Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко

# Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання

У двох частинах

**Частина 1**
**Механіка. Термодинаміка.**
**Електростатика**

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України

Суми
Сумський державний університет
2013

УДК 577.3 (075.8)
ББК 28.071я73
Л 99

Рецензенти:
*Ю. В. Головач* – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач лабораторії Інституту фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів);
*Л. С. Метлов* – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Донецького фізико-технічного інституту НАН України ім. О. О. Галкіна;
*В. М. Береснєв* – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри матеріалів реакторобудування Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-20009 від 25.12.2012 р.)*

**Ляшенко Я. О.**
Л 99 Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 1. Механіка. Термодинаміка. Електростатика : / Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко. – Суми : Сумський державний університет, 2013. – 224 с.
ISBN 978-966-657-457-5
ISBN 978-966-657-458-2 (Частина 1)

У посібнику наведено приклади розв'язання задач з фізики та задачі для самостійного розв'язування за темами, що вивчаються в першому семестрі студентами вищих навчальних закладів зі спеціальностей медичного напряму. Посібник також може бути корисним для студентів спеціальностей, де фізика є загальноосвітньою дисципліною.

**УДК 577.3(075.8)**
**ББК 28.071я73**

ISBN 978-966-657-457-5
ISBN 978-966-657-458-2 (Частина 1)

# Зміст

# 1. Рух та тиск рідин. Сила Архімеда

## Основні формули

- Рівняння Бернуллі для точок ідеальної рідини, що належать одному потоку:

$$p_{\text{ст}} + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}, \quad (1.1)$$

де $p_{\text{ст}}$ – статичний тиск (Па); $\rho v^2/2$ – динамічний тиск (Па); $\rho g h$ – гідростатичний тиск (Па); $\rho$ – густина рідини (кг/м$^3$); $v$ – швидкість руху рідини (м/с); $h$ – висота відповідної точки рідини відносно деякого рівня, наприклад рівня Землі (м); $g$ – прискорення вільного падіння (м/с$^2$).

- Тиск рідини на дно посудини (гідростатичний тиск)

$$p = \rho g h. \quad (1.2)$$

- Середній тиск рідини на бічну стінку посудини

$$p = \frac{\rho g h}{2}. \quad (1.3)$$

- Сила тиску

$$F = pS, \quad (1.4)$$

де тиск $p$ (Па) діє на площу $S$ (м$^2$).

- Рівняння неперервності лінії потоку

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (1.5)$$

де $S_1, S_2$ – площі поперечних перерізів струму рідини (м$^2$); $v_1, v_2$ – швидкості рідини у цих перерізах (м/с).

- Закон для сполучених посудин:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (1.6)$$

де $h_1, h_2$ – висоти стовпів рідин відносно межі поділу (м); $\rho_1, \rho_2$ – густини рідин (кг/м$^3$).

## 1. Рух та тиск рідин. Сила Архімеда

- Сила Архімеда
$$F_A = \rho_{\text{р(г)}} g V_{\text{т}}, \tag{1.7}$$
де $\rho_{\text{р(г)}}$ – густина рідини або газу, в якому знаходиться тіло (кг/м$^3$); $V_{\text{т}}$ – об'єм тіла, якщо воно занурене повністю, або об'єм зануреної частини тіла, якщо воно плаває на поверхні рідини (м$^3$).

- Сила тяжіння, що діє на тіло масою $m$:
$$F_{\text{т}} = mg. \tag{1.8}$$

- Умова плавання тіла в рідині
$$F_{\text{А}} = F_{\text{т}}. \tag{1.9}$$

### Приклади розв'язання задач

**1.1.** Швидкість течії рідини в деякому перерізі горизонтальної труби $v_1 = 5$ см/с. Знайдіть швидкість течії в тій частині труби, яка має: а) вдвічі менший діаметр; б) вдвічі меншу площу поперечного перерізу.

| |
|---|
| $v_1 = 0,05$ м/с,<br>а) $D_1 = 2D_2$,<br>б) $S_1 = 2S_2$ |
| а) $v_2$–?<br>б) $v_2$–? |

За час $t$ рідина пройде по трубі шлях $l$, який визначається за формулою
$$l = vt,$$
де $v$ – швидкість руху рідини. Щоб знайти об'єм рідини, який проходить по циліндричній трубі, потрібно знайти об'єм циліндра рідини, який переміщується за час $t$ через нерухомий переріз труби $S$. Для цього пройдений рідиною шлях $l$ потрібно помножити на переріз труби $S$. Із урахуванням першого співвідношення об'єм $Q$ буде дорівнювати
$$Q = Svt.$$

Якщо труба має різні перерізи, через кожен із них за один і той самий момент часу $t$ повинні пройти однакові об'єми $Q$, отже, маємо
$$S_1 v_1 t = S_2 v_2 t,$$

або, скорочуючи час $t$,
$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Ми отримали рівняння неперервності (1.5). Зараз перейдемо до розгляду окремих випадків задачі. У випадку а) подане співвідношення діаметрів $D_1 = 2D_2$. Знаючи діаметр, можна знайти площу перерізу циліндра (площу кола):
$$S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Отже, із урахуванням двох останніх формул маємо
$$\frac{\pi D_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2, \quad D_1^2 v_1 = D_2^2 v_2, \quad v_2 = \frac{D_1^2 v_1}{D_2^2} = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$
або після підстановки умови $D_1 = 2D_2$
$$v_2 = v_1 \left(\frac{2D_2}{D_2}\right)^2 = 4v_1 = 4 \cdot 0,05 = 0,2 \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = 20 \ \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

У випадку б) подане відношення перерізів $S_1 = 2S_2$. Отже, використаємо безпосередньо рівняння неперервності:
$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2},$$
або із урахуванням умови задачі
$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{2S_2 v_1}{S_2} = 2v_1 = 2 \cdot 0,05 = 0,1 \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = 10 \ \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

**1.2.** Із горизонтально розташованого медичного шприца діаметром $1,5$ см видавлюється фізіологічний розчин із силою $F = 10$ Н. Знайти швидкість витікання рідини з голки шприца. Густина фізіологічного розчину $\rho = 1,03$ г/см$^3$. Переріз поршня значно більший за переріз голки. Чому швидкість витікання розчину не залежить від перерізу голки?

| |
|---|
| $D_\text{п} = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, |
| $F = 10$ Н, |
| $\rho = 1030$ кг/м$^3$, |
| $S_\text{п} \gg S_\text{г}$ |
| $v_\text{г}$—? |

Позначимо переріз поршня (шприца), діаметр шприца та швидкість руху в ньому як $S_\text{п}, D_\text{п}, v_\text{п}$, а такі самі величини, що відносяться до голки, — $S_\text{г}, D_\text{г}, v_\text{г}$. Запишемо для шприца рівняння Бернуллі (1.1):
$$(p_\text{ст})_\text{п} + \frac{\rho v_\text{п}^2}{2} + \rho g h_\text{п} = (p_\text{ст})_\text{г} + \frac{\rho v_\text{г}^2}{2} + \rho g h_\text{г}.$$

## 1. Рух та тиск рідин. Сила Архімеда

Оскільки шприц за умовою задачі розташований горизонтально, висота голки буде дорівнювати висоті шприца ($h_\text{г} = h_\text{п}$). Із урахуванням цієї обставини останнє рівняння спрощується:

$$(p_\text{ст})_\text{п} + \frac{\rho v_\text{п}^2}{2} = (p_\text{ст})_\text{г} + \frac{\rho v_\text{г}^2}{2}.$$

Статичний тиск, що діє з боку голки, дорівнює атмосферному:

$$(p_\text{ст})_\text{г} = p_\text{атм}.$$

Атмосферний тиск діє також і на шприц, але на нього додатково діє тиск, що створюється силою $F$, який може бути визначений за формулою (1.4). Отже, тиск усередині шприца — це сума двох компонент:

$$(p_\text{ст})_\text{п} = p_\text{атм} + \frac{F}{S_\text{п}}.$$

Підставляючи два останніх співвідношення у спрощене рівняння Бернуллі, маємо

$$p_\text{атм} + \frac{F}{S_\text{п}} + \frac{\rho v_\text{п}^2}{2} = p_\text{атм} + \frac{\rho v_\text{г}^2}{2},$$

$$\frac{F}{S_\text{п}} + \frac{\rho v_\text{п}^2}{2} = \frac{\rho v_\text{г}^2}{2}.$$

Останнє рівняння має ще простіший вигляд, ніж раніше, однак для знаходження швидкості витікання розчину з голки потрібне значення швидкості течії рідини всередині шприца, а цієї величини в умові задачі немає. Використаємо рівняння неперервності:

$$S_\text{п} v_\text{п} = S_\text{г} v_\text{г}, \quad v_\text{п} = v_\text{г} \frac{S_\text{г}}{S_\text{п}}.$$

Оскільки за умовою $S_\text{п} \gg S_\text{г}$, тоді $S_\text{г}/S_\text{п} \approx 0$ і згідно із останньою рівністю $v_\text{п} \approx 0$. У зв'язку із цим рівняння Бернуллі набирає ще більш простого вигляду:

$$\frac{F}{S_\text{п}} = \frac{\rho v_\text{г}^2}{2}.$$

Площу перерізу поршня знайдемо як

$$S_\text{п} = \frac{\pi D_\text{п}^2}{4},$$

і після підстановки цього значення в отримане рівняння матимемо:

$$\frac{4F}{\pi D_\text{п}^2} = \frac{\rho v_\text{г}^2}{2}, \quad 8F = \pi\rho(v_\text{г} D_\text{п})^2, \quad v_\text{г} D_\text{п} = \sqrt{\frac{8F}{\pi\rho}},$$

або в кінцевому вигляді

$$v_\text{г} = \frac{1}{D_\text{п}}\sqrt{\frac{8F}{\pi\rho}}.$$

Знайдемо числове значення шуканої величини:

$$v_\text{г} = \frac{1}{1,5\cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{8\cdot 10}{3,14159\cdot 1030}} = 10,4824\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Щоб дати відповідь на останнє запитання задачі, потрібно простежити, де саме з розгляду зникає переріз голки $S_\text{г}$. Це відбувається на етапі

$$v_\text{п} = v_\text{г}\frac{S_\text{г}}{S_\text{п}} \approx 0$$

за рахунок $S_\text{п} \gg S_\text{г}$. Отже, швидкість витікання розчину не залежить від перерізу голки у тому разі, коли переріз поршня значно більший за переріз голки.

