

вільна складова струму чи напруги зменшується у e раз відносно свого початкового значення (рис. 2.2). Цей час називають сталою часу кола.

Дійсно, $\frac{A_k e^{\lambda_k(t+\tau)}}{A_k e^{\lambda_k t}} = e^{\lambda_k \tau} = e^{\lambda_k \frac{1}{|\lambda_k|}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2.718} \cong 0.368$.

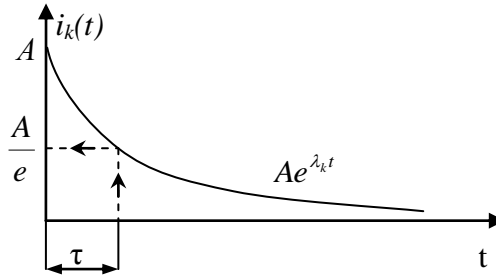


Рисунок 2.2

Чим більша стала часу кола, тим повільніше змінюються електричні змінні під час перехідного процесу. Хоча теоретично перехідний процес триває нескінченно довго, на практиці вважають, що вільною складовою можна знехтувати через час $t = (3 - 5)\tau$.

За цей час початкове значення вільної складової зменшується відповідно у $(e^3 = 20) - (e^5 = 148)$ разів і досягає значень, сумірних із значеннями електричних змінних, спричинених у колі атмосферними явищами, хімічними процесами та іншими факторами, які не враховуються при аналізі кіл.

У таблиці 2.1 наведені різні значення вільної складової струму у колі для різних значень сталої часу кола.

Таблиця 2.1

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$i_{\text{в.им.}}, \%$	100	36.67	13.53	4.98	1.83	0.67

Для інженерних розрахунків взяли час перехідного процесу

$$t = 3\tau. \quad (2.18)$$

Звідси час перехідного процесу можна розрахувати за такою формулою :

$$t_{\text{пп}} = 3\tau = \frac{3}{|\lambda|}, \quad (2.19)$$

де λ – дійсна частина для комплексних коренів ($\lambda = -\alpha$) і найменший із коренів за модулем для від’ємних дійсних коренів ($\lambda = \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$).

Коефіцієнт згасання кола – величина, зворотна сталій часу кола :

$$\alpha = \frac{1}{\tau}. \quad (2.20)$$

2.4. Загальна методика знаходження шуканої змінної

Порядок розрахунку перехідних процесів викладемо нижче.

1. Одним із відомих методів аналізу лінійних кіл складається рівняння або система рівнянь, що описує схему. Як метод складання рівнянь можуть бути такі методи: рівняння Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод накладення.

2. Напруга на котушці індуктивності L записується за допомогою закону Фарадея для напруги $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, струм для ємності записується на підставі співвідношення $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, а струм на опорі записується за допомогою закону Ома $u = i \cdot R$.

3. За допомогою співвідношень для напруг та ємностей складається система лінійних диференціальних рівнянь для досліджуваної схеми.

4. Перетворюємо систему інтегродиференціальних рівнянь у диференціальне неоднорідне рівнянь щодо шуканої змінної :

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t). \quad (2.21)$$

Як шукані змінні доцільно брати струм у котушці індуктивності та напругу на ємності, щоб надалі можна було б використати закони комутації.

5. Складається характеристичне рівняння та знаходяться його корені.

Неоднорідне диференціальне рівняння перетворюємо в однорідне диференціальне рівняння, для цього прирівнюємо праву частину рівняння (2.24) до нуля та одержуємо рівняння вигляду

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0. \quad (2.22)$$

На підставі рівняння (2.24) з урахуванням заміни

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \lambda x(t), \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \rightarrow \lambda^2 x(t), \dots, \frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightarrow \lambda^n x(t)$$

складаємо характеристичне рівняння

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

та знаходимо його корені.

6. Записуємо повний розв'язок у вигляді

$$x(t) = x_{\text{ВИМ}} + x_{\text{В}}(t). \quad (2.23)$$

7. Знаходимо вимушену складову $x_{\text{ВИМ}}$.

8. Вигляд вільної складової для дійсних рівних та нерівних коренів

$$x_{\text{В}}(t) = \sum_{i=1}^m A_i t^{k-1} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=m+1}^n A_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.24)$$

де $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, $m < n$.

9. На підставі незалежних початкових умов і законів комутації визначаємо константи інтегрування A_i .

10. Записується загальний вираз для шуканої змінної.

Зазначимо, що основна складність класичного методу аналізу перехідних процесів у складних колах полягає у визначенні залежних початкових умов.

2.5. Перехідні процеси у послідовних RL - колах

2.5.1. Загальні положення

Розглянемо послідовне RL -коло (рис. 2.3). Запишемо для нього рівняння за другим законом Кірхгофа $e(t) = u_R + u_L$.

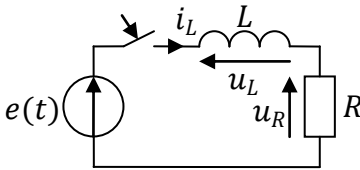


Рисунок 2.3

Диференціальне рівняння краще складати щодо струму, оскільки можна застосувати 1-й закон комутації для визначення початкових умов і знаходження констант інтегрування.

Виразимо напругу на резисторі через його струм i_L , а напругу на котушці індуктивності – за допомогою виразу (1.2) і тоді одержимо таке рівняння :

$$e(t) = Ri_L + L \frac{di_L}{dt}. \quad (2.25)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння. Корені цього рівняння мають вигляд

$$i_L(t) = i_{L.ВИМ} + i_{L.В}(t),$$

де $i_{L.ВИМ}$ і $i_{L.В}(t)$ – струми вимушеного режиму та вільного процесу відповідно.

Для знаходження $i_{L.В}$ запишемо однорідне диференціальне рівняння, для цього ліву частину неоднорідного диференціального рівняння (2.25) прирівняємо до нуля ($e(t) = 0$) :

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = 0.$$

Одержали однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Для того щоб знайти розв'язання цього рівняння, складаємо характеристичне рівняння, ввівши заміну відповідно до (2.8), і одержимо таке характеристичне рівняння :

$$R + L\lambda = 0.$$

Одержуємо такий корінь характеристичного рівняння :

$$\lambda = -\frac{R}{L}.$$

Запишемо вираз для вільної складової струму у котушці індуктивності $i_{L.B}$:

$$i_{L.B}(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-tR/L} = Ae^{-t/\tau},$$

де $\tau = L/R$, τ – стала часу послідовного RL-кола.

Стала часу кола показує час, упродовжм якого вільна складова струму, загасаючи, зменшується у e раз у порівнянні зі своїм початковим значенням $i_{L.B}(0)$.

Отже, стала часу RL – кола визначається виразом

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (2.26)$$

Для рівняння вільної складової у момент часу $t = \tau$ одержуємо

$$i_{L.B}(\tau) = i_{L.B}(0)e^{-1} = \frac{i_{L.B}(0)}{e} = \frac{A}{e}. \quad (2.27)$$

Практично можна вважати, що вільна складова струму у котушці індуктивності згасне за час $t_{\text{ПП}} = 3\tau$, як було показано вище. Розглянемо тепер, як розв'язується наведене диференціальне рівняння (2.25) для різних видів джерела сигналу $e(t)$.

2.5.2. Підключення послідовного RL-кола під постійну напругу

Нехай напруга джерела постійна та не залежить від часу, тобто $e(t) = E$. Розв'язання шукаємо у вигляді суми вимушеної та вільної складових :

$$i_L(t) = i_{L.ВИМ} + i_{L.B}(t) = i_{L.ВИМ} + Ae^{-t/\tau}. \quad (2.28)$$

Знайдемо вимушену складову $i_{L.ВИМ}$ (процес установиться, коли $t \rightarrow \infty$). У момент комутації котушка індуктивності L із нульовими початковими умовами еквівалентна замиканню кола у місті її включення (на підставі наслідків із законів комутації). Таким чином, вимушена складова струму визначається

$$i_{L.ВИМ} = \frac{E}{R}.$$

Тепер струм в індуктивності визначається так :

$$i_L(t = 0) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{E}{R} + A.$$

Оскільки до підключення джерела напруги E струму у колі не було, то за першим законом комутації $i_L(0) = i_L(0-) = 0$.

Звідси знаходимо константу $A = -\frac{E}{R}$.

Запишемо повний вираз струму у котушці індуктивності :

$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = I_{L,0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Рівняння (2.32) для зручності побудови можна записати по-іншому :

$$i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ I_{L,0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Далі на основі рівняння (2.29) побудуємо графік зміни у часі струму на котушці індуктивності (рис. 2.4 б).

Знайдемо напругу на резисторі схеми за законом Ома :

$$u_R(t) = i_L(t) \cdot R = I_{L,0} \cdot R \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Знайдемо напруги на індуктивності схеми на підставі 2-го закону Кірхгофа :

$$u_L(t) = E - u_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Такий самий вираз можна одержати із виразу (1.2) :

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Нижче (рис. 2.4 а) наведені графіки напруг на всіх елементах RL-кола.

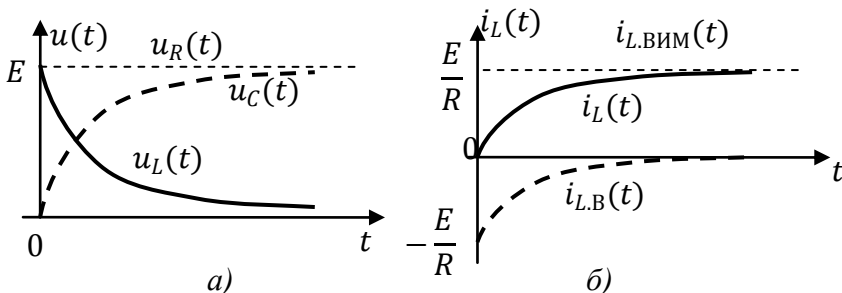


Рисунок 2.4

Із графіка (рис. 2.4) видно, що напруга на опорі u_R повторює форму струму. Ці криві (рис. 2.4) показують, що струм у колі не встановлюється миттєво, а потрібно якийсь час (час перехідного процесу) до початку вимушеного режиму. Струм зростає тим повільніше, чим більша стала часу кола τ , тобто чим повільніше загасає вільний струм. Частина енергії, що одержується від джерела, іде на збільшення магнітного поля котушки, а частина переходить у тепло в її опорі.

У деяких підручниках, як графічна інтерпретація сталої часу кола τ , наводиться рисунок, що зображений на рис. 2.5.

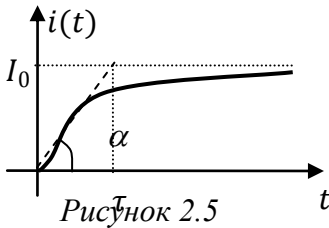


Рисунок 2.5

Цей графік використовують для геометричної інтерпретації сталої часу кола. У нульовий момент часу ($t = 0$) проводиться дотична до кривої залежності струму у часі $i(t)$. Тангенс кута нахилу дотичної є значення похідної від струму.

Через кут нахилу дотичної можна визначити сталу часу кола

$$\frac{d}{dt} I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = I_0 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.30)$$

У нульовий момент часу ($t = 0$) одержуємо вираз (2.30)

$$\frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Звідки знаходимо сталу часу кола

$$\tau = I_0 \operatorname{ctg} \alpha.$$

2.5.3. Відключення послідовного RL-кола від постійної напруги

Розглянемо випадок відключення послідовного RL-кола від постійної напруги (тобто при замиканні ключа на рис. 2.6). Енергія магнітного поля, накопичена у котушці, розсіюється на опорі R_2 . При складанні рівняння будемо вважати, що у момент комутації у котушці був струм I_0 . Крім того, варто зазначити, що рівняння будемо складати для правої частини схеми.

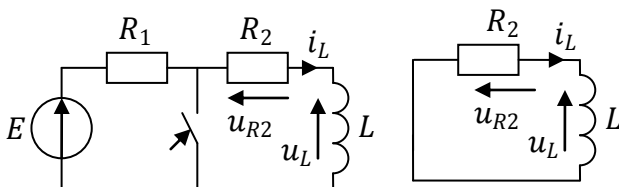


Рисунок 2.6

За першим законом комутації $i_L(0) = i_L(0-) = I_0$.

Якщо напруга джерела постійна ($e(t) = E$), то складова постійного струму до комутації, що є початковою умовою, визначається за формулою

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Шуканий струм визначається як сума вимушеної та вільної складових :

$$i_L(t) = i_{L,\text{ВИМ}} + i_{L,\text{В}}(t).$$

Оскільки після комутації у колі джерело відсутнє, то вимушена складова дорівнює нулю ($i_{L,\text{ВИМ}} = 0$).

Як було показано вище, $i_{L,\text{В}}(t) = Ae^{-t/\tau}$, де $\tau = L/R_2$.

Струм, що проходить через індуктивність, буде мати вигляд

$$i_L(t) = i_{L,\text{В}}(t) = Ae^{-t/\tau}. \quad (2.31)$$

Визначимо сталу інтегрування A із урахуванням законів комутації :

$$i_L(0) = i_L(0-) = Ae^{-0/\tau} = A = I_0.$$

Звідси видно, що $A = I_0$. Маємо остаточний розв'язок

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (2.32)$$

де I_0 – значення струму у котушці у момент замикання ключа.

Знайдемо значення напруг на опорі R_2 – u_2 і індуктивності L – u_L (рис. 2.7) :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= R_2 I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ u_L(t) &= -u_2(t) = -R_2 I_0 e^{-t/\tau} = U_0 e^{-t/\tau}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Напруга на опорі повторює форму струму. Напруга на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

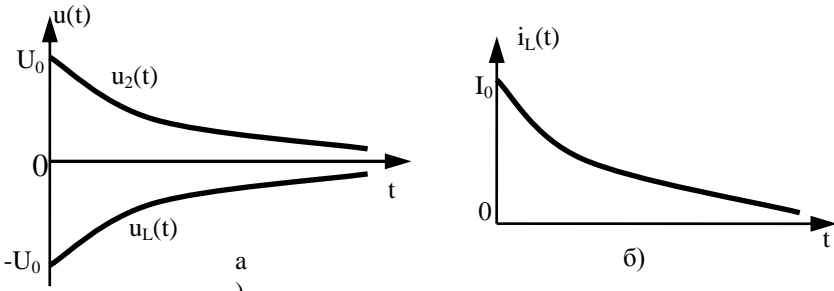


Рисунок 2.7 – Графіки залежності напруги на індуктивності $u_L(t)$ та напруги на другому опорі $u_2(t)$ (а) і струму в колі $i(t)$ (б)

У момент комутації у котушці індуктивності була запасена енергія магнітного поля.

Енергія, що розсіюється на опорі, повинна дорівнювати тому ж значенню енергії. Покажемо це за допомогою математичних перетворень

$$\begin{aligned}
 W_R &= \int_0^{\infty} i^2 R_2 dt = \int_0^{\infty} I_0^2 R_2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = I_0^2 R_2 \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \\
 &= I_0^2 R_2 \frac{L}{2R_2} (1 - 0) = \frac{LI_0^2}{2}.
 \end{aligned}$$

2.5.4. Ввімкнення послідовного RL-кола під гармонічну напругу

При ввімкненні послідовного RL-кола під гармонічну напругу (рис. 2.3) $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E)$, де φ_E – фаза джерела напруги, що суворо прив'язана до моменту комутації.

Струм у колі визначається

$$i_L(t) = i_{L.\text{вим}} + i_{L.\text{в}}(t) = i_{L.\text{вим}} + Ae^{-t/\tau}.$$

Вимушену складову струму $i_{L.\text{вим}}$ знаходимо за допомогою методу комплексних амплітуд. Спочатку перейдемо від тригонометричної форми запису вхідної напруги до показникової за допомогою такої формули :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E) \leftrightarrow \dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_E} = E e^{j\varphi_E}.$$

Запишемо комплексний вхідний опір кола

$$\begin{aligned} Z(j\omega) = Z &= R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi_Z} = \\ &= \sqrt{R^2 + x_L^2} e^{j\varphi_Z}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Запишемо значення комплексного вхідного струму :

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{E e^{j\varphi_E}}{\sqrt{R^2 + x_L^2} e^{j\varphi_Z}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + x_L^2}} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z)} = I e^{j\varphi_I},$$

де $I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + x_L^2}}; \quad \varphi_Z = \arctg \frac{x_L}{R}.$

За допомогою переходу від показникової форми запису до гармонічної одержимо такий вираз струму :

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_I) + A e^{-t/\tau}.$$

Тепер необхідно знайти константу інтегрування А. Для цього запишемо отриманий вираз струму у нульовий момент часу

$$i(t = 0) = I \sin(\varphi_I) + A e^{-0/\tau} = I \sin(\varphi_I) + A.$$

На підставі першого закону комутації одержимо

$$i(0) = i(0 -) = 0.$$

Із одержаного виразу виразимо сталу інтегрування

$$A = -I \sin(\varphi_I).$$

Запишемо повний розв'язок

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_I) - I \sin(\varphi_I) \cdot e^{-t/\tau}. \quad (2.35)$$

Напряга на індуктивності визначається співвідношенням

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

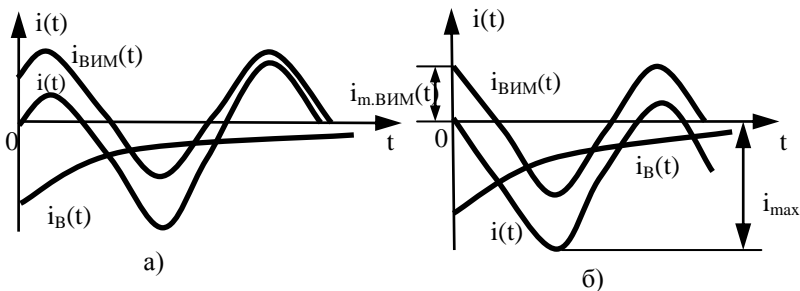


Рисунок 2.8 – Залежності струму у послідовному RL -колі при гармонічній дії

Крива струму у котушці індуктивності $i_L(t)$, зображена на рис. 2.8 а, показує, що під час згасання вільної складової струму $i_{L.B}(t)$ загальний струм прямує до значення вимушеного струму. Однак через проміжок часу від $T/4$ до $3T/4$ після включення, що залежить від кута φ_E , струм може досягати значень, що перевищують амплітуду вимушеного струму.

Найбільшого значення струм досягає, якщо у момент включення кола вимушений струм дорівнює амплітуді ($\varphi_E - \varphi_Z = \pi/2$ або $\varphi_E - \varphi_Z = -\pi/2$), а стала часу кола досить велика, тобто вільний струм згасає дуже повільно. За цих умов $\varphi_E = \pi$ і прикладена напруга у момент комутації повинна проходити через нульове значення.

Крива струму при $\varphi_E - \varphi_Z = \pi/2$ та за досить великих значень τ наведена на рис. 2.8 б. Приблизно через половину періоду після ввімкнення кола струм досягає майже подвоєної амплітуди вимушеного струму

$$|i_{\text{max}}(t)| = |2I|.$$

Отже, при ввімкненні RL -кола до джерела гармонічної напруги перехідний струм ні за яких умов не може перевищувати подвоєної амплітуди вимушеного струму.

Початкове значення вільного струму дорівнює за величиною та протилежне за знаком початковому значенню вимушеного струму. Тому якщо у момент включення вимушений струм

проходить через нуль, то початкове значення вільного струму так само дорівнює нулю. Вільний струм взагалі не виникає, і у колі відразу встановлюється вимушений режим. Це буде при $\varphi_I = 0$ та $\varphi_I = \pi$.

Проаналізувавши одержані вирази для випадків ввімкнення послідовного RL-кола під постійну та гармонічну напругу, слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

2.6. Перехідні процеси у послідовних RC-колах

2.6.1. Загальні положення

Розглянемо послідовне RC-коло (рис. 2.9). Запишемо 2-й закон Кірхгофа для цього кола :

$$e(t) = u_R + u_C. \quad (2.36)$$

Складати рівняння будемо щодо напруги на ємності u_C .

Одержимо диференціальне рівняння для цієї схеми та розв'яжемо його щодо різних видів вхідної дії.

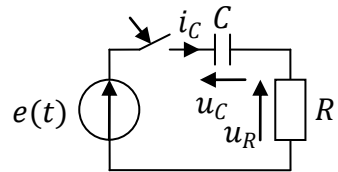


Рисунок 2.9

Струм у колі через напругу на конденсаторі визначається

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Напругу на опорі знаходимо за законом Ома $u_R = iR$.

Підставимо значення у вираз (2.36) для схеми після комутації і одержимо неоднорідне диференціальне рівняння

$$e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (2.37)$$

Розв'язання цього рівняння

$$u_C(t) = u_{C.вим} + u_{C.в}(t),$$

де $u_{C.вим}$ і $u_{C.в}(t)$ – напруги вимушеного режиму, що визначається виглядом джерела колі та напруга вільного процесу відповідно.

Вільна складова $u_{C.B}(t)$ визначається із однорідного диференціального рівняння, прирівнявши праву частину до нуля :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння $RC\lambda + 1 = 0$.

Корені цього рівняння визначаються

$$\lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Запишемо вираз вільної складової напруги

$$u_{C.B}(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-t/RC} = Ae^{-t/\tau},$$

де $\tau = RC$, що називають сталою часу RC-кола .

Отже, швидкість заряджання ємності визначається сталою часу кола. Чим більші значення ємності та активного опору, тим повільніше зростає напруга на ємності і зменшується струм.

Таким чином, стала часу RC-кола визначається виразом

$$\tau = RC. \quad (2.38)$$

2.6.2. Ввімкнення послідовного RC-кола під постійну напругу

Будемо розглядати загальний випадок, коли ємність заряджена, тобто $u_C(0) = U_0$. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.B}(t).$$

Вимушену складову, що відповідає постійному режиму, можна знайти знаючи, що за постійного струму ємність еквівалентна розриву у місці її включення. Отже, $u_{C.ВИМ} = E$. Вільна складова має вигляд $u_{C.B}(t) = Ae^{-t/\tau}$.

Загальна формула для напруги на ємності має вигляд

$$u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau}. \quad (2.39)$$

На основі другого закону комутації $u_C(0) = u_C(0-) = U_0$.

Записавши вираз 2.48 у нульовий момент часу, визначимо константу інтегрування $A = U_0 - E$.

Отже, одержуємо вираз для напруги на конденсаторі

$$u_C(t) = E + (U_0 - E)e^{-t/\tau}. \quad (2.40)$$

Запишемо вираз напруги на резисторі за другим законом Кірхгофа :

$$u_R(t) = E - u_C = (E - U_0)e^{-t/\tau}.$$

Тоді струм у колі набере вигляду

$$i(t) = \frac{E - U_0}{R} e^{-t/\tau}.$$

Струм у колі можна знайти за допомогою виразу

$$i = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Відсутність початкового заряду

Припустимо, що до початку перехідного процесу ємність була розряджена (тобто $u_C(0) = 0$). Тоді напруга на ємності визначається

$$u_C(t) = E - E e^{-t/\tau} = E(1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.41)$$

Напругу на резисторі та струм у колі визначають так :

$$u_R(t) = E e^{-t/\tau}, \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Із виразу для струму видно, що у момент комутації струм дорівнює $i(0) = E/R$. Це підтверджує факт, що у момент комутації незаряджена ємність є «закорченою» ділянкою кола. Побудуємо орієнтовні графіки (рис. 2.10).

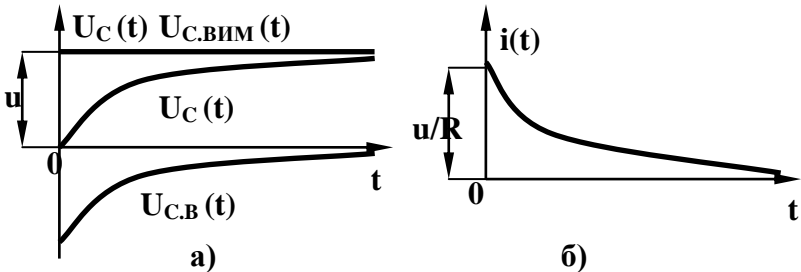


Рисунок 2.10 – Напруга $u_C(t)$ (а) і струму у колі $i(t)$ (б)

Криві (рис. 2.10) показують, що напруга на ємності та струм у колі не встановлюються миттєво. Напруга зростає, а струм спадає тим повільніше, чим більша стала часу кола τ , тобто чим повільніше згасає вільна напруга $u_{C.в}(t)$. Напруга на опорі за формою збігається зі струмом, і тому його графік не будемо будувати.

Наявність початкового заряду

Якщо ємність до моменту комутації була заряджена ($u_c = U_0$), то можливі різноманітні варіанти. Графіки зміни напруги та струмів наведені на рисунках (рис. 2.11 – рис. 2.14).

1) $U_0 > 0, U_0 < E$.

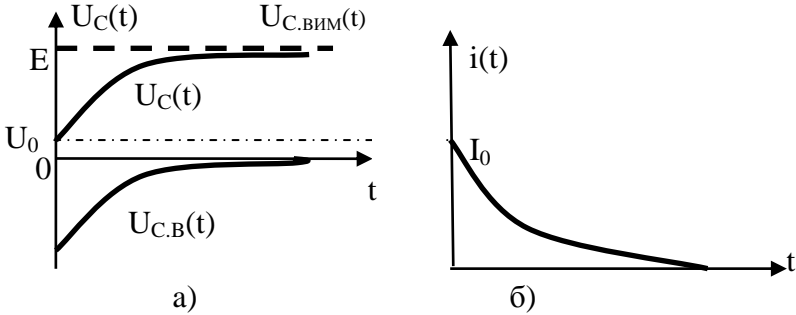


Рисунок 2.11 – Напруги на ємності $u_c(t)$ (а) і струм у колі $i(t)$ (б)

Із графіків (рис. 2.11) видно, що ємність від U_0 підзарядиться (збільшиться) до E . У початковий момент часу одержимо

$$i(0) = \frac{E - U_0}{R},$$

оскільки у момент комутації заряджена ємність еквівалентна джерелу напруги, що дорівнює U_0 (рис. 2.12).

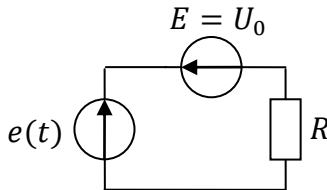


Рисунок 2.12

2) $U_0 > 0, U_0 > E$.

У цьому випадку ємність розряджається від U_0 до E , тому струм від'ємний (рис. 2.13).

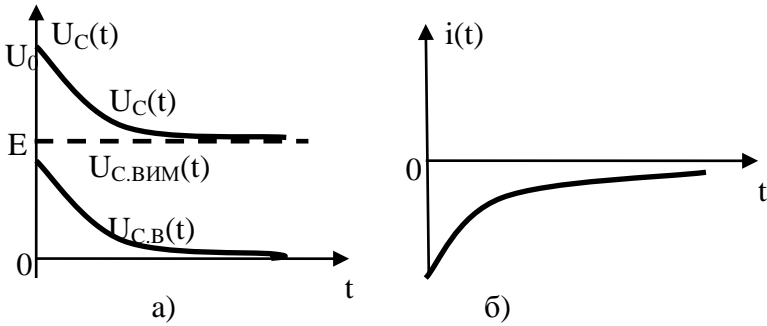


Рисунок 2.13 – Напруга на ємності $u_c(t)$ (а) і струм $i(t)$ (б)

3) $U_0 < 0$.

У цьому випадку ємність перезарядиться від $-U_0$ до E (рис. 2.14). Значення струму для схеми, наведеної для моменту комутації, де джерело $E = U_0$, буде спрямоване вниз.

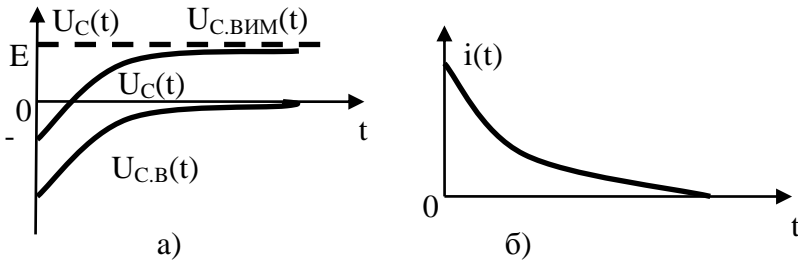


Рисунок 2.14 – Напруга на ємності $u_c(t)$ (а) і струм $i(t)$ (б)

2.6.3. Вільний розряд ємності у послідовному RC-колі

Розглянемо схему, що має вигляд без джерела (рис. 2.15). При цьому можемо вважати, що сигнал джерела відсутній ($e(t) = 0$). У схемі відбувається вільний розряд ємності. Із цього випливає, що вимушена складова повинна дорівнювати нулю ($u_{C,ВИМ} = 0$).

Напруга на ємності визначається

$$u_C(t) = u_{C.B}(t) = Ae^{-t/\tau}.$$

Запишемо цей вираз у початковий момент часу

$$u_C(t) = U_0 = Ae^{-0/\tau} = A.$$

Звідси знаходимо, що $A = U_0$.

Тепер запишемо остаточні вирази для шуканих величин:

1) напруга на ємності u_C :

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}; \quad (2.42)$$

2) напруга на резисторі u_R :

$$u_R(t) = -u_C(t) = -U_0 e^{-t/\tau}; \quad (2.43)$$

3) струм у колі i :

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (2.44)$$

Зобразимо ці залежності на графіках (рис. 2.16).

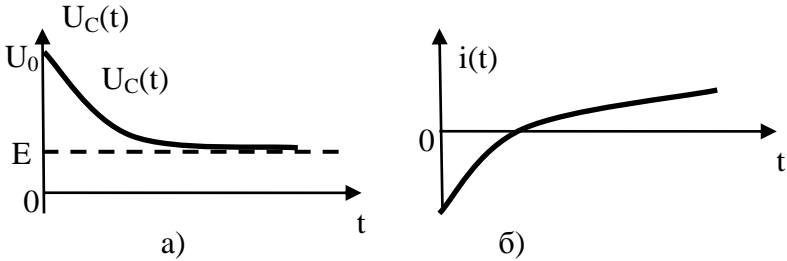


Рисунок 2.16 – Напруга $u_C(t)$ (а) і струм $i(t)$ у RC-колі

Покажемо, що така ж енергія розсіюється на опорі, що і у ємності. Для цього запишемо енергію на опорі R через струм, що у ньому проходить

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} R dt = \frac{U_0^2}{R^2} \cdot \left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{U_0^2}{R^2} \cdot \frac{RC}{2} (1 - 0) = \frac{CU_0^2}{2}. \end{aligned}$$

2.6.4. Ввімкнення послідовного RC-кола під гармонічну напругу

Розглянемо включення послідовного RC-кола (рис. 2.9) під гармонічну напругу, що створюється джерелом $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_E)$, де φ_E – фаза джерела напруги, що суворо прив'язана до моменту комутації.

Напруга у колі визначається

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.В}(t) = u_{C.ВИМ} + Ae^{-t/\tau}.$$

Вільну складову $u_{C.В}$ знаходимо за допомогою однорідного диференціального рівняння, яке одержуємо з рівняння (2.54), прирівнявши ліву частину рівняння до нуля.

Вимушену складову $u_{C.ВИМ}$ визначають за допомогою методу комплекс амплітуд. Запишемо повний опір кола у показниковій формі :

$$Z = R + jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\varphi_Z}, \quad (2.45)$$

де $\varphi_Z = -\arctg \frac{X_C}{R}$ – фаза опору Z та $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивний опір конденсатора.

Запишемо напругу джерела $e(t)$ у показниковій формі

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E) \leftrightarrow \dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_E} = E e^{j\varphi_E}.$$

Визначимо комплексну напругу за законом Ома :

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= \dot{I}_C Z_C = \frac{\dot{I}_C}{j\omega C} = \frac{\dot{E}}{Z} \cdot \frac{-j}{\omega C} = \frac{E e^{j\varphi_E}}{\sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\varphi_Z}} \cdot \frac{e^{-j90^\circ}}{\omega C} = \\ &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\omega C} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z - 90^\circ)} = \frac{E}{\sqrt{(R\omega C)^2 + 1}} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z - 90^\circ)} = \\ &= \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z - 90^\circ)} = U_{C.0} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z - 90^\circ)}. \end{aligned}$$

Цій комплексній амплітуді відповідає вимушена складова напруги на ємності

$$u_{C.ВИМ}(t) = U_{C.0} \sin\left(\omega t + \varphi_E - \varphi_Z - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.46)$$

Виходячи із наведених формул, запишемо рівняння загальної перехідної напруги на ємності :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{C,\text{ВИМ}}(t) + u_{C,\text{В}}(t) = \\ &= U_{C,0} \sin\left(\omega t + \varphi_E - \varphi_Z - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-t/\tau}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Припустимо, що ємність до підключення зовнішнього джерела не мала заряду. На підставі другого закону комутації $u_C(0) = u_C(0-) = 0$. Запишемо вираз 2.57 у нульовий момент часу ($t = 0$) :

$$u_C(0) = U_{C,0} \sin\left(\varphi_E - \varphi_Z - \frac{\pi}{2}\right) + A.$$

Знайдемо із отриманого виразу сталу інтегрування A :

$$A = -U_{C,0} \sin\left(\varphi_E - \varphi_Z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Одержуємо повну напругу на ємності

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_{C,0}(\sin(\omega t + \varphi_E - \varphi_Z - 90^\circ) - \\ &\quad - \sin(\varphi_E - \varphi_Z - 90^\circ)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Графік для напруги $u_C(t)$ (вираз 2.58) буде мати вигляд, аналогічний струму у RL-колі при його підключенні до гармонічної напруги.

У загальному випадку вигляд графіка (рис. 2.17) визначається співвідношеннями між τ (сталою часу кола) і періодом гармонічного сигналу T , а також співвідношенням між фазами джерела напруги φ_E та фазою вхідного опору φ_Z .

Якщо фаза джерела напруги дорівнює фазі вхідного опору ($\varphi_E = \varphi_Z$), то вільна складова дорівнює нулю ($u_{C,\text{В}}(0) = 0$), оскільки $\sin(\varphi_E - \varphi_Z) = \sin(0) = 0$ і відразу настає усталений режим.

Якщо ж різниця фаз $\varphi_E - \varphi_Z = \pm\pi$, то модуль константи інтегрування $|A|$ досягає свого максимального значення та перехідний процес найбільш яскраво виражений.

Графіки напруги на ємності при $\varphi_E - \varphi_Z = \pm\pi$ для різних співвідношень сталої часу кола τ (рис. 2.17 а – невеликі значення τ , а рис. 2.17 б – великі значення τ) і періоду коливач джерела напруги $e(t)$ наведені на рис. 2.17. Графіки побудовані орієнтовно.

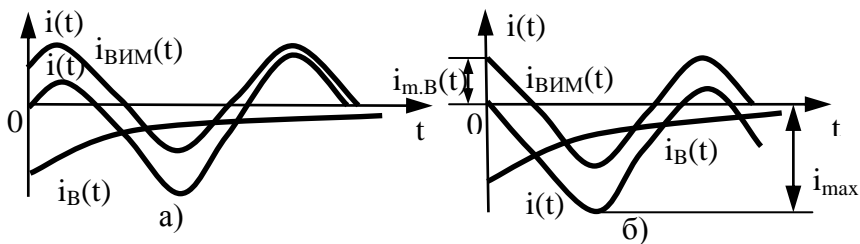


Рисунок 2.17

Із графіка видно, що через половину періоду після ввімкнення кола напруга на ємності досягає майже подвійної амплітуди вимушеного режиму :

$$u_{c.max} \approx 2u_{c.вим.}$$

Таким чином, у цьому випадку перехідна напруга на ємності ні за яких умов не може перевищувати подвійної амплітуди вимушеного режиму.

Проаналізувавши одержані вирази для випадків ввімкнення послідовного RC-кола під постійну та гармонічну напругу, слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

2.7. Перехідні процеси у колах із одним реактивним елементом

Класичний метод аналізу перехідних процесів у колах із одним реактивним елементом у кінцевому випадку зводиться до розв'язання диференціального рівняння. Із математичної точки зору це не завжди є простою задачею, оскільки потрібно скласти систему інтегродиференціальних рівнянь одним із відомих методів аналізу електричних кіл. Для спрощення математичного апарату аналізу перехідних процесів в розгалужених колах із одним реактивним елементом можна використовувати еквівалентні перетворення або метод еквівалентного генератора до зведення розгалуженого кола до нерозгалуженого кола (рис. 2.18).

Таким чином, будь-яку схему за допомогою еквівалентних перетворень або методом еквівалентного генератора можна звести до одноконтурної відносно до реактивного елемента (ємності чи індуктивності).

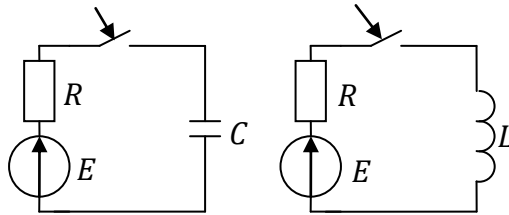


Рисунок 2.18

Далі розрахунок перехідного процесу можна звести до розрахунку кола на постійному струмі до комутації та після комутації для визначення вимушеної та вільної складових. Перехідний струм або напруга має вигляд $x = x_{\text{ВИМ}} + x_{\text{В}}$.

Вимушена складова $x_{\text{ВИМ}}$ – це складова після комутації на постійному струмі, а вільна складова має вигляд $x_{\text{В}} = A \cdot e^{-t/\tau}$, де τ – це стала часу кола.

Стала часу RL -кола визначається виразом $\tau = L/R$, а для RC -кола $\tau = CR$.

Такий підхід спрощує математичні методи аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах із одним реактивним елементом.

Проілюструємо такі перетворення на прикладі (рис. 2.19).

Наведемо формули еквівалентних перетворень :

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{\text{ЕК}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}, \quad J = \frac{E}{R_{12}}, \quad E_{\text{ЕК}} = JR_{\text{ЕК}}.$$

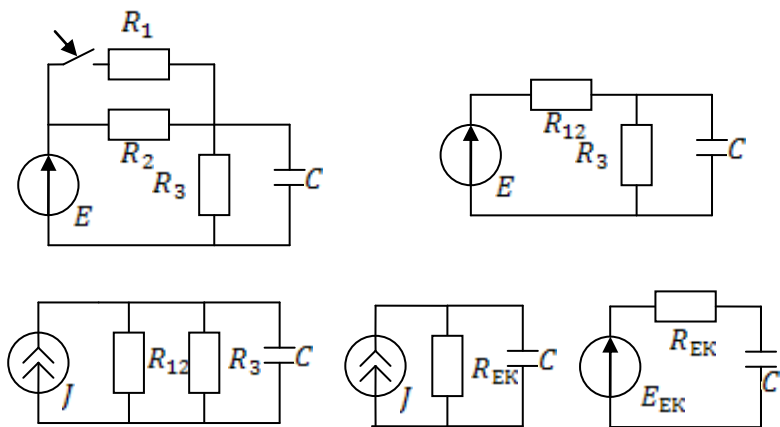


Рисунок 2.19

Як бачимо із рис. 2.19, схема зводиться до простого послідовного RC -кола, яку можна розглядати, як це було зроблено вище.

2.8. Перехідні процеси у послідовному RLC-колі

2.8.1. Загальні положення

Розглянемо послідовне RLC-коло (рис. 2.20).

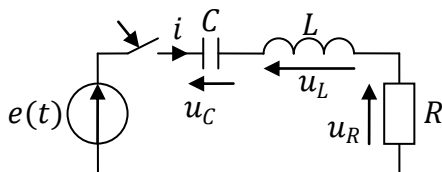


Рисунок 2.20

Таке коло (рис. 2.20) описується рівнянням (2.2) або (2.7), що було одержане раніше. Виберемо рівняння відносно напруги на ємності u_C :

$$e(t) = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt}. \quad (2.49)$$

Розв'язання такого рівняння (2.60) можна подати у вигляді

$$u_C(t) = u_{C,\text{ВИМ}} + u_{C,\text{В}}(t).$$

Вимушена складова напруги на ємності $u_{C,\text{ВИМ}}$ визначиться видом джерела дії $e(t)$.

Для знаходження вільної складової $u_{C,\text{В}}(t)$ відповідно до формули (2.4) вводять заміну та одержують характеристичне рівняння

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0.$$

Корені рівняння будуть відповідно (2.6) визначатися

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \mp \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Звідси видно, що характер вільної складової залежить від параметрів RLC-кола, тобто від вигляду коренів характеристичного рівняння (2.5).

Розглянемо можливі види коренів :

1. Корені від'ємні, нерівні та дійсні: $\lambda_1 \neq \lambda_2 < 0$.
2. Корені рівні, від'ємні та дійсні: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.
3. Корені комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = -\alpha \mp j\omega_B$.

Запишемо характеристичне рівняння :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0 &= 0; \\ 2\alpha &= \frac{R}{L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC}. \end{aligned}$$

Покажемо зв'язок коренів із добротністю

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{R}{2L} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{R \cdot \omega}{2L\omega} = \frac{R \cdot \omega}{2\rho} = \frac{\omega}{2\frac{\rho}{R}} = \frac{\omega}{2Q}.$$

Звідси визначимо

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha Q}{\omega} = \frac{RQ}{2L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{RQ}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{RQ}{2\rho} = \frac{Q}{2\frac{\rho}{R}} = \frac{Q}{2Q} = \frac{1}{2}.$$

Корені рівняння визначаються так :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \mp \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{(RC)^2}{4 \cdot (LC)^2} - \frac{4LC}{4 \cdot (LC)^2}} =$$

$$= -\alpha \mp \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \mp j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Звідси визначаємо зв'язок коренів із добротністю.

Щоб корені були дійсними, необхідно

$$\alpha < \omega_0, \quad \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{1}{2} < \frac{L}{R\sqrt{LC}}, \quad \frac{1}{2} < \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{L}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q.$$

2.8.2. Аперіодичний розряд конденсатора

Аперіодичним розрядом конденсатора, зарядженого до напруги U_0 через резистор і котушку індуктивності, називається розряд, за якого напруга на конденсаторі монотонно спадає від значення U_0 до нуля, тобто не відбувається перезарядження конденсатора.

Аперіодичним зарядом конденсатора ще називають вільний розряд конденсатора. Вільний розряд конденсатора має місце, коли корені характеристичного рівняння різні, від'ємні та дійсні $Q < 1/2$.