**1.3.** Циліндрична труба переходить у конус (рис. 1.1). По цій системі протікає вода у напрямі осі $x$. Вважаючи воду за ідеальну рідину, отримати залежність $p = f(x)$ і зобразити її графічно, якщо радіус $r = 0,4$ м, густина води $\rho = 1000$ кг/м$^3$, статичний тиск у лівій частині труби $2\cdot 10^5$ Па та швидкість течії рідини в лівій частині $v_0 = 20$ м/с. Гідростатичний тиск не враховувати.

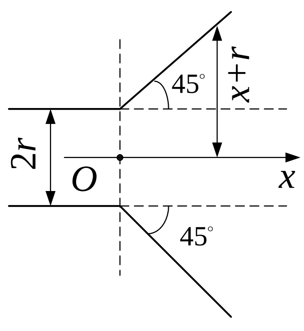



**Рисунок 1.1**

## 1. Рух та тиск рідин. Сила Архімеда

| $r = 0,4$ м, |
| --- |
| $\rho = 1000$ кг/м$^3$, |
| $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Па, |
| $v_0 = 20$ м/с |
| $p(x)$–? |

Рівняння Бернуллі (1.1) без урахування зміни гідростатичного тиску по перерізу труби набере вигляду

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p(x) + \frac{\rho v(x)^2}{2},$$

де $p_0, v_0$ – статичний тиск та швидкість у лівій частині труби. Оскільки переріз лівої частини незмінний, ці величини є сталими. Статичний тиск правої частини труби $p(x)$ та швидкість течії рідини в цій частині $v(x)$ будуть функціями координати, оскільки переріз труби змінюється. Тут і далі $x > 0$. З останнього рівняння виразимо шукану залежність тиску від координати:

$$p(x) = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v(x)^2}{2} = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_0^2 - v(x)^2\right).$$

Використаємо рівняння неперервності (1.5):

$$S_0 v_0 = S(x) v(x).$$

Знайдемо площу перерізів за формулою $S = \pi R^2$, де $R$ – радіус труби. Згідно з рисунком маємо

$$S_0 = \pi r^2, \quad S(x) = \pi (x + r)^2.$$

Після підстановки цих значень у рівняння неперервності

$$\pi r^2 v_0 = \pi (x + r)^2 v(x), \quad v(x) = \frac{r^2 v_0}{(x + r)^2}.$$

Після підстановки отриманої швидкості руху у залежність $p(x)$ маємо

$$p(x) = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_0^2 - v(x)^2\right) = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_0^2 - \frac{r^4 v_0^2}{(x + r)^4}\right),$$

$$p(x) = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}\left(1 - \frac{r^4}{(x + r)^4}\right).$$

Отримана залежність при параметрах задачі в графічному зображенні подана на рис. 1.2 а, де тиск $p$ наведений у МПа. З рисунка легко бачити, що із збільшенням $x$ установлюється стале значення тиску

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2},$$

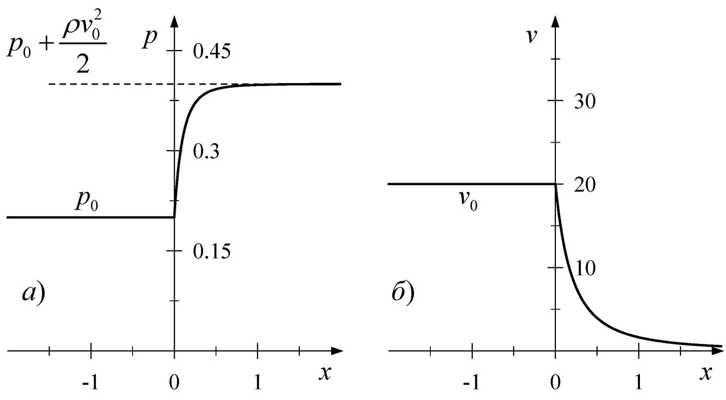



**Рисунок 1.2**

яке не змінюється із подальшим збільшенням координати. На рис. 1.2 б додатково наведена залежність швидкості течії рідини $v(x)$ у правій частині труби. З рисунка випливає, що швидкість за рахунок розширення труби поступово зменшується зі зростанням координати $x$ до нульового значення. Це є причиною того, що зі збільшенням координати установлюється стале значення тиску $p$, що демонструє рис. 1.2 а.

**1.4.** Якої сили тиску зазнає гребля довжиною 150 м та висотою 8 м, якщо вода має таку саму висоту? Атмосферний тиск нормальний.

| |
|---|
| $l = 150$ м, |
| $h = 8$ м, |
| $\rho = 1000$ кг/м$^3$, |
| $p_{\text{атм}} = 10^5$ Па, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $F$–? |

Повний тиск на греблю з боку води складається із гідростатичного та атмосферного тисків:

$$p = p_{\text{атм}} + \frac{\rho g h}{2}.$$

Силу тиску знайдемо за формулою (1.4):

$$F = pS = \left(p_{\text{атм}} + \frac{\rho g h}{2}\right) lh,$$

або після підстановки числових значень:

$$F = \left(10^5 + \frac{1000 \cdot 9,8 \cdot 8}{2}\right) \cdot 150 \cdot 8 = 1,67 \cdot 10^8 \text{ (Н)}.$$

**1.5.** У посудину циліндричної форми діаметром 20 см налита рідина. Знайдіть висоту рідини в посудині, при якій сила гідростатичного тису на дно дорівнює силі гідростатичного тиску на стінку.

| |
|---|
| $d = 0,2$ м, |
| $F_{\text{д}} = F_{\text{ст}}$ |
| $h$–? |

На дно посудини діє тиск, який визначається за формулою (1.2):

$$p_{\text{д}} = \rho g h,$$

а на стінку посудини – тиск (1.3):

$$p_{\text{ст}} = \frac{\rho g h}{2}.$$

Відповідні сили гідростатичних тисків будемо визначати за формулою (1.4):

$$F_{\text{д}} = p_{\text{д}} S_{\text{д}}, \quad F_{\text{ст}} = p_{\text{ст}} S_{\text{ст}},$$

де $S_{\text{д}}$, $S_{\text{ст}}$ – площі дна та стінки посудини відповідно. Площу дна будемо знаходити як площу кола, а площу стінки – як площу поверхні циліндра із висотою $h$ та діаметром перерізу $d$:

$$S_{\text{д}} = \frac{\pi d^2}{4}, \quad S_{\text{ст}} = \pi d h.$$

Звідси сили тисків

$$F_{\text{д}} = \rho g h \frac{\pi d^2}{4}, \quad F_{\text{ст}} = \frac{\rho g h}{2} \pi d h = \frac{\rho g h^2}{2} \pi d.$$

За умовою задачі ці сили однакові, отже, маємо

$$F_{\text{ст}} = F_{\text{д}}, \quad \frac{\rho g h^2}{2} \pi d = \rho g h \frac{\pi d^2}{4}, \quad h = \frac{d}{2}.$$

Відмітимо, що відповідь не залежить від роду рідини, а лише від її висоти. Після підстановки числового значення маємо

$$h = \frac{d}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ (м)}.$$

**1.6.** Діаметр однієї зі сполучених посудин удвічі більший за діаметр іншої. В ці посудини налили ртуть, а потім у вузьку посудину налили стовпчик води висотою 50 см. Знайдіть, на скільки зміниться рівень ртуті в обох посудинах.

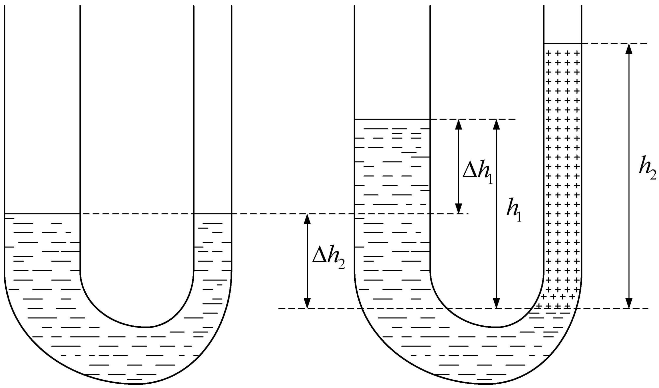



**Рисунок 1.3**

| |
|---|
| $d_1 = 2d_2$, <br> $h_2 = 0,5$ м, <br> $\rho_1 = 13600$ кг/м$^3$, <br> $\rho_2 = 1000$ кг/м$^3$ |
| $\Delta h_1, \Delta h_2$–? |

На рис. 1.3 зображені посудини до наливання води та після її наливання. Воду на правій частині рисунка позначено хрестиками. Зліва на рисунку в обох частинах посудини рівні рідини однакові, оскільки це одна і та сама рідина. Після наливання води рівні будуть різними. У цьому випадку виконується закон сполучених посудин (1.6):

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Оскільки згідно з рисунком $h_1 = \Delta h_1 + \Delta h_2$ остання рівність набирає вигляду

$$\frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1}.$$

В отриманому рівнянні дві невідомі величини – це $\Delta h_1$ і $\Delta h_2$. Для розв'язання потрібно записати ще одне рівняння. Це рівняння отримаємо, прирівнявши об'єм ртуті, що був витіснений із тонкого коліна $V_2$, до об'єму, який надійшов до широкого коліна $V_1$:

$$V_1 = V_2, \quad S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2,$$

де $S_1$ і $S_2$ – площі перерізів трубок:

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}.$$

Комбінуючи останні рівності, маємо

$$\frac{\pi d_1^2}{4}\Delta h_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}\Delta h_2, \quad d_1^2\Delta h_1 = d_2^2\Delta h_2, \quad \Delta h_2 = \Delta h_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2.$$

Підставимо цей вираз у знайдену суму $\Delta h_1 + \Delta h_2$:

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1}, \quad \Delta h_1 + \Delta h_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1},$$

$$\Delta h_1\left(1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right) = \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1},$$

$$\Delta h_1 = \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1}\left(1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right)^{-1}.$$

Знайдемо числове значення цієї величини:

$$\Delta h_1 = \frac{1000\cdot 0,5}{13600}\left(1+\left(\frac{2d_2}{d_2}\right)^2\right)^{-1} = 0,007353\ (\text{м}) = 0,7353\ (\text{см}).$$

Зараз знайдемо $\Delta h_2$:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0,007353\left(\frac{2d_2}{d_2}\right)^2 = 0,0294\ (\text{м}) = 2,94\ (\text{см}).$$

**1.7.** У морі плаває крижина, частина якої об'ємом 195 м$^3$ знаходиться над водою. Знайдіть об'єм усієї крижини та її підводної частини. Густина льоду 800 кг/м$^3$, густина морської води 1030 кг/м$^3$.

| |
|---|
| $V_1 = 195$ м$^3$, $\rho_л = 800$ кг/м$^3$, $\rho_в = 1030$ кг/м$^3$ |
| $V, V_2$—? |

На крижину діють виштовхувальна сила Архімеда (1.7) і сила тяжіння (1.8), які протилежно напрямлені. Оскільки крижина плаває у рідині, ці сили однакові за модулем (1.9):

$$F_А = F_т,$$

або із урахуванням (1.7) і (1.8):

$$\rho_в g V_2 = mg,$$

де через $V_2$ позначено об'єм крижини, що знаходиться у воді.