Будемо вважати, що ємність була заряджена до відомого значення $u_C(0) = U_0$. Вхідна напруга була відсутня ($e(t) = 0$), а отже, вимушеного режиму не буде, тоді одержимо відповідно до (2.11)

$$u_C(t) = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{в}}(t) = 0 + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.50)$$

Знайдемо константи інтегрування A_1 та A_2 . Для цього запишемо вираз (2.65) для нульового моменту часу ($t = 0$) і застосуємо закон комутації

$$u_C(0) = u_C(0^-) = U_0 = A_1 + A_2.$$

Оскільки маємо одне рівняння, а дві змінні, то друге рівняння для знаходження констант одержуємо диференціюванням співвідношення (2.65)

$$\frac{du_C(t)}{dt} = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.51)$$

Для знаходження $\frac{du_C(t)}{dt}$ надамо йому фізичного змісту

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{C}{C} \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt} \cdot \frac{1}{C} = \frac{i_c(t)}{C}.$$

Запишемо останній вираз у нульовий момент часу ($t=0$):

$$\left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C}. \quad (2.52)$$

Оскільки у колі наявна індуктивність без початкового струму у момент комутації, то $i_c(0) = i_c(0-) = 0$ (на підставі першого закону комутації), оскільки до комутації коло розірване.

Із урахуванням вище викладеного маємо

$$\left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{0}{C} = 0.$$

Отже, запишемо рівняння 2.67 у нульовий момент часу:

$$\frac{du_c(t)}{dt} = 0 = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2.$$

Таким чином, одержуємо систему рівнянь для знаходження констант у матричній формі

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Розв'яжемо систему (2.70) методом Крамера. Для цього запишемо визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} U_0 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = U_0 \lambda_2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & U_0 \\ \lambda_1 & 0 \end{vmatrix} = -U_0 \lambda_1.$$

Визначимо константи

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{U_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-U_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Підставивши константи у (2.50), одержимо напругу на ємності:

$$u_c(t) = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}). \quad (2.54)$$

Струм у колі визначається за виразом (1.1):

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{C U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2 \lambda_1 (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) = \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{CU_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1}{LC} (\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}) = \\
 &= \frac{U_0/L}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}).
 \end{aligned}$$

У виразі (2.55) використали, що на добуток коренів рівняння (2.11) за теоремою Вієта становить $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1/(LC)$.

Напруга на індуктивності визначається за виразом (1.3) :

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}). \quad (2.56)$$

Напруга у опорі визначається $u_R(t) = Ri(t)$.

Графіки зміни цих напруг і струму наведені на рис. 2.21.

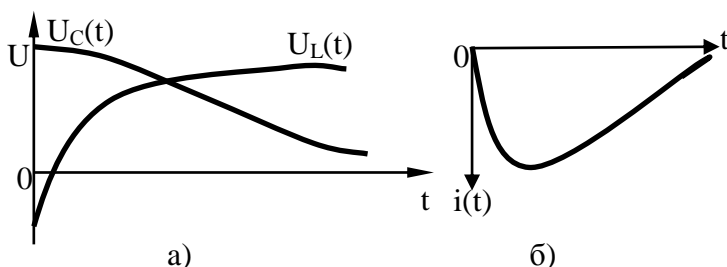


Рисунок 2.21 – Напруги на індуктивності $u_L(t)$ і ємності $u_C(t)$ та струму $i(t)$ при аперіодичному розряді конденсатора

Криві зміни напруг на ємності та індуктивності (рис. 2.21 а) показують, що напруга на ємності монотонно зменшується від початкового значення U_0 , а струм (рис. 2.21 б), зростаючи від нуля, досягає максимуму, а потім так само зменшується. Напруга на опорі за формою повторює струм, тому його будувати не будемо.

2.8.3. Граничний аперіодичний розряд ємності

Граничний аперіодичний розряд ємності має місце, якщо корені характеристичного рівняння (2.5) дійсні та рівні : $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ або $Q = 1/2$.

У цьому випадку розв'язання однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$u_{c.B}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{-\alpha t}. \quad (2.57)$$

У цьому випадку ми константи шукати не будемо, а зробимо граничний перехід для виразу (2.71) за правилом Лопіталя за умови, що λ_2 наближається до λ_1 , диференціюванням чисельника та знаменника за змінною λ_1 :

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[\frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \right] = \\ &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[\frac{U_0}{(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1}} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \frac{d}{d\lambda_1} \right] = \\ &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[\frac{U_0}{-1} (t \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \right] = U_0 (-t \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 t}) = \\ &= U_0 (1 - t \lambda_1) e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

У результаті цього та з урахуванням того, що $\lambda_1 = -\alpha$, одержимо :

1) напругу на ємності

$$u_c(t) = U_0 e^{-\alpha t} (1 + \alpha t). \quad (2.58)$$

2) напругу на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U_0 e^{-\alpha t} (\alpha t - 1); \quad (2.59)$$

3) струм у колі

$$i(t) = -U_0 C t e^{-\alpha t}. \quad (2.60)$$

Графіки цих функцій мають вигляд, аналогічний вищенаведеним. Ніяких коливань не спостерігається, оскільки втрати досить великі і заряд на ємності не встигає змінити полярність.

2.8.4. Коливальний розряд конденсатора

Коливальний розряд конденсатора буде мати місце, якщо корені характеристичного рівняння (2.5) комплексно-спряжені : $\lambda_1 = -\alpha - j\omega_B$ та $\lambda_2 = -\alpha + j\omega_B$, тобто $Q > 1/2$. Для подальших викладень у ряді випадків зручніше працювати з показниковою формою запису коренів. Це дозволяє відразу одержати

одну гармонічну функцію при додаванні двох експонент із комплексними показниками.

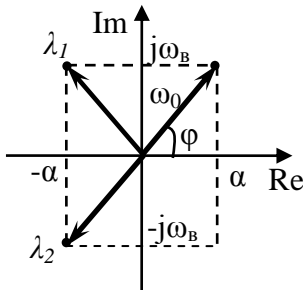


Рисунок 2.22

Показникова форма запису комплексних чисел необхідна для представлення коренів векторами.

Запишемо корені у показниковій формі :

$$\lambda_1 = \omega_0 e^{j(\varphi+\pi)} \text{ та } \lambda_2 = \lambda_1^* = \omega_0 e^{-j(\varphi+\pi)}. \quad (2.59)$$

Рівняння (2.10) має корені

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}.$$

У показники експонент виразів (2.54) – (2.56) замість λ_1 та λ_2 запишемо їх вирази у алгебраїчному вигляді, а у інші місця у показниковій формі. Із урахуванням показникової форми запису коренів і того, що

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_1 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \\ &= 2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 2j\omega_B, \end{aligned}$$

одержуємо вираз для напруги на ємності

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{U_0}{2j\omega_B} [\omega_0 e^{-j(\varphi+\pi)} e^{(-\alpha-j\omega_B)t} - \omega_0 e^{j(\varphi+\pi)} e^{(-\alpha-j\omega_B)t}] = \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \cdot \frac{e^{-j(\omega_B t + \varphi + \pi)} - e^{j(\omega_B t + \varphi + \pi)}}{2j}. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу Ейлера $\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin(x)$, остаточно одержимо

$$u_C(t) = \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi). \quad (2.60)$$

Перевіримо виконання другого закону комутації $u_C(0) = U_0$ для отриманого співвідношення. Запишемо вираз для напруги на ємності при $t=0$:

$$u_C(0) = \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\varphi).$$

Із рис. 2.22 випливає, що $\sin(\varphi) = \frac{\omega_B}{\omega_0}$. Якщо контур високочастотний, то $\omega_0 \approx \omega_B$ і $\varphi \approx 90^\circ$. Аналогічним чином одержують вираз для струму $i(t)$ у контурі :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{2j\omega_B} (e^{-\alpha t} e^{-j\omega_B t} - e^{-\alpha t} e^{j\omega_B t}) = \\ &= -\frac{U}{L\omega_B} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

і напруги на індуктивності

$$u_L(t) = \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t - \varphi). \quad (2.62)$$

Якщо період синусоїди досить малий порівняно із часом згасання експоненти $e^{-\alpha t}$, то цю експоненту разом із коефіцієнтом, що стоїть перед нею, можна вважати обвідною швидко осцилюючої гармонічної функції. На рис. 2.22 наведено графічне подання отриманих виразів. Пунктиром позначена обвідна. Траєкторії графіків, що нас цікавлять, побудовані *точками*. $F(t)$ – обвідна.

Криві зміни струму та напруги на індуктивності та ємності є згасаючими гармонічними функціями із кутовою частотою власних коливань контуру ω і коефіцієнтом згасання α , причому частота та коефіцієнт згасання визначаються тільки параметрами RLC-кола. Зазначимо, що струм випереджає за фазою напругу на ємності та відстає від напруги індуктивності.

Проаналізувавши одержані вирази для випадків ввімкнення послідовного RLC-кола під постійну та гармонічну напругу, слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

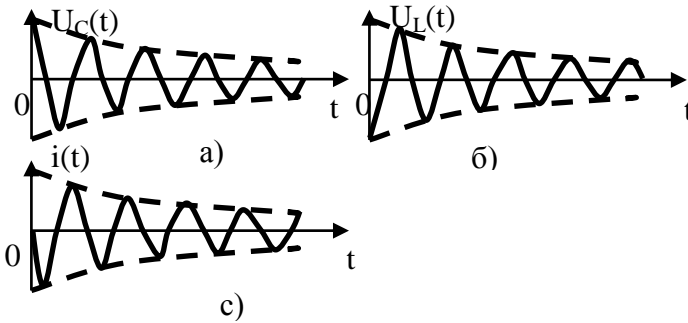


Рисунок 2.22 – Напруга на ємності $u_C(t)$ (а), напруги на індуктивності $u_L(t)$ (б) та струми в RLC-колі $i(t)$ (в)

2.8.5. Ввімкнення послідовного RLC-кола під постійну напругу

Розглянемо ввімкнення кола під постійну напругу (рис. 2.20) для випадку вільного розряду ємності $i(0^-) = 0$, $u_C(0) = E$.

Диференціальне рівняння кола набере вигляду

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Одержали диференціальне однорідне рівняння другого порядку. Розв'язок такого рівняння

$$u_C(t) = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{в}}(t).$$

Вимушена складова напруги $u_{C.\text{вим}} = E$.

Тоді, підставивши у систему (2.53) замість $U_0 = -E$ і визначивши сталі інтегрування на основі (2.54), запишемо вираз для напруги на ємності :

$$u_C(t) = E - \frac{E}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}).$$

Аналогічно визначимо напругу на індуктивності та струм у колі:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{-E/L}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t});$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{-E}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Графіки залежності отриманих величин від часу зображені на рис. 2.23.

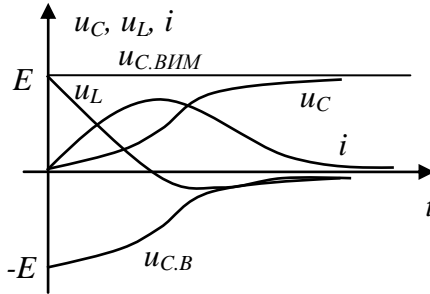


Рисунок 2.23

Аналогічно визначимо напругу на індуктивності та струм у колі :

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{-E/L}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t});$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{-E}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}).$$

У випадку дійсних рівних коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ напруга на ємності, напруга на індуктивності напруга та струм визначаються виразами :

$$u_C(t) = E - E e^{-\alpha t} (1 + \alpha t);$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = EC \alpha^2 e^{-\alpha t} t = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t};$$

$$u_L(t) = L \frac{di_C(t)}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\alpha t} (1 - \alpha t).$$

Тут було враховано, що $\lambda^2 = \omega_0^2 = 1/LC$.

Графіки зміни напруги на ємності, індуктивності та струму у колі (рис. 2.20) зображені на рис. 2.24.

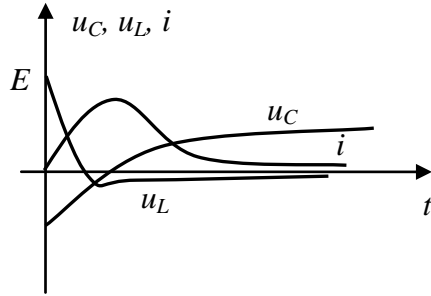


Рисунок 2.24

Розглянемо випадок, якщо корені характеристичного рівняння (2.11) комплексно-спряжені :

$$\lambda_1 = -\alpha + j\omega, \lambda_2 = -\alpha - j\omega.$$

Вигляд вільної складової буде визначатися

$$i_{L.B}(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.63)$$

Система для визначення коефіцієнтів визначається так :

$$\begin{cases} i_B(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \\ \frac{di_B(t)}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + Ae^{-\alpha t} \omega \cos(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (2.64)$$

Запишемо одержану систему у нульовий момент часу :

$$\begin{cases} 0 = A \sin(\varphi), \\ \frac{E}{L} = -A\alpha e^{-\alpha t} \sin(\varphi) + A\omega \cos(\varphi). \end{cases}$$

Із системи знаходимо константи $\varphi = 0$, $A = E/(\omega L)$.

Отже, вираз для струму у колі, який визначається вільною складовою такий :

$$i_B(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t). \quad (2.65)$$

Запишемо вираз для напруги на ємності :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt + u_C(0) = \\ &= E - E \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \psi). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Запишемо вираз для напруги на котушці індуктивності :

$$\begin{aligned}
 u_L &= L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{\omega L} \frac{d}{dt} [e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t)] = \\
 &= \frac{E}{\omega} [-\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t) + \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega_B t)] = \\
 &= \frac{E}{\omega} e^{-\alpha t} [-\alpha \sin(\omega_B t) + \omega \cos(\omega_B t)] = \\
 &= \frac{E \omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} (\sin(\omega_B t - \psi)).
 \end{aligned}
 \tag{2.67}$$

Графіки залежності отриманих величин від часу зображені на рис. 2.25.

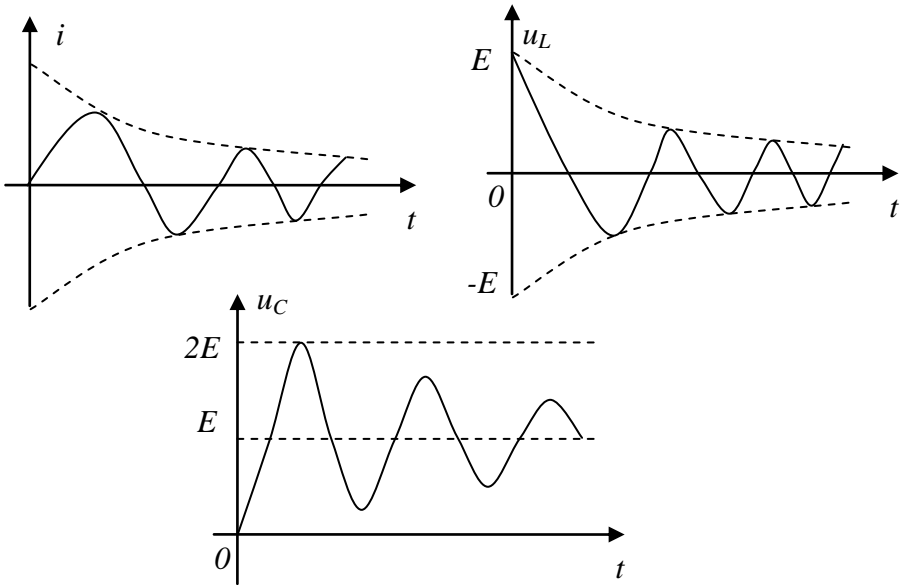


Рисунок 2.25– Напруги та струм при постійній дії

Як видно із рис. 2.25, струм та напруга на індуктивності коливається відносно нульового значення з різними початковими фазами. Напруга на ємності коливається навколо свого вимушеного значення E та не може перевищити $2E$. Вона досягає

свого найбільшого значення приблизно через половину періоду після ввімкнення кола.

Для оцінки ступеню згасання вводять коефіцієнт згасання, декремент згасання, логарифмічний декремент згасання.

Коефіцієнт згасання кола – величина, зворотна сталій часу кола :

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{|\delta|}. \quad (2.68)$$

Декремент згасання – величина, що характеризує швидкість згасання розглянутих коливань і дорівнює відношенню напруг у момент часу t та $t + T$:

$$\Delta = \frac{U_1}{U_2} = \frac{u_1(t)}{u_1(t+T)} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T}. \quad (2.69)$$

Декремент згасання є сталою величиною, що не залежить від часу, а залежить лише від параметрів кола R, L, C .

Часто швидкість згасання коливань характеризують натуральним логарифмом від декремента згасань :

$$\delta = \ln(\Delta) = \ln(e^{\alpha T}) = \alpha \cdot T, \quad (2.70)$$

де α – коефіцієнт згасання; T – період коливань.

Величину δ називають *логарифмічним декрементом згасань*.

2.8.6. Ввімкнення коливального контуру під гармонічну напругу

Розглянемо ввімкнення коливального контуру під гармонічну напругу (рис. 2.20). Замість ключа використаємо функцію одиничного стрибка $1(t)$, тоді вхідна напруга буде мати вигляд

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E) 1(t). \quad (2.71)$$

Запишемо диференціальне рівняння, що описує коло щодо струму у колі :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de(t)}{dt}.$$

Розв'язок рівняння

$$i(t) = i_{\text{ВИМ}} + i_{\text{В}}(t).$$

Вимушену складову $i_{\text{ВИМ}}$ визначають методом комплексних амплітуд. Визначимо вхідний опір кола у показниковій формі :

$$Z = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\varphi_Z} = |Z|e^{j\varphi_Z},$$

$$\varphi_Z = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

Визначимо комплексну амплітуду струму

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{E_m e^{j\varphi_E}}{|Z|e^{j\varphi_Z}} = \frac{E_m}{|Z|} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z)} = I_m e^{j\varphi_I}.$$

У часовій області вимушена складова записується таким чином :

$$i_{\text{ВИМ}}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I). \quad (2.72)$$

Оскільки характеристичне рівняння другого порядку, то струм визначається :

$$i(t) = i_{\text{ВИМ}}(t) + i_B(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.73)$$

де λ_1 і λ_2 – корені характеристичного рівняння.

Для знаходження констант A_1 і A_2 необхідно два рівняння. Перше одержуємо із (2.105) із застосуванням закону комутації $i(0) = i(0^-) = 0$, оскільки струму до підключення $e(t)$ в індуктивності не було :

$$0 = I_m \cos(\varphi_I) + A_1 + A_2.$$

Друге рівняння одержимо диференціюванням рівняння (2.73)

$$\frac{di}{dt} = -\omega I_m \sin(\omega t + \varphi_I) + \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.74)$$

Для знаходження значення цієї похідної при $t = 0$ необхідно надати їй фізичного змісту.

Оскільки

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = u_L(t), \text{ то } \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}.$$

Незаряджена ємність у момент комутації еквівалентна «заморожений» ділянці кола у місці її ввімкнення, індуктивність – розриву (рис. 2.26). Тому $u(0) = e(0)$.

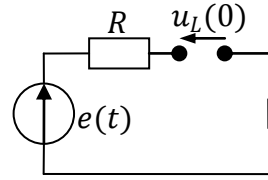


Рисунок 2.26

Надамо фізичного змісту похідній

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{u_L(t)}{L} \right|_{t=0} = \frac{e(0)}{L} = \frac{E_m \cos(\varphi_e)}{L}. \quad (2.75)$$

Друге рівняння для знаходження констант набере вигляду

$$\frac{E_m \cos(\varphi_i)}{L} + \omega I_m \sin(\varphi_i) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2.$$

Для спрощення подальших викладень уведемо позначення

$$B = -I_m \cos(\varphi_i), \quad D = \frac{E_m \cos(\varphi_i)}{L} + \omega I_m \sin(\varphi_i).$$

Запишемо систему для знаходження констант A_1 і A_2 :

$$\begin{cases} B = A_1 + A_2, \\ D = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь методом Крамера :

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{B\lambda_2 - D}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-B\lambda_2 + D}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Одержимо значення для вільної складової

$$\begin{aligned} i_B(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = \\ &= \frac{B}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}] - \frac{D}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Можна розглядати випадки, коли корені дійсні, кратні або комплексні. Розглянемо випадок, коли корені комплексні. Раніше для комплексних коренів було отримано :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\alpha \mp j\omega_B, \quad \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_B^2}, \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{\omega_B}{\alpha}, \\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}] &= \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}] = e^{-\alpha t} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B}.$$

Тоді одержуємо вираз для вільного струму

$$i_B(t) = B \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) + D e^{-\alpha t} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B},$$

де D можна переписати в такому вигляді

$$D = \frac{E_m}{L} \cos(\varphi_e) + \omega \frac{E_m}{|Z|} \sin(\varphi_i) = \frac{E_m}{L} \left[\cos(\varphi_e) + \frac{\omega L}{|Z|} \sin(\varphi_i) \right].$$

Із урахуванням усього викладеного одержуємо остаточний вираз для струму у контурі :

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) - \\ &- I_m \cos(\varphi_i) \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) + \\ &+ \frac{E_m}{\omega_B L} \left[\cos(\varphi_i) + \frac{\omega L}{|Z|} \sin(\varphi_i) \right] e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_B t). \end{aligned} \quad (2.77)$$

У деяких підручниках цей вираз спрощують, вважаючи, що при досить великій добротності $\omega_0/\omega \approx 1$ та $\varphi \approx \pi/2$.

Як впливає із вище одержаних результатів, форма перехідного струму залежить від співвідношень ω , ω_B та ω_0 . Розглянемо деякі випадки.

1 Частота джерела збігається із резонансною частотою контуру

$\omega = \omega_0 \approx \omega_B$, тобто контур високодобротний.

Для цього випадку співвідношення для струму можна подати у такому вигляді :

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega_B t + \varphi_i) + K_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_B t + \varphi) + K_2 \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega_B t \\ &= \underbrace{I_m \cos(\omega_B t + \varphi_i)}_a + \underbrace{K_3 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_B t + \theta)}_b \end{aligned} \quad (2.78)$$

Для нульового моменту часу $I_m \cos \varphi_i = -K_3 \cos \theta$, оскільки $i(0)=0$. Доданки a (вимушений режим) і b (вільний процес) виразу (2.110) можна зобразити векторами, кутові швидкості обертання яких однакові, але у вектора b довжина зменшується за законом $e^{-\alpha t}$. Проілюструємо це для різних моментів часу, де I_Σ – сума векторів (рис. 2.27).

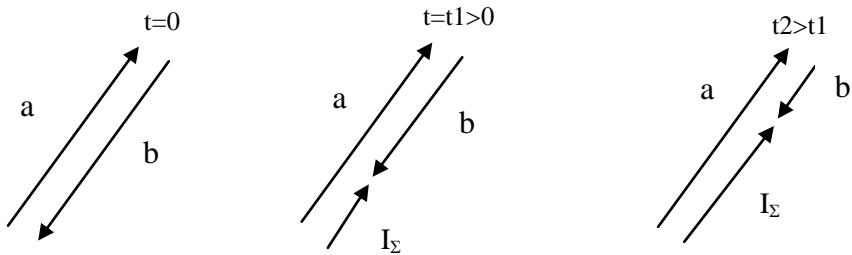


Рисунок 2.27

Оскільки вектор b зменшується за законом e^{-at} , то результуючий вектор струму збільшується за законом $1 - e^{-at}$. Це є закон зміни обвідної коливаний із частотою $\omega = \omega_B \approx \omega_0$. Можна показати, що форма обвідної не залежить від початкової фази. Вираз (2.78) можна спростити, якщо врахувати, що $\omega = \omega_B \approx \omega_0$, $Z = R$ та $\varphi_i = \varphi_e$ (резонанс) :

$$i(t) = I_m \cos(\omega_B t + \varphi_e) - I_m \cos(\varphi_e) \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-at} \sin(\omega_B t + \varphi) + \frac{E_m}{\omega L} \left[\cos(\varphi_e) + \frac{\omega L}{R} \sin(\varphi_e) \right] e^{-at} \sin(\omega_B t).$$

Розглянемо випадок, коли $\varphi_e = -\pi/2$, тоді одержимо такий вираз для струму

$$i(t) = I_m \cos(\omega_B t - \frac{\pi}{2}) - 0 + \frac{E_m}{R} e^{-at} \sin(\omega_B t).$$

Значення амплітуди струму на резонансній частоті

$$I_m = \frac{E_m}{R}.$$

Тоді одержуємо вираз для струму

$$i(t) = \frac{E_m}{R} \sin(\omega_B t) [1 - e^{-at}] = I_m (1 - e^{-t/t_K}) \cdot \sin(\omega_B t)$$

На рис. 2.28 зобразимо графік зміни струму у часі. Обвідна струму має вигляд, що зображений на рис. 2.29.

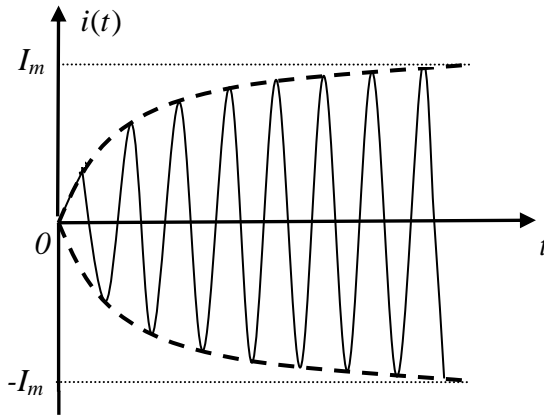


Рисунок 2.28

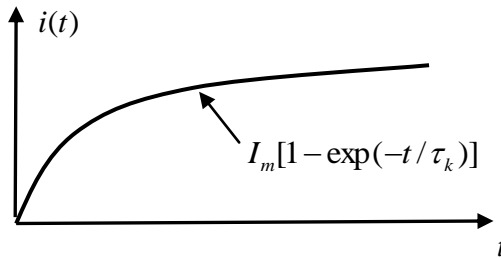


Рисунок 2.29

- 2 Частота джерела не збігається із резонансною частотою контуру $\omega \neq \omega_0$, $\omega_0 \approx \omega_B$ але відмінність цих частот невелика (різниця $|\omega - \omega_0| = \Omega$ – невелика величина).

Тоді, $i_{\text{ВИМ}}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = i'$, а $i_B(t) = K_3 e^{-\alpha t} \times \cos(\omega_B t + \theta) = i''$. Зобразимо ці складові векторами. Припустимо, що площина обертається за годинниковою стрілкою із частотою ω , причому $\omega < \omega_B$. Вектор $i_B(t)$ рухатись не буде, а вектор $i_{\text{ВИМ}}(t)$ буде обертатися навколо нього із кутовою частотою Ω проти годинникової стрілки (вектор із частотою ω_B випереджає ω) і його довжина буде зменшуватися за законом $e^{-\alpha t}$. Для різних моментів часу із зростанням часу t вектори вимушеної та вільної складових та сумарний вектор зображені на рис. 2.30.

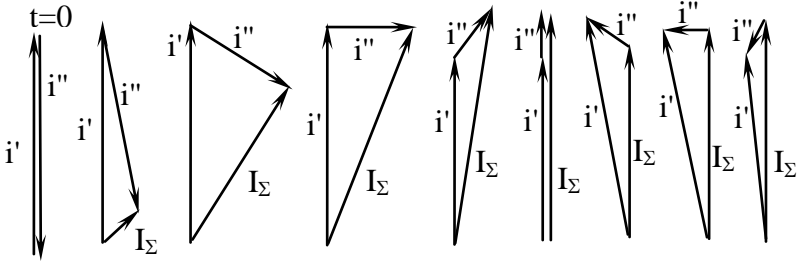


Рисунок 2.30

Для даного випадку форма струму у колі може мати вигляд, зображений на рис. 2.31.

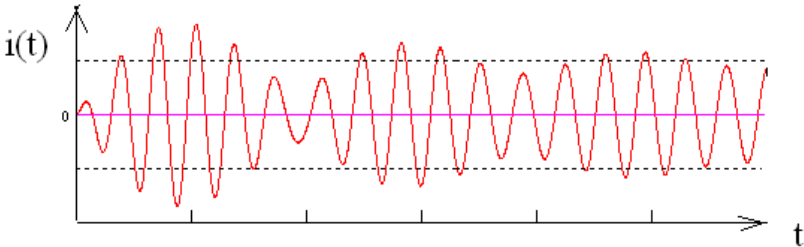


Рисунок 2.31

Розглянемо такий випадок. Вважаємо, що $\varphi_E = \pi/2$, добротність $Q \gg 1$, тому $\varphi \approx \pi/2$ ($\varphi = \arctg(\frac{\omega_B}{\alpha})$), $|\omega - \omega_B| = \Omega$ (невелика відмінність, тобто можна вважати, що $\omega/\omega_B \approx 1$). Початкова фаза вимушеного режиму $i_{L, \text{вим}}$ буде така: $\varphi_i = \varphi_e - \varphi_Z = \pi/2 - \varphi_Z$.

Оскільки припустити, що частоти відрізняються не на багато, отже, повинні вийти биття коливань.

Із урахуванням наведених співвідношень одержимо

$$i(t) = -I_m \sin(\omega t - \varphi_Z) - I_m \sin(\varphi_Z) \cos(\omega_B t) e^{-\alpha t} + I_m \cos(\varphi_Z) \sin(\omega_B t) e^{-\alpha t};$$

$$i(t) = -I_m \sin(\omega t - \varphi_Z) - I_m e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi_Z).$$

Якщо $\alpha = 0$, одержимо

$$i(t) = Im[\sin(\omega_B t - \varphi_Z) - \sin(\omega t - \varphi_Z)] = 2Im \left[\sin\left(\frac{\omega_B - \omega}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_B + \omega}{2} t - \varphi_Z\right) \right].$$

Якщо частоти ω та ω_B відрізняються незначно, то останнє співвідношення описує процес биття коливань (рис. 2.32).

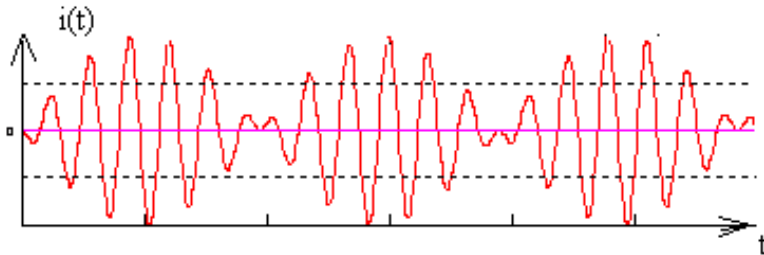


Рисунок 2.32 – Биття коливань

2.9. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. Схема (рис. 2.33) описується диференціальним рівнянням 1-го порядку щодо напруги на ємності u_C . Відомі корені характеристичного рівняння

$$u_C(t) = u_{C.\text{ВИМ}} + Ae^{\lambda \cdot t}$$

та вимушена складова напруги на ємності $u_{C.\text{ВИМ}}$. Необхідно знайти константу A .

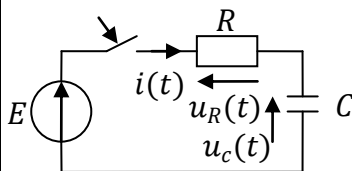


Рисунок 2.33

Розв'язання

На підставі другого закону комутації знаходимо

$$u_C(0) = u_C(0^-).$$

Вимушена складова $u_{C.\text{ВИМ}}$ визначається в усталеному режимі. Необхідно знайти константу A . Запишемо характеристичне рівняння у нульовий момент часу

$$u_C(0) = u_{C.\text{ВИМ}}(0) + Ae^{\lambda \cdot 0}.$$

Константа інтегрування визначається $A = u_C(0) - u_{C.\text{ВИМ}}$.

Приклад 2.2. Схема (рис. 2.34) описується диференціальним рівнянням 2-го порядку. Відомі корені характеристичного рівняння щодо змінної напруги на ємності $u_C(t) = u_{C.\text{ВИМ}} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ та вимушена складова напруги на ємності $u_{C.\text{ВИМ}}$. Визначити константи інтегрування A_1 та A_2 .

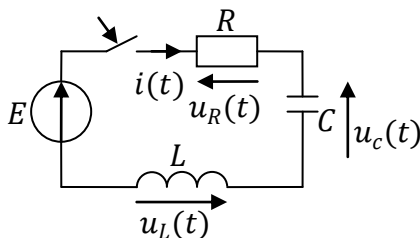


Рисунок 2.34

Розв'язання

Значення струму у нульовий момент часу $u_c(0)$ знаходимо як початкову умову із законів комутації.

Тоді $u_c(0) = u_{c.вим} + A_1 + A_2$.

Бачимо, що в нас одне рівняння і дві невідомі. Для написання другого рівняння знайдемо похідну від напруги за часом :

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{du_{c.вим}}{dt} + A_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Необхідно визначити значення похідної у нульовий момент часу :

$$\left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{c.вим}}{dt} \right|_{t=0} + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2.$$

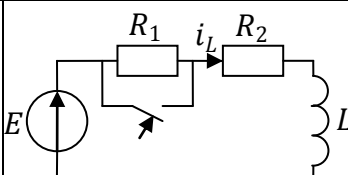
Значення $\left. \frac{du_{c.вим}}{dt} \right|_{t=0}$ знаходимо із власного розв'язання диференціального неоднорідного рівняння або на підставі системи рівнянь, складеної за законами Кірхгофа.

Значення $\left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0}$ може бути знайдено, якщо йому надати фізичного змісту. Так, наприклад, якщо обидві частини рівняння помножити на величину C , то одержимо струм у конденсаторі у початковий момент часу

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{C}{C} \frac{du_c(t)}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt} \frac{1}{C} = \frac{i_c(t)}{C}, \text{ оскільки } C \frac{du_c(t)}{dt} = i_c(t).$$

Запишемо вираз у нульовий момент часу

$$\left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C}.$$

<p>Приклад 2.3. У колі (рис. 2.35) знайти зміну струму індуктивності у колі після комутації. Коло підключене до джерела постійної ЕРС $E = 220$ В. Числові значення елементів схеми: $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $L = 0.6$ Гн.</p>	
<p>Рисунок 2.35</p>	

Розв'язання

Вільна складова струму записується

$$i_{L.B}(t) = Ae^{-R_2 t/L} = Ae^{-t/0.05} \text{ А.}$$

Знайдемо значення вимушеної складової струму (складової струму після комутації на постійному струмі) :

$$i_{L.\text{ВИМ}} = \frac{E}{R_2} = \frac{220}{12} = 18.3 \text{ А.}$$

Тоді для струму в індуктивності одержуємо

$i_L(t) = i_{L.\text{ВИМ}} + i_{L.V} = i_{L.\text{ВИМ}} + Ae^{-t/\tau} = 18.3 + Ae^{-t/0.03}$ А,
де стала часу кола визначається

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0.6}{8 + 12} = \frac{0.6}{20} = 0.03 \text{ с.}$$

Знайдемо значення складової струму до комутації :

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{220}{12 + 8} = 11 \text{ А.}$$

Значення струму у нульовий момент часу

$$i_L(0) = 18.3 + Ae^{-0/0.03} = 18.3 + A.$$

Із закону комутації одержуємо $i_L(0) = i_L(0-) = 11$ А.

Підставимо отримане значення у рівняння, записане для нульового моменту часу, та виразимо з нього константу :

$$A = i_L(0-) - 18.3 = 11 - 18.3 = -7.3.$$

Тепер запишемо вираз для шуканого струму

$$i_L(t) = 18.3 - 7.3e^{-t/0.03}.$$

Із отриманих результатів видно, що стала часу кола після комутації визначається параметрами L та R_2 . Побудуємо графіки залежності струму у котушці індуктивності від часу (рис. 2.36).

Для простоти побудови графіків позначимо загальний струм у котушці індуктивності $i_L(t)$ через $i(t)$, i_{SV} – вільна складова струму у котушці індуктивності, i_V – вимушена складова струму у котушці індуктивності.

Перехідний процес при розмиканні ключа аналогічний розглянутому прикладу. Тільки струм буде поступово зменшуватися до певного значення (рис. 2.37).

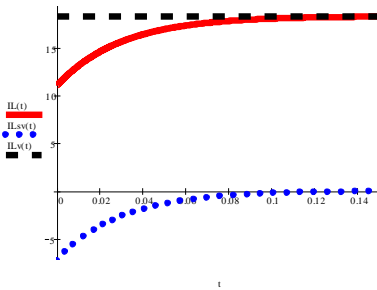


Рисунок 2.36

Графік, зображений суцільною лінією, показаний для повної величини струму у котушці індуктивності $i_L(t)$, графік, зображений штрихпунктирною лінією, показаний для вимушеної складової струму i_V у котушці індуктивності, а точковою лінією – для вільної складової струму i_{SV} у котушці індуктивності.

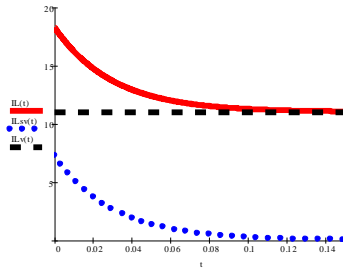


Рисунок 2.37

<p>Приклад 2.4. Розрахувати всі струми та напруги у схемі (рис. 2.38) після комутації, якщо на вхід діє постійна напруга $U = 10$ В. Параметри елементів кола такі: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $L = 10$ мГн.</p>	<p>Рисунок 2.38</p>
--	---------------------

Розв'язання

Записуємо систему рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа :

$$\begin{cases} U = R_1 i_1 + R_2 i_2, \\ 0 = u_L - R_2 i_2, \\ i_1 = i_2 + i_L. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь щодо струму $i_L(t)$. Запишемо напругу на котушці індуктивності через струм

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Із 3-го рівняння системи виражаємо i_1 та підставляємо у 1-ше рівняння системи :

$$U = R_1(i_1 + i_L) + R_2 i_2.$$

Із 2-го рівняння системи виразимо

$$i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Підставимо i_2 у перетворене 1-ше рівняння системи та одержимо

$$U = R_1 i_1 + L \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Перетворимо це рівняння :

$$\frac{di_L(t)}{dt} \left[L \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right] = R_1 i_1 = U.$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Розв'язок такого рівняння записується у вигляді $i_L(t) = i_{L.\text{ВИМ}} + i_{L.B}(t)$.

Знайдемо вимушену складову

$$i_{L.\text{ВИМ}} = \frac{U}{R_1} = \frac{10}{100} = 0.1 \text{ A}.$$

Вільна складова знаходиться із диференціального однорідного рівняння

$$R_1 i_{L.B} + L \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{di_{L.B}(t)}{dt} = 0.$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння

$$R_1 + L\lambda \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 0.$$

Із отриманого характеристичного рівняння знаходимо корінь λ :

$$\lambda = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} = -\frac{100 \cdot 300}{10 \cdot 10^{-3} \cdot (100 + 300)} = -7.5 \cdot 10^3.$$

Запишемо вираз для вільної складової $i_{L.B}(t) = Ae^{\lambda t}$.

Загальний вираз струму в нульовий момент часу :

$$i_L(0) = i_{L.\text{ВИМ}} + Ae^{\lambda \cdot 0} = i_{L.\text{ВИМ}} + A.$$

На підставі першого закону комутації запишемо

$i_L(0) = i_L(0^-) = 0$, тому що коло розірване. Виразимо звідси сталу $A = 0 - i_{L.\text{ВИМ}} = -0.1$.

Запишемо загальний вигляд струму $i_L(t) = 0.1 - 0.1e^{\lambda t}$.

Запишемо напругу на котушці індуктивності

$$i_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} [0.1 - 0.1e^{\lambda t}] = L \cdot \lambda \cdot 0.1e^{\lambda t} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 7.5 \cdot 10^3 \cdot 0.1e^{\lambda t} = 7.5e^{\lambda t}.$$

Запишемо вираз для струмів :

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{u_L(t)}{R_2} = 0.025 \cdot e^{\lambda t};$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_L(t) = 0.025 \cdot e^{\lambda t} + 0.1 - 0.1e^{\lambda t} = 0.1 - 0.075e^{\lambda t}.$$

Графіки будемо будувати за допомогою програми Mathcad (рис. 2.39 – рис. 2.40). Як бачимо із рис. 2.39, струм у котушці індуктивності (пунктирна лінія) збільшується до значення 0.1 А, що відповідає значенню вимушеного струму. Суцільною лінією зображений струм у другому опорі, точковою лінією зображений графік у першому опорі.

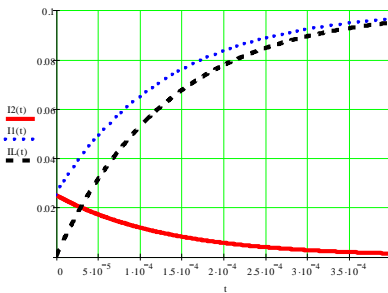


Рисунок 2.39 – Струми у колі

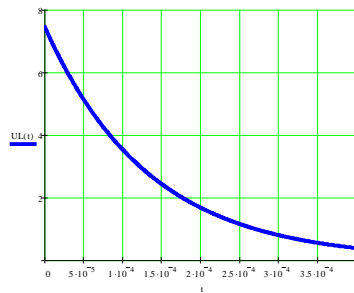


Рисунок 2.40 – Напряга індуктивності

Приклад 2.5. Одержати всі струми та напруги у колі (рис. 2.41), у якому відбувається комутація. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $C = 10$ мкФ, $E = 10$ В.

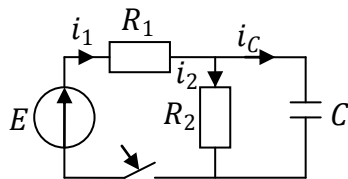


Рисунок 2.41

Розв'язання

Складаємо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа :

$$\begin{cases} E = R_1 i_1 + R_2 i_2, \\ 0 = u_C - R_2 i_2, \\ i_1 = i_2 + i_C. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему щодо напруги на ємності $u_C(t)$. Запишемо струм на ємності через напругу за формулою

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Із 2-го рівняння системи виражаємо i_2 :

$$i_2 = \frac{u_C(t)}{R_2}.$$

Із 1-го рівняння системи виражаємо i_1 та підставляємо в нього вираз для i_2 :

$$i_1 = \frac{1}{R_1} (E - i_2 R_2) = \frac{1}{R_1} \left(E - \frac{u_C}{R_2} R_2 \right) = \frac{1}{R_1} (E - u_C).$$

Підставимо отримані i_2 , i_C і i_1 в 3-тє рівняння :

$$\frac{1}{R_1} (E - u_C(t)) = \frac{u_C(t)}{R_2} + C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Перетворимо отримане рівняння :

$$C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E}{R_1}.$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Розв'язок цього рівняння записується у вигляді $u_C(t) = u_{C.вим} + u_{C.в}(t)$.

Знайдемо вимушену складову напруги $u_{C.вим}$, скориставшись формулою подільника напруги :

$$u_{C.вим} = \frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 100}{100 + 300} = 2.5 \text{ В}.$$

Вільну складову напруги $u_{C.в}$ знаходимо із розв'язання лінійного однорідного рівняння, для цього у неоднорідному лінійному рівнянні прирівнюємо до нуля праву частину.

Розв'яжемо отримане однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Для цього запишемо характеристичне рівняння із урахуванням заміни

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \lambda u_C.$$

Одержуємо характеристичне рівняння

$$C\lambda + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0.$$

Звідки знаходимо корінь характеристичного рівняння

$$\lambda = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 \cdot R_2} = -\frac{100 + 300}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 300} = -1.33 \cdot 10^3.$$

Загальний вираз вільної складової $u_{C.B}(t) = Ae^{\lambda t}$.