Маса крижини може бути знайдена як

$$m = \rho_л V,$$

де $V$ — об'єм усієї крижини. Отже, рівняння набирає вигляду

$$\rho_{\text{в}} g V_2 = \rho_{\text{л}} V g, \quad \rho_{\text{в}} V_2 = \rho_{\text{л}} V.$$

Врахуємо, що загальний об'єм крижини може бути знайдений за формулою

$$V = V_1 + V_2.$$

Підставимо цей об'єм у передостаннє рівняння:

$$\rho_{\text{в}} V_2 = \rho_{\text{л}} V, \quad \rho_{\text{в}} V_2 = \rho_{\text{л}}(V_1 + V_2), \quad \rho_{\text{в}} V_2 = \rho_{\text{л}} V_1 + \rho_{\text{л}} V_2,$$

$$V_2(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) = \rho_{\text{л}} V_1, \quad V_2 = \frac{\rho_{\text{л}} V_1}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}.$$

Розрахуємо числове значення об'єму крижини $V_2$, що знаходиться під водою:

$$V_2 = \frac{800 \cdot 195}{1030 - 800} = 678,3 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Загальний об'єм крижини

$$V = V_1 + V_2 = 195 + 678,3 = 873,3 \text{ (м}^3\text{)}.$$

**1.8.** З яким прискоренням спливає тіло із густиною $0,95 \cdot 10^3$ кг/м$^3$ у рідині із густиною $1,15 \cdot 10^3$ кг/м$^3$? Силою тертя під час руху тіла в рідині знехтувати.

| |
|---|
| $\rho_{\text{т}} = 950$ кг/м$^3$, |
| $\rho_{\text{р}} = 1150$ кг/м$^3$, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $a$—? |

На рис. 1.4 показано сили, що діють на тіло, що спливає — це виштовхувальна сила Архімеда, що спрямована вгору, та сила тяжіння, спрямована вниз. Силою тертя згідно з умовою нехтуємо. Оскільки в даному випадку сила Архімеда більша за модулем, ніж сила тяжіння, ці сили нескомпенсовані, і тіло спливає із прискоренням $\vec{a}$, модуль якого спрямований угору.

Запишемо другий закон Ньютона:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

У проекціях на вісь $Ox$ це рівняння набирає вигляду

$$F_A - mg = ma.$$

Визначимо силу Архімеда як (1.7), а масу тіла як добуток його густини та об'єму:

$$F_A = \rho_{\text{р}} g V, \quad m = \rho_{\text{т}} V.$$

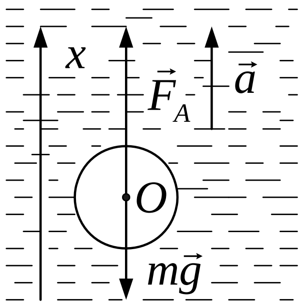



**Рисунок 1.4**

Після підстановки цих величин у рівняння руху маємо

$$\rho_{\text{р}} gV - \rho_{\text{т}} Vg = \rho_{\text{т}} Va, \quad a = \frac{\rho_{\text{р}} gV - \rho_{\text{т}} Vg}{\rho_{\text{т}} V} = \frac{g(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{т}})}{\rho_{\text{т}}}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо відповідь

$$a = \frac{9,8 \cdot (1150 - 950)}{950} = 2,06 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

**1.9.** Порожниста скляна куля плаває у воді, занурена наполовину. Зовнішній об'єм кулі 200 см$^3$. Знайдіть об'єм порожнини кулі. Густина скла $2,5 \cdot 10^3$ кг/м$^3$.

| |
|---|
| $V_{\text{зан}} = V/2$, |
| $V = 2 \cdot 10^{-4}$ м$^3$, |
| $\rho_{\text{ст}} = 2500$ кг/м$^3$, |
| $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м$^3$ |
| $V_0$—? |

Нехай $V$ — це зовнішній об'єм усієї кулі, а $V_0$ — об'єм її порожнини. Тоді об'єм скла, що пішло на виготовлення кулі, можна обчислити як

$$V_{\text{ск}} = V - V_0.$$

На кулю діють сила Архімеда та сила тяжіння. Оскільки куля плаває, запишемо умову плавання тіла (1.9):

$$F_A = F_{\text{т}}.$$

Сила Архімеда у нашому випадку

$$F_A = \rho_{\text{в}} g V_{\text{зан}} = \frac{\rho_{\text{в}} g V}{2}.$$

Знайдемо масу скла:

$$m = \rho_{\text{ск}} V_{\text{ск}} = \rho_{\text{ск}}(V - V_0).$$

Сила тяжіння із урахуванням цього запишеться як

$$F_{\text{т}} = mg = \rho_{\text{ск}}(V - V_0)g.$$

Прирівнюємо цю силу до сили Архімеда згідно з умовою плавання тіл і отримуємо

$$\frac{\rho_{\text{в}} gV}{2} = \rho_{\text{ск}}(V - V_0)g, \quad \frac{\rho_{\text{в}} V}{2} = \rho_{\text{ск}}(V - V_0),$$

$$V - V_0 = \frac{\rho_{\text{в}} V}{2\rho_{\text{ск}}}, \quad V_0 = V - \frac{\rho_{\text{в}} V}{2\rho_{\text{ск}}}, \quad V_0 = V\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ск}}}\right)$$

або після підстановки числових значень

$$V_0 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \left(1 - \frac{1000}{2 \cdot 2500}\right) = 1,6 \cdot 10^{-4}\ (\text{м}^3).$$

## Задачі для самостійного розв'язування

**1.10.** Спостерігаючи під мікроскопом за рухом еритроцитів у капілярі, можна виміряти швидкість руху крові ($v_{\text{кр}} = 0,5$ мм/с). Середня швидкість кровотоку в аорті становить $v_{\text{а}} = 40$ см/с. На основі цих даних визначити, у скільки разів сума поперечних перерізів усіх функціонуючих капілярів більша від перерізу аорти.

**1.11** Із горизонтально розташованого медичного шприца діаметром $1,5$ см видавлюється фізіологічний розчин із силою $F = 10$ Н. Швидкість витікання рідини з голки шприца 10,49 м/с. Густина фізіологічного розчину $\rho = 1,03$ г/см$^3$. Знайти величину перерізу голки.

**1.12.** Швидкість течії води у всіх перерізах нахиленої труби однакова. Знайти різницю тисків $\Delta p$ у двох точках, висоти яких над рівнем Землі відрізняються на $\Delta h = 0,5$ м. Чому дорівнює $\Delta p$, якщо система: а) знаходиться у стані невагомості; б) зазнає трикратного перевантаження (тобто рухається із прискоренням $a = 2g$ у полі сил тяжіння)?

**1.13.** У широкій частині горизонтальної труби вода тече зі швидкістю $v = 50$ см/с. Знайти швидкість течії рідини у вузькій частині труби, якщо різниця тисків у широкій та вузькій її частинах $\Delta p = 1,33$ кПа.

**1.14.** Трубка Піто (рис. 1.5 а) дозволяє по висоті стовпчика рідини вимірювати повний тиск $p$. Статичний тиск $p_1$ у рідині, що рухається, вимірюється трубкою, нижній переріз якої паралельний лініям потоку (рис. 1.5 б). Визначити швидкість течії гасу, якщо відомо, що $p = 13,3$ кПа, $p_1 = 2,66$ кПа. Густина гасу $\rho = 800$ кг/м$^3$.

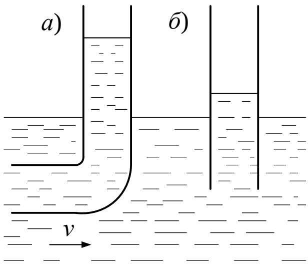



**Рисунок 1.5**

**1.15.** Із невеликого отвору в дні широкої посудини витікає рідина. Знайти найбільшу швидкість рідини, якщо відомо, що висота рідини в посудині $h = 1$ м. Пояснити, чому розв'язок задачі не залежить від властивостей рідини, що витікає із посудини.

**1.16.** По горизонтальній трубці змінного перерізу протікає вода. Статичний тиск у точці $x_0$ дорівнює $p_0 = 0,3$ Па, а швидкість води $v_0 = 4$ см/с. Знайдіть статичний і динамічний тиски в точці $x_1$, якщо відношення перерізів труби $S_{x_0}/S_{x_1} = 0,5$.

**1.17.** На деяких залізницях поповнення паровозного казана водою проводиться без зупинки паровоза. Для цієї мети застосовується зігнута під прямим кутом труба, яка опускається на ходу паровоза в канаву з водою, прокладену уздовж рейок. При якій швидкості паровоза вода може піднятися на висоту 3 м?