Прозв'язок у нульовий момент часу

$$u_C(0) = u_{C.ВИМ} + A.$$

Складову $u_C(0)$ знаходимо із другого закону комутації :

$$u_C(0) = u_C(0-) = E,$$

тому що коло розірване до комутації.

Вираз для константи

$$A = E - u_{C.ВИМ} = 10 - 2.5 = 7.5.$$

Тепер запишемо вираз для напруги на індуктивності :

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + Ae^{\lambda t} = 2.5 + 7.5e^{-1.33 \cdot 10^3 t}.$$

Знайдемо струм на ємності :

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} [2.5 + 7.5e^{-1.33 \cdot 10^3 t}] = 0.1e^{-1.33 \cdot 10^3 t}.$$

Запишемо струм на другому опорі :

$$i_2 = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{u_C(t)}{R_2} = \frac{2.5 + 7.5e^{-1.33 \cdot 10^3 t}}{300} = 8.33 \cdot 10^{-3} + 25.5 \cdot 10^{-3} e^{-1.33 \cdot 10^3 t}.$$

Запишемо струм на першому резистор

$$i_1 = i_2 + i_C = 8.33 \cdot 10^{-3} + 25.5 \cdot 10^{-3} e^{-1.33 \cdot 10^3 t} + 0.1e^{-1.33 \cdot 10^3 t} = 8.33 \cdot 10^{-3} + 0.125e^{-1.33 \cdot 10^3 t}.$$

Графіки будемо будувати за допомогою програми MathCAD (рис. 2.42 – рис. 2.43). Як бачимо із рис. 2.43, напруга на ємності зменшується до значення 2.5 В. На рис. 2.42 зображені графіки струмів у колі.

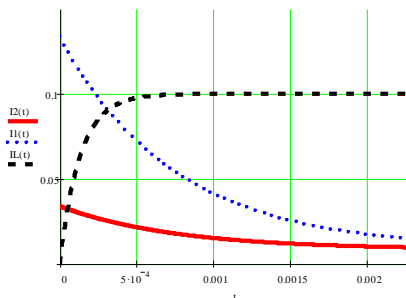


Рисунок 2.42 – Струм у колі

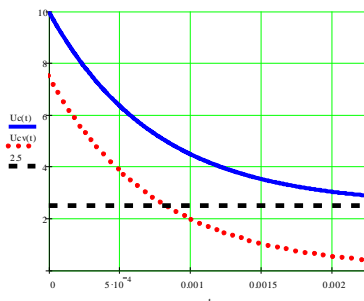


Рисунок 2.43 – Напруга на ємності

Приклад 2.6. У колі (рис. 2.44) знайти абсолютне значення струму в опорі R_1 , струм та напругу індуктивності у момент комутації. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 8$ кОм, $R_2 = 8$ кОм, $R_3 = 4$ кОм, $C = 2$ нФ, $E = 8$ В.

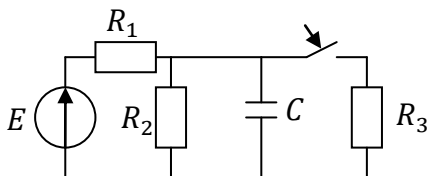


Рисунок 2.44

Розв'язання

Для схеми після комутації джерело напруги перетворимо у джерело струму (рис. 2.45). Розрахуємо значення утвореного джерела струму :

$$J = \frac{E}{R_1} = \frac{8}{8} = 1 \text{ А.}$$

Опори R_1 та R_2 з'єднані паралельно, тому замінимо їх еквівалентним :

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ кОм.}$$

Зобразимо еквівалентну схему (рис. 2.46).

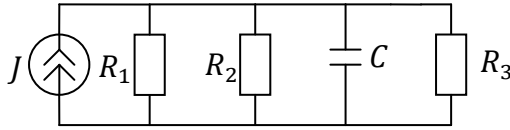


Рисунок 2.45

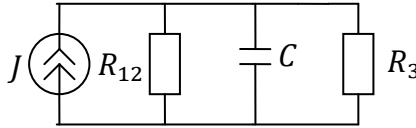


Рисунок 2.46

Опори R_{12} та R_3 з'єднані паралельно, тому замінимо їх еквівалентним :

$$R_{\text{ЕК}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \text{ кОм.}$$

Зобразимо еквівалентну схему (рис. 2.47). Перетворимо джерело струму у джерело напруги та розрахуємо величину утвореного джерела напруги

$$E_{\text{ЕК}} = J \cdot R_{\text{ЕК}} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ В.}$$

Зобразимо еквівалентну схему (рис. 2.48).

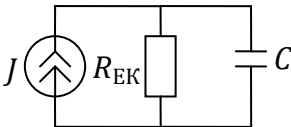


Рисунок 2.47

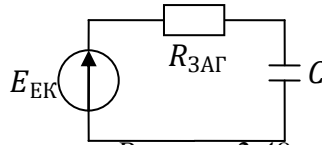


Рисунок 2.48

Запишемо для кола рівняння на основі другого закону Кірхгофа
 $E = u_R + u_C$.

Запишемо струм через напругу на ємності :

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_R = i_C R_{\text{ЕК}}.$$

Перетворимо рівняння на диференціальне :

$$E_{\text{ЕК}} = C R_{\text{ЕК}} \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Таке рівняння має розв'язок $u_C(t) = u_{\text{С.ВИМ}} + u_{\text{С.Б}}(t)$.

Визначимо вимушену складову напруги із диференціального рівняння

$$u_{C.\text{ВИМ}} = E_{\text{ЕК}} = 2 \text{ В.}$$

Вимушену складову напруги на ємності можна визначити за схемою, зображеною після комутації на постійному струмі (рис. 2.50).

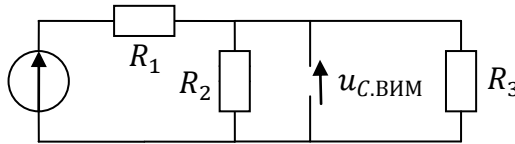


Рисунок 2.50

Опори R_2 та R_3 з'єднані паралельно, тому замінимо їх еквівалентним :

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8 \cdot 4}{8 + 4} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} \text{ кОм.}$$

Напруга $u_{C.\text{ВИМ}}$ відповідає напрузі на другому опорі. Визначимо цю напругу за допомогою формули подільника напруги

$$u_{C.\text{ВИМ}} = u_2 = \frac{E \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \frac{8 \cdot \frac{8}{3}}{8 + \frac{8}{3}} = \frac{\frac{64}{3}}{\frac{32}{3}} = \frac{64}{32} = 2 \text{ В.}$$

Визначимо вільну складову напруги, що має вигляд $u_{C.\text{В}}(t) = Ae^{\lambda t}$.

Введемо заміну

$$\frac{du_C}{dt} = \lambda u_C.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$CR_{\text{ЕК}}\lambda + 1 = 0.$$

Звідси визначимо корінь характеристичного рівняння

$$\lambda = -\frac{1}{CR_{\text{ЕК}}} = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4} = -0.25.$$

Отже, напруга на ємності визначається виразом

$$u_C(t) = 2 + Ae^{pt}.$$

Для того, щоб визначити сталу A , запишемо останній вираз у нульовий момент часу $u_C(0) = 2 + A$.

На основі другого закону комутації запишемо $u_C(0) = u_C(0-)$. Отже, тепер необхідно визначити значення $u_C(0-)$. Для цього зобразимо схему до комутації на постійному струмі із урахуванням того, що ємність у місці включення на постійному струмі еквівалентна розриву ємності у місці її включення (рис. 2.51).

Напруга $u_C(0-)$ відповідає падінню напруги на другому опорі.

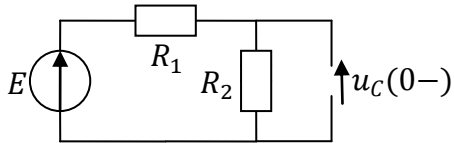


Рисунок 2.51

Скориставшись формулою подільника напруги, визначимо величину напруги на другому опорі :

$$u_C(0-) = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ В.}$$

Таким чином, визначимо сталу A із рівняння

$$A = u_C(0) - 2 = 4 - 2 = 2.$$

Отже, перехідна напруга на ємності визначається

$$u_C(t) = 2 + 2e^{-0.25t}.$$

Визначимо струм в ємності із виразу

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = 2 \cdot \frac{d}{dt} (2 + 2e^{-0.25t}) = \\ &= -2 \cdot 2 \cdot 0.25 \cdot e^{-0.25t} = -e^{-0.25t} \text{ мА.} \end{aligned}$$

Для побудови значення перехідного струму та напруги на ємності до та після комутації запишемо :

$$u_C(t) = \begin{cases} 4, & t \leq 0. \\ 2 + 2e^{-0.25t}, & t \geq 0; \end{cases} \quad i_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0. \\ -e^{-0.25t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Побудуємо графіки перехідного струму та напруги на ємності (рис. 2.52).

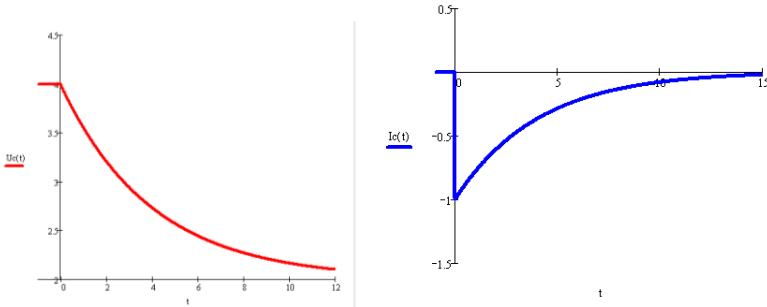


Рисунок 2.52

Приклад 2.7. Знайти струм та напругу на індуктивності у момент комутації, якщо на вході кола (рис. 2.53) діє постійна напруга $E = 300$ В. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Параметри елементів кола такі: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $L = 0.1$ мГн, $R_4 = 100$ Ом.

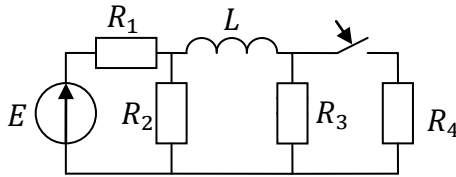


Рисунок 2.53

Розв'язання

Для схеми після комутації джерело напруги перетворимо у джерело струму (рис. 2.54).

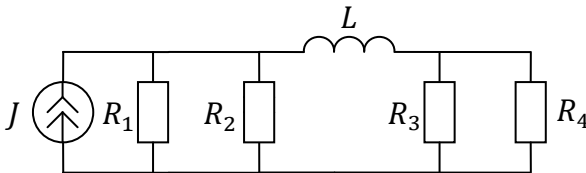


Рисунок 2.54

Розрахуємо значення утвореного джерела струму :

$$J = \frac{E}{R_1} = \frac{300}{100} = 3 \text{ А.}$$

Опори R_1 та R_2 з'єднані паралельно, тому замінимо їх еквівалентним :

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} = 50 \text{ Ом.}$$

Опори R_3 та R_4 з'єднані паралельно, тому замінимо їх еквівалентним :

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} = 50 \text{ Ом.}$$

Зобразимо еквівалентну схему (рис. 2.55).

Перетворимо джерело струму у джерело напруги та розрахуємо величину утвореного джерела напруги :

$$E_{\text{ЕК}} = J \cdot R_{12} = 3 \cdot 50 = 150 \text{ В.}$$

Опори R_{12} та R_{34} з'єднані послідовно, тому замінимо їх еквівалентним :

$$R_{\text{ЕК}} = R_{12} + R_{34} = 50 + 50 = 100 \text{ Ом.}$$

Зобразимо еквівалентну схему (рис. 2.56).

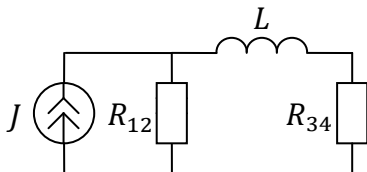


Рисунок 2.55

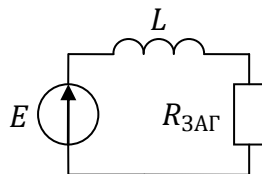


Рисунок 2.56

Рівняння на основі другого закону Кірхгофа $E = u_R + u_L$.
Напруга на опорі через струм та напруга на індуктивності

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad u_R = i_L R_{\text{ЕК}}.$$

Одержимо диференціальне рівняння

$$E_{\text{ЕК}} = L \frac{di_L}{dt} + i_L R_{\text{ЕК}}.$$

Це рівняння має розв'язок $i_L(t) = i_{L,\text{ВИМ}} + i_{L,\text{В}}(t)$.

Визначимо вимушену складову напруги із диференціального рівняння

$$i_{L.\text{ВИМ}} = \frac{E_{\text{ЕК}}}{R_{\text{ЕК}}} = \frac{150}{100} = 1.5 \text{ А.}$$

Вільна складова струму в індуктивності має вигляд $i_{L.B}(t) = Ae^{\lambda t}$.

Введемо заміну

$$\frac{di_L}{dt} = \lambda i_L.$$

Запишемо характеристичне рівняння $L\lambda + R_{\text{ЕК}} = 0$.

Звідси визначимо корінь характеристичного рівняння :

$$\lambda = -\frac{R_{\text{ЕК}}}{L} = -\frac{100}{0.1 \cdot 10^{-3}} = -1 \cdot 10^6.$$

Отже, струм в індуктивності визначається виразом

$$i_L(t) = 1.5 + Ae^{\lambda t}.$$

Запишемо останній вираз у нульовий момент часу

$$i_L(t) = 1.5 + A.$$

На основі першого закону комутації запишемо $i_L(0) = i_L(0-)$. Отже, необхідно визначити значення струму $i_L(0-)$. Для цього зобразимо схему до комутації на постійному струмі з урахуванням того, що індуктивність у місці включення на постійному струмі еквівалентна «закоротці» індуктивності у місці її включення (рис. 2.57).

Струм $i_L(0-)$, відповідає струму на третьому опорі. Скористаємося еквівалентними перетвореннями, викладеними вище. У результаті одержимо еквівалентну схему (рис. 2.58).

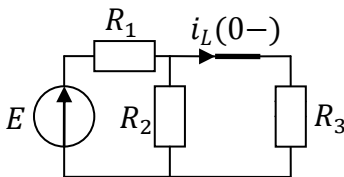


Рисунок 2.5

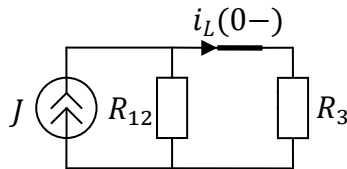


Рисунок 2.58

Визначимо струм $i_L(0-)$ скориставшись формулою подільника струму

$$i_L(0-) = \frac{J \cdot R_{12}}{R_{12} + R_3} = \frac{3 \cdot 50}{50 + 100} = \frac{150}{150} = 1 \text{ А.}$$

Таким чином, визначимо сталу A із рівняння :

$$A = i_L(0) - 1.5 = 1 - 1.5 = -0.5.$$

Струм в індуктивності визначається виразом

$$i_L(t) = 1.5 - 0.5e^{-1 \cdot 10^6 t}.$$

Визначимо напругу на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 0.1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d}{dt} (1.5 - 0.5e^{-1 \cdot 10^6 t}) \\ = 50 \cdot e^{-1 \cdot 10^6 t} \text{ В.}$$

Струм та напруга на індуктивності до та після комутації :

$$i_L(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ 1.5 - 0.5e^{-1 \cdot 10^6 t}, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_L(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 50e^{-1 \cdot 10^6 t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Побудуємо графіки струму та напруги на індуктивності (рис. 2.59).

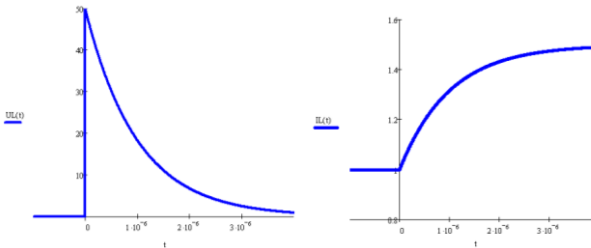


Рисунок 2.59

Приклад 2.8. Для коливального контуру (рис. 2.60) знайти струм та напругу в індуктивності та побудувати графіки зміни їх у часі. Числові значення елементів схеми такі: $E = 50$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 100$ мкФ.

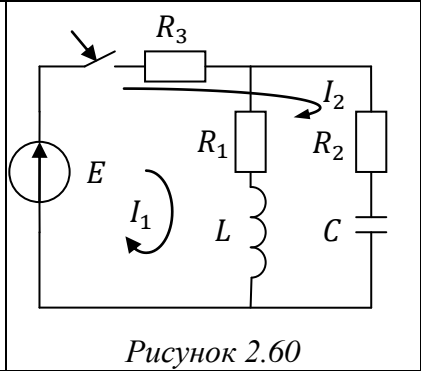


Рисунок 2.60

Розв'язання

Нехай до комутації напруга на ємності $u_C(0-) = 0$. Для схеми після комутації складемо систему рівнянь на основі методу контурних струмів :

$$\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + pL & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння визначимо із матриці опорів

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + pL & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначник

$$\Delta = (R_1 + R_3 + pL) \cdot \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) - R_3^2.$$

Підставимо числові значення та прирівняємо визначник до нуля, щоб одержати характеристичне рівняння

$$p^2 + 176p + 1.02 \cdot 10^5.$$

Корені рівняння $p_1 = -88 + j307$, $p_2 = -88 - j307$.

Оскільки коло має два реактивних елементи, і схема двоконтурна, то у результаті одержимо диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язок такого рівняння щодо струму в індуктивності має вигляд

$$i_L(t) = i_{L.ВИМ} + i_{L.В}(t).$$

Оскільки коло має два реактивних елементи і схема двоконтурна, то у результаті одержимо диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язок такого рівняння щодо струму в індуктивності має вигляд

$$i_L(t) = i_{L.\text{ВИМ}} + i_{L.B}(t).$$

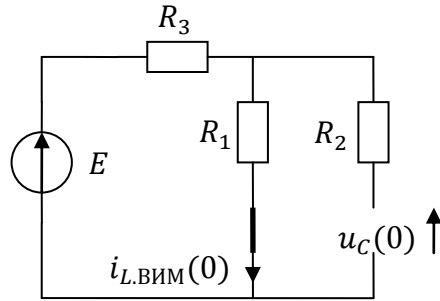


Рисунок 2.61

Вимушену складову струму визначають, зобразивши схему після комутації на постійному струмі (рис. 2.61).

У результаті визначимо із закону Ома

$$i_{L.\text{ВИМ}} = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{100}{100 + 5} = \frac{100}{105} = 0.952 \text{ А.}$$

Для двоконтурної схеми вільна складова визначається так :

$$i_{L.B}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Запишемо загальний вираз перехідного струму

$$i_L(t) = 0.952 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Тепер необхідно визначити константи A_1 та A_2 . Оскільки є одне рівняння та дві невідомі, то потрібно одержати ще одне рівняння. Для цього продиференціюємо останній вираз

$$\frac{di_L(t)}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Запишемо останні два рівняння у нульовий момент часу

$$\begin{cases} i_L(0) = 0.952 + A_1 + A_2, \\ \frac{di_L(0)}{dt} = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases}$$

На підставі першого закону комутації $i_L(0) = i_L(0-) = 0$, оскільки до комутації ключ був розімкнений і струму в колі не було.

Для знаходження $\frac{di_L(0)}{dt}$ необхідно надати їй фізичного змісту.

У результаті одержимо

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{u_L(0)}{L}.$$

Таким чином, необхідно визначити $u_L(0)$. Для цього зобразимо схему на постійному струмі у момент комутації з урахуванням того, що індуктивність у момент комутації на постійному струмі еквівалентна розриву у місці її включення, а ємність – закоротці

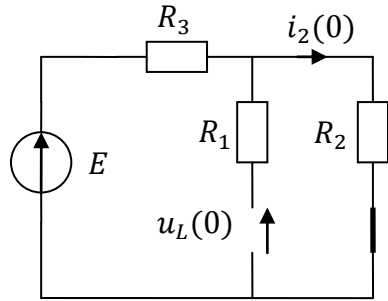


Рисунок 2.62

Отже,

$$u_L(0) = u_{R_2} = i_2(0) \cdot R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 3}{100 + 3} = 2.9 \text{ В.}$$

Тепер визначимо

$$\frac{u_L(0)}{L} = \frac{2.9}{0.1} = 29 \frac{\text{В}}{\text{Гн}}.$$

У результаті одержимо

$$\begin{cases} 0 = 0.952 + A_1 + A_2, \\ 29 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера. Для цього обчислимо визначники :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = p_2 - p_1 = -88 + j307 - (-88 - j307) = j614;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0.952 & 1 \\ 29 & p_2 \end{vmatrix} = 0.952 p_2 - 29 = 54.646 - j292.264;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -0.952 \\ p_1 & 29 \end{vmatrix} = 29 + 0.952 p_1 = -54.646 - j292.264.$$

Тепер визначимо константи :

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{54.646 - j292.264}{j614} = -0.476 - j0.089;$$

$$A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-54.646 - j292.264}{j614} = -0.476 + j0.089.$$

Константи A_1 та A_2 є комплексно-спряженими. Подамо їх у показниковій формі запису. Спочатку визначимо модуль

$$|A_1| = |A_2| = \sqrt{0,476^2 + 0,089^2} = 0,484.$$

Тепер визначимо кути констант

$$\varphi_1 = \arg(A_1) = \arctg\left(\frac{0,089}{0,476}\right) = -169,4^\circ;$$

$$\varphi_2 = \arg(A_2) = \arctg\left(\frac{0,089}{-0,476}\right) = 169,4^\circ.$$

Таким чином, запишемо $A_1 = 0,484e^{-j164,4^\circ}$,
 $A_2 = 0,484e^{j164,4^\circ}$.

Запишемо вираз перехідного струму в індуктивності

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 0,952 + 0,484[e^{-j164,4^\circ} \cdot e^{(-88+j307^\circ)t} + e^{j164,4^\circ} \times \\ &\quad \times e^{(-88-j307^\circ)t}] = \\ &= 0,952 + 0,484e^{-88t} \cdot 2 \cdot \frac{e^{j(307t-169,4^\circ)} + e^{-j(307t+169,4^\circ)}}{2} = \\ &= 0,952 + 0,968e^{-88t} \cos(307t - 169,4^\circ). \end{aligned}$$

Побудуємо графік перехідного струму в індуктивності (рис. 2.63).

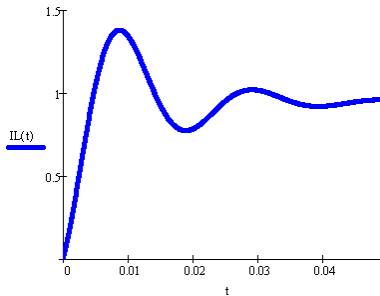


Рисунок 2.63

Приклад 2.9. Для кола, що зображено на рис. 2.64, знайти вирази для всіх струмів та напруг і побудувати графіки зміни їх у часі. Номінали елементів схеми такі: $U = 50$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 100$ мкФ.

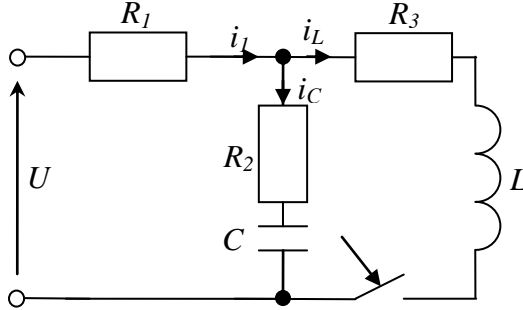


Рисунок 2.64

Розв'язання

Зобразимо схему після комутації (рис. 2.65).

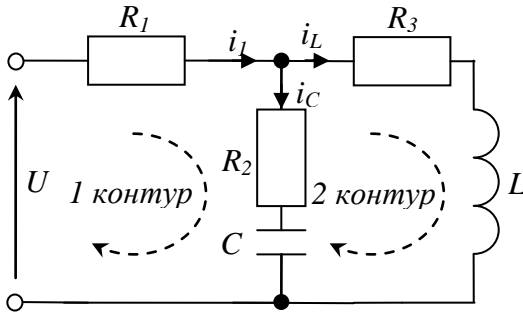


Рисунок 2.65

Складемо систему рівнянь на основі законів Кірхгофа :

$$\begin{cases} i_1 = i_c + i_L, \\ i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_c dt + i_c R_2 = U, \\ i_L R_3 + L \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{C} \int i_c dt = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему рівнянь відносно напруги на ємності.

Виразимо із 2-го рівняння системи струм i_1 :

$$i_1(t) = \frac{1}{R_1} \left(U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \right) = i_C + i_L.$$

Підставимо одержаний результат у перше рівняння системи :

$$\frac{1}{R_1} \left(U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \right) = i_C + i_L.$$

Виразимо із одержаного рівняння струм :

$$i_L = \frac{1}{R_1} \left(U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \right) - i_C.$$

Підставимо одержаний вираз у третє рівняння системи :

$$\left(\frac{1}{R_1} \left(U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \right) - i_C \right) \cdot \left(R_3 + L \frac{di_L(t)}{dt} \right) - \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = 0.$$

Із вищевикладеного матеріалу відомо, що

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt, \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Підставимо записані співвідношення у перетворені рівняння :

$$\frac{1}{R_1} \left(U - C \frac{du_C(t)}{dt} R_2 - u_C \right) - C \frac{du_C(t)}{dt} \left(R_3 + L \frac{di}{dt} \right) - u_C = 0.$$

Після спрощення рівняння одержимо диференціальне рівняння 2-го порядку :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} CL(R_1 + R_2) + \frac{du_C}{dt} [C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L] + u_C(R_1 + R_3) = 0.$$

Диференціальне рівняння одержане щодо напруги на ємності u_C . Для розв'язання одержаного диференціального рівняння складемо характеристичне рівняння. Для цього введемо таку заміну :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = \lambda^2 u_C, \quad \frac{du_C}{dt} = \lambda u_C.$$

Таким чином, одержуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 CL(R_1 + R_2) + \lambda[C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + L] + [R_1 + R_3] = 0.$$

Підставимо замість номіналів елементів їх числові значення і одержимо

$$2 \cdot 10^{-4} \lambda^2 + 0.15 \cdot \lambda + 30 = 0.$$

Корені одержаного характеристичного рівняння будуть такими

$$\lambda_1 = -375 + 96.825j; \quad \lambda_2 = -375 - 96.825j.$$

Визначимо час перехідного процесу

$$t_{pp} = \frac{3}{|\alpha|} = \frac{3}{|-375|} = 2.667 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

де $|\lambda|$ – дійсна частина комплексних коренів характеристичного рівняння.

Запишемо вимушену складову струму в котушці індуктивності

$$i_{L.\text{вим}} = \frac{U}{R_1 + R_3} = \frac{50}{10 + 20} = 1.667 \text{ А}.$$

Запишемо вимушену складову напруги на ємності :

$$u_{C.\text{вим}} = i_{L.\text{вим}} \cdot R_3 = 1.667 \cdot 30 = 33.3 \text{ В}.$$

Знайдемо вільну складову струму в котушці індуктивності.

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то вигляд вільної складової струму в котушці індуктивності буде такий :

$$u_{C.B}(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)],$$

де A_1 та A_2 – сталі інтегрування.

Тепер визначимо сталі інтегрування. Для їх визначення запишемо систему

$$\begin{cases} u_{C.B}(0) = A_1, \\ \left. \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \right|_{t=0} = A_1 \alpha + A_2 \omega. \end{cases}$$

Тепер для розв'язання системи необхідно знайти $u_{C.B}(0)$ та $\left. \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \right|_{t=0}$.

Спочатку знайдемо вільну складову напруги на котушці індуктивності $u_{C.B}(0)$. Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має розв'язок вигляду

$$u(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.B}(t).$$

Запишемо це рівняння у нульовий момент часу :

$$u(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.B}(0).$$

На основі закону комутації можна записати $u_C(0) = u_C(0-)$. Значення напруги на ємності $u_C(0-) = U = 50$ В та струму у індуктивності $i_L(0-) = 0$, оскільки схема на постійному струмі розірвана через ключ і через ємність.

Визначимо константу

$$u_{C.B}(0) = u(0) - u_{C.ВИМ} = 50 - 33.33 = 16.667 \text{ В.}$$

Знайдемо значення $\left. \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \right|_{t=0}$. Надамо цьому виразу фізичного змісту

$$\left. \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C}.$$

Щоб знайти струм у конденсаторі $i_C(0)$ необхідно розв'язати систему, що складена на основі законів Кірхгофа на сталому струмі після комутації.

Знайдемо струм $i_C(0)$ із системи

$$i_C(0) = \frac{U - u_C(0) - R_1 i_L(0)}{R_1 + R_2} = \frac{50 - 50 - 10 \cdot 0}{10 + 10} = 0.$$

Тепер запишемо значення

$$\left. \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{0}{100 \cdot 10^{-6}} = 0.$$

Таким чином, одержуємо таку систему для розрахунку констант:

$$\begin{cases} 16.667 = A_1, \\ 0 = A_1 \cdot (-375) + A_2 \cdot 96 \cdot 825. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему відносно констант інтегрування та одержимо такі корені : $A_1 = 16.667$, $A_2 = 64.55$.

Запишемо вираз для вільної складової струму в котушці індуктивності :

$$u_{C.B}(t) = e^{-375t} [16.667 \cos(96.825t) + 64.55 \sin(96.825t)].$$

Повний вираз для струму в індуктивності
 $u_C(t) = 33.33 + e^{-375t}[16.667 \cos(96.825t) + 64.55 \sin(96.825t)]$.

Визначимо струм в ємності

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -2.582e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Знайдемо струм, що проходить через перший опір :

$$i_C(t) = \frac{U - u_C(t) - i_C(t)R_2}{R_1} =$$

$$= 1.667 - 1.667e^{-375t} \cos(96.825t) - 3.873e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Знайдемо струм, що проходить через індуктивність

$$i_L(t) = i_1(t) - i_C(t) =$$

$$= 1.667 - 1.667e^{-375t} \cos(96.825t) - 1.291e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Знайдемо падіння напруги на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 50e^{-375t} \cos(96.825t) - 3.873e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Графіки побудовані на інтервалі часу від нуля до часу перехідного процесу за допомогою програми MathCAD (рис. 2.66 – рис. 2.67).

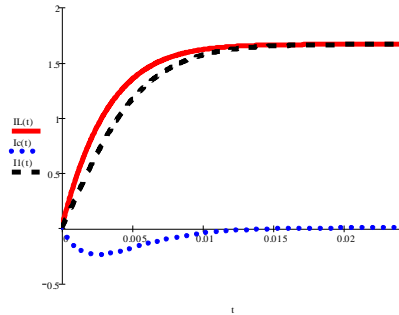


Рисунок 2.66 - Струм у колі

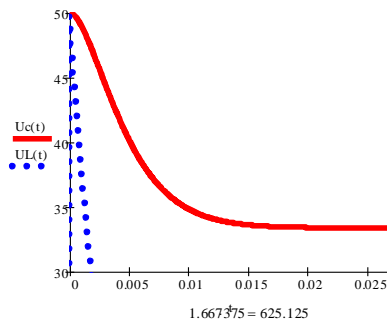


Рисунок 2.67 - Напруги у колі

2.10. Питання для самоперевірки

1. Суть класичного методу аналізу перехідних процесів.
2. Що таке вимушений режим?
3. Що таке усталений режим?
4. Другий закон Кірхгофа для коливального контуру.

5. Відносно яких змінних доцільно розв'язувати рівняння, записане за другим законом Кірхгофа? Чому?
6. До якого вигляду перетвориться рівняння для коливального контуру?
7. Як одержати характеристичне рівняння?
8. Який вигляд мають корені характеристичного рівняння?
9. Яка загальна методика знаходження шуканої змінної?
10. Як знайти константу інтегрування у випадку, якщо схема описується диференціальним рівнянням 1-го порядку?
11. Як знайти константу інтегрування у випадку, якщо схема описується диференціальним рівнянням 2-го порядку?
12. Як знайти константу інтегрування у випадку, якщо схема описується диференціальним рівнянням 3-го порядку?
13. Що таке стала часу кола? Як вона визначається?
14. Що таке час перехідного процесу?
15. Що таке коефіцієнт згасання?
16. Що таке декремент згасання?
17. Що таке логарифмічний декремент згасання?
18. Виведіть характеристичне рівняння для RL-кола.
19. Що таке стала часу кола?
20. Який загальний розв'язок рівняння у випадку RL-кола?
21. Записати сталу часу RL-кола.
22. Розкрити суть геометричної інтерпретації сталої часу кола.
23. Які особливості відключення та включення RL-кола?
24. Як визначити вимушену складову RL-кола при включенні кола під гармонічну напругу?
25. У якому випадку перехідний процес найбільш яскраво виражений? Чому?
26. Яке значення при включенні RL-кола під гармонічний напругу не зможе перевищити струм? Чому?
27. У якому випадку перехідного процесу немає? Чому?
28. Як одержати характеристичне рівняння RC-кола?
29. Як визначається стала часу RC-кола.
30. Як визначається вимушена складова шуканої величини RC-кола при включенні її під гармонічну напругу?

31. Як визначається вільна складова у RC-колі при включенні її під гармонічну напругу?
32. Як визначити струм та напругу на резисторі в RC-колі?
33. Що відбудеться із вимушеною та вільною складовими при відсутності початкового заряду конденсатора?
34. Пояснити, від чого залежить характер перехідного процесу.
35. Яка особливість RC-кола за наявності початкового заряду?
36. Розкрити суть процесу вільного розряду конденсатора.
37. Записати друге рівняння Кірхгофа для коливального контуру. Які особливості розв'язання цього рівняння? Як розв'язати таке рівняння?
38. Які повинні бути корені характеристичного рівняння? Чому?
39. Записати загальний вираз для вільної складової у випадку дійсних коренів.
40. Записати загальний вираз для вільної складової у випадку рівних коренів.
41. Записати загальний вираз для вільної складової у випадку комплексно-спряжених коренів.
42. Як знаходять константи інтегрування у колах вищого порядку?
43. Що таке аперіодичний розряд ємності і в яких випадках він має місце?
44. Що таке коливальний розряд ємності і в яких випадках він має місце?
45. Поняття про граничний аперіодичний розряд ємності.

2.11. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях

Задача 2.1. Знайти вимушену складову струму в RL-колі з номіналами $R = 1.8$ кОм, $L = 70$ мГ, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 220 \cos(300t + 45^\circ)$.

Задача 2.2. Записати вираз для струму в RL-колі з числовими значеннями елементів: $R = 5 \text{ кОм}$, $L = 120 \text{ мГ}$ і побудувати його графік, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 110 \cos(450t + 90^\circ)$.

Задача 2.3. Знайти вимушену складову струму в RL-колі з номіналами: $R = 1.8 \text{ кОм}$, $L = 70 \text{ мГ}$, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 220 \cos(300t + 45^\circ)$.

Задача 2.4. Записати вираз для струму в RL-колі з номіналами: $R = 5 \text{ кОм}$, $L = 120 \text{ мГ}$ та побудувати його графік, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 110 \cos(450t + 90^\circ)$.

Задача 2.5. Для кола (рис. 2.68) після комутації одержати напругу та струм на індуктивності. Побудувати графіки цих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $L = 0.1 \text{ Гн}$, $E = 120 \text{ В}$.

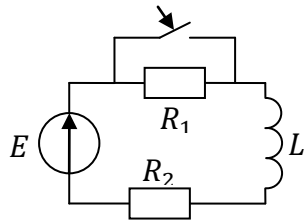


Рисунок 2.68

Задача 2.6. У колі (рис. 2.69) після комутації розрахувати класичним методом напругу, струм на ємності та струм на першому опорі. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі.

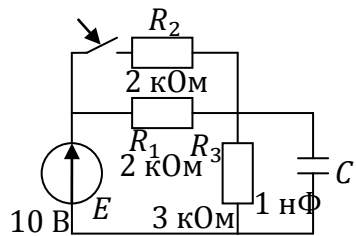


Рисунок 2.69

Задача 2.7. У колі (рис. 2.70) після комутації розрахувати класичним методом напругу, струм на індуктивності та струм на першому опорі. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі.

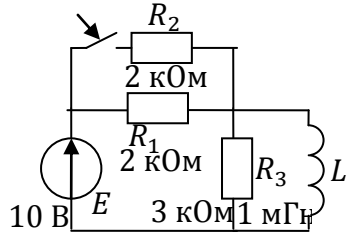


Рисунок 2.70

Задача 2.8. У колі (рис. 2.71) відбувається комутація. Ємність $C = 1$ мкФ заряджена до напруги U_0 , інші номінали елементів кола наведені на рисунку. За який час енергія зарядженого конденсатора зменшиться у 4 рази після комутації S1?

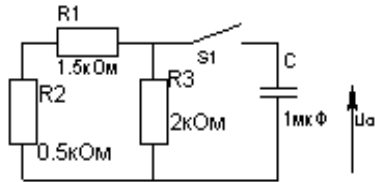


Рисунок 2.71

Задача 2.9. У колі (рис. 2.72) знайти струм та напругу на ємності у момент комутації. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $C = 10$ нФ, $E_2 = 30$ В, $E_1 = 10$ В.

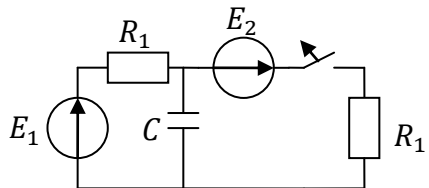


Рисунок 2.72

Задача 2.10. Для кола (рис. 2.73) після комутації визначити напругу та струм на ємності. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $C = 100$ мкФ, $E = 100$ В.

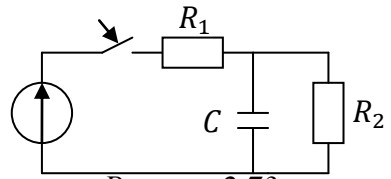


Рисунок 2.73

Задача 2.11. У колі (рис. 2.74) після комутації визначити напругу та струм на індуктивності. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $L = 10$ мГн, $E = 10$ В.

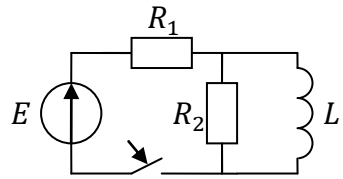


Рисунок 2.74

Задача 2.12. У колі (рис. 2.75) до та після комутації визначити напругу та струм на індуктивності. Побудувати графіки цих величин. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $L = 100$ мГн, $E = 20$ В.

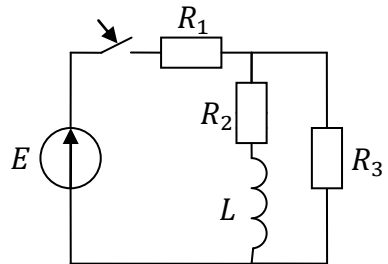


Рисунок 2.75

Задача 2.13. У колі (рис. 2.76) після комутації одержати вирази напруги та струму на ємності. Побудувати графіки цих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $C = 100$ мкФ, $E = 20$ В.

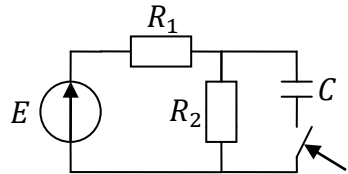


Рисунок 2.76

Задача 2.14. Для кола (рис. 2.77) після комутації одержати вирази напруги та струму на ємності, якщо на вході діє постійна напруга $E = 20$ В. Побудувати графіки цих величин до та після комутації. Номінали елементів кола такі: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $C = 100$ мкФ.

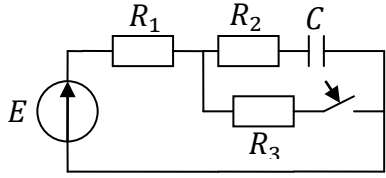


Рисунок 2.77

Задача 2.15. Для кола (рис. 2.78) після комутації визначити напругу та струм на індуктивності. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $L = 100$ мГн, $E = 100$ В.

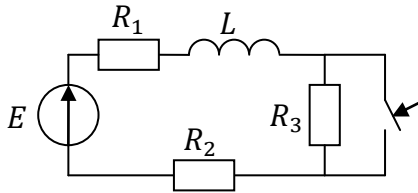


Рисунок 2.78

Задача 2.16. Визначити струм та напругу на ємності при замиканні ключа (рис. 2.79) та побудувати їх графіки. Числові значення елементів: $E = 2$ В, $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 1$ кОм, $R_5 = 1$ кОм, $C = 0.5$ нФ. Записати диференціальне рівняння.

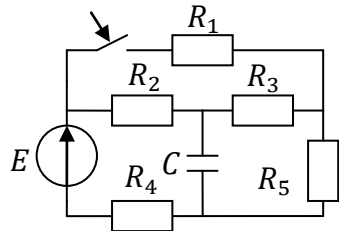


Рисунок 2.79

Задача 2.17. Для кола (рис. 2.80) після комутації одержати вирази напруги та струму на ємності, якщо на вході діє постійна напруга $E = 10$ В. Побудувати графіки цих величин до та після комутації. Номінали елементів кола такі: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $C = 1$ нФ, $R_4 = 1$ кОм.

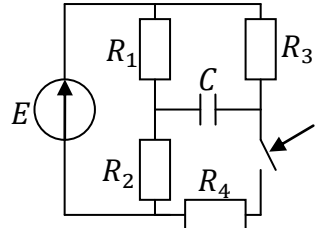


Рисунок 2.80

Задача 2.18. Для кола (рис. 2.81) після комутації одержати вирази перехідної напруги та струму на ємності, якщо на вході діє постійне джерело струму $J_1 = 1$ А. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $C = 5$ мкФ, $J_2 = 2$ А.

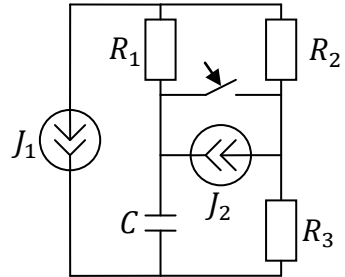


Рисунок 2.81

Задача 2.19. Для кола (рис. 2.82) у момент комутації одержати вирази всіх струмів та напруг. Визначити перші похідні від напруг u_{C1} , u_{C2} та струму i_L , якщо на вході діє постійна напруга $E = 20$ В. Номінали елементів кола такі: $R_1 = 6$ кОм, $R_2 = 4$ кОм, $C_1 = 2$ нФ, $C_2 = 3$ нФ, $L = 10$ мГн. Навести операторну схему заміщення .