**1.18.** Який тиск на дно та бокову стінку здійснює шар гасу висотою 0,5 м? Чому дорівнює повний тиск на дно? Знайдіть силу тиску гасу на дно та бокову стінку. Посудина являє собою циліндр із діаметром основи 10 см.

**1.19.** На якій глибині у морі гідростатичний тиск дорівнює

$4,12 \cdot 10^5$ Па? Чому дорівнює повний тиск на цій глибині? Атмосферний тиск нормальний.

**1.20.** У високу циліндричну посудину до рівня 10 см налита ртуть, згори — такі самі об'єми води та гасу. Який тиск рідин на дно посудини?

**1.21.** У циліндричну посудину діаметром 25 см налито 12 л води. Який тиск води на стінку посудини на висоті 10 см від дна?

**1.22.** Посудина кубічної форми заповнена рідиною вагою $P$. Знайти повну силу гідростатичного тиску на дно посудини та всі її бічні стінки.

**1.23.** У посудину із квадратним дном із довжиною сторони $a$ та вертикальними стінками налито рідину. Яка висота рівня рідини в посудині, якщо сила тиску на дно дорівнює силі тиску на бічну поверхню посудини?

**1.24.** У прямокутну банку, площа дна якої 100 см$^2$, налито воду. Висота рівня води 20 см. На поверхні води знаходиться поршень, що щільно прилягає до стінок. На поршень поставлено гирю масою 2 кг. Знайти тиск на дно банки. Атмосферний тиск нормальний.

**1.25.** У циліндричну посудину налиті однакові за масою кількості води та ртуті. Загальна маса стовпчиків рідин у посудині дорівнює $H$. Чому дорівнює гідростатичний тиск на дно посудини?

**1.26.** У два коліна $U$-подібної трубки налиті вода та масло, що розділені ртуттю. Поверхні поділу ртуті та рідин в обох колінах знаходяться на однаковій висоті. Знайдіть масу стовпчика води, якщо висота стовпчика масла дорівнює 20 см.

**1.27.** У сполучених посудинах налиті вода, ртуть та гас. Яка висота гасу, якщо висота стовпчика води дорівнює 20 см та у правому коліні рівень ртуті нижчий, ніж у лівому, на 0,5 см.

**1.28.** Ртуть знаходиться в $U$-подібній трубці, площа перерізу лівого коліна якої втричі менша від площі правого. Рівень ртуті у вузькому коліні знаходиться на відстані 30 см від верхнього кінця трубки. На скільки підніметься рівень ртуті у правому коліні, якщо ліве доверху заповнити водою?

**1.29.** У сполучених циліндричних посудинах однакових діаметрів та висоти знаходиться ртуть. В одній із посудин поверх ртуті налитий стовпчик води висотою 32 см. Як будуть розташовані один відносно іншого рівні ртуті в обох посудинах, якщо вони доверху заповнені гасом?

**1.30.** У сполучені посудини налита ртуть, зверху в одну посудину — стовпчик мастила висотою 48 см, а в іншу — стовпчик гасу висотою 20 см. Знайдіть різниці рівнів ртуті в обох посудинах.

**1.31.** Шматок заліза важить у воді 1,67 Н. Знайдіть його об'єм.

**1.32.** Мідна куля із внутрішньою порожниною важить у повітрі 2,59 Н, в у воді — 2,17 Н. Знайти об'єм внутрішньої порожнини кулі.

**1.33.** Тіло плаває у гасі, занурене до 2/3 свого об'єму. Знайти густину речовини тіла.

**1.34.** Яку найменшу кількість колод довжиною 10 м та площею поперечного перерізу 300 см$^2$ потрібно взяти для плоту, на якому можна переправити через річку вантажівку масою 5 т? Густина дерева — 600 кг/м$^3$.

**1.35.** Знайти масу пояса із корка, який здатний утримати людину масою 60 кг у воді таким чином, щоб голова та плечі (це приблизно 1/8 об'єму людини) не були занурені у воду. Густину тіла людини взяти 1007 кг/м$^3$, а густину корка — 200 кг/м$^3$.

**1.36.** Шматок заліза масою 11,7 г, зв'язаний із шматком корка масою 1,2 г, разом занурені на нитці у воду. Знайти густину корка та його об'єм, якщо сила натягу нитки дорівнює 0,064 Н.

**1.37.** У циліндричну посудину з водою опустили залізну коробку, внаслідок чого рівень води в посудині піднявся на 2 см. На скільки рівень води опуститься, якщо коробка потоне?

**1.38.** Куля з алюмінію важить у повітрі 0,52 Н, у воді — 0,32 Н, а у розчині мідного купоросу — 0,29 Н. Знайдіть густину розчину мідного купоросу.

**1.39.** Бульбашка газу піднімається з дна озера зі сталою швидкістю. Знайдіть силу опору води, якщо об'єм бульбашки дорівнює 1 см$^3$.

**1.40.** Кулька із густиною 400 кг/м$^3$ падає у воду з висоти 9 см. На яку глибину кулька зануриться у воду? Силами опору повітря та води знехтувати.

**1.41.** Із яким прискоренням тіло із густиною $\rho$ спливає у рідині з густиною $\rho_0$?

**1.42.** Повітряна куля об'ємом 600 м$^3$ знаходиться у рівновазі. Яку кількість баласту потрібно викинути, щоб куля почала підійматися із прискоренням 0,1 м/с$^2$? Опором повітря знехтувати. Густина повітря – 1,29 кг/м$^3$.

**1.43.** Аеростат об'ємом 4000 м$^3$ заповнений гелієм. Вага конструкції, обладнання та екіпажу дорівнює 30 кН. Густина повітря – 1,2 кг/м$^3$, гелію – 0,18 кг/м$^3$. Знайти корисну вантажопідйомність аеростата.

**1.44.** Аеростат об'ємом 2500 м$^3$ містить перед підйомом 2000 м$^3$ водню. Маса всього обладнання разом із командою 2750 кг. Знайдіть прискорення, з яким почне підійматися аеростат.

**1.45.** Кубик з довжиною ребра 10 см занурений в посудину з водою, на яку налита рідина з густиною 0,8 г/см$^3$, що не змішується з водою. Лінія поділу рідин проходить на середині висоти кубика. Знайти масу кубика.

**1.46.** Знайдіть густину газу, що заповнює невагому оболонку повітряної кулі об'ємом 40 м$^3$, якщо куля з вантажем масою $m = 20$ кг висить нерухомо. Густина повітря становить $\rho_{пов} = 1,5$ кг/м$^3$.

**1.47.** Тіло з об'ємом $V = 4$ л і густиною $\rho_т = 5$ г/см$^3$ повністю занурене у воду. Визначити силу $P$, з якою тіло тисне на дно посудини. Густина води $\rho_в = 1$ г/см$^3$.

# 2. Механічні властивості біологічних тканин

### Основні формули

- Відносна деформація

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}, \tag{2.1}$$

де $l$ — початкова довжина зразка (м); $l_1$ — його кінцева довжина (м); $\Delta l = l_1 - l$ — видовження зразка (м).

- Механічне напруження

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{2.2}$$

де $F$ — прикладена до зразка сила (Н); $S$ — площа поперечного перерізу зразка (м$^2$).

- Закон Гука для деформації розтягу (стиску)

$$\sigma_{el} = \varepsilon E, \tag{2.3}$$

де $\sigma_{el}$ — пружна компонента механічних напружень (Па); $E$ — модуль пружності, або модуль Юнга (Па).

- Напруження, що виникають у в'язкому середовищі (в'язкі або дисипативні напруження)

$$\sigma_v = \eta \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{2.4}$$

де $\eta$ — в'язкість середовища (Па·с); $t$ — час процесу (с); $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ — похідна від деформації за часом, або швидкість деформування (с$^{-1}$).

- Часова залежність деформації при паралельному з'єднанні пружного та в'язкого елементів (модель Кельвіна-Фойгта)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tag{2.5}$$

де $\tau = \eta/E$ — час релаксації деформації (с).

- Модель Максвелла для послідовно з'єднаних пружного та в'язкого елементів
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \tag{2.6}$$

- Механічні напруження стінки кровоносної судини
$$\sigma = pr/h, \tag{2.7}$$
де $p$ – тиск у судині (Па); $r$ – радіус просвіту судини (м); $h$ – товщина стінки судини (м).

- Закон Гука
$$F = -k\Delta l, \tag{2.8}$$
де $k$ – коефіцієнт жорсткості (Н/м); $\Delta l$ – величина зміщення (м).

- Коефіцієнт жорсткості для деформації розтягу (стиску) однорідного стрижня
$$k = ES/l, \tag{2.9}$$
де $E$ – модуль Юнга (Па); $S$ – площа поперечного перерізу стрижня (м$^2$); $l$ – довжина стрижня до деформації (м).

- Потенціальна енергія пружно деформованого тіла
$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{2.10}$$

**Приклади розв'язання задач**

**2.1.** Знайти ефективний модуль пружності кравецького м'яза жаби, якщо при зростанні прикладеного до нього навантаження від 10 кПа до 40 кПа його довжина збільшилася від 0,032 м до 0,034 м.

$\sigma_1 = 10 \cdot 10^3$ Па,
$\sigma_2 = 40 \cdot 10^3$ Па,
$l_1 = 0,032$ м,
$l_2 = 0,034$ м
$E_{eff}$–?

Нехай $l$ – довжина м'яза у стані спокою, до прикладання до нього навантаження. Тоді згідно із (2.1) для двох різних значень навантаження маємо різні значення відносних деформацій:
$$\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l}{l}, \quad \varepsilon_2 = \frac{l_2 - l}{l}.$$

Оскільки за умовою задачі деформації малі, можна припустити, що м'яз — це абсолютно пружне тіло. Тоді виконується закон Гука (2.3):

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 E_{eff}, \quad \sigma_2 = \varepsilon_2 E_{eff}.$$

Отже, з останніх чотирьох рівностей можна записати таке:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{l_1 - l}{l_2 - l}$$

або

$$(l_2 - l)\,\sigma_1 = (l_1 - l)\,\sigma_2,$$

$$l_2\sigma_1 - l\sigma_1 = l_1\sigma_2 - l\sigma_2,$$

$$l\,(\sigma_2 - \sigma_1) = l_1\sigma_2 - l_2\sigma_1,$$

$$l = \frac{l_1\sigma_2 - l_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Далі будемо знаходити ефективний модуль пружності за законом Гука:

$$E_{eff} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1 l}{l_1 - l}.$$

Компонування останніх двох формул приводить до кінцевого виразу для розрахунку ефективного модуля у вигляді

$$E_{eff} = \frac{l_1\sigma_2 - l_2\sigma_1}{l_2 - l_1}.$$

Після підстановки числових даних маємо таке:

$$E_{eff} = \frac{0,032 \cdot 40 \cdot 10^3 - 0,034 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,034 - 0,032} = 470 \text{ (кПа)}.$$

**2.2.** Розрахувати відносне видовження скелетного м'яза за 3 хвилини під дією сили 6,3 Н, якщо площа поперечного перерізу м'яза $0,8 \cdot 10^{-6}$ м$^2$, а його в'язкість $\eta = 1,25$ г/(см·с). Припустити, що механічні властивості м'яза повністю описуються моделлю в'язкого елемента.

| |
|---|
| $t = 180$ с, |
| $F = 6,3$ Н, |
| $S = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м$^2$, |
| $\eta = 0,125$ Па $\cdot$ с |
| $\varepsilon$—? |

В умові задачі в'язкість подана у несистемних одиницях, отже, потрібно спочатку перевести її значення у систему СІ. Відомо, що у цій системі одиниця вимірювання в'язкості

$$[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Тиск, що вимірюється у Паскалях (Па), — це відношення сили $F$ (Н) до площі її прикладення $S$ (м$^2$):

$$P = \frac{F}{S}.$$

Отже, для одиниці вимірювання тиску маємо

$$[\text{Па}] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Одиницю вимірювання сили можна розписати згідно із другим законом Ньютона:

$$F = ma,$$

де $m$ — маса (кг); $a$ — прискорення (м/с$^2$). Звідси маємо

$$[\text{Н}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тоді

$$[\text{Па}] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2},$$

а одиниця вимірювання в'язкості

$$[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Тепер переведемо значення в'язкості у систему СІ:

$$\eta = 1,25 \ \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} = 1,25 \cdot 10^2 \ \frac{\text{г}}{\text{м} \cdot \text{с}} = 125 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} = 0,125 \ \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Перейдемо безпосередньо до розв'язання задачі. Оскільки ми моделюємо м'яз в'язким елементом, використаємо формулу (2.4):

$$\sigma = \eta \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$$

або помножимо на d$t$ праву та ліву частини рівняння:

$$\sigma \mathrm{d}t = \eta \mathrm{d}\varepsilon.$$

Обчисливши напруження як (2.2):

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

перейдемо до виразу

$$\mathrm{d}\varepsilon = \frac{F}{\eta S}\mathrm{d}t.$$

Тепер проінтегруємо цей вираз:

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon' = \frac{F}{\eta S} \int\limits_0^{t} \mathrm{d}t'.$$

В останньому виразі у межах інтегрування враховано, що у початковий момент часу $t = 0$ деформація має нульове значення (процес деформування ще не почався). У довільний момент часу $t$ деформація має значення $\varepsilon$. Останній вираз після інтегрування набирає вигляду

$$\varepsilon = \frac{Ft}{\eta S}.$$

Підставимо числові значення:

$$\varepsilon = \frac{6,3 \cdot 180}{0,125 \cdot 0,8 \cdot 10^{-6}} = 1,134 \cdot 10^{10}.$$

Це дуже велике і недосяжне значення деформації. Робимо висновок, що при моделюванні поведінки м'яза не можна використовувати лише в'язкий елемент і потрібно завжди враховувати пружні властивості м'яза.

**2.3.** Знайти абсолютне видовження сухожилля довжиною 4 мм та площею перерізу $10^{-6}$ м$^2$ під дією сили 320 Н. Модуль пружності сухожилля взяти $10^9$ Па. Вважати сухожилля за абсолютно пружне тіло.

| |
|---|
| $l = 4 \cdot 10^{-3}$ м, |
| $S = 10^{-6}$ м$^2$, |
| $F = 320$ Н, |
| $E = 10^9$ Па |
| $\Delta l$–? |

За законом Гука (2.3)

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Напруження визначаються як (2.2):

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

З останніх двох формул маємо

$$\frac{F}{S} = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \frac{F}{SE}.$$

Деформація $\varepsilon$ — це відношення абсолютного видовження $\Delta l$ до початкової довжини сухожилля $l$ (2.1):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Звідси маємо

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{SE}, \quad \Delta l = \frac{Fl}{SE}.$$

Після підстановки значень

$$\Delta l = \frac{320 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{10^{-6} \cdot 10^{9}} = 1,28 \text{ (мм)}.$$

**2.4.** Знайти межу міцності кістки діаметром 30 мм та товщиною 3 мм, якщо для її руйнування потрібна сила 400 кН.

| |
|---|
| $D = 30 \cdot 10^{-3}$ м, <br> $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м, <br> $F = 400 \cdot 10^{3}$ Н |
| $\sigma_c$—? |

Кістка у поперечному перерізі — це кільце. Знайдемо спочатку площу цього кільця. Позначимо зовнішній радіус кільця $r_2$, а внутрішній — $r_1$. Тоді буде справедливий зв'язок

$$r_2 = \frac{D}{2}, \quad r_1 = \frac{D-2h}{2}.$$

Відповідно площа кістки буде визначатися як різниця між площами зовнішнього та внутрішнього кілець:

$$S = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) = \pi\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right).$$

Або після підстановки виразів для $r_1, r_2$

$$S = \pi\left(\frac{D}{2} - \frac{D-2h}{2}\right)\left(\frac{D}{2} + \frac{D-2h}{2}\right) = \pi h(D-h).$$

За умовою задачі потрібно знайти межу міцності, тобто механічні напруження $\sigma_c$, за яких кістка руйнується. Ці напруження згідно з (2.2) дорівнюють

$$\sigma_c = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi h(D-h)},$$

або після розрахунку

$$\sigma_c = \frac{400 \cdot 10^{3}}{3,14159 \cdot 3 \cdot 10^{-3}(30 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3})} = 1,572 \cdot 10^{9} \text{ (Па)}.$$

**2.5.** Навантаження на стегнову кістку, що становить 1800 Н, при стисканні викликає відносну деформацію $3 \cdot 10^{-4}$. Знайти ефективну площу поперечного перерізу кістки, якщо її модуль пружності дорівнює $23 \cdot 10^{9}$ Па.

| $F = 1800$ Н, $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$, $E = 23 \cdot 10^9$ Па |
|---|
| $S_{eff}$–? |

При стисканні у кістці виникають пружні напруження (2.2):

$$\sigma = \frac{F}{S_{eff}},$$

які визначаються законом Гука (2.3):

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Із цих виразів маємо

$$\frac{F}{S_{eff}} = \varepsilon E, \quad S_{eff} = \frac{F}{\varepsilon E}.$$

Визначимо цю площу:

$$S_{eff} = \frac{1800}{3 \cdot 10^{-4} \cdot 23 \cdot 10^9} = 2,61 \cdot 10^{-4}\ (\text{м}^2) = 2,61\ (\text{см}^2).$$

**2.6.** Знайти потенціальну енергію, що припадає на одиницю об'єму кістки, якщо кістка розтягнута так, що напруження в ній становлять $3 \cdot 10^9$ Па. Модуль пружності кістки взяти $22,5 \cdot 10^9$ Па.

| $\sigma = 3 \cdot 10^9$ Па, $E = 22,5 \cdot 10^9$ Па |
|---|
| $\omega = W/V$–? |

Фактично в задачі потрібно знайти об'ємну густину енергії деформованої кістки $\omega$, тобто відношення потенціальної енергії пружно деформованого тіла $W$ до об'єму цього тіла $V$:

$$\omega = \frac{W}{V}.$$

Потенціальна енергія визначається за формулою (2.10):

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2,$$

та із урахуванням виразу для коефіцієнта жорсткості (2.9)

$$k = \frac{ES}{l}$$

набирає вигляду

$$W = \frac{ES(\Delta l)^2}{2l}.$$

Отже, із цього виразу знайдемо шукану густину енергії як

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sl} = \frac{ES(\Delta l)^2}{2Sl^2} = \frac{E}{2}\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2.$$

Останній вираз із урахуванням визначення відносної деформації (2.1)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

спрощується до вигляду

$$\omega = \frac{E\varepsilon^2}{2}.$$

Виразимо деформацію через напруження згідно із законом Гука (2.3):

$$\sigma = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

підставимо у вираз для густини енергії $\omega$ та отримаємо кінцеве співвідношення

$$\omega = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Залишилося розрахувати числове значення цієї величини:

$$\omega = \frac{(3\cdot 10^9)^2}{2\cdot 22,5\cdot 10^9} = 2\cdot 10^8 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\right).$$

**Задачі для самостійного розв'язування**

**2.7.** Розрахуйте відносне видовження скелетного м'яза, що моделюється тілом Кельвіна-Фойгта, за 3 хвилини, якщо модуль пружності м'яза 1,2 МПа, площа поперечного перерізу $0,8\cdot 10^{-6}$ м$^2$, а навантаження на м'яз 6,3 Н. В'язкість речовини м'яза взяти 1,25 г/(см·с).

**2.8.** Як зміниться модуль пружності стегнової кістки людини, якщо при навантаженні 5 Па відносна деформація становить 0,025, а при збільшенні навантаження до 11 Па вона стала дорівнювати 0,055.

**2.9.** Знайти тиск у стінці капіляра діаметром 20 мкм, якщо товщина стінки судини 2 мкм, а тангенціальні напруження в стінці $8\cdot 10^{-5}$ Па.

**2.10.** Чому дорівнює ефективний модуль пружності стінки грудної аорти, якщо відношення радіуса просвіту судини до товщини її стінки дорівнює 5. Відомо, що при зміні тиску всередині аорти від 13,3 кПа до 16 кПа площа поперечного перерізу судини збільшується від 6,16 см$^2$ до 6,2 см$^2$.