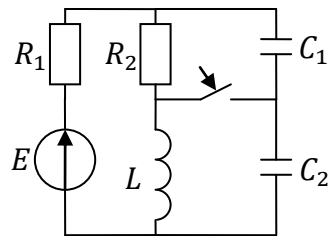


Рисунок 2.82

Задача 2.20. У колі (рис. 2.83) відбувається перехідний процес. Визначити закони зміни струму та напруги в індуктивності, якщо $L = 2$ мГн, $E_1 = 20$ В, $E_2 = 20$ В, $R_1 = 7,5$ кОм, $R_2 = 7,5$ кОм, $R_3 = 10$ кОм, $R_4 = 20$ кОм, $R_5 = 20$ кОм. Побудувати графіки зміни напруги та струму в індуктивності.

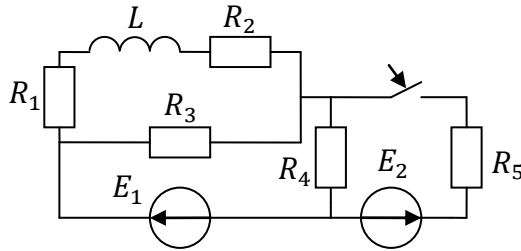


Рисунок 2.83

Задача 2.21. У колі (рис. 2.84) після комутації визначити закон зміни струмів. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 2$ кОм, $J = 2$ А, $C = 4$ нФ, $E = 2$ В.

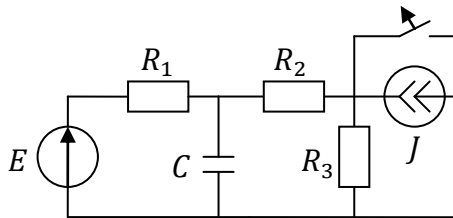


Рисунок 2.84

Задача 2.22. Для кола (рис. 2.85) після комутації визначити струм на індуктивності. Побудувати графіки струму до та після комутації. Числові значення елементів кола: $R_1 = 7$ кОм, $R_2 = 8$ кОм, $L = 4$ мГн, $J = 3$ мА.

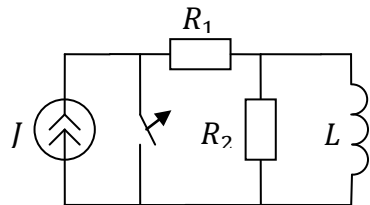


Рисунок 2.85

Задача 2.23. Що розуміють під сталою часу контуру τ (рис. 2.86)? Знайти τ послідовного коливального контуру, якщо $\omega = 10^6$ рад/с, добротність $Q = 100$.

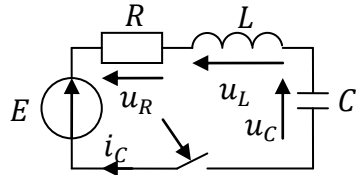


Рисунок 2.86

Задача 2.24. Послідовний коливальний контур (рис. 2.87) із R, L, C елементів підключається до джерела постійної напруги. Одержати вираз операторним методом для перехідного струму в контурі для випадку, коли $Q = 1/2$. Побудувати графік струму в контурі від часу.

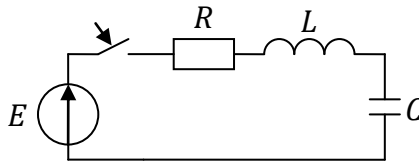


Рисунок 2.87

Задача 2.25. Для кола (рис. 2.88) одержати диференціальне рівняння для знаходження напруги на ємності та струму в індуктивності і подати їх у вигляді

$$1 \frac{d^2}{dt^2} u_c(t) + A_1 \frac{d}{dt} u_c(t) + A_0 u_c(t) = f(t).$$

Коефіцієнти A_i виразити через значення елементів: $L = 1$ мГн, $C = 1$ нФ, $R = 500$ Ом. Який характер перехідного процесу? За який час він закінчиться?

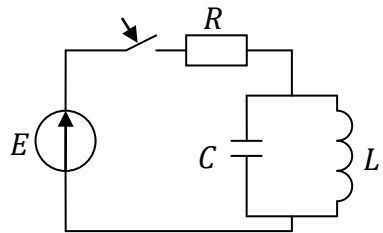


Рисунок 2.88

Задача 2.26. У колі (рис. 2.89) після комутації визначити закон зміни струмів. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.1 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.4 \text{ Гн}$, $E = 120 \text{ В}$.

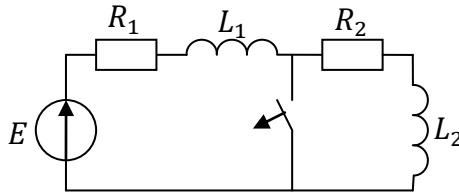


Рисунок 2.89

Задача 2.27. У колі (рис. 2.90) відбувається перехідний процес. Визначити закон зміни струму через опір. Числові значення елементів кола такі: $R = 400 \text{ Ом}$, $C_1 = 5 \text{ мкФ}$, $C_2 = 5 \text{ мкФ}$, $E = 200 \text{ В}$.

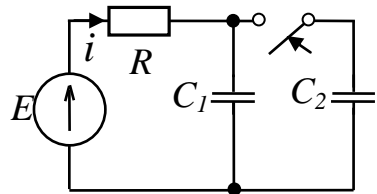


Рисунок 2.90

Задача 2.28. У колі (рис. 2.91) відбувається перехідний процес. Визначити закон зміни струмів в індуктивностях. Числові значення елементів кола такі: $R = 2 \text{ кОм}$, $L_1 = 2 \text{ мГн}$, $L_2 = 4 \text{ мГн}$, $E = 10 \text{ В}$.

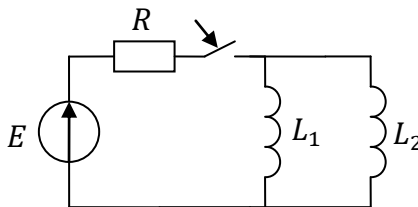


Рисунок 2.91

Задача 2.29. У колі (рис. 2.92) після комутації визначити закон зміни напруги на ємностях. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $C_1 = 1 \text{ нФ}$, $C_2 = 1 \text{ нФ}$, $E = 10 \text{ В}$.

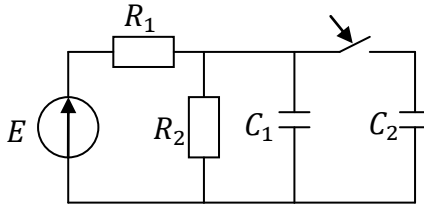


Рисунок 2.92

Задача 2.30 Коло (рис. 2.93) підключається до джерела постійного струму $J = 0.4 \text{ А}$. Визначити значення напруги та струму на ємності. Номінали елементів кола такі: $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 300 \text{ Ом}$, $R_3 = 300 \text{ Ом}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$, $C = 20 \text{ мкФ}$.

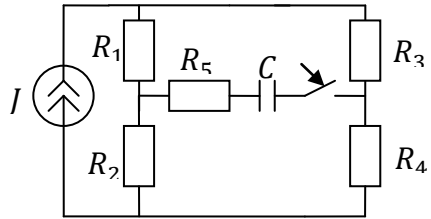


Рисунок 2.93

3. ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Класичний метод розрахунку перехідних процесів вимагає у загальному випадку багаторазового розв'язання систем алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування за початковими умовами і для знаходження початкових значень функції і її похідних, що і являє собою основні труднощі розрахунків цим методом. Тому найчастіше для інженерної практики використовують операторний метод розрахунку перехідних процесів.

3.1 Пряме та зворотне перетворення Лапласа

Сутність операторного методу розрахунку полягає у тому, що використовується перетворення Лапласа, яке дозволяє перенести розв'язання із області функції дійсної змінної t в область функції комплексної змінної p

$$p = s + j\omega \quad (3.1)$$

При цьому операції диференціювання та інтегрування функції замінюються відповідними операціями множення та ділення функції комплексної змінної на змінну p , що дуже спрощує розрахунок, оскільки зводить систему диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних. У операторному методі відпадає необхідність визначення сталих інтегрування, тому його частіше застосовують на практиці.

Пряме перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (3.2)$$

де $f(t)$ – функція дійсної змінної t , що визначається при $t > 0$, а при $t < 0$, $f(t) = 0$.

Інтеграл (3.2) ще позначають таким чином :

$$F(p) = L\{f(t)\}, \quad \text{або} \quad F(p) \rightarrow f(t). \quad (3.3)$$

Зворотне перетворення Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dp. \quad (3.4)$$

Функцію $F(p)$ називають зображенням за Лапласом, а функцію $f(t)$ – оригіналом. Отже, оригінал і зображення являють собою пари функцій $f(t)$ і $F(p)$ дійсної та комплексної змінних, зв'язаних між собою парою перетворень Лапласа. Інтеграл (3.4) ще позначають таким чином

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} \text{ або } f(t) \rightarrow F(p). \quad (3.5)$$

За такого перетворення операція диференціювання функції дійсної змінної $f(t)$, заміняється операцією множення на оператор p функції комплексної змінної $F(p)$. У свою чергу, операція інтегрування заміняється операцією ділення на оператор p . Ці властивості будуть доведені далі.

3.2. Основні властивості перетворень Лапласа

Математичним операціям над оригіналами відповідають відповідні операції над зображенням та навпаки. Ці операції називають властивостями перетворення Лапласа. Знання цих властивостей полегшує знаходження зображень.

1. Властивість лінійності

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k F_k(p), \quad (3.6)$$

де a_k – постійні коефіцієнти.

Ця властивість доводиться, якщо застосувати до лівої частини наведеного співвідношення пряме перетворення Лапласа :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) e^{-pt} dt &= \sum_{k=1}^n \left[\int_0^{\infty} a_k f_k(t) e^{-pt} dt \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \left[\int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt \right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p). \end{aligned}$$

2. Диференціювання оригіналу

При ненульових початкових умовах, коли $f(0) \neq 0$, диференціюванню оригіналу відповідає таке співвідношення :

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0). \quad (3.7)$$

У випадку нульових початкових умов

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p). \quad (3.8)$$

Пряме перетворення Лапласа

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} df(t) e^{-pt}.$$

Інтегрування здійснимо частинами, ввівши позначення

$$e^{-pt} = u, df(t) = dv.$$

Використаємо формулу $\int u dv = uv - \int v du$.

Відповідно одержуємо :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} df(t) e^{-pt} &= e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d(e^{-pt}) = \\ &= e^{-p \cdot \infty} f(\infty) - e^{-p \cdot 0} f(0) - \\ &- \int_0^{\infty} f(t) p e^{-pt} dt = 0 - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

У диференціальних рівняннях електричного кола вираз похідної за часом найчастіше зустрічаємо у виразі для напруги на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Позначаючи операторне зображення струму $i(t)$ у вигляді $I(p)$ одержуємо згідно з операторним зображенням для напруги на індуктивності

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0).$$

3. Інтегрування оригіналу

Інтегруванню оригіналу відповідає ділення на змінну p

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad (3.9)$$

У випадку багаторазового інтегрування

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) d^n t \leftrightarrow \frac{F(p)}{p^n}. \quad (3.10)$$

Ці співвідношення справедливі для нульових початкових умов, тобто $f(0) = 0$. При ненульових початкових умовах $f(0) \neq 0$ додається доданок $\frac{f(0)}{p}$.

Знайдемо зображення інтеграла функції

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt.$$

Візьмемо інтеграл Лапласа від функції $\psi(t)$:

$$\psi(p) = \int_0^t \psi(t) e^{-pt} dt = -\psi(t) \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{dt} e^{-pt} dt.$$

Перша складова виразу дорівнює нулю :

$$\psi(t) \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty = \psi(\infty) \frac{e^{-p \cdot \infty}}{p} - \psi(0) \frac{e^{-p \cdot 0}}{p} = 0 - 0.$$

Розглянемо другу складову :

$$\frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{dt} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}.$$

Таким чином, одержали зображення інтеграла

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Інтеграл найчастіше зустрічається у виразі для напруги на ємності :

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0).$$

Зображення першої складової згідно з вищевикладеним матеріалом буде

$$\frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \leftrightarrow \frac{I(p)}{pC}.$$

Друга складова є сталою величиною, тому її зображення буде

$$u_c(0) \leftrightarrow \frac{u_c(0)}{p}.$$

Тому запишемо вираз напруги на конденсаторі в операторній формі

$$U_c(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}.$$

4. Зміна масштабу (теорема подібності) :

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad (3.11)$$

де a – постійний дійсний коефіцієнт.

Визначимо інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt.$$

Введемо заміну змінної у прямому перетворенні Лапласа $x = at$, звідси $t = x/a$, тоді $dt = dx/a$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-p \frac{x}{a}} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x) e^{-p \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

5. Зсув в області дійсної змінної (теорема запізнювання) :

$$f(t \pm t_0) \rightarrow F(p). \quad (3.12)$$

Із цього співвідношення видно, що зсув оригіналу в часі на величину t_0 відповідає множенню зображення на $e^{\pm pt_0}$. Це доводиться заміною змінної.

Визначимо інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt.$$

Введемо заміну $x = t - t_0$, тоді $t = x + t_0$, звідси $dt = dx$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-p(x+t_0)} dt = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} e^{-pt_0} = \\ &= e^{-pt_0} \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = F(p) e^{-pt_0}. \end{aligned}$$

6. Зсув в області комплексної змінної (теорема зсуву) :

$$F(p \mp \lambda) \rightarrow e^{\pm \lambda t} f(t). \quad (3.13)$$

Ця теорема доводиться безпосередньо із прямого перетворення Лапласа, якщо в ньому замість $f(t)$ підставити $e^{\pm \lambda t} f(t)$. Причому λ може бути як дійсною, так і комплексною :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{\pm \lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p \mp \lambda)t} dt \leftrightarrow S(p \mp \lambda).$$

7. Теорема згортки

Згортка двох функцій відповідає добутку зображення :

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теорема згортки доводиться заміною порядку інтегрування в подвійному інтегралі та застосуванням теореми про часовий зсув оригіналу :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) e^{-pt} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} f_1(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_2(p) e^{p_0 t} dt \right] e^{-pt} dp_0 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_2(p) \cdot \left[\int_0^{\infty} f_1(t) e^{-(p-p_0)t} dt \right] dp_0 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_2(p) F_1(p - p_0) dp_0 = \frac{1}{2\pi} F_1(p) * F_2(p).
\end{aligned}$$

Отже,

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(p) * F_2(p).$$

8. Диференціювання зображення

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \leftrightarrow (-t)^n f(t). \quad (3.15)$$

9. Інтегрування зображення

$$\int_0^{\infty} F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}. \quad (3.16)$$

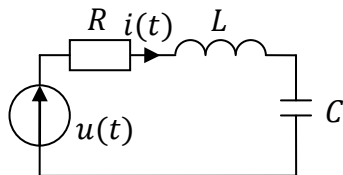
10. Згортка зображення

$$F_1(p) * F_2(p) \leftrightarrow 2\pi \cdot f_1(t) \cdot f_2(t). \quad (3.17)$$

3.3. Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі

Користуючись основними властивостями перетворення Лапласа, можна одержати основні закони теорії кіл у операторній формі.

Запишемо вираз напруги у колі (рис. 3.1) :



$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Рисунок 3.1

Застосувавши пряме перетворення Лапласа, і беручи до уваги властивість лінійності, диференціювання та інтегрування оригіналу, одержимо

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{pC}.$$

Звідси одержуємо закон Ома в операторній формі для цього кола :

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{R + pL + 1/pC} = \frac{U_0(p)}{Z(p)}, \quad (3.18)$$

де $U_0(p)$ – операторна напруга; $Z(p)$ – операторний опір кола.

Операторні зображення величини струму $I(p)$, напруги $U_0(p)$ та опору $Z(p)$ у теорії позначаються великими літерами.

Величини $Li(0)$ та $u_C(0)/p$ представляють початкові умови. Вони характеризують енергію електричних і магнітних полів, що запасається в L і C до моменту комутації. Ці величини схемотехнічно можуть бути представлені як джерела напруги. Величина, зворотна $Z(p)$, називається операторною провідністю кола :

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}. \quad (3.19)$$

Аналогічним чином можна одержати закони Кірхгофа в операторній формі.

Перший закон Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0. \quad (3.20)$$

Другий закон Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m U_k(p) = 0. \quad (3.21)$$

Таким чином, закон Ома та закони Кірхгофа у операторній формі аналогічні цим самим законам для постійного струму та гармонічного струму у комплексній формі з тією лише різницею, що у кожній із n гілок за наявності ненульових початкових умов діють додаткові джерела напруги $Li(0)$ та $\frac{u_C(0)}{p}$ (напря-

$Li(0)$ збігається із напрямом струму, а напрям $\frac{u_c(0)}{p}$ – протилежний), які можна перетворити у джерело струму.

Із виразу для операторної напруги кола (рис. 3.1) запишемо вирази для операторної напруги та струму :

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0), \quad U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}.$$

Виходячи з одержаних виразів, можна зобразити операторні схеми заміщення котушки індуктивності (рис. 3.2) та конденсатора (рис. 3.3).

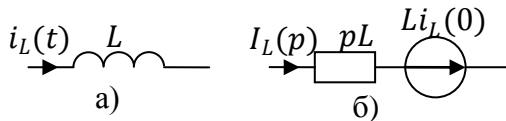


Рисунок 3.2

На рис. 3.2 а наведена котушка індуктивності у часовій області, а на рис. 3.2 б наведена операторна схема зображення котушки індуктивності у операторній області. Як, бачимо із рис. 3.2 б в операторній області котушка індуктивності еквівалентна індуктивному опору зі значенням pL та джерелу напруги зі значенням $Li(0)$.

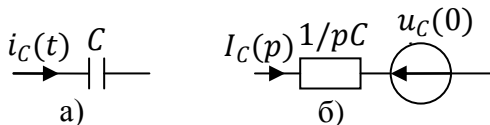


Рисунок 3.3

На рис. 3.3 а наведений конденсатор у часовій області, а на рис. 3.2 б наведена операторна схема зображення конденсатора у операторній області. Як, бачимо із рис. 3.3 б в операторній області конденсатор еквівалентний ємнісному опору зі значенням $1/pC$ та джерелу напруги зі значенням $u_c(0)/p$.

Оскільки у операторному вигляді виконуються основні закони, то можна користуватися класичними перетвореннями.

Проілюструємо перетворення джерела струму у джерело напруги для реактивних елементів у операторному вигляді.

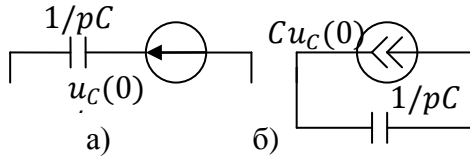


Рисунок 3.4

На рис. 3.4 проілюстроване перетворення джерела напруги $E = u_c(0)/p$ у джерело струму зі значенням

$$J = \frac{E}{Z_C(p)} = \frac{\frac{u_c(0)}{p}}{\frac{1}{pC}} = Cu_c(0).$$

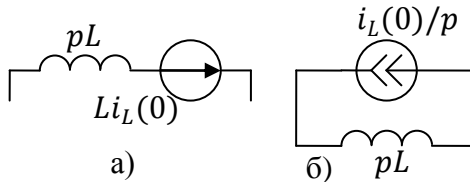


Рисунок 3.5

На рис. 3.5 проілюстроване перетворення джерела напруги $E = Li(0)$ у джерело струму зі значенням

$$J = \frac{E}{Z_L(p)} = \frac{Li(0)}{pL}.$$

Варто пам'ятати, що джерело напруги має нульовий опір, а джерело струму має нескінченний опір.

3.4. Загальна методика розв'язання операторним методом

При розв'язанні задач операторним методом розв'язання розбивається на п'ять етапів.

1. Розраховуються незалежні початкові умови.
2. Складається операторна схема заміщення для кола, отриманого після комутації.
3. Складається система рівнянь на підставі операторних законів Кірхгофа або за допомогою операторного методу контурних струмів, вузлових напруг.
4. Із системи визначаються операторні зображення струмів і напруг.
5. Знаходяться оригінали, за отриманими зображеннями за допомогою теореми розкладання.

Перед складанням схеми заміщення кола у операторній формі необхідно знайти значення струму $i_L(0-)$ у котушці індуктивності та напруги $u_C(0-)$ на конденсаторі до комутації. Оскільки коло до комутації знаходиться у сталому режимі роботи, то визначення значень $i_L(0-)$ і $u_C(0-)$ можна зробити застосувавши будь-який метод розрахунку. Якщо значення $i_L(0-)$ і $u_C(0-)$ відмінні від нуля, то при складанні схеми заміщення необхідно послідовно із реактивними елементами включити додаткові джерела енергії. Напрямок дії цих джерел і величина їх ЕРС вибираються відповідно до рис. 3.2 та рис. 3.3. Значення ЕРС та інших елементів кола в операторній формі вибираються за таблицю 3.1.

3.5. Приклади зображення функцій

Розглянемо деякі приклади знаходження зображення функцій за їх оригіналом. Знайдемо значення сталої величини, наприклад 1 :

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} e^{-p \cdot 0} = \frac{1}{p}.$$

Нехай $f(t) = e^{\alpha t}$, тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таким чином, одержуємо

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таблиця 3.1 - Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$(1-at)e^{\pm at}$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin(\psi) + \omega_0 \cdot \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha-\beta}(e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \cos(\varphi) - \omega_0 \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$

Якщо $\alpha \cdot t = j(\omega t + \psi)$, то

$$e^{at} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \leftrightarrow \frac{e^{j\psi}}{p-j\omega}.$$

Відповідно

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

На основі цих результатів складають таблицю відповідностей деяких функцій та їх зображень (табл. 3.1).

Більш детальніші таблиці відповідності оригіналів та їх зображень наведені у спеціальних довідниках.

3.6. Визначення оригіналів за теоремою розкладання

Складання операторних рівнянь містить у собі математичний опис схеми відомими методами розрахунку лінійних електричних кіл у операторній формі із застосуванням законів Кірхгофа, методів контурних струмів, вузлових напруг (потенціалів), накладення, еквівалентного генератора. Крім цього, можна робити еквівалентні перетворення ділянок кола із пасивними та активними елементами.

У результаті розв'язання операторних рівнянь одержують вираз у вигляді правильного дробу, чисельник і знаменник якої становлять поліноми у загальному випадку другого та третього степенів. Причому поліноми, що стоять у знаменниках для будь-якого кола змінного струму повинні бути однаковими або відрізнятися на множник p .

Після одержання операторного розв'язку необхідно знайти оригінал, що відповідає цьому розв'язку. Існує два шляхи визначення оригіналів. У першому випадку можна скористатися таблицею 3.1 відповідності оригіналів і зображень або більш повною, наведеною в будь-якому довіднику з вищої математики. У другому випадку перехід до оригіналу можна здійснити за допомогою теореми розкладання, що застосовна тільки при дотриманні певних умов. Найчастіше операторний розв'язок $F(p)$ має вигляд дробу. Під $F(p)$ розуміють $I(p)$ або $U(p)$:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (3.22)$$

Використовувати теорему розкладання можливо, якщо виконуються такі умови:

- дріб повинен бути правильним, тобто $m > n$;
- коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ та $b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ повинні бути дійсними та додатними;
- у знаменнику не повинно бути рівних коренів;
- чисельник і знаменник не повинні мати однакових коренів, тобто дріб повинен бути нескоротним.

Після складання операторного розв'язання визначаються корені знаменника $F_2(p) = 0$ і перевіряється виконання вище перелічених умов. Залежно від вигляду коренів можливі такі форми теореми розкладання.

Коли корені виразу $F_2(p)$ різні та дійсні, оригінал виразу знаходимо у вигляді суми лишків функції у особливих точках

$$i(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} [F(p_k)] = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t}, \quad (3.23)$$

де m – число коренів знаменника; p_k – k -й корень знаменника; $\dot{F}_2(p)$ – похідна від полінома знаменника.

Теорему розкладання також можна подати у вигляді

$$I(p) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k}, \quad \text{де} \quad A_k = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \Big|_{p=p_k} = \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} \Big|_{p=p_k}.$$

Вираз

$$\frac{A_k}{p - p_k}$$

у часовій області відповідає $A_k e^{p_k t}$.

Розглянемо приклади використання теореми розкладання для дійсних коренів.

Приклад 3.1. Визначити оригінал функції, зображення якої подано виразом

$$F(p) = \frac{5p + 3}{p^2 - 3p + 2}.$$

Розв'язання

Подамо функцію у вигляді відношення двох поліномів :

$$F(p) = \frac{5p + 3}{p^2 - 3p + 2} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Розкладемо знаменник на множники $F_2(p)$, для цього прирівняємо знаменник до нуля, тобто $F_1(p) = 0$:

$$p^2 - 3p + 2 = 0.$$

Корені виразу становлять $p_1 = 1, p_2 = 2$.

Подамо вираз $F(p)$ у вигляді суми простих дробів за теоремою розкладання :

$$F(p) = \frac{5p+3}{p^2-3p+2} = \frac{5p+3}{(p-1)(p-2)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p-2}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції у особливих точках :

$$A_1 = \frac{5p+3}{(p-1)(p-2)}(p-1) \Big|_{p=1} = \frac{5p+3}{(p-2)} \Big|_{p=1} = \frac{5+3}{1-2} = -8;$$

$$A_2 = \frac{5p+3}{(p-1)(p-2)}(p-2) \Big|_{p=2} = \frac{5p+3}{(p-1)} \Big|_{p=2} = \frac{10+3}{2-1} = 13.$$

Таким чином, запишемо зображення у вигляді

$$F(p) = \frac{-8}{p-1} + \frac{13}{p-2}.$$

Подамо оригінал $f(t) = -8e^t + 13e^{2t}$.

Приклад 3.2. Визначити оригінал функції, зображення якої подано виразом

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2+7p+12}.$$

Розв'язання

Подамо функцію у вигляді відношення двох поліномів :

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2+7p+12} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Розкладемо знаменник на множники $F_2(p)$, для цього прирівняємо знаменник до нуля, тобто $F_1(p) = 0$:

$$p^2 + 7p + 12 = 0.$$

Корені виразу становлять $p_1 = 3, p_2 = 4$.

Подамо вираз $F(p)$ у вигляді суми простих дробів за теоремою розкладання :

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2+7p+12} = \frac{2p+1}{(p+3)(p+4)} = A_1 + A_2.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції у особливих точках :

$$A_1 = \operatorname{Res}_{p=-3} F(p) = \frac{2p+1}{(p+3)(p+4)}(p+3)e^{pt} \Big|_{p=-3} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2p+1}{p+4} e^{pt} \Big|_{p=-3} = \frac{-6+1}{-3+4} e^{-3t} = -5e^{-3t}; \\
 A_2 &= \operatorname{Res}_{p=-4} F(p) = \frac{2p+1}{(p+3)(p+4)} (p+4) e^{pt} \Big|_{p=-4} = \\
 &= \frac{2p+1}{p+3} e^{pt} \Big|_{p=-4} = \frac{-8+1}{-4+3} e^{-4t} = 7e^{-4t}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, запишемо оригінал у вигляді

$$f(t) = -5e^{-3t} + 7e^{-4t}.$$

Якщо у рівнянні $F_2(p) = 0$ є m різних коренів p_1, p_2, \dots, p_n із них корінь p_1 кратністю m_1 , корінь p_2 кратністю m_2 , то оригінал буде обчислюватися так :

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} [F(p_k)] = \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p) e^{pt}}{F_2(p)} \right] \Big|_{p=p_k}. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Вираз, що стоїть у знаменнику, необхідно спочатку скоротити на $(p - p_k)^{m_k}$ та лише після цього диференціювати. Розглянемо приклади використання теореми розкладання для дійсних кратних коренів.

Приклад 3.3. Визначити оригінал функції, зображення якої подано виразом

$$F(p) = \frac{3p - 1}{p^2 + 4p + 4}.$$

Розв'язання

Подамо функцію у вигляді відношення двох поліномів:

$$F(p) = \frac{3p - 1}{p^2 + 4p + 4} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Розкладемо знаменник на множники $F_2(p)$, для цього прирівняємо знаменник до нуля, тобто $F_1(p) = 0$:

$$p^2 + 4p + 4 = 0.$$

Корені виразу становлять $p_1 = 2, p_2 = 2$.

Подано вираз $F(p)$ у вигляді суми простих дробів за теоремою розкладання :

$$F(p) = \frac{3p - 1}{p^2 + 4p + 4} = \frac{3p - 1}{(p + 2)^2} = \frac{A_1}{(p + 2)^2} + \frac{A_2}{p + 2}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції у особливих точках для коренів другого порядку кратності :

$$A_1 = \frac{3p - 1}{(p + 2)^2} (p + 2)^2 \Big|_{p=-2} = 3p - 1 \Big|_{p=-2} = -6 - 1 = -7;$$

$$A_2 = \frac{d}{dp} \left[\frac{3p - 1}{(p + 2)^2} (p + 2)^2 \right] \Big|_{p=-2} = \frac{d}{dp} [3p - 1] \Big|_{p=-2} = 3.$$

Таким чином, запишемо зображення у вигляді

$$F(p) = \frac{-7}{(p + 2)^2} + \frac{3}{p + 2}.$$

Наведемо оригінал $f(t) = -7te^{-2t} + 3e^{-2t}$.

Приклад 3.4. Визначити оригінал функції струму, зображення якого подано виразом

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p + 2}{(p - 1)^2 p^3}.$$

Розв'язання

Задана функція має полюс другого порядку $p_1 = 1$ та полюс третього порядку $p_2 = 0$, застосуємо формулу (3.24) по черзі для випадків $m = 2$ та $m = 3$:

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{p^3} e^{pt} \right] \Big|_{p=1} = \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{p+2}{p^3} \right) e^{pt} + \frac{d}{dp} (e^{pt}) \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) e^{pt} + t e^{pt} \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= \left[\frac{d}{dp} (p^{-2} + 2p^{-3}) e^{pt} + t e^{pt} \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= \left[(-2p^{-1} - 6p^{-2}) e^{pt} + t e^{pt} \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = (3t - 8) e^{pt};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \left[\frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) e^{pt} + \frac{d^2}{dp^2} (e^{pt}) \frac{p+2}{(p-1)^2} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) e^{pt} + \frac{t^2}{2} \frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} + t \frac{d}{dp} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= t^2 + 5t + 8.
\end{aligned}$$

Отже, запишемо загальний вираз для шуканого струму :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = (3t - 8)e^{pt} + t^2 + 5t + 8.$$

Знайдемо оригінали у інший спосіб для кратних коренів

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p+2}{p^3(p-1)^2} = \frac{A_1}{(p-1)^2} + \frac{A_2}{p-1} + \frac{A_3}{p^3} + \frac{A_4}{p^2} + \frac{A_5}{p}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції у особливих точках для кратних коренів :

$$A_1 = \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3} (p-1)^2 \Big|_{p=1} = \frac{p+2}{p^3} \Big|_{p=1} = \frac{1+2}{1} = 3;$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2} (p-1)^2 \right] \Big|_{p=1} = \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= \frac{p^3 - 3p^2(p+2)}{p^6} \Big|_{p=1} = \frac{1 - 3(1+2)}{1} = -8.
\end{aligned}$$

$$A_3 = \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3} p^3 \Big|_{p=0} = \frac{p+2}{(p-1)^2} \Big|_{p=0} = \frac{0+2}{1} = 2;$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2} p^3 \right] \Big|_{p=0} = \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{(p-1)^2 - 2(p-2)(p+2)}{(p-1)^4} \Big|_{p=0} = \frac{p-1-2(p+2)}{(p-1)^3} \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{p-1-2p-4}{(p-1)^3} \Big|_{p=0} = \frac{-p-5}{(p-1)^3} \Big|_{p=0} = \frac{-0-5}{(0-1)^3} = 5; \\
A_5 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2} p^3 \right] \Big|_{p=0} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) \right] \Big|_{p=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left[\frac{-p-5}{(p-1)^3} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-(p-1)^3 - 3(-p-5)(p-1)^2}{(p-1)^6} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{p-1-3(p+5)}{(p-1)^4} \right] \Big|_{p=0} = \frac{1}{2} \left[-\frac{p-1-3(p+5)}{(p-1)^4} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{p-1-3p-15}{(p-1)^4} \right] \Big|_{p=0} = \frac{1}{2} \left[-\frac{-2p-16}{(p-1)^4} \right] \Big|_{p=0} = \\
&= \frac{p+8}{(p-1)^4} \Big|_{p=0} = 8.
\end{aligned}$$

Отже, запишемо

$$I(p) = \frac{3}{(p-1)^2} + \frac{-8}{p-1} + \frac{2}{p^3} + \frac{5}{p^2} + \frac{8}{p}.$$

Подамо оригінал виразу, скориставшись таблицею перетворення Лапласа та формулою

$$\frac{1}{p^{n+1}} \rightarrow \frac{t^n}{n!}.$$

Отже, одержимо $i(t) = 3te^t - 8e^t + t^2 + 5t + 8$.

Якщо серед m коренів рівняння $F_2(p) = 0$ є пара комплексних коренів $p_k = -\alpha_k - j\omega_k$, $p_{k+1} = -\alpha_k + j\omega_k$, то теорема розкладання може бути подана в такому вигляді :

$$i(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t} \right]. \quad (3.25)$$

Доведемо це співвідношення. Запишемо вираз для шуканого операторного струму, одержаний раніше для пари комплексно-спряжених коренів у вигляді суми двох складових :

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\dot{A}_k}{p - p_k} + \frac{\dot{A}_{k+1}}{p - p_{k+1}}.$$

У часовій області цей вираз відповідає такому

$$i(t) = \dot{A}_k e^{p_k t} + \dot{A}_{k+1} e^{p_{k+1} t}.$$

Подамо пару комплексно спряжених коренів у показниковій формі :

$$\dot{A}_k = \left. \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} \right|_{p=p_k} = a + jb,$$

$$\dot{A}_{k+1} = \left. \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} \right|_{p=p_{k+1}} = a - jb = \dot{A}_k^*$$

$$\dot{A}_k = A_i e^{j\varphi}, \quad \dot{A}_{k+1} = A_i e^{-j\varphi},$$

де $A_i = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi_k = \arctg\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi$,

$$\varphi_{k+1} = \arctg\left(\frac{a}{-b}\right) = -\arctg\left(\frac{a}{b}\right) = -\varphi.$$

У виразі струму в часовій області у показники експоненти підставимо вирази коренів у алгебраїчній формі запису, а замість коефіцієнтів \dot{A}_k та \dot{A}_{k+1} їх показникові вирази :

$$\begin{aligned} i(t) &= \dot{A}_k e^{p_k t} + \dot{A}_{k+1} e^{p_{k+1} t} = \\ &= A_i e^{j\varphi} e^{(-\alpha_k - j\omega_k)t} + A_i e^{-j\varphi} e^{(-\alpha_k - j\omega_k)t} = \\ &= A_i e^{-\alpha_k t} \left[e^{-j(\omega_k t - \varphi)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi)} \right] = \\ &= 2A_i e^{-\alpha_k t} \left[\frac{e^{-j(\omega_k t - \varphi)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi)}}{2} \right] = \\ &= 2A_i e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi). \end{aligned}$$

У операторній області це відповідає виразу 3.25.

Інша форма запису теореми розкладання

$$i(t) = 2 \cdot |A_i| e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.26)$$

Приклад 3.5. За теоремою розкладання знайти оригінал функції $f(t)$ операторної функції $F(p)$ та побудувати графік $f(t)$. Пояснити побудову

$$F(p) = \frac{12}{p^2 + 2p + 37}$$

Розв'язання

Знайдемо корені полінома знаменника, прирівнявши знаменник до нуля :

$$p^2 + 2p + 37 = 0.$$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 37 = 4 - 148 = -144.$$

Визначимо корені квадратного рівняння

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-144}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 12j}{2} = -1 \pm 6j.$$

Отже, $p_1 = -1 + 6j$; $p_2 = -1 - 6j$ - це комплексно-спряжені корені.

Отже, вираз $F(p)$ можна розкласти на множники

$$F(p) = \frac{12}{p^2 + 2p + 37} = \frac{12}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Для цього скористаємося теоремою розкладання :

$$F(p) = \frac{12}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки :

$$A_1 = \frac{12}{(p - p_1)(p - p_2)} (p - p_1) \Big|_{p=p_1} = \frac{12}{(p - p_2)} \Big|_{p=p_1} = \frac{12}{(-1 + 6j - (-1 - 6j))} = \frac{12}{(-1 + 6j + 1 + 6j)} = \frac{12}{12j} = \frac{1}{j} = -j;$$

$$A_2 = \frac{12}{(p - p_1)(p - p_2)} (p - p_2) \Big|_{p=p_2} = \frac{12}{(p - p_1)} \Big|_{p=p_2} = \frac{12}{(-1 - 6j - (-1 + 6j))} = \frac{12}{(-1 - 6j + 1 - 6j)} = \frac{12}{-12j} = j.$$

Тепер скористаємося теоремою розкладання для комплексно-спряжених коренів :

$$f(t) = 2|A_1|e^{Re(p_1)t} \cos(Im(p_1)t + \arg(A_1)) =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot e^{-t} \cos(6t + 90^\circ) = 2e^{-t} \sin(6t).$$

Побудуємо графік функції (рис. 3.6). Спочатку визначимо сталу часу кола $\tau = 1$, тоді графік функції згасне за час $t_{\text{пп}} = 3\tau = 3$, частота косинусоїди $\omega = 6$, тоді період синусоїди $T = 2\pi/\omega = 2\pi/6 \approx 1$.

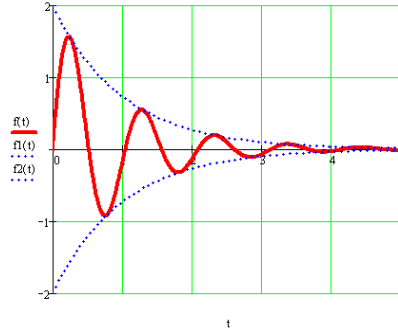


Рисунок 3.6

Визначимо у інший спосіб оригінал :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{12}{p^2 + 2p + 37} = \frac{2 \cdot 6}{p^2 + 2p + 1 + 36} = \\ &= \frac{2 \cdot 6}{(p + 1)^2 + 6^2} = 2 \cdot \frac{6}{(p + 1)^2 + 6^2}. \end{aligned}$$

У часовій області це відповідає

$$f(t) = 2 \cdot e^{-t} \sin(6t).$$

3.7. Приклади розв'язування задач

Приклад 3.6. За теоремою розкладання знайти оригінал функції напруги на ємності $u_C(t)$ операторної функції $U_C(p)$, що визначається виразом

$$U_C(p) = \frac{2p^3 + 1}{p^3 + p^2}.$$

Також визначити струм у ємності $i_C(t)$.

Розв'язання

Оскільки степені поліномів чисельника та знаменника рівні, то знизимо степінь чисельника, розділивши чисельник на знаменник :

$$\frac{2p^3 + 1}{1 - 2p^2} \left| \frac{p^3 + p^2}{2} \right.$$

Таким чином, перепишемо вираз для операторної напруги на ємності :

$$U_C(p) = 2 + \frac{1 - 2p^2}{p^3 + p^2} = 2 + \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)}.$$

Для спрощення введемо позначення

$$F(p) = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)}.$$

Розкладемо вираз $F(p)$ на прості дроби за теоремою розкладання :

$$F(p) = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} = \frac{A_1}{p + 1} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p}.$$

Визначимо коефіцієнти за допомогою розрахунку лишків функції в особливих точках :

$$A_1 = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} (p + 1) \Big|_{p=-1} = \frac{1 - 2p^2}{p^2} \Big|_{p=-1} = \frac{1 - 2}{1} = -1;$$

$$A_2 = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} p^2 \Big|_{p=0} = \frac{1 - 2p^2}{p + 1} \Big|_{p=0} = \frac{1 - 2 \cdot 0}{1} = 1;$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} p^2 \right) \Big|_{p=0} = \frac{d}{dp} \left(\frac{1 - 2p^2}{p + 1} \right) \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{\frac{d}{dp} (1 - 2p^2) \cdot (p + 1) - (1 - 2p^2) \cdot \frac{d}{dp} (p + 1)}{(p + 1)^2} \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{-4p \cdot (p + 1) - (1 - 2p^2) \cdot 1}{(p + 1)^2} \Big|_{p=0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned}$$

Таким чином, запишемо

$$F(p) = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} = \frac{-1}{p + 1} + \frac{1}{p^2} + \frac{-1}{p}.$$

Подамо вираз $F(p)$ у часовій області

$$f(t) = -e^{-t} + t - 1.$$

Оскільки корінь $p = 0$ є коренем другої кратності, то використаємо ще одну форму теорему розкладання :

$$F(p) = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} = B_1 + B_2.$$

Визначимо вирази

$$\begin{aligned} B_1 &= \operatorname{Res}_{p=-1} F(p) = \frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} (p + 1) e^{pt} \Big|_{p=-1} = \\ &= \frac{1 - 2p^2}{p^2} e^{pt} \Big|_{p=-1} = \frac{1 - 2}{1} \cdot e^{-t} = -e^{-t}; \\ B_2 &= \operatorname{Res}_{p=0} F(p) = \frac{d}{dp} \left(\frac{1 - 2p^2}{p^2(p + 1)} p^2 e^{pt} \right) \Big|_{p=0} = \\ &= \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1 - 2p^2}{p + 1} \right) \cdot e^{pt} + \frac{1 - 2p^2}{p + 1} \frac{d}{dp} (e^{pt}) \right] \Big|_{p=0} = \\ &= \left[\left(\frac{-4p(p + 1) - (1 - 2p^2)}{(p + 1)^2} \right) \cdot e^{pt} + \frac{1 - 2p^2}{p + 1} \frac{d}{dp} t \cdot e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = \\ &= -1 + t. \end{aligned}$$

Отже, у результаті одержимо $f(t) = -e^{-t} + t - 1$.

Тепер запишемо напругу на ємності у часовій області :

$$u_C(t) = -e^{-t} + t - 1 + 2\delta(t).$$

Визначимо вираз струму у ємності :

$$u_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 1 + e^{-t}.$$

Приклад 3.7. Для кола (рис. 3.7) операторним методом знайти вираз струму та напруги у ємності при замиканні ключа, якщо $E = 10$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $C = 100$ мкФ.

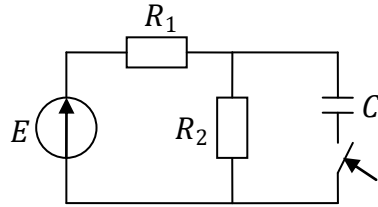


Рисунок 3.7

Розв'язання

Зобразимо операторну схему заміщення після комутації (рис. 3.8).

Визначимо нульові початкові умови. На основі другого закону комутації запишемо $u_C(0) = u_C(0-) = 0$.

Отже, необхідно визначити $u_C(0-) = 0$, оскільки до комутації коло розірване через ключ та ємність за постійним струмом. Виберемо додатні напрямки проходження операторних контурних струмів у контурах (рис. 3.9).

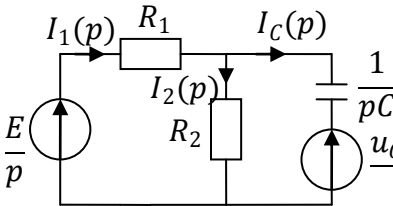


Рисунок 3.9

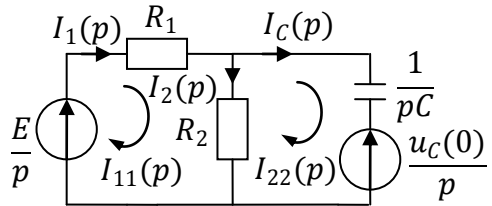


Рисунок 3.9

Для операторної схеми (рис. 3.9) запишемо систему рівнянь на основі операторного методу контурних струмів у матричній формі :

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{p} \\ -\frac{u_C(0-)}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{pC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11}(p) \\ I_{22}(p) \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення :

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + \frac{10^4}{p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11}(p) \\ I_{22}(p) \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера. Визначимо струм у другому контурі $I_{22}(p)$, який збігається із операторним струмом на ємності $I_C(p)$. Розрахуємо визначники :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix} = 20 \cdot \left(10 + \frac{10^4}{p}\right) - 10 \cdot 10 = \\ &= 200 + \frac{2 \cdot 10^5}{p} - 100 = \frac{100p + 2 \cdot 10^5}{p}; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 20 & \frac{10}{p} \\ -10 & 0 \end{vmatrix} = 20 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{10}{p} = \frac{100}{p}. \end{aligned}$$

Визначимо струм в ємності :

$$\begin{aligned} I_C(p) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{100}{p} \cdot \frac{p}{100p + 2 \cdot 10^5} = \\ &= \frac{100}{100 \cdot (p + 2 \cdot 10^3)} = \frac{1}{p + 2 \cdot 10^3}. \end{aligned}$$

Тепер визначимо струм в ємності :

$$i_C(t) = L^{-1}\{I_C(p)\} = e^{-2000t}.$$

Операторна напруга за операторним законом Ома

$$\begin{aligned} U_C(p) &= \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{1}{\frac{0.1 \cdot 10^{-3} p (p + 2 \cdot 10^3)}{10^4}} = \\ &= \frac{10^4}{p(p + 2 \cdot 10^3)} \end{aligned}$$

Розкладемо вираз $U_C(p)$ на прості дроби за теоремою розкладання

$$U_C(p) = \frac{10^4}{p(p + 2 \cdot 10^3)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 2 \cdot 10^3}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції в особливих точках :

$$A_1 = \frac{10^4}{p(p + 2 \cdot 10^3)} p \Big|_{p=0} = \frac{10^4}{(p + 2 \cdot 10^3)} \Big|_{p=0} = \frac{10^4}{2 \cdot 10^3} = 5;$$

$$A_2 = \frac{10^4}{p(p + 2 \cdot 10^3)} (p + 2 \cdot 10^3) \Big|_{p=-2 \cdot 10^3} = \frac{10^4}{p} \Big|_{p=-2 \cdot 10^3} = \\ = \frac{10^4}{-2 \cdot 10^3} = -5.$$

Отже, операторна напруга в ємності визначається виразом

$$U_C(p) = \frac{5}{p} - \frac{5}{p + 2 \cdot 10^3}.$$

Скориставшись таблицею перетворення Лапласа, запишемо оригінал напруги на ємності $u_C(t) = 5 - 5e^{-2000t}$.

Запишемо вираз напруги до та після комутації на ємності :

$$u_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 5 - 5e^{-2000t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Запишемо вираз струму до та після комутації на ємності :

$$i_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1e^{-2000t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Побудуємо графіки зміни напруги та струму в ємності (3.10).

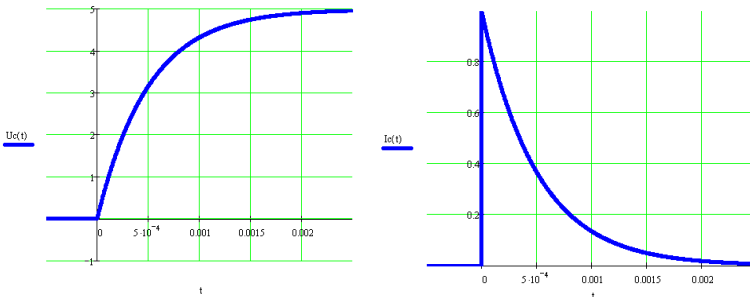


Рисунок 3.10

Перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 3.11).

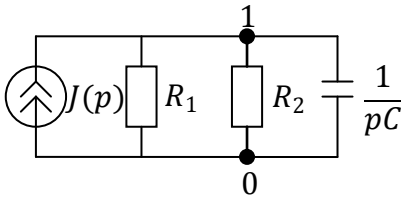


Рисунок 3.11

Визначимо величину утвореного джерела струму :

$$J(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1} = \frac{\frac{10}{p}}{10} = \frac{1}{p}.$$

Складемо операторну систему рівнянь за методом вузлових потенціалів. Оскільки схема має тільки два вузли, то рівняння матиме вигляд

$$J(p) = U_{10}(p)(g_1 + g_2 + pC).$$

Підставимо числові значення :

$$\frac{1}{p} = U_{10}(p)(0.1 + 0.1 + p \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}).$$

Спростимо вираз :

$$\frac{1}{p} = U_{10}(p)(0.2 + p \cdot 10^{-4}).$$

Звідси визначимо напругу

$$U_{10}(p) = \frac{1}{p(0.2 + p \cdot 10^{-4})} = \frac{10^4}{p(0.2 \cdot 10^4 + p)} = \frac{10^4}{p(2 \cdot 10^3 + p)}.$$

Одержали аналітичний вираз напруги в ємності такий же самий, як і у попередньому способі.

Приклад 3.8. Для кола (рис. 3.12) операторним методом знайти вираз струму у нерозгалуженій частині кола (на опорі R_1) при замиканні ключа, якщо $E = 200$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 400$ Ом, $C = 5$ мкФ

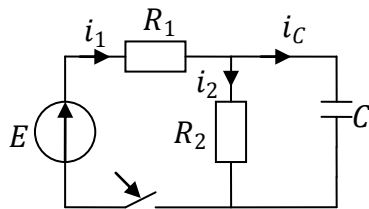


Рисунок 3.12

Розв'язання

Зобразимо схему у операторній формі після комутації (рис. 3.13).

Запишемо вираз для зображення постійної напруги у операторній формі

$$E(p) = \frac{200}{p}.$$

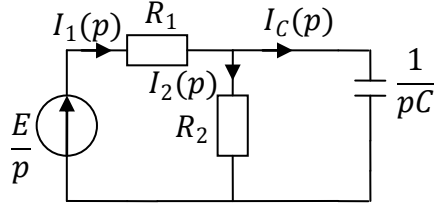


Рисунок 3.13

Знайдемо операторний опір кола після комутації :

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1 R_2 pC + R_1 + R_2}{R_2 pC + 1} = \frac{0.2p + 500}{2 \cdot 10^{-3}p + 1}.$$

Тепер запишемо вираз для струму у нерозгалуженій ділянці кола за допомогою операторного закону Ома :

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{200}{p}}{\frac{0.2p + 500}{2 \cdot 10^{-3}p + 1}} = \frac{0.4p + 200}{p(0.2p + 500)} = \frac{2p + 1000}{p(p + 2500)}.$$

Визначимо оригінал струму двома способами.

У першому способі необхідно вираз для струму $I_1(p)$ подати у вигляді суми двох простих дробів за теоремою розкладання:

$$I_1(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 2500}.$$

Визначимо коефіцієнти при лишках функції у особливих точках :

$$A_1 = \left. \frac{2p + 1000}{p + 2500} \right|_{p=0} = \frac{1000}{2500} = 0.4;$$

$$A_2 = \left. \frac{2p + 1000}{p} \right|_{p=-2500} = \frac{2 \cdot (-2500) + 1000}{-2500} = 1.6.$$

Отже, остаточно одержали вираз для струму :

$$I_1(p) = \frac{0.4}{p} + \frac{1.6}{p + 2500}.$$

За таблицею перетворення Лапласа знаходимо

$$i_1(t) = 0.4 + 1.6e^{-2500t} \text{ А.}$$

Тепер знайдемо цей струм за допомогою лишків функції у особливих точках. Запишемо вираз для струму

$$I_1(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{2p + 1000}{p(p + 2500)}.$$

Знайдемо корені знаменника $F_2(p) = p(p + 2500)$. Для цього знаменник прирівнюємо до нуля $p(p + 2500) = 0$.

Корені знаменника будуть такі : $p_1 = 0, p_2 = -2500$.

Визначаємо похідну знаменника $\dot{F}_2(p) = 2p + 2500$.

За допомогою теореми розкладання струм можна подати у вигляді

$$i(t) = B_1 + B_2.$$

Знайдемо B_1 та B_2 за допомогою розрахунку лишків функції в особливих точках :

$$B_1 = \lim_{p=p_1} I_2(p) = \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{pt} \Big|_{p=0} = \frac{0.4p + 200}{0.4p + 500} e^{pt} \Big|_{p=0} = \frac{200}{500} = 0.4;$$

$$B_2 = \lim_{p=p_2} I_2(p) = \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{pt} \Big|_{p=-2500} = \frac{0.4p + 200}{0.4p + 500} e^{pt} \Big|_{p=-2500} = \frac{0.4 \cdot (-2500) + 200}{0.4 \cdot (-2500) + 500} e^{pt} = \frac{-800}{-500} e^{-2500t} = 1.6e^{-2500t}.$$

Таким чином, одержимо вираз для струму

$$i_1(t) = 0.4 + 1.6e^{-2500t} \text{ А.}$$

Приклад 3.9. Визначити напругу та струм на ємності при замиканні ключа (рис. 3.14) та побудувати їх графіки, якщо схема має такі номінали елементів: $E = 24 \text{ В}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $R_1 = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $C = 3 \text{ мкФ}$.

Розв'язання

Розрахуємо початкові умови для напруги на ємності u_C . На основі другого закону комутації запишемо $u_C(0) = u_C(0^-) = E = 24 \text{ В}$. Зобразимо операторну схему заміщення (рис. 3.15).

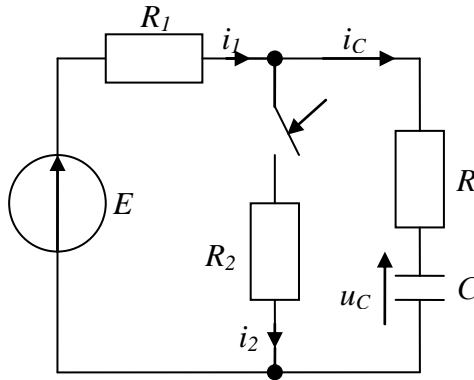


Рисунок 3.14

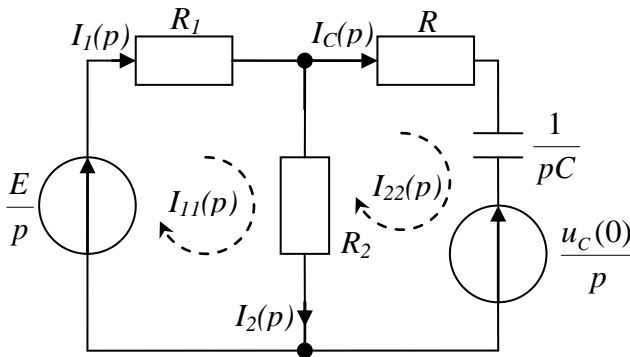


Рисунок 3.15

Для схеми (рис. 3.15) виберемо додатні напрямки проходження контурних струмів у контурах та складемо систему рівнянь за методом контурних струмів :

$$\begin{cases} I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p) \cdot R_2 = \frac{E}{p}, \\ -I_{11}(p) \cdot R_2 + I_{22}(p) \left(R + R_2 + \frac{1}{pC} \right) = -\frac{u_C(0)}{p}. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння відносно контурного струму $I_{22}(p)$.

Запишемо визначники системи для розв'язання її методом

Крамера :

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R + R_2 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 150 & -100 \\ -100 & 120 + \frac{1000000}{3p} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2.8 \cdot 10^4 p + 5 \cdot 10^7}{p},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{E}{p} & -R_2 \\ -\frac{E}{p} & R + R_2 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{24}{p} & -100 \\ -\frac{24}{p} & 120 + \frac{1000000}{3p} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{480p + 8 \cdot 10^6}{p^2}.$$

Тепер визначимо операторний контурний струм

$$I_{22}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{25} \cdot \frac{3p + 50000}{p(7p + 12500)}.$$

Контурний струм $I_{22}(p)$ збігається за напрямком та значенням зі струмом, який проходить через ємність, тому маємо $I_C(p) = I_{22}(p)$.

За теоремою розкладання розкладемо струм $I_C(p)$ на прості дроби

$$I_C(p) = \frac{1}{25} \cdot \frac{3p + 50000}{7p(p + 1786)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 1786}.$$

Визначимо коефіцієнти :

$$A_1 = \left. \frac{1}{25} \cdot \frac{3p + 50000}{7(p + 1786)} \right|_{p=0} = \frac{1}{25} \cdot \frac{50000}{7 \cdot 1786} = 0.16;$$

$$A_2 = \left. \frac{1}{25} \cdot \frac{3p + 50000}{7p} \right|_{p=-1786} = \frac{1}{25} \cdot \frac{3 \cdot (-1786) + 50000}{7 \cdot (-1786)} =$$

$$= -0.143.$$

У результаті запишемо операторний струм

$$I_C(p) = \frac{0.16}{p} - \frac{0.143}{p + 1786}.$$

За таблицею перетворення Лапласа запишемо вираз струму у ємності

$$i_C(t) = 0.16 - 0.143e^{-1786t}.$$

Знайдемо напругу на ємності :

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + u_c(0) =$$

$$= -24 + 53333.3t + 26.689 \cdot e^{-1786t}.$$

Графіки зміни струмів та напруги на ємності побудуємо за допомогою програми Mathcad (рис. 3.16 – рис. 3.17).

Час перехідного процесу

$$t_{\text{ПП}} = 3\tau = \frac{3}{|p|} = \frac{3}{|-1786|} = 1.68 \text{ мкс.}$$

Отже, графіки будуюмо на інтервалі часу від 0 до $t_{\text{ПП}}$.

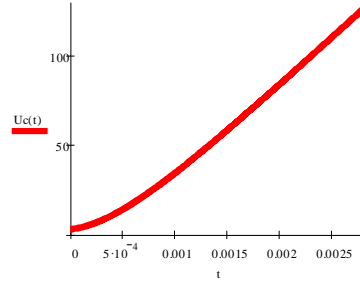
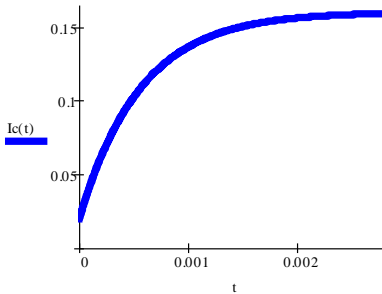


Рисунок 3.16 – Струм у ємності

Рисунок 3.17 – Напруга на ємності

<p>Приклад 3.10. У колі (рис. 3.18) після комутації знайти напругу на ємності для трьох випадків, коли у колі діє постійна напруга $E = 125 \text{ В}$: 1) $R = 250 \text{ Ом}$, $L = 667 \text{ мГн}$, $C = 2 \text{ мкФ}$; 2) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$; 3) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мГн}$, $C = 5 \text{ мкФ}$.</p>	<p style="text-align: center;">Рисунок 3.18</p>
---	---

Розв'язання

Знайдемо операторний вхідний опір кола після комутації :

$$Z(p) = R + \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{LCp^2 + 1}.$$

Вираз для зображення вхідної напруги $E(p) = E/p$.

Знайдемо операторний струм у нерозгалуженій ділянці кола за допомогою операторного закону Ома :

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E/p}{\frac{RLCp^2 + Lp + R}{LCp^2 + 1}} = \frac{E(LCp^2 + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)}.$$

Знайдемо зображення напруги на ємності :

$$\begin{aligned} U_c(p) &= I_1(p) \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(LCp^2 + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)} \cdot \frac{pL}{p^2CL + 1} = \\ &= \frac{E}{RC(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC})} = \frac{E/RC}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \end{aligned}$$

де

$$F_1(p) = \frac{E}{RC}, \quad F_2(p) = p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}.$$

1. Розв'яжемо задачу для першого випадку

Підставимо числові значення у вираз для напруги на ємності :

$$U_c(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{E/RC}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 0.75 \cdot 10^6}.$$

Знайдемо корені знаменника, для цього

$$p^2 + 2000p + 0.75 \cdot 10^6 = 0.$$

Після розв'язання одержуємо такі корені: $p_1 = -500$, $p_2 = -1500$.

Знайдемо похідну знаменника $\dot{F}_2(p) = 2p + 2000$.

Тепер скористаємося теоремою розкладання. Напругу на конденсаторі можна подати у вигляді суми простих дробів : $u_c(t) = A_1 + A_2$.

Коефіцієнти A_1, A_2 обчислимо за допомогою теореми розкладання :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \operatorname{Res}_{p=-500} [U_C(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{p_1 t} \right|_{p=-500} = \\
 &= \left. \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_1 t} \right|_{p=-500} = 250e^{-500t}; \\
 A_2 &= \operatorname{Res}_{p=-1500} [U_C(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{p_2 t} \right|_{p=-1500} = \\
 &= \left. \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_2 t} \right|_{p=-1500} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{-1000} e^{-1500t} = \\
 &= -250e^{-1500t}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, остаточно одержимо вираз напруги на ємності :

$$u_C(t) = A_1 + A_2 = 250e^{-500t} - 250e^{-1500t}.$$

2. Розв'яжемо задачу для другого випадку

Підставимо числові значення у вираз для напруги на ємності :

$$\begin{aligned}
 U_C(p) &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\frac{E}{RC}}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} = \\
 &= \frac{1.25 \cdot 10^6}{p^2 + 1000p + 2.5 \cdot 10^7} = \frac{1.25 \cdot 10^6}{(p + 5000)^2}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо корені знаменника $F_2(p) = (p + 5000)^2$. Для цього прирівняємо його до нуля $(p + 5000)^2 = 0$. Після розв'язання одержуємо такі корені: $p_1 = p_2 = -5000$.

Оскільки корені кратні (порядок кратності 2), оригінал знаходимо за формулою для кратних коренів. Спочатку знайдемо $m_k = m_1 = 2$, $(m_k - 1)! = (2 - 1)! = 1$,

$$\frac{F_2(p)}{(p - p_1)^{m_k}} = \frac{(p + 5000)^2}{(p + 5000)^2} = 1.$$

Тепер скористаємося теоремою розкладання для кратних коренів :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \operatorname{Res}_{p=p_1} [U_C(p)] = \frac{d}{dp} \left[\frac{F_1(p)}{\frac{F_2(p)}{(p-p_1)^{m_k}}} e^{p_1 t} \right] \Bigg|_{p=p_1} = \\
 &= \frac{d}{dp} [F_1(p) e^{p_1 t}] \Bigg|_{p=p_1} = \frac{d}{dp} [1.25 \cdot 10^6 e^{p_1 t}] \Bigg|_{p=-5000} = \\
 &= 1.25 \cdot 10^6 t e^{-5000 t}.
 \end{aligned}$$

3. Розв'яжемо задачу для третього випадку

Підставимо числові значення у вираз для напруги на ємності:

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{E/RC}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6}.$$

Знайдемо корені знаменника $F_2(p) = p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6$. Для цього прирівняємо його до нуля $p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6 = 0$. Після розв'язання одержуємо такі корені:

$$p_1 = -1000 + j2000, \quad p_2 = -1000 - j2000.$$

Знайдемо похідну знаменника $\dot{F}_2(p) = 2p + 2000$.

Тепер скористаємося теоремою розкладання для комплексних коренів:

$$u_C(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t} \right] = 2 \operatorname{Re}[A_k] = 2 \operatorname{Re}[A_1].$$

Коефіцієнти A_1, A_2 обчислимо за допомогою теореми розкладання:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \operatorname{Res}_{p=p_1} [U_C(p)] = \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{p_1 t} \Bigg|_{p=p_1} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_1 t} \Bigg|_{p=p_1} = \\
 &= \frac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot (-1000 + j2000) + 2000} e^{(-100 + j2000)t} \\
 &= -62.5 j e^{(-100 + j2000)t}, \\
 A_2 &= \operatorname{Res}_{p=p_2} [U_C(p)] = \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{p_2 t} \Bigg|_{p=p_2} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_2 t} \Bigg|_{p=p_2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot (-1000 - j2000) + 2000} e^{(-100 - j2000)t} = \\
 &= 62.5j e^{(-100 - j2000)t}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, остаточно одержимо вираз напруги на ємності :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= 2\operatorname{Re}\left[62.5j e^{(-1000 + j2000)t}\right] = 2\operatorname{Re}\left[62.5j e^{-1000t} \frac{e^{j2000t}}{e^{j90}}\right] = \\
 &= 2\operatorname{Re}\left[62.5j e^{-1000t} e^{j(2000t - 90^\circ)}\right] = \\
 &= 125e^{-1000t} \operatorname{Re}[\cos(2000t - 90^\circ) + j \sin(2000t - 90^\circ)] = \\
 &= 125e^{-1000t} \sin(2000t).
 \end{aligned}$$

Приклад 3.11. У колі (рис. 3.21) знайти значення струму у індуктивності $i_L(t)$ операторним методом.

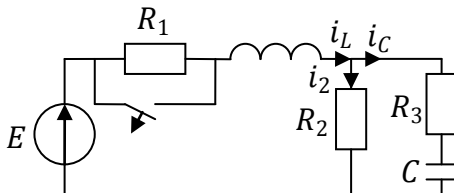


Рисунок 3.21

Розв'язання

Знайдемо початкові умови, тобто значення струму в індуктивності та напруги на ємності до комутації на постійному струмі.

До комутації ключ був замкнутий, тому струм проходив минаючи опір R_1 . Струм у індуктивності до комутації

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_2}.$$

Оскільки гілка, у якій стоїть ємність на постійному струмі буде розірвана, то через неї струм проходити не буде, тому напруга на ємності буде дорівнювати спаданню напруги на другому опорі :

$$u_C(0-) = i_L(0-) \cdot R_2.$$

Із урахуванням законів комутації одержуємо

$$i_L(0) = i_L(0-), u_C(0) = u_C(0-).$$

Зобразимо операторну схему заміщення із урахуванням нульових початкових умов (рис. 3.22).

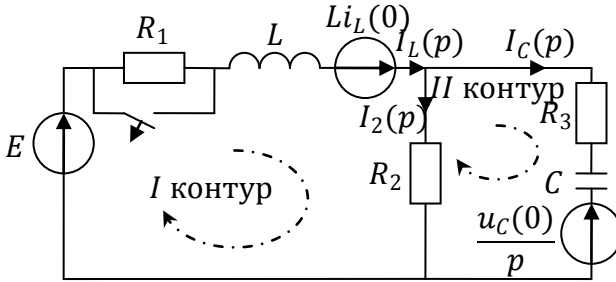


Рисунок 3.22

Складемо операторну систему рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа. Спочатку задамося напрямком струмів у контурах (рис. 3.22).

Запишемо операторну систему рівнянь :

$$\begin{cases} I_L(p)[R_1 + pL] + I_2(p)R_2 = \frac{E}{p} + L \cdot i_L(0), \\ I_C(p) \left[R_3 + \frac{1}{pC} \right] - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}, \\ I_L(p) = I_2(p) + I_C(p). \end{cases}$$

Далі розв'язуємо отриману систему. Розв'язувати її можна або методом Крамера, або безпосередньо. Покажемо розв'язання для двох методів.

Визначимо значення для струму у котушці індуктивності безпосередньо.

Виразимо із 3-го рівняння $I_C(p) = I_L(p) - I_2(p)$.

Підставимо $I_C(p)$ у друге рівняння системи :

$$[I_L(p) - I_2(p)] \left(R_3 + \frac{1}{pC} \right) - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}.$$

Виразимо із отриманого рівняння $I_2(p)$:

$$I_2(p) = \frac{I_L(p) \left(R_3 + \frac{1}{pC} \right) + \frac{u_c(0)}{p}}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}}.$$

Підставимо $I_2(p)$ у 1-ше рівняння системи :

$$I_L(p)[R_1 + pL] + \frac{I_L(p) \left(R_3 + \frac{1}{pC} \right) + \frac{u_c(0)}{p}}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}} R_2 = \frac{E}{p} + Li_L(0).$$

Перетворимо отриманий вираз :

$$\begin{aligned} I_L(p)[R_1 + pL] + \frac{\left(R_3 + \frac{1}{pC} \right) \cdot R_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}} &= \\ = \frac{E}{p} + L \cdot i_L(0) - \frac{u_c(0)}{p} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}}. \end{aligned}$$

Після спрощення одержуємо

$$I_L(p) = \frac{E \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) + L \cdot i_L(0)p \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) - u_c(0)R_2}{p[(R_1 + pL) \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) + (R_3 + \frac{1}{pC})R_2]}.$$

Після спрощення одержали вираз для $I_L(p)$ як відношення двох поліномів :

$$I_L(p) = \frac{p^2 a_1 + pb_1 + d_1}{p(p^2 a_2 + pb_2 + d_2)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Оскільки степінь полінома знаменника більше степеня полінома чисельника, то ми можемо використати у цьому випадку теорему розкладання. Знайдемо полюси у виразі для струму в котушці індуктивності. Для цього прирівняємо до нуля знаменник і знайдемо корені отриманого квадратного рівняння. Нехай ці корені будуть $p_1 = 0, p_2, p_3$:

$$I_L(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3}.$$

Припустимо, що корені дійсні та різні, тоді розрахунок лишків у полюсах можна здійснити у такий спосіб :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{Res}_{p=p_1} [I_L(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{p_1 t} \right|_{p=p_1} = \\
&= \left. \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{3p^2 a_2 + p b_2 + d_2} e^{p_1 t} \right|_{p=p_1} ; \\
A_2 &= \operatorname{Res}_{p=p_2} [I_L(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{p_2 t} \right|_{p=p_2} = \\
&= \left. \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{3p^2 a_2 + p b_2 + d_2} e^{p_2 t} \right|_{p=p_2} ; \\
A_3 &= \operatorname{Res}_{p=p_3} [I_L(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} e^{p_3 t} \right|_{p=p_3} = \\
&= \left. \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{3p^2 a_2 + p b_2 + d_2} e^{p_3 t} \right|_{p=p_3} .
\end{aligned}$$

Після одержання числових значень коефіцієнтів на підставі перетворення Лапласа від зображення переходимо до оригіналу

$$i_L(t) = A_1 + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

Скористаємося результатами попереднього прикладу та запишемо систему у матричній формі

$$\begin{bmatrix} I_L(p) \\ I_2(p) \\ I_C(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 + pL & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{p} + L \cdot i_L(0) \\ -\frac{u_C(0)}{p} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Запишемо визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + pL & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Запишемо інші визначники для одержання виразів для шуканих величин за методом Крамера :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{E}{p} + L \cdot i_L(0) & R_2 & 0 \\ -\frac{u_C(0)}{p} & -R_2 & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} R_1 + pL & \frac{E}{p} + L \cdot i_L(0) & 0 \\ 0 & -\frac{u_C(0)}{p} & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_1 + pL & R_2 & \frac{E}{p} + L \cdot i_L(0) \\ 0 & -R_2 & -\frac{u_C(0)}{p} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Запишемо значення шуканих величин

$$I_L(\mathbf{p}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_2(\mathbf{p}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad I_C(\mathbf{p}) = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Всі інші дії та обчислення здійснюються аналогічно, як записано вище.

Приклад 3.12. Розглянемо попередню схему із приклада 3.6 (рис. 3.22) при дії гармонічного сигналу та особливості її розрахунку операторним методом. Дія змінюється за законом $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Розв'язання

Для розрахунку будемо використовувати операторну схему заміщення із попереднього прикладу. Тільки джерело сигналу буде гармонічне.

Подано гармонічну дію у операторній формі за таблицею перетворень Лапласа :

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow E(p) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

Запишемо вираз для дії із тригонометричної форми запису у алгебраїчну :

$$e(t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{E} = a_E + jb_E.$$

Знайдемо закон зміни струму в індуктивності та напруги на ємності до комутації. Для цього знаходимо значення всіх струмів у гілках схеми за допомогою операторних законів Кірхгофа :

$$\begin{cases} i_L [R_1 + j\omega L] + i_2 R_2 = \dot{E}, \\ i_C \left[R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right] - i_2 R_2 = 0, \\ i_L = i_2 + i_C. \end{cases}$$

Виразимо із 3-го рівняння системи $i_C = i_L - i_2$.

Підставимо i_C у друге рівняння систем :

$$(i_L - i_2) \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) - i_2 R_2 = 0.$$

Виразимо із даного рівняння i_2

$$i_2 = \frac{1}{R_2 + R_3} i_L \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) = 0.$$

Підставимо i_2 у 1-ше рівняння системи

$$i_L (R_1 + j\omega L) + \left[\frac{1}{R_2 + R_3} i_L \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) \right] R_2 = \dot{E}.$$

Виразимо i_L із отриманого рівняння :

$$i_L = \frac{\dot{E}}{(R_1 + j\omega L) + \left[\frac{1}{R_2 + R_3} i_L \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) \right] R_2}.$$

Після підстановки числових значень струму у індуктивності $\dot{I}_L = a_L + jb_L$.

Тепер здійснюємо переведення алгебраїчної форми запису комплексного числа у показову форму запису, а потім у тригонометричну і тоді одержимо

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\varphi} \rightarrow I_L \sin(\omega t + \varphi_i),$$

де I_L – діюче значення струму індуктивності; φ_i – фаза струму індуктивності.

Струм на ємності із отриманої системи визначаємо додавши 1-ше та 2-ге рівняння системи :

$$i_L(R_1 + j\omega L) + i_2 R_2 + i_C \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) - i_1 R_2 = \dot{E}.$$

Після спрощення одержимо таке рівняння :

$$i_L(R_1 + j\omega L) + i_C \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{E}.$$

Виражаємо із одержаного рівняння струм i_C

$$i_C = \frac{\dot{E} - i_L(R_1 + j\omega L)}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Одержуємо комплексне число $\dot{I}_C = a_C + jb_C$.

Напругу на ємності

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot Z_C = \frac{\dot{I}_C}{j\omega C} = U_C e^{j\varphi_u},$$

що у часовій області відповідає $u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \varphi_u)$, де U_C – діюче значення напруги на ємності, φ_u – фаза напруги на ємності.

Запишемо значення струму в індуктивності та напруги на ємності у нульовий момент часу

$$\begin{aligned} i_L(0) &= I_L \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_i) = I_{L,0}, \\ u_C(0) &= U_C \sin(\omega t + \varphi_u) = U_{C,0}. \end{aligned}$$

Тепер складаємо систему рівнянь на підставі операторних законів Кірхгофа для нашої схеми :

$$\begin{cases} I_L(p)[R_1 + pL] + I_2(p)R_2 = E(p) + L \cdot i_L(0), \\ I_C(p) \left[R_3 + \frac{1}{pC} \right] - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}, \\ I_L(p) = I_2(p) + I_C(p). \end{cases}$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь одним із способів, зазначених у попередніх двох прикладах із урахуванням того, що

$$E(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

3.8. Питання для самоперевірки

1. Що лежить в основі операторного методу аналізу перехідних процесів?
2. У чому перевага операторного методу над класичним?
3. Що таке пряме та зворотнє перетворення Лапласа?
4. Які зображуються ємності та індуктивності на операторних схемах?
5. Перерахуйте основні властивості перетворень Лапласа.
6. Дати визначення та доведіть властивості лінійності.
7. Які особливості диференціювання та інтегрування оригіналу?
8. Сформулюйте та доведіть теорему подібності.
9. Сформулюйте та доведіть теорему запізнення.
10. Сформулюйте та доведіть теорему зсуву.
11. Який фізичний зміст згортки двох функцій?
12. Сформулюйте та доведіть теорему згортки.
13. Які особливості диференціювання і інтегрування зображення?
14. Сформулювати теорему про згортку зображень.
15. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.
16. Які основні етапи розв'язання задач операторним методом?
17. Які особливості операторних схем заміщення?
18. Як скласти та розв'язати операторні рівняння?
19. Як визначити оригінал, якщо є зображення?
20. Як знаходити оригінал, якщо корені знаменника дійсні, різні?
21. Як знаходити оригінал, якщо корені знаменника дійсні, рівні?
22. Як знаходити оригінал, якщо корені знаменника комплексно-спряжені?
23. Які особливості розрахунку схеми операторним методом при гармонічній дії?

3.9. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях

Задача 3.1. Для схем (рис. 3.24) знайти всі струми та напруги у операторній формі, якщо на вхід діє постійна напруга.

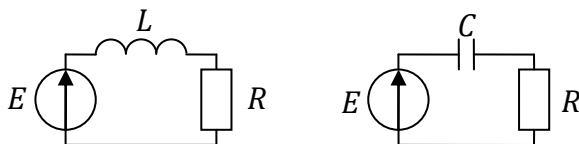


Рисунок 3.24

Задача 3.2. Знайти оригінал струму, якщо операторний струм схеми заданий у вигляді відношення двох поліномів:

- 1) $I_L(p) = \frac{3p+4}{p^2+15p+56}$; 2) $I_L(p) = \frac{p-3}{p^2+4}$; 3) $I_L(p) = \frac{2p^3+1}{p^3+p^2}$;
 4) $I_L(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$.

Задача 3.3. Знайти всі струми та напруги у колах (рис. 3.25). Числові значення елементів кола: $E=10$ В, $R_1=100$ Ом, $R_2=1$ кОм, $L=10$ мГ, $C=0.5$ мкФ.

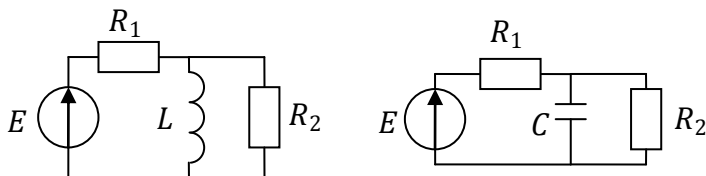


Рисунок 3.25

Задача 3.4. Для кола (рис. 3.26) операторним методом визначити струм через ємність та другий опір. Струм джерела струму змінюється за законом $j(t) = 2e^{-0.5t}1(t)$. Номінали елементів кола $C = 1$ нФ, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм.

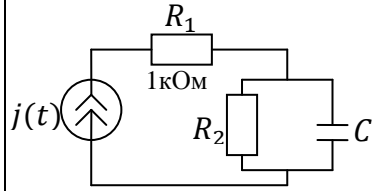


Рисунок 3.26

Задача 3.5. Для кола (рис. 3.27) операторним методом визначити струм та напругу через індуктивність. Напруга джерела напруги змінюється за законом $E(t) = 2e^{-2t}1(t)$. Числові значення елементів кола: $L = 0.5$ мГн, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм.

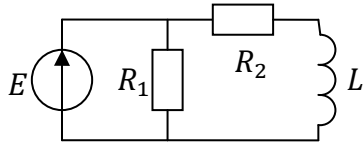


Рисунок 3.27

Задача 3.6. Для кола (рис. 3.28) операторним методом визначити струм та напругу через ємність. Числові значення елементів кола: $E = 2$ В, $C = 0.25$ нФ, $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 4$ кОм.

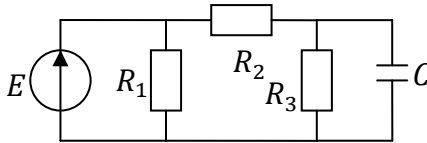


Рисунок 3.28

Задача 3.7. У колі (рис. 3.29) знайти вираз для струму та напругу на котушці індуктивності операторним методом. Числові значення елементів кола: $E = 1$ В, $C = 1$ нФ, $L = 1$ мГн, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм.

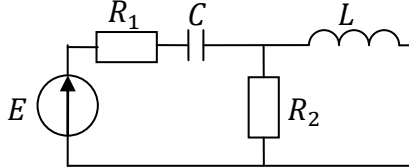


Рисунок 3.29

Задача 3.8. Для кола (рис. 3.30) визначити напругу та струм на індуктивності операторним методом. Числові значення елементів: $L = 6$ мГн, $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 2$ кОм. Струм джерела струму змінюється за законом $j(t) = 2e^{-2t}$.

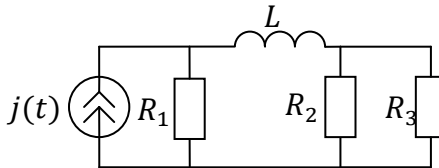


Рисунок 3.30

Задача 3.9. Знайти зображення гармонічної дії, якщо на вхід лінійного кола діє гармонічна напруга у вигляді функції:
 1) $e(t) = 100 \sin(220t + 50^\circ)$; 2) $e(t) = 200 \sin(320t + 40^\circ)$;
 3) $e(t) = 80 \sin(100t + 60^\circ)$.

Задача 3.10. Для задачі 3.1 знайти операторні струми та напруги у колі, якщо на вхід діє гармонічна напруга вигляду:
 1) $e(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi^\circ)$; 2) $e(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi^\circ)$.

Задача 3.11. Для задачі 3.3 знайти операторні струми та напруги, якщо на вхід діє гармонічна напруга вигляду:
 1) $e(t) = 115 \sin(85t + 45^\circ)$; 2) $e(t) = 103 \sin(95t + 30^\circ)$.

Задача 3.12. У колі (рис. 3.31) операторним методом розрахувати напругу, струм на ємності та струм на першому опорі. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі.

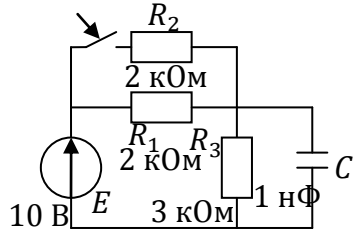


Рисунок 3.31

Задача 3.13. У колі (рис. 3.32) операторним методом після комутації визначити напругу, струм на індуктивності та струм на першому опорі. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі.

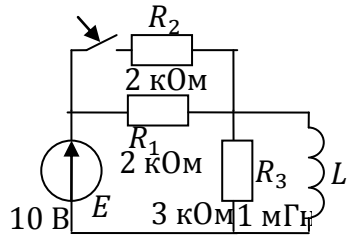


Рисунок 3.32

Задача 3.14. У колі (рис. 3.33) знайти значення струму в опорі R_1 , струм та напругу в індуктивності у момент комутації. Побудувати графіки цих величин. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 8 \text{ кОм}$, $R_2 = 8 \text{ кОм}$, $R_3 = 4 \text{ кОм}$, $C = 2 \text{ нФ}$, $E = 8 \text{ В}$.

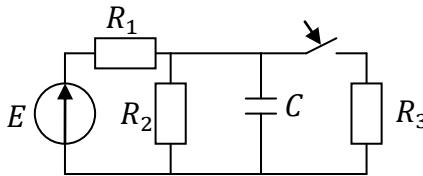


Рисунок 3.33

Задача 3.15. У колі (рис. 3.34) знайти струм та напругу на індуктивності у момент комутації. Побудувати графіки цих величин до та після комутації. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $L = 0.1 \text{ мГн}$, $R_4 = 100 \text{ Ом}$, $E = 300 \text{ В}$.

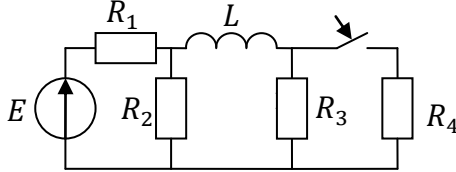


Рисунок 3.34

Задача 3.16. Для кола (рис. 3.35) після комутації одержати операторним методом вирази напруги та струму на ємності. Побудувати графіки шуканих величин до та після комутації. Параметри елементів кола: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $E = 100 \text{ В}$.

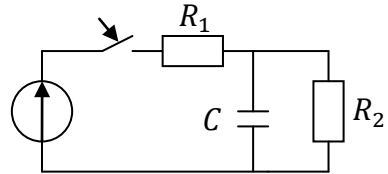


Рисунок 3.35

Задача 3.17. Для кола (рис. 3.37) зобразити еквівалентну схему заміщення після комутації та розрахувати нульові початкові умови. Числові значення елементів кола: $L = 6 \text{ мГн}$, $C = 4 \text{ нФ}$, $E = 20 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 20 \text{ кОм}$, $R_3 = 20 \text{ кОм}$, $R_4 = 10 \text{ кОм}$.

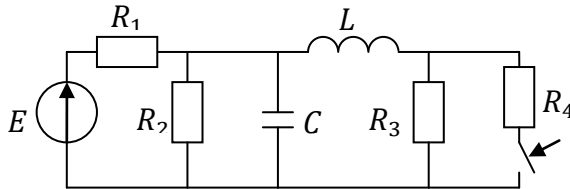


Рисунок 3.37

Задача 3.18. У колі (рис. 3.38) знайти вираз для струму та напруги на котушці індуктивності операторним методом у загальному вигляді.

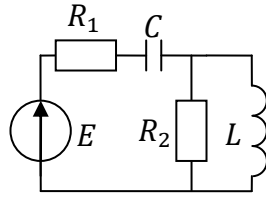


Рисунок 3.38

Задача 3.19. У колі (рис. 3.39) після комутації знайти струм та напругу на індуктивності та ємності операторним методом, якщо $E = 10 \text{ В}$ та коло має такі числові значення елементів: 1) $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $R_3 = 500 \text{ Ом}$, $L = 2 \text{ мГ}$, $C = 3 \text{ мкФ}$; 2) $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 500 \text{ Ом}$, $L = 20 \text{ мГ}$, $C = 30 \text{ нФ}$.

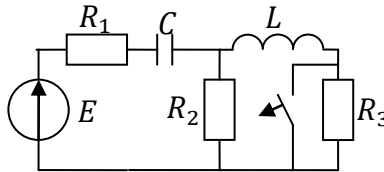


Рисунок 3.39

Задача 3.20. Знайти всі струми у колі операторним методом і побудувати їх графіки зміни у часі (рис. 3.40) після комутації, якщо відомі номінали елементів схеми: $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $L = 90 \text{ мГ}$, $C = 0.9 \text{ мФ}$, $u(t) = 180 \cdot \sin(300t + 45^\circ) \text{ В}$.