## 2. Механічні властивості біологічних тканин

**2.11.** Модуль пружності протоплазмових ниток, що отримані витягуванням протоплазми у деяких типів клітин з допомогою мікроголок, став дорівнювати $9 \cdot 10^3$ Па при кімнатній температурі. Знайти напруження, що виникають у нитках при розтягу, що не перевищує 20% їх початкової довжини. Вважати, що нитки володіють лише пружними властивостями.

**2.12.** Яка робота здійснюється при розтягу на 6 мм кравецького м'яза жаби довжиною 30 мм, якщо відомо, що при навантаженні 1 г він розтягується на 3 мм? Прийняти кравецький м'яз за абсолютно пружне тіло.

**2.13.** Знайти механічне напруження стегнової кістки штангіста вагою 80 кг при піднятті штанги, що у півтора рази перевищує його вагу, якщо діаметр кістки 20 мм. Допустиме напруження $10^8$ Н/м$^2$. Яку граничну вагу може витримати кістка?

**2.14.** Межа міцності кісткової тканини дорівнює 100 МПа, модуль Юнга дорівнює 10 ГПа. Знайти, при якому відносному видовженні відбудеться руйнування кісткової тканини.

**2.15.** Модуль пружності колагену 100 МПа, модуль пружності еластину 1 МПа, відносне видовження для обох матеріалів становить 0,5. Знайти напруження, що виникають у цих матеріалах при заданій деформації.

**2.16.** У скільки разів відносне видовження еластину більше, ніж колагену, при однакових напруженнях, якщо модуль пружності колагену 100 МПа, а еластину 1 МПа?

**2.17.** Знайти абсолютне видовження сухожилля довжиною 5 см та діаметром 4 мм під дією сили 31,4 Н. Модуль пружності сухожилля дорівнює $10^9$ Па.

**2.18.** Визначити роботу, що виконується спортсменом при розтягу пружини еспандера на 70 см, якщо відомо, що при дії сили у 10 Н еспандер розтягується на 1 см.

**2.19.** М'яз завдовжки 10 см і діаметром 1 см під дією вантажу 49 Н видовжився на 7 мм. Визначити модуль пружності м'язової тканини.

**2.20.** До сухожилля завдовжки 12 см підвісили вантаж масою 7 кг, унаслідок чого воно видовжилося до 123 мм. На скільки видовжиться сухожилля, якщо до нього підвісити вантаж масою 5 кг?

**2.21.** Яка робота здійснюється при розтягу на 1 мм м'яза завдовжки 5 см і діаметром 4 мм? Модуль Юнга для м'язової тканини взяти $9,8 \cdot 10^6$ Па.

**2.22.** Проаналізувати рівняння Максвелла (2.6) у двох випадках: а) у системі підтримуються постійні деформації, побудувати часову залежність напружень $\sigma(t)$; б) незмінними є напруження, побудувати часову залежність деформації $\varepsilon(t)$.

**2.23.** З якою силою необхідно тягнути за кінець дроту, другий кінець якого закріплений, щоб видовжити його на 5 мм? Жорсткість дроту $k = 2 \cdot 10^6$ Н/м.

**2.24.** Визначити жорсткість пружини, якщо під дією сили 80 Н вона видовжилася на 5 см.

**2.25.** Якого перерізу сталевий дріт довжиною 3,6 м необхідно взяти, щоб під дією сили $8 \cdot 10^3$ Н він видовжився на 4 мм? Модуль Юнга для сталі становить $2 \cdot 10^{11}$ Н/м$^2$.

# 3. В'язкість рідин. Поверхневий натяг. Гемодинаміка

## Основні формули

- Сила внутрішнього тертя, що діє між шарами, що мають площу $S$ (рівняння Ньютона):

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} S, \tag{3.1}$$

де $\eta$ — в'язкість рідини (Па·с); $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ — градієнт швидкості ($\text{с}^{-1}$).

- Гідравлічний опір судини

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}, \tag{3.2}$$

де $\eta$ — в'язкість крові (Па·с); $l$ — довжина судини (м); $R$ — радіус судини (м).

- Об'ємна швидкість кровотоку в судині

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = Sv, \tag{3.3}$$

де $S$ — площа поперечного перерізу судини ($\text{м}^2$); $v$ — швидкість течії рідини (м/с).

- Об'єм рідини, що переноситься через трубу (судину) за час $t$:

$$Q = Svt. \tag{3.4}$$

- Об'єм рідини, що переноситься за 1 с через переріз циліндричної труби (судини) радіусом $R$ (формула Пуазейля):

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{p_1 - p_2}{X}, \tag{3.5}$$

де $l$ — довжина ділянки труби (судини) (м), на кінцях якої підтримується різниця тисків $(p_1 - p_2)$ (Па).

- Об'єм рідини, що переноситься за 1 с через переріз циліндричної труби (судини) змінного перерізу ($R$ є функцією довжини $l$):

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l}. \tag{3.6}$$

- Сила внутрішнього тертя, що діє на сферичне тіло радіуса $r$, яке рухається в рідині (закон Стокса):

$$F = 6\pi\eta r v, \tag{3.7}$$

де $v$ — швидкість тіла (м/с); $\eta$ — в'язкість рідини (Па·с).

- Швидкість падіння кульки радіуса $r$ у в'язкій рідині

$$v = \frac{2(\rho - \rho_\mathrm{p})r^2 g}{9\eta}, \tag{3.8}$$

де $\rho$ та $\rho_\mathrm{p}$ — густини матеріалу, з якого зроблено кульку, та рідини відповідно (кг/м$^3$); $g$ — прискорення вільного падіння (м/с$^2$).

- Число Рейнольдса для труби діаметром $D$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\mathrm{p} v D}{\eta} = \frac{vD}{\nu}, \tag{3.9}$$

де $v$ — швидкість руху рідини (м/с$^2$); $\nu = \eta/\rho_\mathrm{p}$ — кінематична в'язкість (м$^2$/с). При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ спостерігається ламінарний рух, а якщо $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, рух стає турбулентним. Для гладких циліндричних труб $\mathrm{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$.

- Додатковий тиск під сферичною поверхнею рідини

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}, \tag{3.10}$$

де $\sigma$ — поверхневий натяг рідини (Н/м); $r$ — радіус сферичної поверхні (м).

## 3. В'язкість рідин. Поверхневий натяг. Гемодинаміка

- Додатковий тиск під двома аксіальними сферами, розділеними тонкою плівкою рідини (наприклад, додатковий тиск у мильній бульбашці):

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}. \tag{3.11}$$

- Додаткова енергія поверхневого шару рідини

$$E = \sigma S, \tag{3.12}$$

де $S$ – площа поверхні рідини (м$^2$).

- Висота підняття (опускання) рідини в капілярі

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{R\rho_{\text{р}} g}, \tag{3.13}$$

де $\theta$ – крайовий кут; $R$ – радіус капіляра (м); $\rho_{\text{р}}$ – густина рідини (кг/м$^3$).

- Швидкість пульсової хвилі

$$v = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho r}}, \tag{3.14}$$

де $E$ – модуль пружності судини (Па); $h$ – товщина стінки судини (м); $\rho$ – густина речовини судини (кг/м$^3$); $r$ – радіус просвіту судини (м).

- Робота, що виконується лівим шлуночком серця при кожному скороченні:

$$A = V_0 \left( p + \rho \frac{v^2}{2} \right), \tag{3.15}$$

де $p$ – середній тиск, під яким кров викидається в аорту (Па); $\rho$ – густина крові (кг/м$^3$); $V_0$ – ударний об'єм крові (м$^3$); $v$ – швидкість її руху (м/с).

- Еквівалентний гідравлічний опір $n$ послідовно з'єднаних елементів

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n, \tag{3.16}$$

де $x_i$ – опір $i$-го елемента.

- Еквівалентний гідравлічний опір $n$ паралельно з'єднаних елементів
$$X = \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n} \right)^{-1}, \tag{3.17}$$
де $x_i$ — опір $i$-го елемента.

## Приклади розв'язування задач

**3.1.** Визначити середню лінійну швидкість кровотоку в судині радіусом $1,5$ см, якщо під час систоли через неї протікає 60 мл крові. Вважати тривалість систоли $0,25$ с.

| |
|---|
| $R = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, |
| $Q = 60 \cdot 10^{-6}$ м$^3$, |
| $t = 0,25$ с |
| $v$–? |

Об'єм крові, що протікає через судину за час $t$, визначається співвідношенням (3.4):
$$Q = Svt,$$
де $S = \pi R^2$ — площа поперечного перерізу циліндричної судини. Звідси маємо
$$Q = \pi R^2 vt,$$
звідки легко знайти швидкість:
$$v = \frac{Q}{\pi R^2 t}.$$

Підставляємо значення:
$$v = \frac{60 \cdot 10^{-6}}{3,14159 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0,25} = 0,34 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

**3.2.** Знайдіть кінетичну енергію об'єму крові, що протікає за одну хвилину зі швидкістю $0,4$ м/с через артерію діаметром 3 мм.

| |
|---|
| $t = 60$ с, |
| $v = 0,4$ м/с, |
| $D = 3 \cdot 10^{-3}$ м, |
| $\rho = 1150$ кг/м$^3$ |
| $E_K$–? |

Із механіки відомо, що кінетична енергія визначається за формулою
$$E_K = \frac{mv^2}{2},$$
де $m$ — маса. Об'єм крові $Q$, що пройшов по артерії за час $t$, визначається згідно з формулою (3.4):

$$Q = Svt,$$

де $S$ — площа перерізу судини, яку легко визначити, якщо судина має циліндричну форму:

$$S = \pi(0,5D)^2.$$

З останніх двох формул маємо

$$Q = \pi(0,5D)^2 vt.$$

Загальну масу крові можна визначити як добуток її густини $\rho$ та об'єму $Q$:

$$m = \rho Q = \rho\pi(0,5D)^2 vt.$$

Звідси кінетична енергія

$$E_K = \frac{\pi\rho(0,5D)^2 v^3 t}{2}.$$

Підставляємо значення й отримуємо відповідь

$$E_K = \frac{3,14159 \cdot 1150 \cdot (0,5 \cdot 3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,4^3 \cdot 60}{2} = 0,0156 \text{ (Дж)}.$$