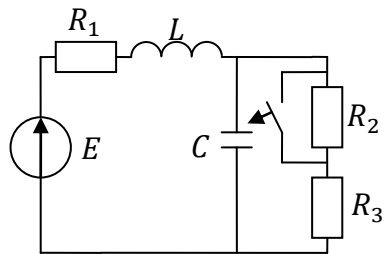


Рисунок 3.40

Задача 3.21. У колі (рис. 3.41) після комутації розрахувати всі струми та напруги при вхідній напрузі $E = 10 \text{ В}$ із числовими значеннями елементів:

- 1) $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГ}$, $C = 1 \text{ мкФ}$;
- 2) $R_1 = 600 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$, $L = 2 \text{ мкГ}$, $C = 5 \text{ нФ}$;
- 3) $R_1 = 1.5 \text{ кОм}$, $R_2 = 300 \text{ Ом}$, $L = 70 \text{ мГ}$, $C = 0.1 \text{ мкФ}$;
- 4) $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 700 \text{ Ом}$, $L = 70 \text{ нГ}$, $C = 1 \text{ пф}$.

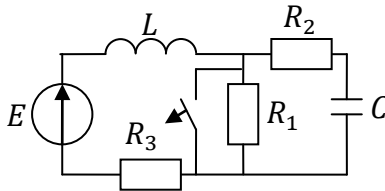


Рисунок 3.41

Задача 3.22. Для задачі 3.21 розрахувати всі струми у колі операторним методом і побудувати графіки зміни їх у часі, якщо ключ замикається.

Задача 3.23. У колі (рис. 3.42) після комутації визначити закон зміни струмів у колі. Числові значення елементів кола: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.1 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.4 \text{ Гн}$, $E = 120 \text{ В}$.

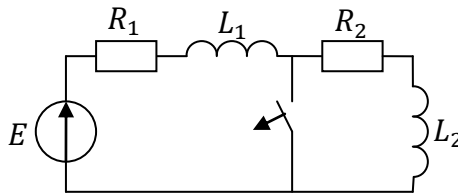


Рисунок 3.42

Задача 3.24. Розрахувати всі струми у схемі (рис. 3.43) операторним методом, якщо відомо:

1) $E = 10\text{ В}$, $R_1 = 770\ \text{Ом}$, $R_2 = 1\ \text{кОм}$, $R_3 = 1\ \text{кОм}$, $L = 65\ \text{мГ}$, $C = 1.8\ \text{мкФ}$;

2) $E = 10\ \text{В}$, $R_1 = 280\ \text{Ом}$, $R_2 = 1.5\ \text{кОм}$, $R_3 = 900\ \text{Ом}$, $L = 45\ \text{мГ}$, $C = 7\ \text{мкФ}$;

3) $E = 10 \cos(90t + 45^\circ)\ \text{В}$, $R_1 = 100\ \text{Ом}$, $R_2 = 2\ \text{кОм}$, $R_3 = 700\ \text{Ом}$, $L = 95\ \text{мГ}$, $C = 0.2\ \text{мкФ}$;

4) $E = 12 \cos(90t + 45^\circ)\ \text{В}$, $R_1 = 100\ \text{Ом}$, $R_2 = 2\ \text{кОм}$, $R_3 = 700\ \text{Ом}$, $L = 95\ \text{мГ}$, $C = 0.2\ \text{мкФ}$.

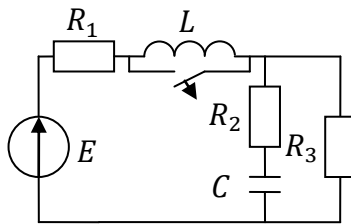


Рисунок 3.43

Задача 3.25. У колі (рис. 3.44) після комутації визначити закон зміни струму через опір. Числові значення елементів кола такі: $R = 400\ \text{Ом}$, $C_1 = 5\ \text{мкФ}$, $C_2 = 5\ \text{мкФ}$, $E = 200\ \text{В}$.

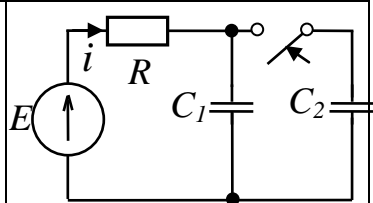


Рисунок 3.44

Задача 3.26. У колі (рис. 3.45) після комутації визначити закон зміни струмів в індуктивностях. Числові значення елементів кола: $R = 2\ \text{кОм}$, $L_1 = 2\ \text{мГн}$, $L_2 = 4\ \text{мГн}$, $E = 10\ \text{В}$.

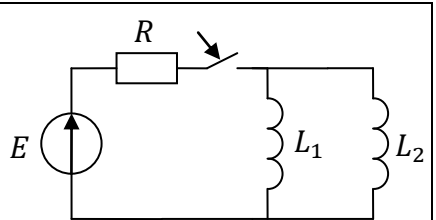


Рисунок 3.45

Задача 3.27. У колі (рис. 3.46) після комутації визначити закон зміни напруги на ємностях. Числові значення елементів кола такі: $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $C_1 = 1 \text{ нФ}$, $C_2 = 1 \text{ нФ}$, $E = 10 \text{ В}$.

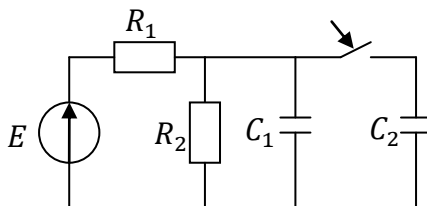


Рисунок 3.47

4. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСОВ ЧАСОВИМ МЕТОДОМ

4.1. Передавальна функція

У загальному випадку передавальна функція визначається як відношення реакції кола на дію або відношення амплітуди вихідного сигналу до амплітуди вхідного сигналу.

Передавальна функція може бути як за напругою, так і за струмом. Усе залежить від того, який сигнал використовується: або струм, або напруга :

$$K_U(p) = \frac{U_{\text{ВИХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)}, \quad K_I(p) = \frac{I_{\text{ВИХ}}(p)}{I_{\text{ВХ}}(p)}.$$

При знаходженні передавальної функції можна користуватися для розрахунку простими рівняннями Кірхгофа для знаходження вихідного сигналу (струму або напруги) або використовувати матрицю опорів або провідностей для кола, що складені за допомогою методу контурних струмів та методу вузлових напруг відповідно :

$$K = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$$

Для певного класу схем (рис. 4.1) передавальну функцію за напругою можна записати відразу. Передавальна функція за напругою такого кола

$$K_U(p) = \frac{U_{\text{ВИХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{I(p)Z_2(p)}{I(p)(Z_1(p) + Z_2(p))} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)},$$

де $Z_1(p)$ та $Z_2(p)$ – операторні опори кола.

Вираз коефіцієнта передачі за напругою можна записати і через провідності

$$K_U(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{Y_2(p)}{Y_1(p) + Y_2(p)}, \quad (4.1)$$

де $Y_1(p)$ та $Y_2(p)$ – операторні провідності кола.

Характер комплексних опорів $Z_1(p)$ та $Z_2(p)$ залежить від елементів схеми. Формула (4.1) так само справедлива і для схем, які перетворюють до вигляду схем, зображених на рис. 4.2.

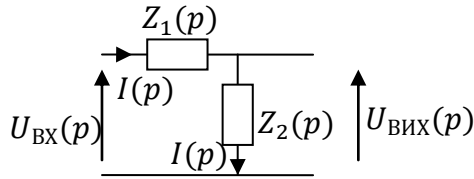


Рисунок 4.1

4.2. Імпульсна характеристика

Імпульсною характеристикою називається реакція кола (напряга або струму) на виході при дії на вході кола дельта-функції $\delta(t)$ (струму або напруги).

Розмірність $g(t)$ дорівнює розмірності реакції, поділеної на розмірність дії (рис. 4.3).

Якщо не враховувати розмірність, то імпульсною характеристикою можна вважати реакцію кола на функцію Дірака.

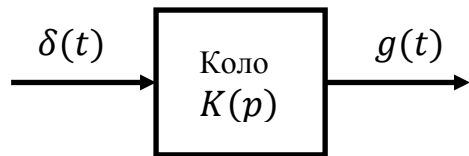


Рисунок 4.3

Імпульсна характеристика описує вільний процес. Інакше кажучи, якщо моментально збудили коло нескінченно вузьким імпульсом із нескінченною амплітудою та відразу дію забрати, то коло повинне повернутися у вихідний стан (якщо воно стійке). Цей процес і буде за формою збігатися з імпульсною характеристикою $g(t)$. Щоб побачити даний цей на осцилографі, необхідно на вхід лінійного кола подати періодичну послідовність імпульсів тривалістю τ із періодом T , щоб $\tau \ll t_{пп}$ та $T \gg t_{пп}$, $t_{пп}$ – час згасання вільної складової перехідного процесу, або час перехідного процесу.

Оскільки зображення за Лапласом $\delta(p) = 1$, то реакція в операторному вигляді $\delta(p)$ буде чисельно дорівнює передавальній функції $K(p)$:

$$G(p) = \delta(p)K(p) = K(p). \quad (4.2)$$

Оригінал імпульсної характеристики $g(p)$ знаходимо за допомогою зворотного перетворення Лапласа :

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\{G(p)\}. \quad (4.3)$$

Таким чином, імпульсну характеристику знаходимо або зворотним перетворенням Лапласа від схемної функції, або диференціюванням перехідної характеристики.

4.3. Перехідна характеристика

Перехідною характеристикою називається реакція кола (струм або напруга) на виході, якщо на вхід діє одиничний східчастий імпульс $1(t)$ (струму або напруги) у вигляді функції Хевісайда (рис. 4.4).

Перехідна характеристика $h(t)$ чисельно дорівнює реакції кола на дію у вигляді функції Хевісайда, а її розмірність – це відношення розмірності реакції до розмірності дії.

При підключенні кола до джерела одиничної напруги перехідна характеристика струму називається перехідною провідністю, а при підключенні кола до джерела одиничного струму перехідна характеристика напруги називається перехідним опором.

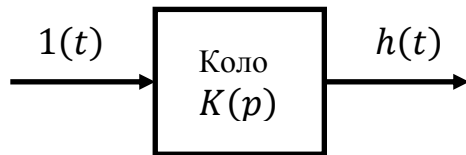


Рисунок 4.4

Якщо на вхід кола подати одиничний східчастий імпульс (струму або напруги), то відбувається перехід від одного усталеного режиму до іншого.

Перехідну характеристику можна визначити операторним методом із урахуванням зображення функції Хевісайда :

$$1(t) \rightarrow \frac{1}{p}.$$

$$H(p) = K(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K(p)}{p}. \quad (4.4)$$

Для знаходження оригіналу $h(t)$ необхідно виконати зворотне перетворення Лапласа

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = L^{-1} \{H(p)\}. \quad (4.5)$$

Отже, перехідна характеристика може бути знайдена як зворотне перетворення Лапласа від передавальної функції, діленої на комплексну змінну p .

Розмірність $h(t)$ зазначаємо для того, щоб при знаходженні реакції кола на дію довільної форми одержували необхідну розмірність.

Перехідну характеристику можна також одержати класичним методом. Для цього необхідно розрахувати перехідний процес щодо шуканої реакції при підключенні кола на постійну дію.

Для одержання стійкого зображення перехідної характеристики на осцилографі необхідно подати на вхід кола періодичну послідовність прямокутних імпульсів із періодом, що набагато перевищує час тривалості перехідного процесу. Це необхідно для того, щоб перехідний процес реакції кола на зникнення імпульсу закінчився до надходження наступного імпульсу. Тривалість імпульсу так само повинна перевищувати час, необхідний для закінчення перехідного процесу. Тоді реакція на передній фронт імпульсу за формою збігається із перехідною характеристикою.

4.4. Знаходження реакції кола на дію операторним методом

Зв'язок імпульсної та перехідної характеристик визначається виразами

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t), \quad h(t) = \int_0^t g(t) dt. \quad (4.6)$$

Постановка завдання полягає у тому, що є коло, на вхід якого подали вхідний сигнал довільної форми та необхідно знайти реакцію кола на цей сигнал операторним методом (рис. 4.5).

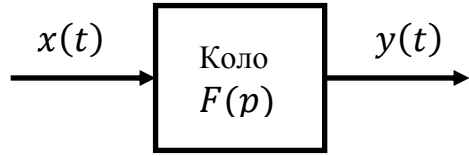


Рисунок 4.5

Послідовність розрахунків :

1. Знаходимо схемну функцію $F(p)$. У нашому випадку схемною функцією буде передавальна характеристика $K(p)$.
2. Знаходження зображення дії $x(t) \rightarrow X(p)$.
3. Знаходження реакції.

Коефіцієнт передачі визначається виразом

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}.$$

Звідси визначимо напругу на виході :

$$U_{\text{вих}}(p) = K(p) \cdot U_{\text{вх}}(p) = G(p) \cdot U_{\text{вх}}(p).$$

За теоремою про згортку

$$u_{\text{вих}}(t) = g(t) * u_{\text{вх}}(t).$$

Коефіцієнт передачі через перехідну характеристику

$$K(p) = pH(p).$$

Звідси визначимо напругу на виході :

$$U_{\text{вих}}(p) = K(p) \cdot U_{\text{вх}}(p) = pH(p) \cdot U_{\text{вх}}(p).$$

За теоремою про згортку

$$u_{\text{вих}}(t) = \dot{h}(t) * u_{\text{вх}}(t).$$

Визначимо реакцію на виході у загальному випадку :

$$Y(p) = X(p)K(p). \tag{4.7}$$

4. Знаходження оригіналу за допомогою зворотного перетворення Лапласа :

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}. \tag{4.8}$$

4.5. Знаходження реакції кола на дію часовим методом

Часовий метод знаходження реакції кола на вхідний сигнал ще називають інтегралом Дюамеля, або інтегралом суперпозиції, що ґрунтується на згортці двох функцій.

Покажемо фізичний зміст згортки двох функцій

$$\begin{aligned}
 f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

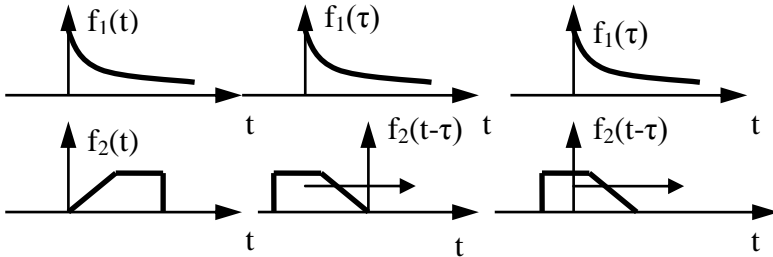


Рисунок 4.6 - Геометрична інтерпретація згортки двох функцій

Фізично згортка двох функцій означає, що ми беремо одну із двох функцій (можна будь-яку) і перевертаємо (відображаємо) її щодо осі ординат (вона виявиться у від'ємній області) і потім пересуваємо цю функцію праворуч (рис. 4.6). Як тільки функція $f_2(t - \tau)$ почне перетинати нуль, вона почне перекриватися із функцією $f_1(\tau)$. Оскільки інтеграл від функції – це площа під графіком цієї функції, то згортка двох функцій – це площа області перетину функцій.

Знайдемо реакцію кола на довільну дію за допомогою імпульсної та перехідної характеристик із урахуванням виразу (4.6).

Запишемо реакцію кола через імпульсну та перехідну характеристики :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \dot{h}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot \dot{h}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Диференціювати можна і вхідну функцію, тому що в операторному вигляді функція реакції має вигляд

$$Y(p) = pX(p) \cdot \frac{K(p)}{p} \rightarrow \dot{x}(t) \cdot h(t).$$

Інтеграл згортки можна записати по-іншому :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Припустимо, що є лінійне коло із передавальною функцією $K(p)$, імпульсною $g(t)$ та перехідною $h(t)$ характеристиками (рис. 4.7).

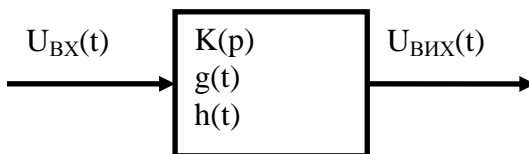


Рисунок 4.7

Запишемо вихідний сигнал за допомогою інтеграла Дюамеля :

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = \begin{cases} \int_0^t u_{\text{ВХ}}(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t-\tau)g(\tau)d\tau, \\ \int_0^t \dot{u}_{\text{ВХ}}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t \dot{u}_{\text{ВХ}}(t-\tau)h(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (4.12)$$

Але при обчисленні реакції кола на дію, закон зміни якого починається не з нуля, а із якогось рівня U_0 (рис. 4.8), виникають деякі проблеми при інтегруванні. Справа у тому, що похідна від вхідного сигналу буде мати стрибок із ваговим коефіцієнтом U_0 :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВХ}}(t) &= U_0\delta(t) + \dot{u}_{\text{ВХ}}(t) = \\ &= u_{\text{ВХ}}(0)\delta(t) + \dot{u}_{\text{ВХ}}(t). \end{aligned}$$

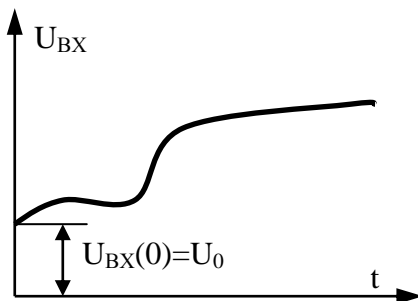


Рисунок 4.8

Запишемо реакцію на вхідну напругу $U_{\text{ВХ}}$ через інтеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} U_{\text{ВИХ}}(t) &= \int_0^t [U_{\text{ВХ}}(0)\delta(\tau) + U'_{\text{ВХ}}(\tau)]h(t-\tau)d\tau = U_{\text{ВХ}}(0) \int_0^t \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= U_0h(t) + \int_0^t U'_{\text{ВХ}}(\tau)h(t-\tau)d\tau = U_0h(t) + \int_0^t U'_{\text{ВХ}}(t-\tau)h(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.1 \quad 3)$$

Аналогічно можемо записати і для імпульсної характеристики:

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = \int_0^t g(\tau) u_{\text{ВХ}}(t-\tau)d\tau.$$

У цьому може виникнути потреба, оскільки імпульсна характеристика так само може містити функцію $\delta(t)$, оскільки

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

У цьому випадку $g(t) = h(0)\delta(t) + \dot{h}(t)$ містить у собі δ -функцію. Імпульсна характеристика містить δ -функцію, якщо перехідна характеристика починається не з нуля (рис. 4.9) або степінь полінома чисельника й знаменника схемної функції однакові при розрахунку однієї й тієї ж перехідної характеристики.

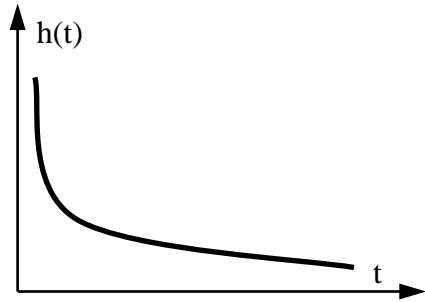


Рисунок 4.9

Запишемо для цього випадку інтеграл Дюамеля :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t - \tau) [h(0)\delta(\tau) + \dot{h}(\tau)] d\tau = \\ &= h(0) \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t - \tau) \delta(\tau) d\tau + \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t - \tau) \dot{h}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Остаточно одержимо :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= h(0)u_{\text{ВХ}}(t) + \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t - \tau) \dot{h}(\tau) d\tau = \\ &= h(0)u_{\text{ВХ}}(t) + \int_0^t u_{\text{ВХ}}(\tau) \dot{h}(t - \tau) d\tau; \\ u_{\text{ВИХ}}(t) &= h(0)u_{\text{ВХ}}(t) + \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t - \tau) g(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$= h(0)u_{\text{BX}}(t) + \int_0^t u_{\text{BX}}(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Розглянутий метод знаходження реакції кола на дію довільної форми ще називають інтегралом суперпозиції, тому що до цього методу можна дійти за допомогою граничного переходу без будь-яких операторних функцій.

Відповідно до нижченаведеного графіка (рис. 4.10)

$$u_{\text{BX}} \approx u(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_K \cdot 1(1 - k\Delta\tau).$$

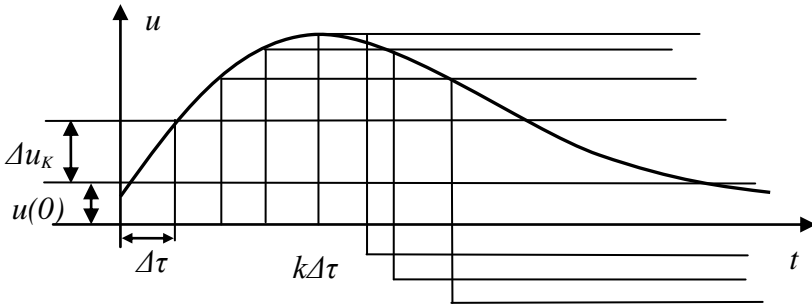


Рисунок 4.10

Розглянемо елемент графіка на окремій ділянці більш докладно (рис. 4.11).

Із графіка (рис. 4.11) визначимо :

$$\frac{\Delta u_K}{\Delta\tau} \approx \dot{u}_{\text{BX}}(k \cdot \Delta\tau),$$

$$\Delta u_K = \dot{u}_{\text{BX}}(k \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau.$$

Таким чином, вхідна напруга буде мати вигляд

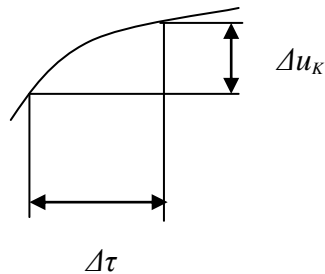


Рисунок 4.11

$$u_{\text{BX}} \approx u(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta \dot{u}_K(k\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot 1(t - k\Delta\tau).$$

Реакцію на вхідний сигнал, поданий таким виразом, можна знайти як суму реакцій на кожен вплив окремо на підставі принципу суперпозиції. Реакція на кожен доданок є не що інше як перехідна характеристика із відповідним ваговим коефіцієнтом і до того ж зсунута на величину $k\Delta\tau$. Ваговий коефіцієнт – це висота відповідної сходинки.

Таким чином, вихідний сигнал запишеться

$$u_{\text{вих}}(t) \approx u(0) \cdot h(t) + \sum_{k=1}^n h(t - k\Delta\tau) \cdot \Delta u_{\text{вх}}(k\Delta\tau) \cdot \Delta\tau.$$

Якщо здійснити граничний перехід (тобто $\Delta\tau \rightarrow 0$), то $k\Delta\tau \rightarrow \tau$, $\Delta\tau \rightarrow d\tau$, тоді остаточно одержуємо

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}(0) \cdot h(t) + \int_0^t \Delta u_{\text{вх}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

При розрахунку реакції форму інтеграла Дюамеля вибирають виходячи із того, що легше розрахувати похідну вхідного сигналу або перехідної характеристики.

У деякій літературі перехідну характеристику $h(t)$, що чисельно дорівнює струму, називають перехідною провідністю та позначають як $g(t)$, а перехідну функцію, що чисельно дорівнює напрузі, називають перехідною функцією напруги. Але варто пам'ятати, що обидві ці функції є часовими характеристиками і так само називаються перехідними характеристиками та позначаються $h(t)$.

Так само не слід плутати перехідну провідність із імпульсною характеристикою. При використанні у розрахунку однієї із цих характеристик необхідно чітко зазначити, яку із них використовують.

Розглянемо вхідну дію у вигляді складної функції (рис. 4.12).

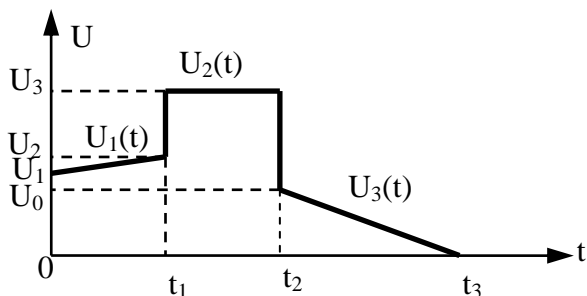


Рисунок 4.12

Скористаємося для розрахунку інтегралом Дюамеля.

Заданий графік зміни зовнішньої напруги розіб'ємо на такі ділянки та запишемо вираз для струму кожної із ділянок :

1) $0 \leq t \leq t_1$,

$$i(t) = U_0 h(t) + \int_0^t \dot{u}_1(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (4.14)$$

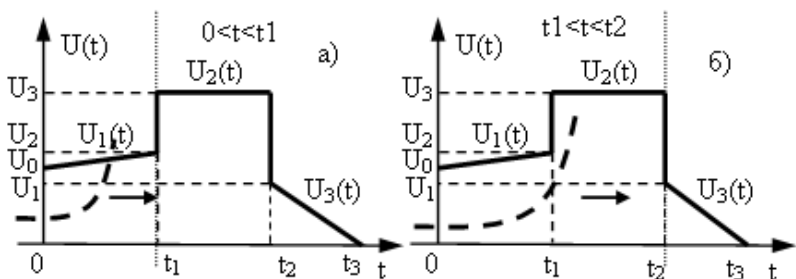


Рисунок 4.13 а, б

На першому інтервалі графік перехідної характеристики (4.12) буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ у довільній точці t і переміщатися праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 4.13, а).

2) $t_1 \leq t \leq t_2$,

$$i(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} \dot{u}_1(\tau) h(t - \tau) d\tau +$$

$$+(U_2 - U_1) h(t - t_1) + \int_t^{t_1} \dot{u}_2(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (4.15)$$

На другому інтервалі (4.12) графік перехідної характеристики буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ у довільній точці t і переміщуватися праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 4.13 б), а так само перетинати графік вхідного сигналу (4.12) на першому проміжку у точці t_1 .

3) $t_2 \leq t \leq t_3$,

$$i(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} \dot{u}_1(\tau) h(t - \tau) d\tau +$$

$$+(U_2 - U_1) h(t - t_1) + \int_t^{t_1} \dot{u}_2(\tau) h(t - \tau) d\tau +$$

$$+(U_3 - U_2) h(t - t_2) + \int_{t_2}^t \dot{u}_3(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (4.16)$$

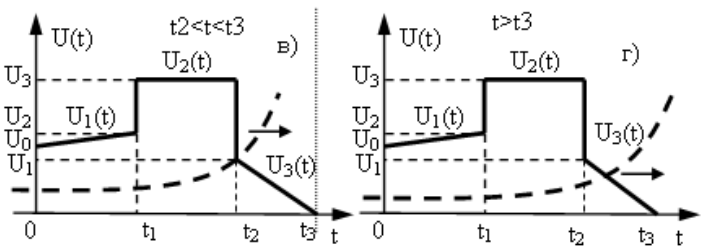


Рисунок 4.13 в, г

На третьому інтервалі графік перехідної характеристики буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ (рис. 4.12) у довільній точці t і переміщатися праворуч (графік показаний штри-

ховою лінією на рис. 4.13 в), а так само перетинати графік вхідного сигналу на першому проміжку у точці t_1 , а на другому – проміжку у точці t_2 .

$$4) \quad t_3 \leq t \leq \infty,$$

$$\begin{aligned}
 u(t) = & U_0 h(t) + \int_0^{t_1} \dot{u}_1(\tau) h(t - \tau) d\tau + \\
 & + (U_2 - U_1) h(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_2(\tau) h(t - \tau) d\tau + \quad (4.17) \\
 & + (U_3 - U_2) h(t - t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \dot{u}_3(\tau) h(t - \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

На четвертому інтервалі графік перехідної характеристики буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ (рис. 4.12) у довільній точці t і переміщатися праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 4.13 г), а так само перетинати графік вхідного сигналу на першому проміжку у точці t_1 , а на другому проміжку – у точці t_2 і на третьому проміжку – в точці t_3 .

У цих розрахункових виразах використовуються такі позначення: $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$ і $\dot{u}_3(t)$ – похідні від напруги розглянутих ділянок за часом, у яких замість t підставляється τ .

4.6. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. На вхід лінійного кола подається напруга $h(t) = 10e^{-2t}1(t)$. Знайти вираз напруги на виході часовим методом, тобто через інтеграл Дюамеля та операторним.

Розв'язання

Напруга на виході часовим методом визначається через інтеграл Дюамеля

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= \dot{U}_{\text{вх}} * h(t) = \int_0^t h(\tau) 1(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t 10e^{-2\tau} d\tau = \frac{10}{-2} e^{-2\tau} \Big|_0^t = 5 - 5e^{-2t}. \end{aligned}$$

Визначимо сигнал на виході операторним методом. Представимо перехідну характеристику у операторній формі

$$H(p) = \frac{10}{p + 2}.$$

Зв'язок між перехідною характеристикою та коефіцієнтом передачі

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}.$$

Звідси визначимо коефіцієнт передачі

$$K(p) = pH(p) = \frac{10p}{p + 2}.$$

Представимо вхідну напругу у операторній формі

$$U_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Тоді вихідна напруга в операторній формі визначається

$$U_{\text{вих}}(p) = U_{\text{вх}}(p) \cdot K(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{10p}{p + 2} = \frac{10}{p(p + 2)}.$$

Тепер скористаємося розкладанням виразу на прості дроби, для цього скористаємося теоремою розкладання

$$U_{\text{вих}}(p) = \frac{10}{p(p + 2)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 2}.$$

Коефіцієнти визначимо через лишки функції у точках

$$A_1 = \frac{10}{p(p+2)} p \Big|_{p=0} = \frac{10}{p+2} \Big|_{p=0} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$A_2 = \frac{10}{p(p+2)} (p+2) \Big|_{p=-2} = \frac{10}{p} \Big|_{p=-2} = \frac{10}{-2} = -5.$$

Вираз напруги на виході, розкладеної на прості дроби :

$$U_{\text{вих}}(p) = \frac{10}{p(p+2)} = \frac{5}{p} - \frac{5}{p+2}.$$

Запишемо вираз напруги у часовій області

$$u_{\text{вих}}(t) = 5 - 5e^{-2t}.$$

Побудуємо графік знайденої напруги (рис. 4.14).

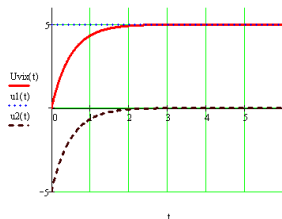


Рисунок 4.14

Приклад 4.2. Знайти реакцію довільного кола на вхідний сигнал у загальному вигляді. Вхідний сигнал заданий у вигляді рівнобедреного трикутника напруги (рис. 4.15).

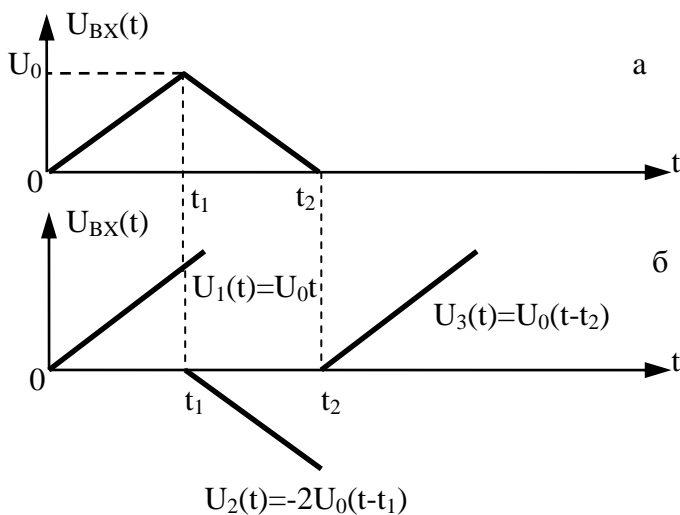


Рисунок 4.15

Розв'язання

Цей сигнал напруги $u_{\text{ВХ}}(t)$ можна подати у вигляді суми сигналів $u_1(t)$, $u_2(t)$ і $u_3(t)$ (рис. 4.15 б). Тут досить знайти реакцію за допомогою інтеграла Дюамеля тільки на одну функцію $u_1(t) = U_0 \cdot t$. Припустимо, що ця реакція дорівнює $u_{1,\text{ВІХ}}(t)$, тоді реакція на весь вхідний сигнал буде знайдена у такий спосіб із застосуванням принципу суперпозиції :

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = u_{1,\text{ВІХ}}(t) \cdot 1(t) - 2u_{1,\text{ВІХ}}(t - t_1) \cdot 1(t - t_1) + u_{1,\text{ВІХ}}(t - t_2) \cdot 1(t - t_2).$$

Для побудови графіків за допомогою програми MathCAD важливо множити на функцію Хевісайда. У цій програмі функція $1(t)$ позначається через $\Phi(t)$.

Приклад 4.3. Визначити напругу на виході кола (рис. 4.16), якщо стала часу кола $\tau = 0.5$ мкс. На вході кола діє напруга $u_{\text{ВХ}}(t) = E \sin \Omega t$, якщо $E = 4$ В, $\Omega = 2$.

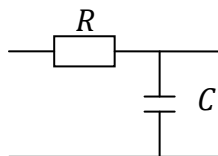


Рисунок 4.16

Розв'язання

Визначимо операторний коефіцієнт передачі за напругою кола :

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I \cdot R}{I \cdot \left(R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{RCp}{RCp + 1} = \frac{\tau p}{\tau p + 1} = \frac{p}{p + 1/\tau} = \frac{p}{p + 2'}$$

де $\tau = RC$ – стала часу RC-кола.

Визначимо імпульсну характеристику :

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{ \frac{p}{p + \frac{1}{\tau}} \right\} = L^{-1}\left\{ 1 - \frac{\frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}} \right\} = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Визначимо перехідну характеристику кола :

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = L^{-1} \{H(p)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + 1/\tau} \right\} = e^{-t/\tau}.$$

Подано вхідний сигнал у операторній формі :

$$U_{\text{ВХ}}(p) = \frac{8}{p^2 + 4}.$$

Визначимо операторну вихідну напругу :

$$U_{\text{ВИХ}}(p) = U_{\text{ВХ}}(p) \cdot K(p) = \frac{8}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p + 2} = \frac{8p}{(p + 2)(p^2 + 4)}.$$

Визначимо корені полінома знаменника :

$$p_1 = -2; \quad p_2 = 2j; \quad p_3 = -2j.$$

Подано операторну вихідну напругу $U_{\text{ВИХ}}(p)$ у вигляді суми простих дробів за теоремою розкладання :

$$U_{\text{ВИХ}}(p) = \frac{A_1}{p + 2} + \frac{A_2}{p - 2j} + \frac{3}{p - 2j}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції у особливих точках :

$$A_1 = \frac{8p}{(p + 2)(p^2 + 4)} (p + 2) \Big|_{p=-2} = \frac{8p}{p^2 + 4} \Big|_{p=-2} = \frac{-16}{8} = -2;$$

$$A_2 = \frac{8p}{(p + 2)(p + 2j)(p - 2j)} (p - 2j) \Big|_{p=2j} =$$

$$= \frac{8p}{(p + 2)(p + 2j)} \Big|_{p=2j} = \frac{2 \cdot 2j}{4j(2 + 2j)} = \frac{2}{j + 1} = j - 1;$$

$$A_3 = \frac{8p}{(p + 2)(p + 2j)(p - 2j)} (p + 2j) \Big|_{p=-2j} =$$

$$= \frac{8p}{(p + 2)(p - 2j)} \Big|_{p=-2j} = \frac{-2 \cdot 2j}{-4j(2 - 2j)} = \frac{2}{j - 1} = j + 1.$$

Отже, запишемо напругу у операторній формі :

$$U_{\text{ВИХ}}(p) = \frac{-2}{p + 2} + \frac{j - 1}{p - 2j} + \frac{j + 1}{p + 2j}.$$

Використаємо теорему розкладання для пари комплексно-спряжених коренів, щоб одержати оригінал :

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = -2e^{-2t} + 2|A_3|e^{\text{Re}(p_3)t} \cos(\text{Im}(p_3)t + \arg(A_3)) =$$

$$= -2e^{-2t} + 2\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ).$$

Вхідний сигнал визначається виразом $u_{\text{ВХ}}(t) = 4 \sin 2t$.

Похідна вхідного сигналу $u'_{\text{ВХ}}(t) = 8 \cos 2t$.

Визначимо сигнал на виході часовим методом

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= u'_{\text{ВХ}}(t) * h(t) = \int_0^t u'_{\text{ВХ}}(\tau) * h(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t 8 \cos 2\tau \cdot e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &= \int_0^t 8 \cos 2\tau \cdot e^{-2t} e^{2\tau} d\tau = 8e^{-2t} \int_0^t \cos 2\tau \cdot e^{2\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою Ейлера

$$\cos 2\tau = \frac{e^{2\tau j} + e^{-2\tau j}}{2}.$$

Отже, запишемо вираз для вхідної напруги, використавши формулу Ейлера :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= 8e^{-2t} \int_0^t \cos 2\tau \cdot e^{2\tau} d\tau = \\ &= 8e^{-2t} \int_0^t \frac{e^{2\tau j} + e^{-2\tau j}}{2} \cdot e^{2\tau} d\tau = \\ &= 4e^{-2t} \int_0^t (e^{\tau(2+2j)} + e^{-\tau(2-2j)}) \cdot e^{2\tau} d\tau = \\ &= 4e^{-2t} \left[\frac{e^{\tau(2+2j)}}{2+2j} + \frac{e^{-\tau(2-2j)}}{2-2j} \right] \Bigg|_0^t = \\ &= 4e^{-2t} \left(\frac{e^{t(2+2j)} - 1}{2+2j} + \frac{e^{-t(2-2j)} - 1}{2-2j} \right) = \\ &= 4 \left(\frac{e^{2tj} - e^{-2t}}{2+2j} + \frac{e^{-2tj} - e^{-2t}}{2-2j} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left(\frac{e^{2tj}}{2+2j} + \frac{e^{-2tj}}{2-2j} - \frac{e^{-2t}}{2+2j} - \frac{e^{-2t}}{2-2j} \right) = \\
&= 4 \left(\frac{e^{2tj}(2-2j) + e^{-2tj}(2+2j)}{(2+2j)(2-2j)} - \frac{e^{-2t}(2-2j) + e^{-2t}(2+2j)}{(2+2j)(2-2j)} \right) = \\
&= 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2tj} + e^{-2tj}}{2} - 2j \cdot \frac{e^{2tj} - e^{-2tj}}{8} - \frac{e^{-2t}}{2} \right) = \\
&= 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2tj} + e^{-2tj}}{2} - j \cdot \frac{e^{2tj} - e^{-2tj}}{2j} \cdot \frac{2j}{4} - \frac{e^{-2t}}{2} \right) = \\
&= 4 \left(\frac{\cos 2t}{2} - \frac{\sin 2t}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \right) = 2 \cos 2t - 2 \sin 2t - 2e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Використаємо формулу допоміжного аргументу :

$$\begin{aligned}
a \cos x \pm b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x \mp \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right); \\
2 \cos x - 2 \sin x &= \sqrt{2^2 + 2^2} \cos \left(2t + \arccos \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \right) = \\
&= 2\sqrt{2} \cos \left(2t + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ).
\end{aligned}$$

Приклад 4.4. Знайти реакцію кола на дію у вигляді трикутного імпульсу $S(t)$ (рис. 4.17), що має імпульсну характеристику $g(t)$.

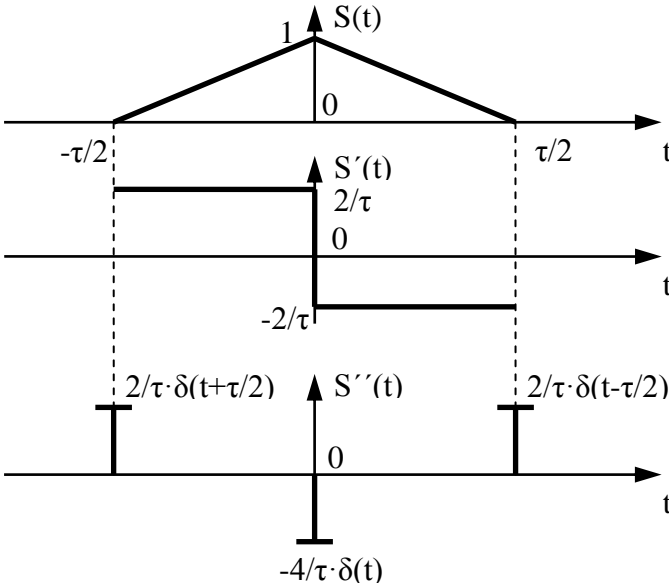


Рисунок 4.17

Розв'язання

Двічі продиференціюємо сигнал $S(t)$. Графіки продиференційованих сигналів $S'(t)$ і $S''(t)$ розташовані під графіком $S(t)$. Неважко помітити, що друга похідна сигналу являє собою суму трьох δ -імпульсів, коефіцієнти при яких дорівнюють скачкам першої похідної $S'(t)$. Тоді одержуємо

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} = \frac{2}{\tau} \cdot \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{2}{\tau} \cdot \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4}{\tau} \delta(t).$$

З огляду на те, що

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} \leftrightarrow p^2 S(p)$$

за операторним численням, праву частину одержуємо у вигляді

$$p^2 S(p) = \frac{2}{\tau} e^{p\tau/2} + \frac{2}{\tau} e^{-p\tau/2} - \frac{4}{\tau}.$$

Звідси знайдемо зображення сигналу

$$S(p) = \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{\frac{p\tau}{2}} + \frac{2}{\tau} e^{-\frac{p\tau}{2}} - \frac{4}{\tau} \right).$$

Реакція кола в операторній формі $U(p)$ дорівнює добутку операторної імпульсної характеристики на операторну дію

$$U(p) = G(p)S(p) = G(p) \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{\frac{p\tau}{2}} + \frac{2}{\tau} e^{-\frac{p\tau}{2}} - \frac{4}{\tau} \right).$$

Оригінал реакції кола, що визначається зворотним перетворенням Лапласа :

$$\begin{aligned} u(t) &= L^{-1}\{U(p)\} = L^{-1}\{G(p)S(p)\} = \\ &= L^{-1}\left\{G(p) \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{\frac{p\tau}{2}} + \frac{2}{\tau} e^{-\frac{p\tau}{2}} - \frac{4}{\tau} \right)\right\}. \end{aligned}$$

Приклад 4.5. Знайти імпульсну, перехідну характеристики та дію для сигналу напруги (рис. 4.18) у схемі, зображеній на рис. 4.19.

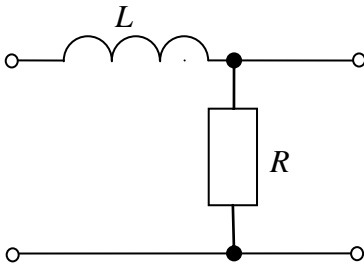


Рисунок 4.18

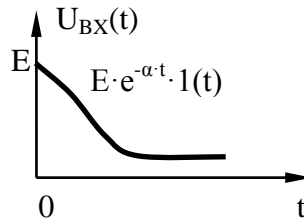


Рисунок 4.19

Розв'язання

Для розв'язання скористаємося операторним методом.

1. Знайдемо схемну функцію.