**3.3.** У скільки разів зміниться модуль пружності стінки аорти при атеросклерозі, якщо відомо, що швидкість пульсової хвилі при цьому зросла втричі?

| $v_2 = 3v_1$ |
|---|
| $E_2/E_1$—? |

Швидкість пульсової хвилі визначається за формулою (3.14):

$$v = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho r}}.$$

Звідси маємо

$$v^2 = \frac{Eh}{2\rho r},$$

$$v_1^2 = \frac{E_1 h}{2\rho r}, \quad v_2^2 = \frac{E_2 h}{2\rho r};$$

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{E_2}{E_1}, \quad \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2.$$

За умовою $v_2 = 3v_1$, отже,

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{3v_1}{v_1}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

**3.4.** Знайдіть потужність, що розвивається серцем людини при скороченні тривалістю $0,3$ с. Ударний об'єм крові дорівнює 60 мл, швидкість крові в аорті – $0,5$ м/с. Середній тиск, при якому кров викидається в аорту лівим шлуночком, дорівнює $13,3$ кПа. Врахувати, що робота правого шлуночка становить 20% роботи лівого.

| |
|---|
| $t = 0,3$ с, |
| $V_0 = 60 \cdot 10^{-6}$ м$^3$, |
| $v = 0,5$ м/с, |
| $p = 13,3 \cdot 10^3$ Па, |
| $A_p = 0,2A_l$, |
| $\rho = 1150$ кг/м$^3$ |
| $N$–? |

Робота лівого шлуночка при скороченні (3.15)

$$A_l = V_0 \left( p + \rho \frac{v^2}{2} \right).$$

При підстановці значень

$$A_l = 60 \cdot 10^{-6} \cdot \left( 13,3 \cdot 10^3 + 1150 \cdot \frac{0,5^2}{2} \right) = $$
$$= 0,8 \text{ (Дж)}.$$

Загальна робота серця при одному скороченні визначається як сума внесків від обох шлуночків:

$$A = A_l + A_p = A_l + 0,2A_l = 1,2A_l = 1,2 \cdot 0,8 = 0,96 \text{ (Дж)}.$$

Середня потужність визначиться як

$$N = \frac{A}{t} = \frac{0,96}{0,3} = 3,2 \text{ (Вт)}.$$

**3.5.** Швидкість пульсової хвилі в артеріях дорівнює 8 м/с. Чому дорівнює модуль пружності цих судин, якщо відомо, що відношення радіуса просвіту до товщини стінки судини дорівнює 6, а густина речовини судини становить $1,15$ г/см$^3$.

| |
|---|
| $v = 8$ м/с, |
| $r/h = 6$, |
| $\rho = 1150$ кг/м$^3$ |
| $N$–? |

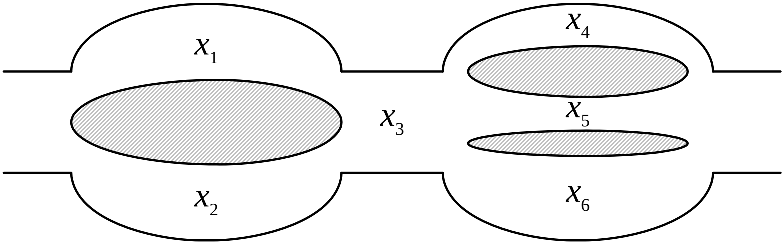
З виразу для знаходження величини швидкості пульсової хвилі (3.14) знайдемо модуль пружності:

$$v = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho r}}, \quad v^2 = \frac{Eh}{2\rho r}, \quad E = \frac{2\rho r v^2}{h}.$$

Підставляючи значення, отримуємо

$$E = 2 \cdot 1150 \cdot 6 \cdot 8^2 = 8,83 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

**3.6.** Знайдіть еквівалентний гідравлічний опір системи судин, що зображена на рисунку, якщо $x_1 = X$, $x_2 = X$, $x_3 = 2X$, $x_4 = X/2$, $x_5 = X$, $x_6 = X/3$.




$x_1 = x_2 = X,$
$x_3 = 2X,$
$x_4 = X/2,$
$x_5 = X,$
$x_6 = X/3$

$X_{\text{заг}}$–?

Судина складається з трьох частин: дві розгалужені ($x_1, x_2$ та $x_4, x_5, x_6$ ), одна суцільна ($x_3$). Ці частини з'єднані послідовно, тому їх опори додаються (3.16):

$$X_{\text{заг}} = X_1 + X_2 + X_3.$$

Знайдемо опір першої ділянки (паралельне з'єднання двох трубок з опорами $x_1$ та $x_2$):

$$X_1 = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{X}\right)^{-1} = \frac{X}{2}.$$

Опір другої ділянки визначається умовою задачі

$$X_2 = x_3 = 2X.$$

Знайдемо опір останньої ділянки (паралельне з'єднання трьох трубок з опорами $x_4, x_5, x_6$):

$$X_3 = \left(\frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{X} + \frac{1}{X} + \frac{3}{X}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{X}\right)^{-1} = \frac{X}{6}.$$

Тепер знайдемо загальний опір:

$$X_{\text{заг}} = X_1 + X_2 + X_3 = \frac{X}{2} + 2X + \frac{X}{6} = 2X + \frac{2X}{3} \approx 2,6X.$$

**3.7.** Знайдіть швидкість та час повного осідання сферичних частинок радіусом $r = 2$ мкм у шарі води товщиною $l = 3$ см при дії сили тяжіння, якщо густина частинок $\rho = 2,5$ г/см$^3$.

| |
|---|
| $r = 2 \cdot 10^{-6}$ м, |
| $l = 0,03$ м, |
| $\rho = 2500$ кг/м$^3$, |
| $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$, |
| $\eta_в = 1,005 \cdot 10^{-3}$ Па·с, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $v, t$–? |

Швидкість осідання знайдемо за формулою (3.8):

$$v = \frac{2(\rho - \rho_р) r^2 g}{9\eta} =$$

$$= \frac{2(2500 - 1000)(2 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 9,8}{9 \cdot 1,005 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ (м/с)}.$$

Час повного осідання – це час, за який всі частинки досягнуть дна посудини із водою. Отже, він дорівнює часу осідання верхніх частинок та знаходиться як відношення висоти шару води до знайденої швидкості руху:

$$t = \frac{l}{v} = \frac{0,03}{1,3 \cdot 10^{-5}} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ (с)}.$$

**3.8.** Визначте максимальну кількість крові, яка може пройти крізь аорту за 1 с, щоб течія зберігалася ламінарною. Діаметр аорти $D = 2$ см, в'язкість крові $\eta = 5$ мПа·с.

| |
|---|
| $t = 1$ с, |
| $D = 0,02$ м, |
| $\eta = 5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, |
| $\rho_к = 1060$ кг/м$^3$, |
| $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$ |
| $m$–? |

Масу крові визначимо як добуток її об'єму $Q$ та густини:

$$m = Q\rho_к.$$

У свою чергу, об'єм знайдемо за формулою (3.4):

$$Q = Svt,$$

отже, із урахуванням площі перерізу аорти $S = \pi D^2/4$ знайдемо формулу для маси крові, що проходить крізь аорту за час $t$:

$$m = Svt\rho_к = \rho_к v \frac{\pi D^2}{4} t.$$

Число Рейнольдса обчислюється за формулою (3.9):

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_к v D}{\eta}.$$

Виразимо звідси критичну швидкість, при якій ламінарна течія переходить у турбулентну:

$$v = \frac{\mathrm{Re} \cdot \eta}{\rho_к D}.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу для визначення маси, отримуємо

$$m = \frac{\pi D \cdot \mathrm{Re}_{\text{кр}} \eta t}{4} = \frac{3,14159 \cdot 0,02 \cdot 2300 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{4} = 0,18 \text{ (кг)}.$$

**3.9.** Який діаметр має перетяжка при відриві краплі дистильованої води масою $m = 50$ мг?

| |
|---|
| $m = 5 \cdot 10^{-5}$ кг, |
| $\sigma = 72,6 \cdot 10^{-3}$ Н/м, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $D$–? |

Коефіцієнт поверхневого натягу можна визначити як силу, що діє на одиницю довжини контура, що обмежує поверхню:

$$\sigma = \frac{F}{l},$$

де у нашому випадку $F = mg$ – сила тяжіння. Звідси знайдемо довжину контура перетяжки:

$$l = \frac{F}{\sigma} = \frac{mg}{\sigma} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 9,8}{72,6 \cdot 10^{-3}} = 6,75 \text{ (мм)}.$$

Тепер можна знайти діаметр $D$ перетяжки:

$$l = \pi D, \quad D = \frac{l}{\pi} = \frac{6,75}{3,14159} = 2,149 \text{ (мм)}.$$

**3.10.** У скільки разів густина повітря в бульбашці, що знаходиться на глибині $h = 5$ м під водою, більше густини повітря при нормальному атмосферному тиску? Радіус бульбашки $r = 0,5$ мкм.

| |
|---|
| $h = 5$ м, |
| $P_1 = 10^5$ Па, |
| $r = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м, |
| $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м$^3$, |
| $\sigma = 0,073$ Н/м, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $P_2/P_1$–? |

Оскільки бульбашка одна і та сама, в обох випадках повітря в ній матиме однакові маси, але різні тиски $P$ та об’єми $V$. Густину повітря будемо визначати як відношення його маси до об’єму:

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1}, \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2},$$

де індекс 1 відповідає повітрю при нормальному атмосферному тиску, а індекс 2 – повітрю у зануреній бульбашці. Звідси маємо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Нехай температура в обох випадках однакова, тому виконується закон Бойля-Маріотта, відомий у термодинаміці:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{P_2}{P_1}.$$

З останніх двох формул маємо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{P_2}{P_1}.$$

Тиск усередині бульбашки, що знаходиться під водою, знайдемо за формулою

$$P_2=P_1+\rho_{\text{в}}gh+\frac{2\sigma}{r},$$

де $P_1$ – атмосферний тиск; $\rho_{\text{в}}gh$ – гідростатичний тиск, а останній доданок пов'язаний із силою поверхневого натягу (див. формулу (3.10)).