Для нашої схеми знайдемо передавальну функцію кола за напругою

$$K_U(p) = \frac{R}{pL + R} = \frac{1}{\frac{pL}{R} + 1} = \frac{1}{p\tau + 1} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}.$$

2. Знайдемо імпульсну характеристику

$$\begin{aligned} g(t) = L^{-1}\{K_U(p)\} &= L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}}\right\} = \frac{1}{\tau} L^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right\} = \\ &= \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

За таблицею перетворень Лапласа або за допомогою теореми розкладання знаходимо, що

$$\frac{1}{p + 1/\tau} \rightarrow e^{-t/\tau}.$$

3. Знайдемо перехідну характеристику

$$h(t) = \int_0^t g(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-t/\tau} dt = 1 - e^{-t/\tau}.$$

4. Побудуємо графіки знайдених характеристик (рис. 4.20 та рис. 4.21).

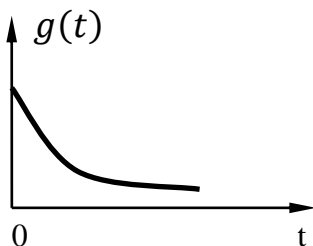


Рисунок 4.20

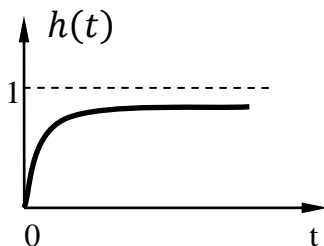


Рисунок 4.21

Тепер знайдемо реакцію кола, якщо на її вхід подана дія у вигляді вхідного сигналу $u_{BX}(t)$.

5. Знайдемо зображення вхідного сигналу :

$$E e^{-\alpha t} 1(t) \leftrightarrow \frac{E}{p + \alpha} = U_{BX}(p).$$

6. Вихідний сигнал за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$u_{\text{вих}}(t) = L^{-1}\{U_{\text{вх}}(p) \cdot K_U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{E}{p + \alpha} \cdot \frac{\frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}}\right\} = \\ = \frac{E}{\tau} \left\{ \frac{1}{(p + \alpha) \left(p + \frac{1}{\tau}\right)} \right\}.$$

За теоремою розкладання розкладаємо вираз у дужках на множники :

$$\frac{1}{(p + \alpha) \left(p + \frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A_1}{p + \alpha} + \frac{A_2}{p + \frac{1}{\tau}}.$$

Визначимо коефіцієнти при лишках функції у особливих точках:

$$A_1 = \frac{1}{(p + \alpha)} \Big|_{p=-1/\tau} = \frac{1}{\alpha - 1/\tau};$$

$$A_2 = \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \Big|_{p=-\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\tau} - \alpha}.$$

Із урахуванням вище одержаних результатів маємо

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{E}{\tau} \left(\frac{1}{p + \alpha} \frac{1}{\frac{1}{\tau} - \alpha} + \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \frac{1}{\alpha - 1/\tau} \right).$$

Перейдемо від зображення до оригіналу :

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{E}{\tau} \left(\frac{e^{-\alpha t}}{\frac{1}{\tau} - \alpha} + \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\alpha - \frac{1}{\tau}} \right) = \frac{E}{1 - \tau\alpha} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t).$$

Нехай $\tau\alpha < 1$, тоді побудуємо графік вихідної напруги (рис. 4.22).

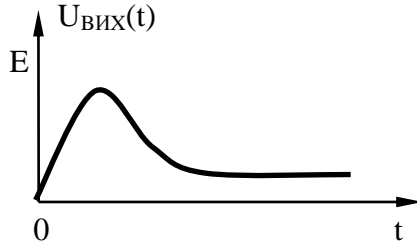


Рисунок 4.22

Приклад 4.6. Для схеми із прикладу 4.5 (рис. 4.18) знайти реакцію часовим методом, тобто через згортку або інтеграл Дюамеля.

Розв'язання

Скористаємося результатами попереднього прикладу і запишемо імпульсну характеристику та позначимо сталу часу кола через τ_K , щоб не було плутанини при розрахунку інтеграла Дюамеля

$$g(t) = \frac{1}{\tau_K} e^{-t/\tau_K}.$$

Запишемо відгук кола через інтеграл Дюамеля :

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= \frac{1}{2} u_{\text{вх}}(t) * g(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) * g(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t E e^{-\alpha\tau} \cdot \frac{1}{\tau_K} e^{-(t-\tau)/\tau_K} d\tau = \frac{E}{\tau_K} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-(t-\tau)/\tau_K} d\tau. \end{aligned}$$

Після розрахунку інтеграла одержуємо

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{E}{\tau_K} \cdot \frac{1}{1/\tau_K - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-t/\tau_K}).$$

Приклад 4.7. Графічно заданий сигнал напруги складної форми (рис. 4.23) із імпульсною характеристикою $g(t) = \alpha e^{-bt}$. Знайти аналітичний вираз сигналу, якщо $t_1 = \tau$, $t_2 = 2.5\tau$, $t_3 = 5\tau$ і $t_4 = 7.5\tau$.

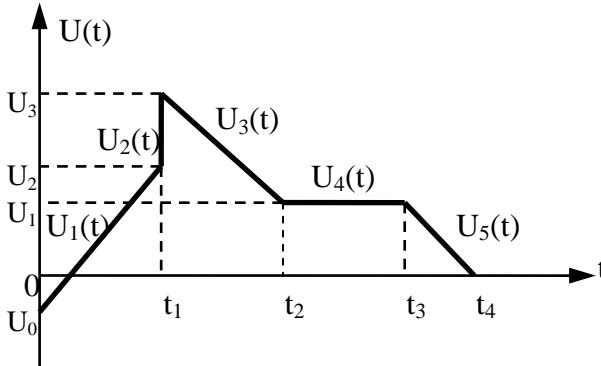


Рисунок 4.23

Розв'язання

Знаходимо сталу часу кола $t_K = 1/b$.

Значення часу для побудови графіка $t_1 = \tau$, $t_2 = 2.5\tau$, $t_3 = 5\tau$ і $t_4 = 7.5\tau$.

Для побудови рівняння прямих напруги скористаємося співвідношенням

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Рівняння для першої прямої

$$\frac{u_1(t) - U_0}{U_2 - U_0} = \frac{t - 0}{t_1 - 0}.$$

Звідси визначимо

$$u_1(t) = U_0 + (U_2 - U_0) \frac{t}{t_1}.$$

Рівняння для другої прямої $t = t_1$.

Рівняння для третьої прямої

$$\frac{u_3(t) - U_3}{U_3 - U_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Звідси визначимо

$$u_3(t) = U_3 + (U_3 - U_1) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Рівняння для четвертої прямої $u_4(t) = U_1$

Рівняння для п'ятої прямої

$$\frac{u_5(t) - U_1}{U_1 - 0} = \frac{t - t_3}{t_4 - t_3}.$$

Звідси визначимо

$$u_5(t) = U_1 + U_1 \frac{t - t_3}{t_4 - t_3}.$$

Приклад 4.8. Визначити реакцію RC -кола на одиничний прямокутний імпульс напруги (рис. 4.24) тривалістю $\tau_{\text{IM}} = 4$ мкс, стала часу кола становить $\tau = 1$ мкс. Побудувати напруги на всіх елементах кола.

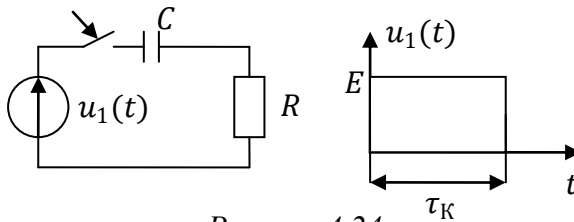


Рисунок 4.24

Розв'язання

Визначимо операторний коефіцієнт передачі за напругою кола :

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{R}{\frac{1}{pC} + R} = \frac{pRC}{1 + pRC} = \frac{p\tau}{1 + p\tau} = \frac{p}{1/\tau + p}.$$

Визначимо перехідну характеристику кола :

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = L^{-1} \{ H(p) \} = L^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + p} \right\} = e^{-t/\tau}.$$

Прямокутний сигнал можна одержати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда (рис. 4.25).

Запишемо аналітичний вигляд такого сигналу :

$$u_{\text{ВХ}}(t) = E[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМ}})].$$

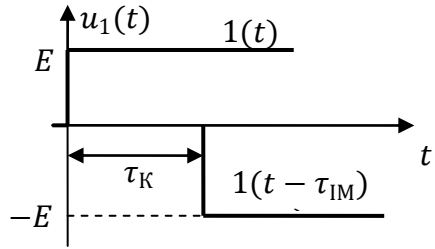


Рисунок 4.25

Запишемо реакцію на такий сигнал :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВІХ}}(t) &= E[h(t) - h(t - \tau_{\text{ІМ}})] = \\ &= E \left[e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t - \tau_{\text{ІМ}}}{\tau}} \cdot 1(t - \tau_{\text{ІМ}}) \right] = u_{\text{R}}(t). \end{aligned}$$

Побудуємо реакцію на такий сигнал напруги (рис. 4.26), тобто напругу на опорі.

Визначимо напругу на опорі :

$$\begin{aligned} u_{\text{С}}(t) &= u_{\text{ВХ}}(t) - u_{\text{ВІХ}}(t) = E[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМ}})] - \\ &= E \left[e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t - \tau_{\text{ІМ}}}{\tau}} \cdot 1(t - \tau_{\text{ІМ}}) \right]. \end{aligned}$$

Побудуємо напругу на ємності (рис. 4.27). Побудуємо всі три напруги на одному графіку (рис. 4.28).

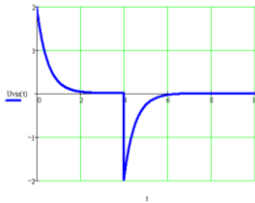


Рисунок 4.26

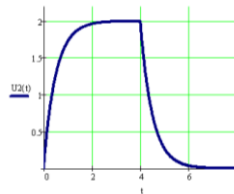


Рисунок 4.27

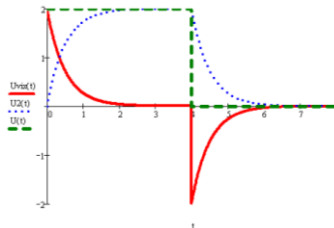


Рисунок 4.28

Приклад 4.9. Знайти напругу на виході кола (рис. 4.29 а) для сигналу $u(t) = Ee^{-2t}$ (рис. 4.29 б), якщо коло має параметри $\tau = 0.5$ мкс, $E = 2$ В.

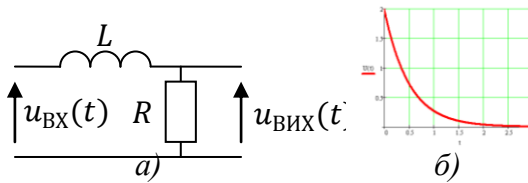


Рисунок 4.29

Розв'язання

Коефіцієнт передачі кола у операторній формі

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{IR}{I(R + pL)} = \frac{R}{R + pL}.$$

Імпульсна характеристика через обернене перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{R}{R + pL}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{R}{L\left(\frac{R}{L} + p\right)}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{\frac{R}{L}}{\left(\frac{R}{L} + p\right)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1/\tau}{\left(\frac{1}{\tau} + p\right)}\right\} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = 2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Сигнал на вході визначається так:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = Ee^{-\alpha t} = 2e^{-2t}.$$

Сигнал на виході часовим методом через імпульсну характеристику

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= u_{\text{ВХ}}(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t 2e^{-2\tau} \cdot 2e^{-2(t-\tau)} d\tau = \end{aligned}$$

$$= 4 \int_0^t e^{-2\tau} \cdot e^{-2t} \cdot e^{2\tau} d\tau = 4 \int_0^t e^{-2t} d\tau = 4e^{-2t} \cdot \tau \Big|_0^t = 4te^{-2t}.$$

Визначимо перехідну характеристику через обернене перетворення Лапласа

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(\frac{1}{\tau} + p\right)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{p \cdot (2 + p)} \right\} = L^{-1} \{H(p)\}.$$

Подамо вираз $H(p)$ у вигляді суми простих дробів, використовуючи теорему розкладання. За цією теоремою можна записати

$$H(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 2}.$$

Визначимо коефіцієнти через лишки функції в особливих точках :

$$A_1 = \frac{2}{p \cdot (2 + p)} \cdot p \Big|_{p=0} = \frac{2}{2 + p} \Big|_{p=0} = \frac{2}{2 + 0} = 1;$$

$$A_2 = \frac{2}{p \cdot (2 + p)} \cdot (2 + p) \Big|_{p=-2} = \frac{2}{p} \Big|_{p=-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Вираз операторної перехідної характеристики :

$$H(p) = \frac{1}{p} + \frac{-1}{p + 2}.$$

Визначимо перехідну характеристику :

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{-1}{p + 2} \right\} = 1 - e^{-2t}.$$

Визначимо сигнал на виході часовим методом через перехідну характеристику :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= \dot{u}_{\text{ВХ}}(t) * h(t) = u_{\text{ВХ}}(0) \cdot h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{ВХ}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \\ &= 2 \cdot (1 - e^{-2t}) + \int_0^t -4e^{-2\tau} \cdot (1 - e^{-2(t-\tau)}) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot (1 - e^{-2t}) - 4 \int_0^t e^{-2\tau} \cdot (1 - e^{-2t} e^{2\tau}) d\tau = \\
&= 2 \cdot (1 - e^{-2t}) - 4 \int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-2t} e^{2\tau}) d\tau = \\
&= 2(1 - e^{-2t}) - 4 \int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-2t}) d\tau = \\
&= 2(1 - e^{-2t}) - 4 \left(-\frac{1}{2} e^{-2\tau} - e^{-2t} \tau \right) \Big|_0^t = \\
&= 2(1 - e^{-2t}) - 2(-e^{-2t} - 1) - 2e^{-2t} t = \\
&= 2(1 - e^{-2t}) - 2(1 - e^{-2t}) + 4te^{-2t} = 4te^{-2t}.
\end{aligned}$$

Визначимо сигнал на виході операторним методом. Для цього запишемо сигнал на вході у операторній формі :

$$u_{\text{ВХ}}(p) = \frac{E}{p + \alpha} = \frac{2}{p + 2}.$$

Визначимо сигнал на виході у операторній області

$$u_{\text{ВИХ}}(p) = u_{\text{ВИХ}}(p) \cdot K(p) = \frac{2}{p + 2} \cdot \frac{2}{2 + p} = \frac{4}{(p + 2)^2}.$$

Оскільки корінь $p = -2$ є коренем другої кратності, то використаємо теорему розкладання для кратних коренів для визначення напруги у часі :

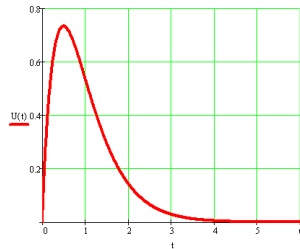
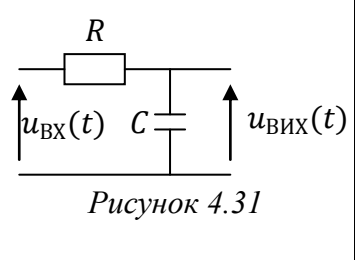


Рисунок 4.30

$$\begin{aligned}
u_{\text{ВИХ}}(t) &= \text{Res}_{p=-2} u_{\text{ВИХ}}(p) = \frac{d}{dp} \left[\frac{4}{(p + 2)^2} (p - 2)^2 e^{pt} \right] \Big|_{p=-2} = \\
&= \frac{d}{dp} [4e^{pt}] \Big|_{p=-2} = 4te^{pt} \Big|_{p=-2} = 4te^{-2t}.
\end{aligned}$$

Побудуємо сигнал на виході (рис. 4.30).

Приклад 4.10. Визначити реакцію RC -кола, якщо на вході діє напруга $u_{\text{ВХ}}(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ (рис. 4.31), $\alpha = 3$ стала часу кола становить $\tau = 0.25$ мкс. Побудувати напруги на виході. Визначити імпульсну та перехідну характеристики кола.



Розв'язання

Визначимо коефіцієнт передачі за напругою кола :

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВІХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{I \cdot \frac{1}{pC}}{I \left(R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + RCp} =$$

$$= \frac{1}{1 + \tau p} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}.$$

Визначимо імпульсну характеристику :

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{ \frac{1/\tau}{p + 1/\tau} \right\} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Визначимо перехідну характеристику :

$$h(t) = L^{-1}\left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{\tau}}{p \left(p + \frac{1}{\tau} \right)} \right\}.$$

Використаємо теорему розкладання :

$$H(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + \frac{1}{\tau}}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках :

$$A_1 = \left. \frac{\frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}} \right|_{p=0} = \frac{\frac{1}{\tau}}{0 + \frac{1}{\tau}} = 1;$$

$$A_2 = \left. \frac{\frac{1}{\tau}}{p} \right|_{p=-\frac{1}{\tau}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{-\frac{1}{\tau}} = -1.$$

Таким чином, одержимо

$$h(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right\} = 1 - e^{-t/\tau}.$$

Подано вхідний сигнал у операторній формі :

$$U_{\text{ВХ}}(p) = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} = \frac{3}{p(p + 3)}.$$

Визначимо операторну вихідну напругу :

$$\begin{aligned} U_{\text{ВИХ}}(p) &= U_{\text{ВХ}}(p) \cdot K(p) = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} = \\ &= \frac{3}{p(p + 3)} \cdot \frac{4}{p + 4} = \frac{12}{p(p + 3)(p + 4)}. \end{aligned}$$

За теоремою розкладання

$$U_{\text{ВИХ}}(p) = \frac{B_1}{p} + \frac{B_2}{p + 3} + \frac{B_3}{p + 4}.$$

Визначимо коефіцієнти при лишках функції у особливих точках :

$$B_1 = \left. \frac{12}{(p + 3)(p + 4)} \right|_{p=0} = \frac{12}{(0 + 3)(0 + 4)} = 1;$$

$$B_2 = \left. \frac{12}{p(p + 4)} \right|_{p=-3} = \frac{12}{-3(-3 + 4)} = -4;$$

$$B_3 = \left. \frac{12}{p(p + 3)} \right|_{p=-4} = \frac{12}{-4(-4 + 3)} = 3.$$

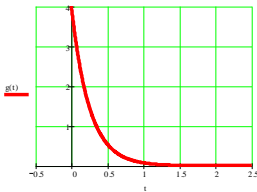
Таким чином, одержимо

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= L^{-1}\{U_{\text{ВИХ}}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{4}{p + 3} + \frac{3}{p + 4}\right\} \\ &= 1 - 4e^{-3t} + 3e^{-4t}. \end{aligned}$$

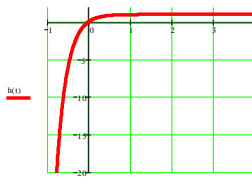
Визначимо сигнал на виході часовим методом :

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ВИХ}}(t) &= u_{\text{ВХ}}(t) * g(t) = \int_0^t u_{\text{ВХ}}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \\
 &= \int_0^t (1 - e^{-3\tau}) \cdot 4e^{-4(t-\tau)} d\tau = \\
 &= 4 \int_0^t (1 - e^{-3\tau}) \cdot e^{-4t} \cdot e^{4\tau} d\tau = 4 \cdot e^{-4t} \int_0^t (e^{4\tau} - e^{\tau}) d\tau = \\
 &= 4e^{-4t} \left(\frac{e^{4\tau}}{4} - \frac{e^{\tau}}{1} \right) \Big|_0^t = \\
 &= 4e^{-4t} \left(\frac{e^{4t}}{4} - \frac{1}{4} - \left(\frac{e^{\tau}}{1} - 1 \right) \right) = 4e^{-4t} \left(\frac{e^{4t}}{4} - \frac{1}{4} - e^{\tau} + 1 \right) = \\
 &= 1 - e^{-4t} - 4e^{-3t} + 4e^{-4t} = 1 + 3e^{-4t} - 4e^{-3t}.
 \end{aligned}$$

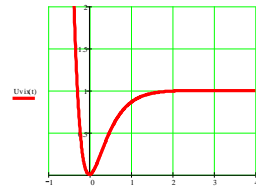
Побудуємо імпульсну (рис. 4.32 а), перехідну (4.32 б) характеристики та сигнал на виході (рис. 4.32 в) кола.



а



б



в

Рисунок 4.32

4.7. Питання для самоперевірки

1. Що таке імпульсна характеристика?
2. Як знайти імпульсну характеристику?
3. Яка розмірність імпульсної характеристики?
4. Що таке перехідна характеристика?
5. Яка розмірність перехідної характеристики?
6. Як знайти перехідну характеристику?
7. Як знайти реакцію кола на дію операторним методом?
8. Як знайти реакцію кола на дію часовим методом?
9. Який фізичний зміст згортки двох функцій?
10. Яка графічна інтерпретація згортки двох функцій?
11. Що таке інтеграл Дюамеля?
12. Записати всі форми запису інтеграла Дюамеля.
13. Що таке передавальна функція?
14. Навести приклад передавальної функції для найпростішого кола.
15. Розкрити суть методу розкладання сигналу на прості для відшукування реакції кола на дію.
16. Розкрити суть знаходження зображення сигналу на вході за допомогою його диференціювання на прикладі простого сигналу.

4.8. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях

Задача 4.1. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола (рис. 4.31) у загальному вигляді та побудувати орієнтовні графіки знайдених величин.

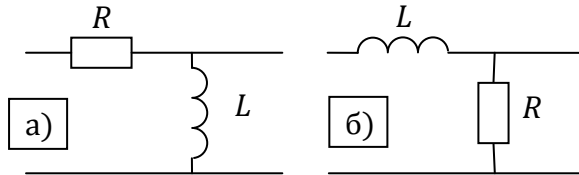


Рисунок 4.31

Задача 4.2. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола у загальному вигляді і побудувати орієнтовні графіки цих величин.

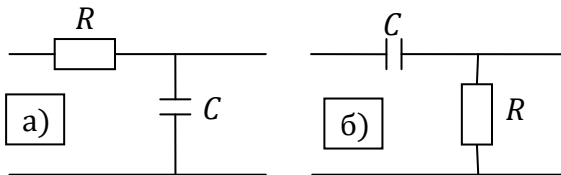


Рисунок 4.32

Задача 4.3. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 4.33, та побудувати орієнтовні графіки знайдених величин.

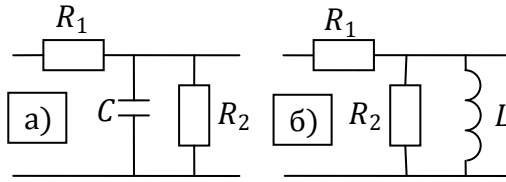


Рисунок 4.33

Задача 4.4. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 4.34, та побудувати орієнтовні графіки.

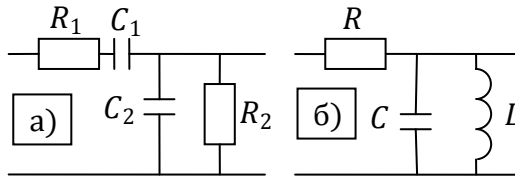


Рисунок 4.34

Задача 4.5. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 4.35.

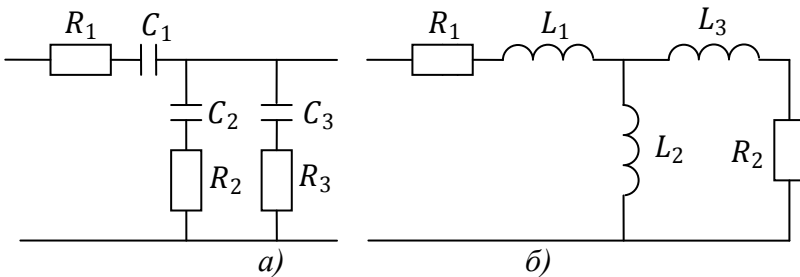


Рисунок 4.35

Задача 4.6. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 4.36.

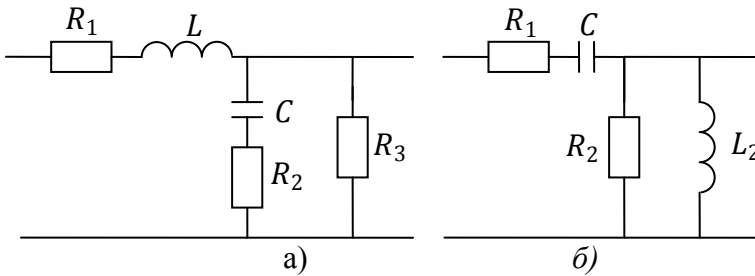


Рисунок. 4.36

Задача 4.7. Визначити імпульсну та перехідну характеристики кола (рис. 4.37), якщо параметри елементів кола елементів $C = 2 \text{ нФ}$, $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $R_3 = 1 \text{ кОм}$.

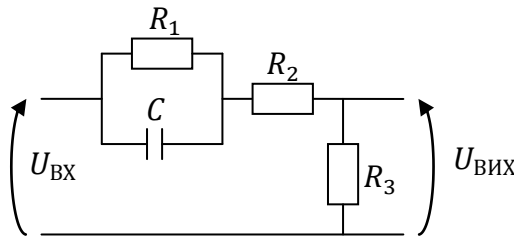


Рисунок. 4.37

Задача 4.8. Для кола (рис. 4.38) визначити та побудувати імпульсну та перехідну характеристики кола, якщо коло має такі параметри елементів $C = 2 \text{ нФ}$, $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$.

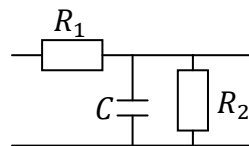


Рисунок. 4.38

Задача 4.9. Для кола (рис. 4.39) визначити та побудувати імпульсну та перехідну характеристики кола. Числові значення елементів: $L = 2$ мГн, $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм.

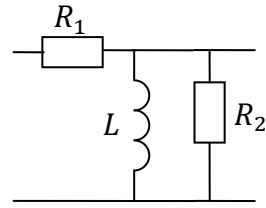


Рисунок. 4.39

Задача 4.10. Для кола (рис. 4.40) визначити імпульсну та перехідну характеристики, побудувати їх. Числові значення елементів кола: $C = 0,25$ нФ, $L = 2$ мГ, $E = 4U_{20}$ В, $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм.

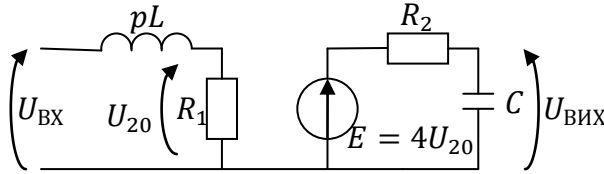


Рисунок. 4.40

Задача 4.11. Знайти напругу на виході кола (рис. 4.41), якщо $\tau = 1$ мкс. Вхідний сигнал змінюється за законом $u(t) = E e^{-3t}$ $E = 2$ В.

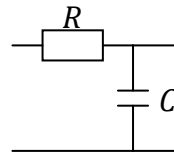


Рисунок. 4.41

Задача 4.12. Графічно заданий вхідний сигнал складної форми. Знайти сигнал на виході кола, якщо $\tau = 2$ мкс, якщо $t_1 = \tau$, $t_2 = 3\tau$, $t_3 = 5\tau$ і $t_4 = 7\tau$. Сигнал розташований у області низьких частот.

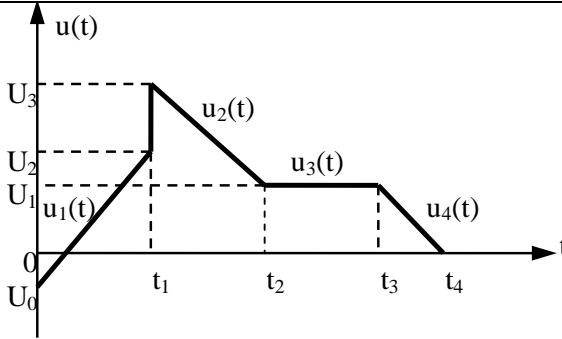


Рисунок 4.43

Задача 4.13. Знайти імпульсну, перехідну характеристику та дію для сигналу напруги операторним та часовим методами (рис. 4.44) у колі, зображеному на рис. 4.44, якщо $\tau = 0,5$ мкс, $E = 2$ В, $\alpha = 2$.

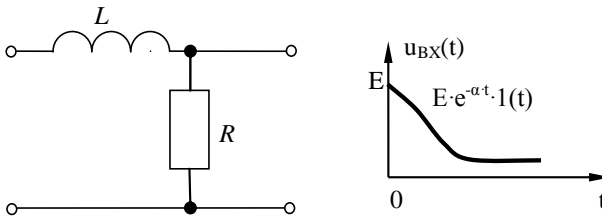


Рисунок 4.44

Задача 4.14. Для схеми (рис. 4.45) знайти та побудувати перехідну характеристику коефіцієнта передачі за напругою, якщо $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $m = 1$.

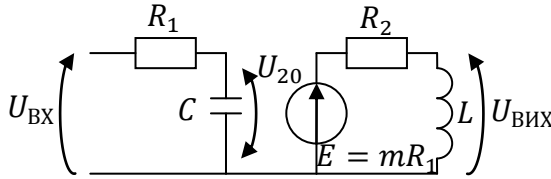


Рисунок 4.45

Задача 4.15. Знайти імпульсну характеристику кола (рис. 4.46), якщо як узгоджувальна ланка ($K=1$) використовується ідеальний повторювач. Як коло 1 взяти коло із задачі 4.1 а, а як коло 2 взяти схему із задачі 4.2 б.

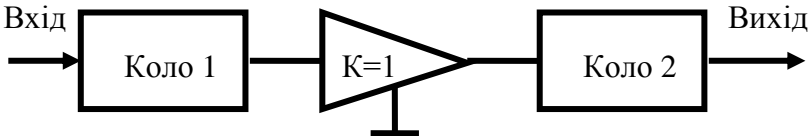


Рисунок 4.46

Задача 4.16. Для схеми (рис. 4.47) знайти та побудувати перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнта передачі за напругою, якщо $R = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$. Визначити реакцію кола на прямокутний імпульс тривалістю $\tau_{\text{імп}} = 2 \text{ мкс}$, амплітудою $U_m = 1 \text{ В}$.

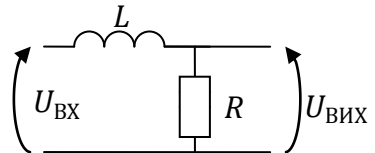
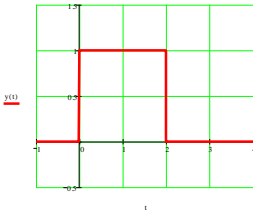


Рисунок 4.47

Задача 4.17. Для схеми (рис. 4.48) знайти та побудувати перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнта передачі за напругою, якщо $R = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$. Визначити реакцію кола на прямокутний імпульс тривалістю $\tau_{\text{імп}} = 2 \text{ мкс}$, амплітудою $U_m = 1 \text{ В}$.

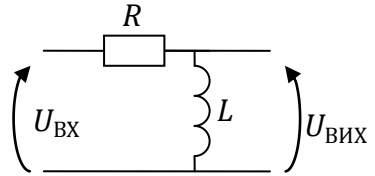
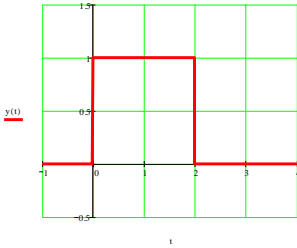


Рисунок 4.48

<p>Задача 4.18. Знайти напругу на виході кола операторним та часовим методами (рис. 4.49), якщо $\tau = 0.25 \text{ мкс}$. Вхідний сигнал змінюється за законом $u(t) = 1 - e^{-3t}$.</p>	<p>Рисунок. 4.49</p>
--	----------------------

<p>Задача 4.19. Знайти напругу на виході кола операторним та часовим методами (рис. 4.50), якщо $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Вхідний сигнал змінюється за законом $u(t) = E \sin \Omega t$, $E = 4 \text{ В}$, $\Omega = 2$.</p>	<p>Рисунок. 4.50</p>
--	----------------------

<p>Задача 4.20. Знайти напругу на виході кола операторним та часовим методами (рис. 4.51), якщо $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Вхідний сигнал змінюється за законом $u(t) = \beta t e^{-\alpha t}$, $\beta = 4 \text{ В}$, $\alpha = 3$.</p>	<p>Рисунок. 4.51</p>
--	----------------------

Задача 4.21. Знайти напругу на виході кола операторним та часовим методами (рис. 4.52), якщо $\tau = 0.5$ мкс. Вхідний сигнал змінюється за законом $u(t) = Et, E = 1$ В, $R = 2$ кОм, $L = 1$ мГн, $C = 1$ нФ.

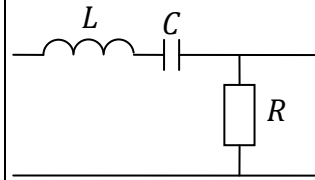


Рисунок. 4.52

Задача 4.22. Знайти напругу на виході кола операторним та часовим методами (рис. 4.53), якщо $\tau = 0.5$ мкс. Вхідний сигнал змінюється за законом $u(t) = (1 - at)e^{-at}, \alpha = 2, R = 2$ кОм, $L = 1$ мГн, $C = 1$ нФ.

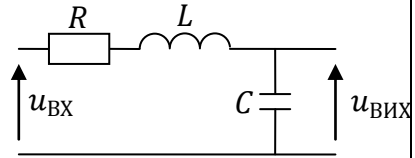


Рисунок. 4.53

Задача 4.23. Знайти напругу на виході кола у вигляді моста Віна операторним та часовим методами (рис. 4.54), якщо $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $C_1 = 2$ нФ, $C_2 = 4$ нФ. Вхідний сигнал поданий у вигляді прямокутного імпульсу тривалістю $\tau = 4$ мкс.

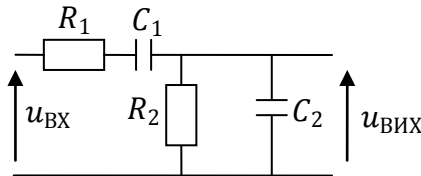


Рисунок. 4.54

Задача 4.24. Знайти напругу на виході лінійного кола операторним та часовим методами, якщо коло описується коефіцієнтом передачі за напругою

$$K(p) = \frac{p}{(p + 2)^2}.$$

Вхідна напруга визначається виразом $u(t) = ch(\alpha t), \alpha = 4$.

Задача 4.25. Знайти та побудувати імпульсну характеристику для наведеного операторного коефіцієнта передачі за теоремою розкладання :

$$K_U(p) = \frac{p + 1}{2p^2 + 12p + 16}.$$

Відповідь подати у вигляді $g(t) = \sum A_i e^{p_i t}$. Побудову здійснити окремо для кожної складової.

Задача 4.26. Знайти та побудувати перехідну характеристику для наведеного операторного коефіцієнта передачі за теоремою розкладання :

$$K_U(p) = \frac{8p + 8}{p^2 + 6p + 8}.$$

Відповідь подати у вигляді $h(t) = \sum A_i e^{p_i t}$. Побудову здійснити окремо для кожної складової.

Задача 4.27. Знайти та побудувати імпульсну характеристику для наведеного операторного коефіцієнта передачі за теоремою розкладання :

$$K_U(p) = \frac{6p^2}{12(p^2 + 5p + 6)} + \frac{8}{(p + 1)^2}.$$

Відповідь подати у вигляді $g(t) = \sum A_i e^{p_i t}$. Побудову здійснити окремо для кожної складової.

Задача 4.28. Знайти та побудувати імпульсну та перехідну характеристику для наведеного операторного коефіцієнта передачі за теоремою розкладання :

$$K_U(p) = \frac{6p}{(p + 3)^2}.$$

Визначити сигнал на виході такого кола, якщо на вході діє сигнал напруги, що змінюється за законом $u_{\text{ВХ}}(t) = \frac{E}{a^2} (e^{at} - 1 - at, E=3, a=1)$.

Задача 4.29. Знайти та побудувати імпульсну та перехідну характеристики, для наведеної операторної перехідної характеристики за теоремою розкладання :

$$H(p) = \frac{p}{(p + 3)^2}.$$

Визначити сигнал на виході такого кола, якщо на вході діє сигнал напруги, що змінюється за законом

$$u_{\text{ВХ}}(t) = \frac{E}{a^2} (e^{at} - 1 - at), \quad E = 3, \quad a = 1.$$

Задача 4.30. Знайти та побудувати імпульсну та перехідну характеристики, для наведеної операторної перехідної характеристики за теоремою розкладання :

$$H(p) = \frac{p}{(p + 3)^2}.$$

Визначити сигнал на виході такого кола, якщо на вході діє сигнал напруги, що змінюється за законом у операторному вигляді

$$U_{\text{ВХ}}(p) = \frac{20}{(p^2 - 4)(p + 1)}.$$

Задача 4.31. Знайти та побудувати імпульсну та перехідну характеристики, для наведеного операторного коефіцієнта передачі за теоремою розкладання :

$$K_U(p) = \frac{p}{p^2 + 7p + 12}.$$

Визначити сигнал на виході такого кола, якщо на вході діє сигнал напруги, що змінюється за законом у операторному вигляді

$$U_{\text{ВХ}}(p) = \frac{3p - 6}{(p - 2)^2(p - 1)}.$$

Задача 4.32. Для задач 4.1 та 4.2 знайти сигнал на виході, якщо на вхід діє сигнал, що змінюється за законом :

1) $u(t) = Ee^{-\alpha t}$; 2) $u(t) = \beta te^{-\alpha t}$;

3) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta)$;

4) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta)$.

Задача 4.33. Для задач 4.3 та 4.4 знайти сигнал на виході, якщо на вхід діє сигнал у вигляді напруги, що змінюється за законом:

- 1) $u(t) = Ee^{-\alpha t}$; 2) $u(t) = \beta te^{-\alpha t}$;
- 3) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta)$;
- 4) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta)$.

Задача 4.34. Для задач 4.5 та 4.6 знайти сигнал на виході, якщо на вхід діє сигнал напруги, що змінюється за законом:

- 1) $u(t) = Ee^{-\alpha t}$; 2) $u(t) = \beta te^{-\alpha t}$;
- 3) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta)$;
- 4) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta)$.

Задача 4.35. Знайти зображення сигналів напруги, що подані на рис. 4.55.

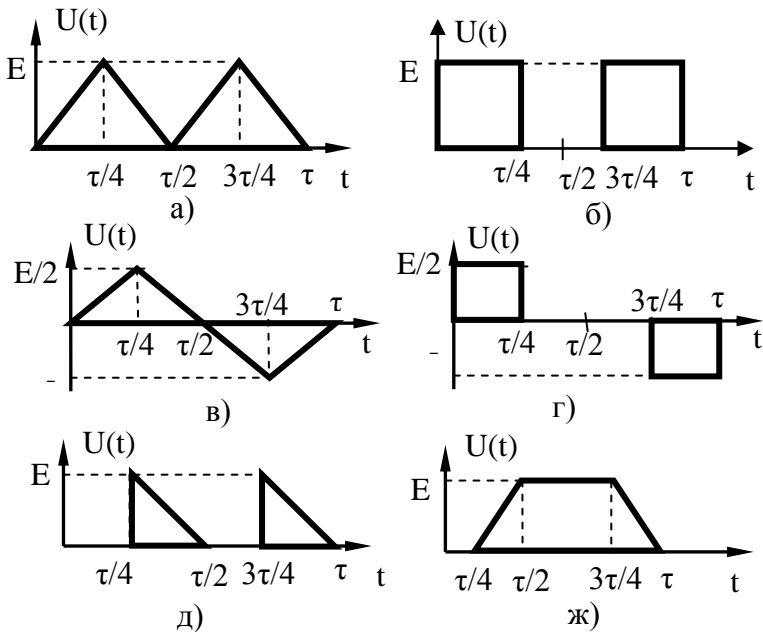


Рисунок 4.55

Задача 4.36. Знайти реакцію кола, що зображене на рис. 4.46, якщо на вхід діє сигнал, зображений на рис. 4.47.

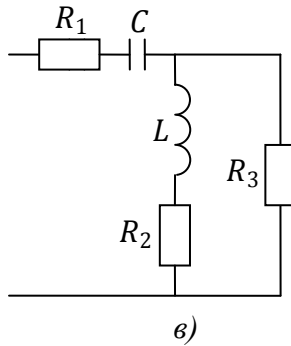
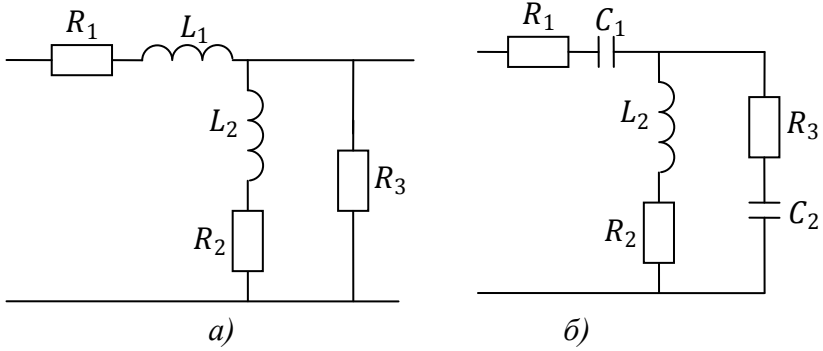


Рисунок 4.47

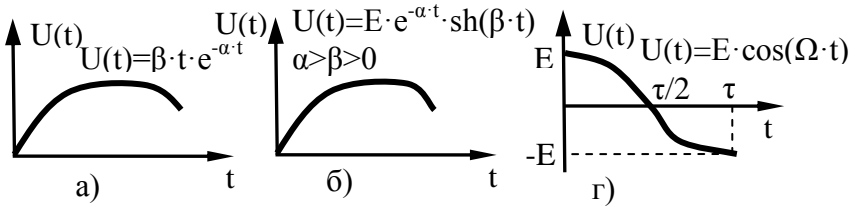


Рисунок 4.48

Задача 4.37. Для схеми (рис. 4.49) знайти та побудувати перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнта передачі за напругою. Числові значення елементів кола: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $L = 1$ мГн. Визначити реакцію кола на прямокутний імпульс тривалістю $\tau_{\text{імп}} = 2$ мкс, амплітудою $U_m = 1$ В.

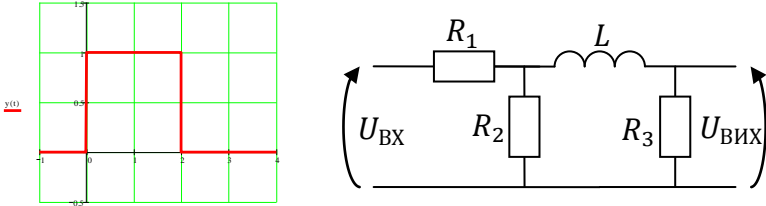


Рисунок 4.49

Задача 4.38. Для схеми (рис. 4.50) знайти та побудувати перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнта передачі за напругою. Числові значення елементів кола: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $C = 1$ нФ. Визначити реакцію кола на прямокутний імпульс тривалістю $\tau_{\text{імп}} = 2$ мкс, амплітудою $U_m = 1$ В.

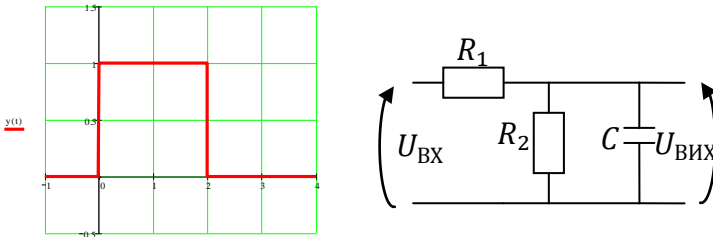


Рисунок 4.50

5. КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ СХЕМНИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Загальні положення

Під стійкістю системи будемо розуміти її здатність прямувати від яких-небудь початкових умов до стану рівноваги або стаціонарного стану. Про стійкість кола можна говорити у широкому та вузькому розумінні. Можна говорити про стійкість кожної схемної функції або про стійкість системи в цілому. Різні схемні функції одного й того ж кола можуть бути стійкими чи ні. Стійкість кола визначається коренями характеристичного полінома диференціального рівняння або коренями полінома знаменника схемної функції. Для стійких систем дійсні частини коренів повинні бути негативними, щоб доданки виразів вигляду були згасаючими :

$$f(t) = \sum A_i e^{p_i t}. \quad (5.1)$$

Якщо корені дійсні та негативні, то система швидше за все стійка. Надалі будемо розглядати питання щодо стійкості конкретної схемної функції. Але якщо будемо говорити про стійкість кола щодо якого-небудь із входів, то необхідно говорити про стійкість вхідної провідності та опору одночасно.

Таким чином, питання про стійкість схемної функції можна звести до питання про визначення місця розташування коренів її знаменника - полюсів. Через те, що у більшості випадків знаходження коренів полінома степеня більше 2 важко, то для дослідження стійкості використовують так звані критерії стійкості.

Критерій стійкості – це метод, що дозволяє визначити, чи має поліном корінь у правій напівплощині чи ні, без безпосереднього обчислення цих коренів.

Поліном, у якого всі корені знаходяться у лівій напівплощині, називається поліномом Гурвіца.

Поліном Гурвіца має такі ознаки :

- усі коефіцієнти дійсні та одного знака;

- наявні всі степені (хоча можуть бути або тільки парні або тільки непарні степені).

До критеріїв стійкості схемних функцій відносять

- частотний критерій Михайлова;
- критерій Рауса-Гурвіца;
- критерій ланцюгового дробу;
- критерій Рауса.

Далі розглянемо ці критерії більш детально.

5.2. Частотний критерій Михайлова

Схемна функція записується виразом

$$F(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_n p^n. \quad (5.2)$$

Вона є стійкою (тобто не має коренів у правій напівплощині), якщо годограф $F(j\omega)$ послідовно пройде n квадрантів проти годинникової стрілки, починаючи з позитивної дійсної осі при зміні частоти від нуля до нескінченності. Цей прохід повинен бути монотонним, без перетворення $F(j\omega)$ у нуль

$$F(j\omega) = a_0 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots + j(a_1\omega + a_3\omega^3 + \dots). \quad (5.3)$$

Цей метод можна довести, якщо знати, як будується АЧХ і ФЧХ за картою нулів та полюсів. Розглянемо, що таке годограф. Припустимо, що при частоті $\omega = \omega_1$ схемна функція дорівнює $F(\omega_1) = A_1 e^{j\varphi_1}$, а при частоті $\omega = \omega_2$ $F(\omega_2) = A_2 e^{j\varphi_2}$.

Крива, що описує кінець вектора $F(\omega)$ при зміні ω , називається годографом (рис. 5.1). Припустимо, що всі корені полінома знаходяться у лівій напівплощині і розташовані, як показано на рис. 5.2.

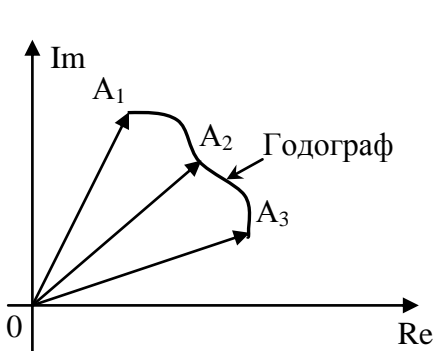


Рисунок 5.1 – Зображення годографа

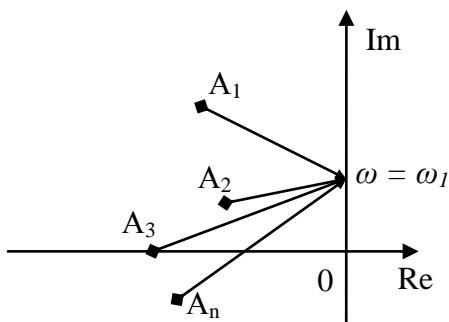


Рисунок 5.2 – Зображення векторів на комплексній площині

Нехай вектори описуються виразом

$$F(p) = a_n(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (5.4)$$

де $p = j\omega$.

Кожен доданок можна подати у вигляді вектора на комплексній площині

$$\dot{F}(j\omega) = |F| \cdot e^{j\varphi(\omega_i)}, \quad (5.5)$$

де $\varphi(\omega_i) = \sum \varphi_i$.

Якщо всі корені знаходяться у лівій напівплощині, то, як видно із рис. 5.2, зі збільшенням частоти сума кутів $\varphi(\omega) = \sum \varphi_i$

буде монотонно зростати до $\frac{\pi}{2} \cdot n$, де n – кількість векторів (коренів полінома). Тобто вектор буде монотонно повертатися проти годинникової стрілки, проходячи n квадрантів при зміні ω від нуля до нескінченності.

5.3. Метод Рауса-Гурвіца

Цей критерій полягає у тому, що необхідною і достатньою умовою наявності коренів у лівій напівплощині є той факт, що всі головні мінори матриці Рауса-Гурвіца повинні бути одного знака.

Для полінома $F(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n$ матриця Рауса-Гурвіца складається таким чином:

- по діагоналі вписуються всі коефіцієнти a_i (у лівому верхньому куті – коефіцієнт при першому степені p , у правому нижньому – при найстаршому);
- праворуч від діагонального елемента записуються коефіцієнти при молодших степенях, аж до вільного члена;
- ліворуч записуються коефіцієнти при старших степенях.

Для полінома п'ятого степеня матриця Рауса-Гурвіца буде мати вигляд:

a_1	a_0	0	0	0
a_3	a_2	a_1	a_0	0
a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	a_5	a_4	a_3
0	0	0	0	a_5

Приклади головних мінорів $M_1 = a_1$, $M_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$.

Усі мінори для цього прикладу знаходимо як визначники виділеної частини матриці щодо головної діагоналі. Коефіцієнти a_i виражаються через елементи схеми, тому і мінори можна виразити через елементи схеми, тобто судити про вплив останніх на стійкість.

5.4. Критерій Гурвіца

Критерій Гурвіца ще по-іншому називають критерієм ланцюгового дробу. Допустимо, що нам відомий поліном знаменника схемної функції

$$F_2(p) = F_{2П}(p) + F_{2Н}(p), \quad (5.6)$$

де $F_{2П}(p)$ складається з парних степенів, а $F_{2Н}(p)$ – непарних степенів.

Критерій полягає у тому, що якщо у процесі ділення зі зверненням полінома парної частини на непарну, або навпа-

ки, всі коефіцієнти розкладання одного знака, то поліном стійкий.

Розглянемо приклад.

Приклад 5.1. Перевірити на стійкість такий поліном:

$$F(p) = 12p^5 + 12p^4 + 16p^3 + 10p^2 + 5p + 1.$$

Розв'язання

Розіб'ємо поліном на парні та непарні поліноми

$$F_{2\Pi}(p) = 12p^4 + 10p^2 + 1; F_{2Н}(p) = 12p^5 + 16p^3 + 5p.$$

Розділимо поліном старшого степеня на молодший:

$$\begin{array}{r}
 12p^5 + 16p^3 + 5p \mid 12p^4 + 10p^2 + 1 \\
 \underline{12p^5 + 10p^3 + p} \\
 6p^3 + 4p \mid \\
 \underline{12p^4 + 8p^2} \\
 6p^3 + 4p \mid \\
 \underline{6p^3 + 3p} \\
 2p^2 + 1 \mid \\
 \underline{2p^2} \\
 p \mid \\
 \underline{p} \\
 0
 \end{array}$$

Оскільки всі поліноми, на які розділено, одного знака, то поліном стійкий.

5.5. Критерій Рауса

Для цього критерію записуємо у два рядки парні та непарні коефіцієнти полінома. Рядки коефіцієнтів c, d, f та наступні формуються за нижчеподаним правилом (аналогічно комбінаціям при розкритті визначника).

Таблиця коефіцієнтів

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{bmatrix},$$

де коефіцієнти визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, & c_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{c_1}, \dots \\ d_1 &= \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1}, & d_2 &= \frac{c_1 a_{n-5} - c_3 a_{n-1}}{c_1}, \dots \\ f_1 &= \frac{d_1 c_{n-3} - d_2 c_{n-1}}{d_1}, & f_2 &= \frac{d_1 c_{n-5} - d_3 c_{n-1}}{d_1}, \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Відповідно до цього критерію поліном буде стійкий, якщо елементи 1-го стовпця наведеної таблиці коефіцієнтів одного знака. У правій напівплощині коренів буде стільки, скільки разів змінюється знак у першому стовпчику.

Приклад 5.2. Перевірити на стійкість заданий поліном:

$$p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p + 30.$$

Розв'язання

Складемо таблицю коефіцієнтів для заданого полінома:

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 30 & \dots & 0 \\ 6 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 10 & 30 & 0 & \dots & c_n \\ -12 & 0 & 0 & \dots & d_n \\ 30 & 0 & 0 & \dots & f_n \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти таблиці визначимо таким чином:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{6 \cdot 11 - 1 \cdot 6}{6} = 10, \\ c_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{c_1} = \frac{6 \cdot 30 - 1 \cdot 0}{10} = 30, \\ d_1 &= \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1} = \frac{10 \cdot 6 - 30 \cdot 6}{10} = -12, \end{aligned}$$

$$d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - c_3 a_{n-1}}{c_1} = \frac{10 \cdot 0 - 0 \cdot 6}{10} = 0,$$

$$f_1 = \frac{d_1 c_{n-3} - d_2 c_{n-1}}{d_1} = \frac{-12 \cdot 30 - 0 \cdot 10}{-12} = 30.$$

Отже, поліном нестійкий, оскільки два корені у правій площині, а перший стовпець матриці два рази змінив знак.

5.6. Умови автогенерації гармонічних коливань

Автоколивання виникають у автоколивальних колах. Автоколивальними колами називаються активні електричні кола, у яких без сторонніх дій виникають електричні коливання. Такі кола називаються автогенераторами, або частіше генераторами.

Автогенератори використовуються в радіотехніці для одержання електромагнітних коливань. Залежно від форми створюваних коливань існують генератори гармонічних та негармонічних коливань. За принципом дії генератори діляться на генератори із зовнішнім зворотним зв'язком та зовнішнім зворотним звуком, тобто із від'ємним опором. Нарешті різницею елементної бази пасивної частини схеми генератора є LC-генератори та RC-генератори. Як активні елементи в генераторах використовуються електронні лампи, біполярні та польові транзистори, тунельні діоди та інші.

Розглянемо паралельний коливальний контур, що складається із паралельно з'єднаних індуктивності, ємності та опору. Якщо до контуру підвести деяку кількість енергії, то у контурі виникнуть вільні коливання.

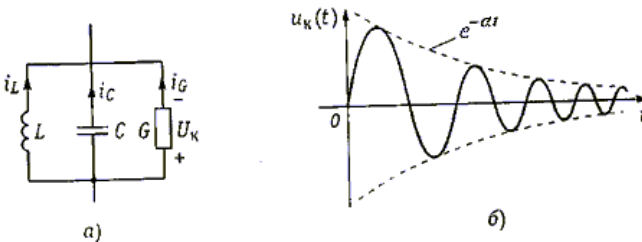


Рисунок 5.3

Диференціальне рівняння, що описує контур,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{2L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Щоб у колі мав місце коливальний характер перехідного процесу, необхідно, щоб корені рівняння були комплексно-спряжені.

У цьому разі рівняння має такий розв'язок:

$$u(t) = E_m e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi),$$

де E_m – початкова амплітуда напруги на контурі, що залежить від введеної до контуру енергії; ω_B – частота власних коливань, φ – початкова фаза.

Оскільки $\alpha > 0$, то коливання мають згасаючий характер, що пояснюється втратами у контурі через наявності у колі активного опору. Щоб перетворити такий генератор у генератор незгасаючих коливань, необхідно компенсувати в ньому втрати, тобто поповнювати контур енергією.

Причому якщо енергії у контур вводиться рівно стільки, скільки необхідно для компенсації втрат, то це еквівалентне внесенню у контур від'ємного опору, при цьому результуючий опір контуру становиться нульовим. Коли $\alpha = 0$, у контурі виникають незгасаючі коливання.

У випадку, коли енергії у контур вводиться більше, ніж необхідно для компенсації втрат (тобто від'ємний опір більше, ніж додатній опір контуру), то у контурі виникають зростаючі за амплітудою коливання, оскільки коефіцієнт згасання стає від'ємним.

Енергію у контурі можна поповнювати, наприклад, за рахунок власних коливань, що знімаються із контуру, та підсиленних підсилувачем.

Розглянемо процес виникнення коливань в автогенераторі або механізм самозбудження генератора та встановлення коливань визначеної амплітуди, тобто стаціонарний режим роботи генератора.

Причиною виникнення коливань в автогенераторі є флуктуації (випадкові коливання) струму в елементах реальної схеми (за рахунок теплового руху електронів у активних елементах та резисторах, дробового ефекту і т. д.), а також за рахунок зовні-

шніх завод. Флукутації струму, що проходить через контур, що викликають флукутації напруги на контурі. Спектр цих випадкових збуджень дуже широкий та містить складові всіх частот.

Складові напруги контуру u_K із частотами, що близькі до резонансної частоти контуру ω_0 , мають найбільшу амплітуду, оскільки модуль комплексного еквівалентного опору контуру є найбільшим.

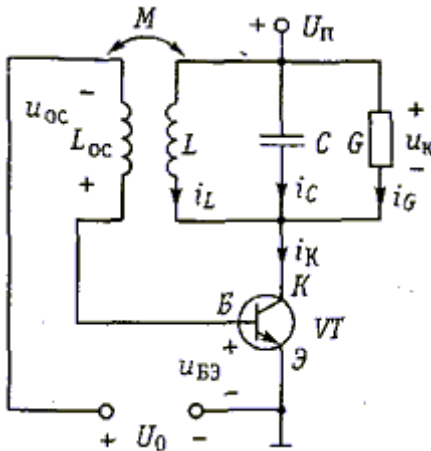


Рисунок 5.4

Виділена на контурі гармонічна напруга із частотою ω_0 через коло зворотного зв'язку, що утворена вторинною обмоткою трансформатора, передається на вхід транзистора, що утворює напругу u_K . Ця напруга викликає збільшення колекторного струму i_K , що, у свою чергу, приведе до збільшення напруги на контурі u_K .

Як наслідок цього, збільшуються напруга зворотного зв'язку u_{0C} та напруга u_K , а отже, знову збільшуються колекторний струм та напруга на контурі u_K і т. д.

Таким чином, у замкненій системі автогенератора самозбуджуються коливання частоти, близькі до резонансної частоти контуру ω_0

Важливою умовою виникнення коливань є те, що фаза напруги u_{BE} повинна бути такою, за якої збільшення напруги u_K викликає збільшення колекторного струму i_K і тим самим породжує нове збільшення u_K . Ця умова і є умовою балансу фаз. Баланс фаз у схемі досягається за рахунок правильного ввімкнення вторинною обмотки трансформатора. За іншого включення обмотки збільшення напруги на контурі u_K приведе до зменшення колекторного струму i_K , тобто баланс фаз не виконається і самозбудження не відбудеться.

Зворотний зв'язок, за якого виконується баланс фаз, є додатним зворотним зв'язком. У іншому випадку зворотний зв'язок є від'ємним. Самозбудження автогенератора можливе лише за наявності додатного зворотного зв'язку.

Процес самозбудження коливань у контурі з енергетичної точки зору пояснюється тим, що від джерела живлення за допомогою транзистора у контур за один період коливань надходить енергії більше, ніж витрачається її у резистивному опорі контуру. Це еквівалентне внесенню до контуру еквівалентного опору, що перевищує за величиною активний опір контуру, що приводить до від'ємного значення коефіцієнта загасання контуру α і відповідно до виникнення у контурі наростаючих коливань.

Доки амплітуда напруги u_{BE} була малою, робота проходила на лінійній ділянці ВАХ транзистора. Зі збільшенням амплітуди коливання у контурі збільшується напруга зворотного зв'язку u_{33} і відповідно вхідна напруга транзистора u_{BE} при цьому все сильніше виявляється нелінійність ВАХ транзистора. Нарешті, при досить великих амплітудах коливань струм колектора i_K припиняє збільшуватися, значення напруги на контурі u_K , зворотного зв'язку u_{33} та вхідна u_{BE} стабілізуються, в автогенераторі встановиться стаціонарний динамічний режим із постійною амплітудою коливань та частотою генерації, що близька до резонансної частоти коливального контуру ω_0 . Таким чином, стаціонарні коливання у автогенераторі встановлюються тільки завдяки наявності не лінійності ВАХ транзистора.

У стаціонарному режимі енергія, що надходить до контуру, вся розсіюється у активному опорі контуру, тобто внесений у контур активний опір виявляється таким, що дорівнює активному опору контуру та повністю компенсує його. Коефіцієнт загасання контуру α перетворюється в нуль. У контурі існують незгасаючі гармонічні коливання.

5.7. Узагальнена схема автогенератора

Схема автогенератора повинна містити активний елемент із нелінійною ВАХ, коливальну систему (контур), коло додатного зворотного зв'язку, за яким коливання із виходу коливальної системи подається на вхід активного елемента. Такі автогенератори є генераторами із зовнішнім зворотним зв'язком. Структурна схема таких автогенераторів наведена на рис. 5.5.

Для того щоб у генераторі відбувалося самозбудження коливань, необхідно, щоб модуль комплексної напруги зворотного зв'язку на виході схеми був більше модуля комплексної напруги на виході схеми. Звідки одержуємо

$$|K_{\text{під}}| \cdot |K_{\text{зз}}| > 1.$$

При наближенні до стаціонарного режиму модуль комплексного коефіцієнта передачі підсилювача за рахунок впливу нелінійності починає зменшуватися до того часу, поки не наступить динамічна рівновага

$$|K_{\text{під}}| \cdot |K_{\text{зз}}| = 1.$$

Цей вираз відповідає стаціонарному режиму, який ще називають балансом амплітуд. Оскільки величини комплексні, то визначимо умову балансу фаз

$$\varphi_{\text{під}} + \varphi_{\text{зз}} = 2\pi n.$$

Баланс фаз полягає у тому, що збіг фази напруг на вході та виході схеми буде, коли сума фаз підсилювача та кола зворотного зв'язку буде 2π . Таким чином, зсув фази у колі зворотного зв'язку залежить від зсуву фаз у підсилювачі та доповнює його до 2π . Якщо на частоті генерованих коливань підсилювач вносить зсув фаз $\varphi_{\text{під}} = \pi$, то коло зворотного зв'язку повинне вносити зсув фаз $\varphi_{\text{зз}} = \pi$.

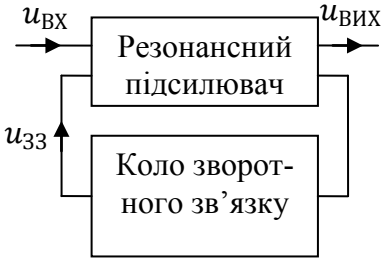


Рисунок 5.5

У схемі, що зображена на рис. 5.4, поворот фази напруги кола зворотного зв'язку на 180° досягається за рахунок відповідного ввімкнення обмоток катушки індуктивності L_{33} .

Генератор як коло із зворотним зв'язком описується характеристичним рівнянням

$$1 - K_{\text{ПД}} \cdot K_{33} = 0.$$

5.8. Індуктивна та ємнісна триточки

Недоліком LC-автогенераторів із трансформаторним зворотним зв'язком є наявність двох індуктивно зв'язаних котушок. Тому на практиці частіше використовуються схеми LC-автогенераторів із автотрансформаторним зворотним зв'язком, у яких напруга зворотного зв'язку знімається із частини коливального контуру. Таку схему ще називають індуктивною триточкою (рис. 5.6 а). Елементи C , L_1 , L_2 утворюють коливальний контур. Резистор R_B є елементом кола автоматичного зсуву, через який проходить постійна складова струму бази, ємність C_B перешкоджає потраплянню напруги живлення на базу та впливає на сталу часу кола автозсуву. На рис. 5.6 б наведена еквівалентна схема індуктивної триточки за змінним струмом, тобто кола живлення та зсуву на рисунку не зазначені.

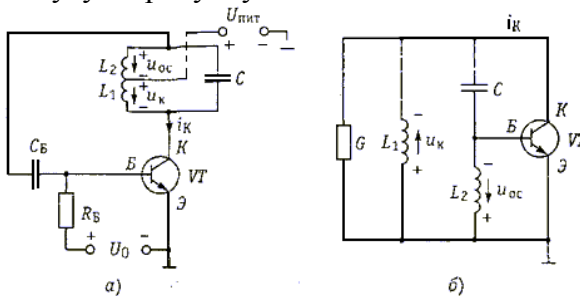


Рисунок 5.6

Як правило, вважають, що вхідний опір транзистора настільки великий, що струмом бази можна знехтувати. У цьому випадку елементи C , L_1 , L_2 утворюють триелементний реактивний двополюсник, у якому спочатку відбувається резонанс струмів, а потім резонанс напруг у контурі C , L_2 . Генерація коливань відбувається на частоті резонансу струмів

$$\omega_{\Gamma} = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$$

Опір контуру на цій частоті є чисто резистивним та набрав максимального значення, що дорівнює $1/G$.

Колом зворотного зв'язку у цій схемі є подільник напруги, що утворюється ємністю C та індуктивністю L_2 . Дійсно напруга, що знімається із виходу транзистора, що прикладена до коливального контуру, тобто до гілки CL_2 . Напруга зворотного зв'язку знімається із індуктивності L_2 та подається на вхід підсилювального елемента. Підсилювальний каскад на одному транзисторі за схемою включення зі спільним емітером повертає фазу сигналу на 180° . Для збереження балансу фаз коло зворотного зв'язку повинне вносити фазовий зсув 180° . Струм у гілці CL_2 через ємнісний характер її опору випереджає напругу на контурі u_K на 90° . У свою чергу, напруга зворотного зв'язку u_{33} на індуктивності L_2 випереджає струм ще на 90° . Таким чином, зсув фаз між напругою u_K та u_{33} становить 180° .

Комплексний коефіцієнт підсилення підсилювача на резонансній частоті

$$K_{\text{під}} = -SZ_K(\omega) = -SR = -\frac{S}{G}$$

Комплексний коефіцієнт передачі за напругою кола зворотного зв'язку

$$K_{33} = \frac{u_{L2}}{u_K} = \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-\omega^2 L_2 C}{1 - \omega^2 L_2 C}$$

На частоті генерації

$$K_{33} = \frac{-\omega^2 L_2 C}{1 - \omega^2 L_2 C} = -\frac{L_2}{L_1} = \frac{L_2}{L_1} e^{j\pi}.$$

У режимі самозбудження, тобто коли $|K_{\text{ПД}}| \cdot |K_{33}| > 1$, маємо

$$\frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{S}{G} > 1 \quad \text{або} \quad \frac{L_1}{L_2} < \frac{S}{G}.$$

Для стаціонарності режиму, коли виконується баланс амплітуд, можна визначити стаціонарне значення середньої крутизни :

$$S_{\text{сеп}} = \frac{L_1 G}{L_2}.$$

Якщо у попередній схемі (рис. 5.6) використовувати реактивний двополюсник із зворотною частотною залежністю опору, то одержана схема буде називатися ємнісною триточкою (рис. 5.7).

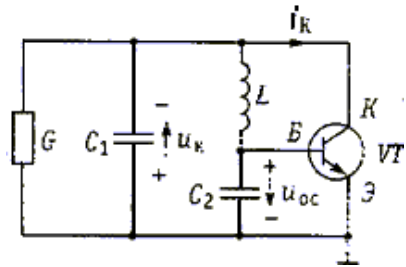


Рисунок 5.7

Генерація коливань у цій схемі буде відбуватися на частоті резонансу струмів

$$\omega_{\Gamma} = \omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}.$$

На резонансній частоті опір коливального контуру буде активним та максимальним за величиною. Коло зворотного зв'язку являє собою подільник напруги, що утворений індуктивністю L та ємністю C_2 .

Аналогічно на частоті генерації одержуємо комплексний коефіцієнт передачі кола зворотного зв'язку

$$K_{33} = \frac{1/j\omega C_2}{j\omega L + 1/j\omega C_2} = \frac{1}{1 - \omega^2 C_2 L} = -\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} e^{j\pi}.$$

Із умови балансу амплітуд визначаємо умову збудження ємнісної триточки :

$$\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{S}{G} > 1 \quad \text{або} \quad \frac{C_2}{C_1} < \frac{S}{G}.$$

Визначимо стаціонарне значення середньої крутизни

$$S_{\text{сеп}} = \frac{C_2 G}{C_1}.$$

5.9. RC-генератори

На порівняно низьких частотах, де реалізація RL-контурів виявляється складною через великі габарити та масу, низької добротності та неможливості переналаштування, використовують RC-автогенератори. Вони являють собою комбінацію активних чотириполіусників (підсилювачів) та пасивних RC-кіл для створення зворотного зв'язку.

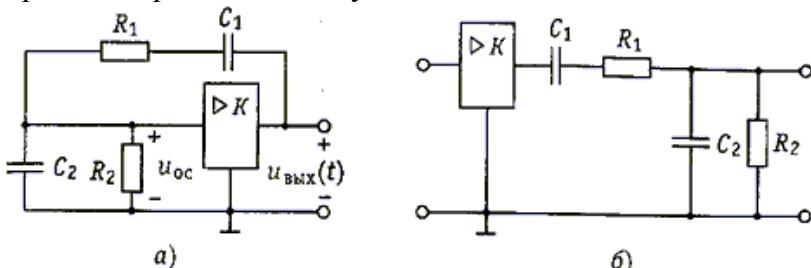


Рисунок 5.8

На рис. 5.8 а зазначена схема RC-автогенератора із мостом Віна, яка являє собою підсилювач із коефіцієнтом підсилення K , між входом та виходом якого ввімкнене RC-коло. Підсилювач із заданим коефіцієнтом підсилення можна реалізувати на операційному підсилювачі за схемою неінвертованого підсилювача. Схема генератора із розімкненим колом зворотного зв'язку наведена на рис. 5.8 б. Передавальна функція кола зворотного зв'язку визначається виразом

$$K_{33} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{pR_2C_1}{p^2R_1R_2C_1C_2 + p(R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1) + 1},$$

де

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{1}{pC_1} = \frac{pC_1R_1 + 1}{pC_1};$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{R_2}{pR_2C_2 + 1}.$$

Частота генерації такого генератора визначається

$$\omega_{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}.$$

Оскільки генератор як коло зі зворотним зв'язком описується характеристичним рівнянням $1 - K_{\text{ПД}} \cdot K_{33} = 0$, то характеристичне рівняння генератора із колом зворотного зв'язку у вигляді моста Віна визначається так:

$$p^2R_1R_2C_1C_2 + p(R_1C_1 + R_2C_2 + (1 - K)R_2C_1) + 1 = 0.$$

Режиму самозбудження відповідає розміщення коренів характеристичного рівняння, що описує коло Віна у правій напівплощині, що має місце, коли

$$R_1C_1 + R_2C_2 + (1 - K)R_2C_1 < 0.$$

Отже, самозбудження генератора починається, коли коефіцієнт передачі підсилювача

$$K > \frac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1}{R_2C_1} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}.$$

Якщо взяти $R_1 = R_2$ та $C_1 = C_2$, то коливання на виході генератора з'являться при $K > 3$.

Ще існує RC-автогенератор із сходишковою схемою кола зворотного зв'язку. На рис. 5.9 показана схема однокаскадного транзисторного автогенератора, між входом та виходом якого ввімкнене сходишкове пасивне RC-коло. Для спрощення рисунка коло зміщення на ньому не наведене.

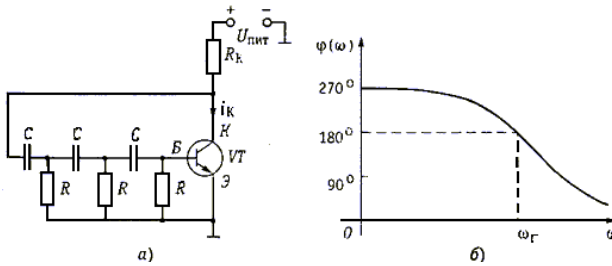


Рисунок 5.8

Для виникнення генерації коливань необхідно, щоб напру- га зворотного зв'язку, що подається на вхід генератора, неперер- вно збільшувалося. Це можливе тоді, коли підсилення підси- лювального каскаду більше ослаблення, що вносить коло зворот- ного зв'язку. Крім того, повинна виконуватися умова балансу фаз. Оскільки один каскад транзисторного підсилювача, що вві- мкнений за схемою із спільним емітером, вносить зсув фаз 180° , то коло зворотного зв'язку також повинне вносити зсув фаз 180° , щоб загальний зсув фаз був 360° .

Найпростіше RC-коло вносить зсув фаз, що не перевищує 90° , тому для забезпечення необхідного зсуву фаз потрібно взя- ти число таких кіл не менше трьох. Залежність зсуву фаз від ча- стоти RC-кола із трьох ланок показана на рис. 5.8 б. Елементи RC-кола розраховують таким чином, щоб на частоті генерації одержати зсув фаз 180° . У стаціонарному режимі, крім балансу фаз, виконується також баланс амплітуд. При цьому підсилення підсилювального каскаду дорівнює послабленню кола зворотно- го зв'язку.

Комплексний коефіцієнт підсилення підсилювача

$$K_{\text{Під}} = -SR_K = SR_K e^{j\pi}.$$

Коло зворотного зв'язку має комплексний коефіцієнт пе- редачі

$$K_{\text{ЗЗ}} = \frac{1}{1 - 5\omega^2 R^2 C^2 + j\omega RC(6 - \omega^2 R^2 C^2)}.$$

Фаза кола зворотного зв'язку повинна бути $\varphi_{\text{ЗЗ}} = \pi$. Це буде мати місце при $6 - \omega^2 R^2 C^2 = 0$, звідки визначаємо частоту генерації $\omega_\Gamma = \sqrt{6}/RC$.

При цьому передавальна функція кола зворотного зв'язку дорівнює

$$K_{зз}(\omega_{\Gamma}) = \frac{1}{1 - 5\omega^2 R^2 C^2} = -\frac{1}{29} = \frac{1}{29} e^{j\pi}.$$

Недоліком RC-автогенераторів є те, що у стаціонарному режимі за рахунок нелінійності ВАХ відбувається спотворення форми струму у колі колектора. Вихідна напруга знімається із опору R_K та має ту саму форму, що й струм, тобто є несинусоїдальним. Для одержання форми коливань, що є близькою до гармонічної, потрібно, щоб коливання не виходило за межі лінійної ділянки ВАХ. Тому на практиці зростання коливань обмежується не нелінійністю транзистора, а спеціальним нелінійним елементом, ті яким є терморезистори.

5.10. Приклад розв'язання задачі

Приклад 5.3. У колі (рис. 5.3) визначити, за якого значення параметра m коефіцієнт передачі за напругою буде нестійким. Числові значення елементів кола: $C_1 = 1$ нФ, $C_2 = 1$ нФ, $E = mU_{20}$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 1$ кОм.

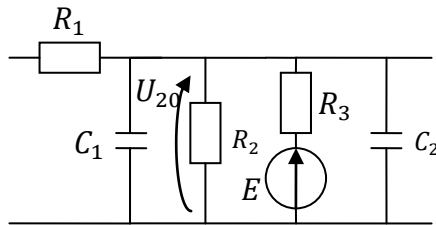


Рисунок 5.3

Розв'язання

Перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 5.4).

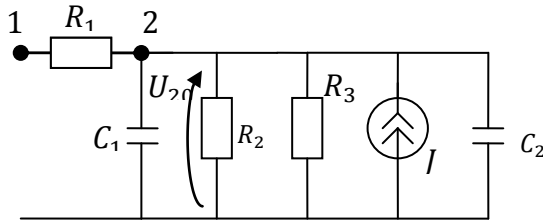


Рисунок 5.4

Визначимо величину утвореного джерела струму, що керується напругою

$$J = \frac{E}{R_3} = \frac{mU_{20}}{R_3} = \frac{mU_{20}}{1} = mU_{20}.$$

Пронумеруємо вузли у схемі (рис. 4) та запишемо систему рівнянь на основі методу вузлових напруг :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 + pC_1 + pC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Замість значення джерела струму J підставимо його вираз

$$J = mU_{20}:$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ mU_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 + pC_1 + pC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Перенесемо струм із лівої частини рівняння у праву, причому цей струм запишеться у другий рядок, оскільки він стоїть у другому стовпчику, та у другий стовпчик зі знаком «-», оскільки він керується напругою U_{20} :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 + pC_1 + pC_2 - m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення та запишемо матрицю провідностей окремо:

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 + pC_1 + pC_2 - m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 + 2p - m \end{bmatrix}.$$

Запишемо коефіцієнт передачі за напругою:

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-1)}{(-1)^{1+1} \cdot (3 + 2p - m)} = \frac{1}{3 + 2p - m}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою буде нестійким, коли корені полінома знаменника будуть знаходитися у правій напівплощині.

Визначимо корені полінома знаменника $3 + 2p - m = 0$, звідси визначаємо, що $p = (m - 3)/2$. Цей корінь буде знаходитись у правій напівплощині, коли $p > 0$, тобто $m - 3 > 0$, отже, $m > 3$.

5.11. Завдання для самостійної роботи на практичних заняттях

Задача 5.1. Визначити, за якого значення параметра m для схеми (рис. 5.5) коефіцієнт передачі за напругою буде нестійким. Числові значення елементів: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $C = 1$ нФ. Джерело напруги $E = mU_{20}$ є джерелом напруги, що керується напругою.

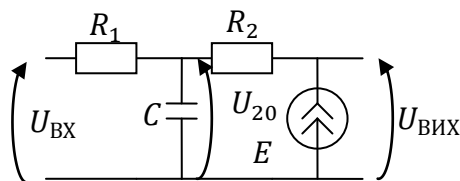


Рисунок 5.5

Задача 5.2. Визначити, за якого значення параметра S для схеми (рис. 5.6) коефіцієнт передачі за напругою буде нестійким. Числові значення елементів: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $R_4 = 1$ кОм, $C = 1$ нФ. Джерело струму $J = SU_{20}$ є джерелом струму, що керується напругою.

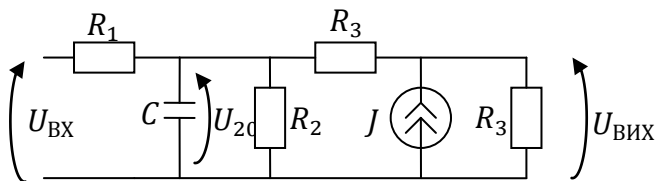


Рисунок 5.6

Задача 5.3. Визначити, за якого значення параметра m для наведеної схеми (рис. 5.7) коефіцієнт передачі за напругою буде нестійким. Числові значення елементів кола: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $R_4 = 1$ кОм, $C = 1$ нФ. Джерело напруги $E = mU_{20}$ є джерелом напруги, що керується напругою .

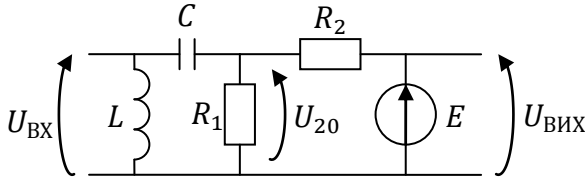


Рисунок 5.7

Задача 5.4. Визначити, за якого значення параметра m коефіцієнт передачі за напругою буде нестійким (рис. 5.8). Числові значення елементів кола: $C = 2$ нФ, $L = 1$ мГн, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм. Джерело напруги $E = mU_{20}$ є керованим.

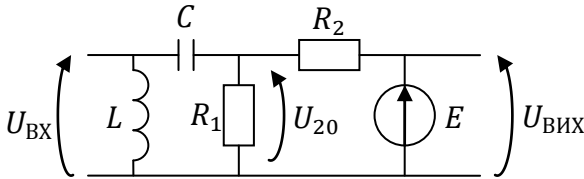


Рисунок 5.8

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник для ВУЗов. – М. : Энергия, 1969. – 424с.
2. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / под ред. Л. А. Бессонова. – М. : Высшая школа, 1975. – 487с.
3. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей. / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – Л. : Энергия, 1972. – 815с.
4. Электротехника : учебное пособие. / Ю. М. Мурзин, Ю. И. Волков. – СПб. : Питер, 2006. – 448с.
5. Методичні вказівки до виконання курсової роботи на тему «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» з дисципліни «Теорія електричних і магнітних кіл» / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2008. – 74с.
6. Новгородцев А. Б. 30 лекций по теории электрических цепей. - СПб. : Политехника, 1995. - 520с.
7. Теоретические основы электротехники: сборник задач./ Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, Е. Е. Селина, В. Л. Чечурина. – СПб. :Питер, 2004. – 512с.
8. Сборник задач и практикум по основам теории электрических цепей. – 2-е изд. / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева. – СПб. : Питер, 2007. – 300с.
9. Теоретические основы электротехники : в 3-х т: учебник для вузов. – 4-е изд. / К. С. Демирчан, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004. – Т.2. – 576с.
10. Теоретические основы электротехники: справочник по теории электрических цепей / под ред. Ю. Бычкова, В. Золотницкого, Э. Чернышева, 2007. – 352с.
11. Задачник по теории линейных электрических цепей: учебное пособие. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высшая школа, 1990. – 544с.

12. Теоретические основы электротехники: справочник по теории электрических цепей / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э П. Чернышева. – СПб. : Питер, 2008. – 349с.
13. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «ТЕМК» за темою «Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / укладач А. В. Булашенко. – Суми : СумДУ, 2008 – 54 с.
14. Теорія електричних та магнітних кіл : конспект лекцій у п'яти частинах. Частина 1. Лінійні електричні кола постійного та змінного струмів / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2010. – 183с.
15. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах. Частина 2. Складні лінійні та нелінійні електричні кола / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2010. – 175с.
16. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах. Частина 3. Перехідні процеси у лінійних електричних колах / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2010. – 220с.

Додаток А
(ДОВІДКОВИЙ)

Таблиця перетворення Лапласа

Таблиця А.1 – Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$(1 - at)e^{\pm at}$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin(\psi) + \omega_0 \cdot \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \cos(\varphi) - \omega_0 \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$ch(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$	$1 - e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(1 + ap)}$
$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{(p - a)p^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p - a)^3}$	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$
$\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$ch^2(at)$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$	$sh^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$

Додаток Б
(ДОВІДКОВИЙ)

Корисні тригонометричні формули

1. Формули додавання аргументів :

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y ;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y ;$$

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tg x tg y} ;$$

$$ctg(x \pm y) = \frac{ctg x ctg y \mp 1}{ctg y \pm ctg x} .$$

2. Формули зниження степеня :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} ;$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} ;$$

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} ;$$

$$\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4} ;$$

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} ;$$

$$\cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} .$$

3. Формули перетворення добутку функцій :

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} ;$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2} ;$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2} .$$

Продовження додатка Б

4. Формули перетворення суми функцій :

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y};$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}.$$

5. Формули подвійного та потрійного кутів :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3\cos x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x};$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x}.$$

6. Допоміжний аргумент :

$$a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x \pm \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right);$$

$$a \cos x \pm b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x \mp \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Продовження додатка Б

7. Формули Ейлера :

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2};$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x; \quad e^{-jx} = \cos x - j \sin x.$$

8. Деякі значення тригонометричних функцій

Кут x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	-
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	-
2π	0	1	0	-

Формула інтегрування частинами

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Суть методу: якщо підінтегральна функція подана у вигляді добутку двох неперервних та гладких функцій (кожна з яких може бути як елементарною функцією, так і композицією).

Додаток В
(довідковий)

Корисні формули диференціювання

Правила диференціювання

Нехай задані диференційовані функції $U = u(x)$, $V = v(x)$.

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій :

$$\frac{d}{dx} [U \pm V] = \frac{d}{dx} [U] \pm \frac{d}{dx} [V].$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$\frac{d}{dx} [U \cdot V] = \frac{d}{dx} [U] \cdot V + \frac{d}{dx} [V] \cdot U.$$

3. Похідна частки визначається виразом

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{U}{V} \right] = \frac{\frac{d}{dx} [U] \cdot V - \frac{d}{dx} [V] \cdot U}{V^2}.$$

Суть методу: якщо підінтегральна функція подана у вигляді добутку двох неперервних та гладких функцій (кожна з яких може бути як елементарною функцією, так і композицією).

Формула інтегрування частинами

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

Продовження додатка В

Таблиця похідних деяких функцій

Функція	Похідна функції	Функція	Похідна функції
$\sin x$	$\cos x$	x^c	cx^{c-1}
$\cos x$	$-\sin x$	$ x $	$\text{sign } x$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$
e^x	e^x	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	c^x	$c^x \ln c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arcctg } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\text{arcsec } x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{ch } x$	$\text{sh } x$

Навчальне видання

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

для студентів напрямку 0502 «Системна інженерія»
усіх форм навчання

**Розділ
«ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ
ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ
ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ»**

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей
Редактор Т. Г. Чернишова
Комп'ютерне верстання А. В. Булашенка

Підп. до друку 01.09.2012, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 13,48. Обл.-вид. арк. 8,76. Тираж 40 пр. Зам. №
Собівартість видання грн. к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

А. В. Булашенко

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

для студентів напряму 0502 «Системна інженерія»
усіх форм навчання

**Розділ
«ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ
ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ
ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ»**

Суми
Сумський державний університет
2012

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

До друку та в світ
дозволяю на підставі
«Єдиних правил», п.2.6.14
Заступник першого проректора –
начальник організаційно-методичного
управління

В. Б. Юскаєв

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Розділ
«ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ
ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ
ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ»
для студентів напрямку 0502 «Системна інженерія»
усіх форм навчання

Усі цитати, цифровий
та фактичний матеріал,
бібліографічні
відомості перевірені,
написання одиниць
відповідає стандартам

Укладач

А.В. Булашенко

Відповідальний за випуск

Г.М. Худолей

Директор Шосткинського інституту

В.Л. Акуленко

Суми
Сумський державний університет
2012