З останніх двох формул маємо кінцеве співвідношення

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1+\frac{\rho_{\text{в}}gh}{P_1}+\frac{2\sigma}{rP_1}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1+\frac{1000\cdot 9,8\cdot 5}{10^5}+\frac{2\cdot 0,073}{0,5\cdot 10^{-6}\cdot 10^5}=4,41.$$

Отже, тиск усередині бульбашки у 4,41 раза більший, ніж нормальний атмосферний тиск.

**3.11.** У яких судинах системи кровообігу (великих чи малих) існує більша ймовірність переходу ламінарної течії крові в турбулентну?

Нехай $D_1$ і $D_2$ – діаметри судин, причому $D_1>D_2$. Будемо виходити із виразу для визначення числа Рейнольдса (3.9):

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_{\text{к}}vD}{\eta}.$$

Отже, для фіксованих діаметрів судин при сталих в'язкості та густині крові турбулентний режим для судини з більшим діаметром $D_1$ реалізується за меншої швидкості $v$. Оскільки у великих судинах швидкість руху крові більша, ймовірність переходу ламінарної течії у турбулентну у великих судинах також більша.

**3.12.** У скільки разів змінюється швидкість осідання еритроцитів у людей, які хворі на сфероцитоз, порівняно з нормою, якщо середній радіус еритроцитів при цьому захворюванні збільшується в 1,5 раза?

## 3. В'язкість рідин. Поверхневий натяг. Гемодинаміка

| $r_2 = 1,5r_1$ |
|---|
| $v_2/v_1$—? |

Швидкість осідання еритроцитів визначимо за формулою (3.8):

$$v = \frac{2(\rho_{\text{ер}} - \rho_{\text{кр}})r^2 g}{9\eta}.$$

Звідси знайдемо відношення швидкостей для різних радіусів еритроцитів $r$:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2(\rho_{\text{ер}} - \rho_{\text{кр}})(r_2)^2 g \cdot 9\eta}{9\eta \cdot 2(\rho_{\text{ер}} - \rho_{\text{кр}})(r_1)^2 g} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{1,5r_1}{r_1}\right)^2 = 2,25.$$

Отже, швидкість осідання еритроцитів у людей, які хворі на сфероцитоз, збільшиться у 2,25 раза.

### Задачі для самостійного розв'язування

**3.13.** Використовуючи закон Стокса, визначити, протягом якого часу в кімнаті висотою $h = 3$ м повністю осяде пил. Частинки пилу вважати кулькоподібними, діаметром 1 мкм, густиною $\rho = 2,5$ г/см$^3$. В'язкість повітря $\eta_{\text{пов}} = 17,2$ мкПа·с, густина $\rho_{\text{пов}} = 1,2$ кг/м$^3$.

**3.14.** Порівняти формули для електричного $R = \rho l/S$ та гідравлічного $X = 8\eta l/(\pi R^4)$ опорів. Проаналізувати загальні риси у цих формулах та вказати на відмінності.

**3.15.** У деяких випадках ліки дозують краплями. На скільки відсотків зміниться доза водного розчину ліків при зміні температури від $t_1 = 25$°C до $t_2 = 10$°C? Цим температурам відповідають поверхневі натяги $\sigma_1 = 71,78$ мН/м та $\sigma_2 = 74,01$ мН/м.

**3.16.** Визначити додатковий тиск, обумовлений поверхневим натягом у сферичній краплі туману, якщо її діаметр дорівнює 3 мкм. Коефіцієнт поверхневого натягу води 72,6 мН/м.

**3.17.** Різниця рівнів ртуті у сполучених скляному капілярі та широкій посудині дорівнює 7,4 мм. Знайдіть радіус кривизни меніска ртуті, якщо її густина 13600 кг/м$^3$, а коефіцієнт поверхневого натягу ртуті 472 мН/м.

**3.18.** При визначенні сили поверхневого натягу краплинним методом число крапель гліцерину, що витікає з капіляра, становить $n = 50$.

Загальна маса гліцерину $m = 1$ г, а діаметр шийки краплі у момент відриву $d = 1$ мм. Визначити коефіцієнт поверхневого натягу гліцерину.

**3.19.** Спирт по краплях витікає крізь вертикальну трубку з внутрішнім діаметром $d = 2$ мм. Краплі відриваються через час $\Delta t = 1$ с одна після іншої. За який час витече маса $m = 10$ г спирту? Діаметр шийки краплі у момент відриву вважати таким, що дорівнює внутрішньому діаметру трубки.

**3.20.** Дві краплі води радіусом $r = 1$ мм кожна злилися в одну велику краплю. Вважаючи процес ізотермічним, визначити зменшення поверхневої енергії при цьому злитті, якщо поверхневий натяг води $\sigma = 73$ мН/м.

**3.21.** Тиск повітря усередині мильної бульбашки на $\Delta p = 200$ Па більше за атмосферний. Визначити діаметр бульбашки. Поверхневий натяг мильного розчину $\sigma = 40$ мН/м.

**3.22.** Повітряна бульбашка діаметром $d = 0,02$ мм знаходиться на глибині $h = 25$ см під поверхнею води. Визначити тиск повітря в цій бульбашці. Атмосферний тиск нормальний, поверхневий натяг води $\sigma = 73$ мН/м.

**3.23.** Відомо, що серце людини скорочується в середньому 70 разів за 1 хвилину, при кожному скороченні викидаючи близько 150 см$^3$ крові. Який об'єм крові перекачує ваше серце за час чотирьох пар в університеті?

**3.24.** Оптимальний режим роботи серця: передсердя працюють 0,1 с, відпочивають 0,7 с; шлуночки працюють 0,3 с, відпочивають 0,5 с. Визначити, скільки років відпочивали шлуночки серця у людини, якій 70 років. За середню частоту биття серця прийняти 70 ударів за хвилину.

**3.25.** У спокійному стані людини швидкість кровотоку в аорті приблизно дорівнює $v_1 = 0,4$ м/с. Вимірювання під мікроскопом показують, що швидкість крові в капілярах $v_2 = 0,5$ мм/с. Знайти загальну кількість капілярів, якщо площа перерізу аорти $S_1 = 4$ см$^2$, а діаметр одного капіляра $d = 10$ мкм. Знайти сумарну довжину капілярів, якщо середнє значення довжини одного капіляра $l = 0,7$ мм.

**3.26.** У людини в стані спокою величина кровотоку на 100 грамів м'язів руки становить 2,5 мл за хвилину. Визначити кількість капілярів у тканинах м'язів, вважаючи, що довжина кожного з них 0,3 мм, а діаметр 10 мкм. Різниця тисків на кінцях капілярів $33,3 \cdot 10^2$ Па, а в'язкість крові $\eta = 5$ мПа·с.

**3.27.** Визначити швидкість осідання еритроцитів у плазмі крові (в одиницях мм/год), виходячи з припущення, що вони мають форму кульок діаметром 7 мкм і не склеюються між собою. Густина еритроцитів — 1090 кг/м$^3$, густина крові — 1050 кг/м$^3$, в'язкість крові — 5 мПа·с.

**3.28.** Визначити, скільки відсотків від добової витрати енергії людини (11500 кДж) витрачається серцем на переміщення крові при частоті пульсу 70 уд/хв, якщо середній тиск у лівому шлуночку дорівнює 12 кПа, а в правому в шість разів менший. Кожним шлуночком викидається 60 мл крові, а швидкість кровотоку в обох випадках — 0,4 м/с.

**3.29.** Через голку, що надіта на трубку завдовжки 20 см, виливається кров з ампули діаметром 75 мм. Визначити, через який час з ампули виллється 250 мл крові, якщо діаметр голки 1 мм, а її довжина 4 см. Ампула містить 500 мл крові. Трубка і ампула розташовані вертикально. Густина крові — 1050 кг/м$^3$, в'язкість крові — 5 мПа·с.

**3.30.** Діаметр поршня шприца 20 мм, площа отвору голки 0,5 мм$^2$. Скільки часу витікатиме з горизонтально розташованого шприца новокаїн в'язкістю 1,24 мПа·с, якщо діяти на поршень силою 4 Н? Хід поршня — 4 см, довжина голки — 4 см.

**3.31.** Знайти лінійну швидкість кровотоку в аорті радіусом 1,5 см, якщо при тривалості систоли 0,25 с через аорту протікає 60 мл крові. У скільки разів ця швидкість менша від критичної? Густина крові — 1050 кг/м$^3$, її в'язкість — 5 мПа·с.

**3.32.** Знайти гідравлічний опір кровоносної судини завдовжки 0,1 м і радіусом 0,15 мм.

**3.33.** Визначити роботу, що здійснюється серцем при скороченні лівого шлуночка, якщо в аорту зі швидкістю $0,5$ м/с викидається 60 мл крові при тиску 13 кПа.

**3.34.** Знайдіть об'ємну швидкість крові в аорті, якщо радіус її просвіту 1,75 см, а лінійна швидкість крові в ній 0,5 м/с.

**3.35.** Через циліндричну трубку довжиною 50 см та внутрішнім діаметром 1 см пропускають повітря з об'ємною витратою 10 л/хв. Знайти зміну тиску в трубці. Температура повітря дорівнює 20°С.

**3.36.** Унаслідок втрати пружних властивостей судин при атеросклерозі число Рейнольдса істотно змінюється. Знайти число Рейнольдса у судині діаметром 3 мм, в якій швидкість руху крові дорівнює 1,8 м/с. Взяти густину крові 1060 кг/м$^3$, а в'язкість крові – $5 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

**3.37.** Одне коліно $U$ – подібної трубки має радіус $r_1 = 0,5$ мм, а інше – $r_2 = 1$ мм. Знайти різницю рівнів води в колінах. Коефіцієнт поверхневого натягу води $\sigma = 0,073$ Н/м. Змочування повне.

**3.38.** Трубка із внутрішнім діаметром $d = 4$ мм опущена у ртуть на глибину $h = 5$ мм. При цьому ртуть не заходить до трубки. Знайти крайовий кут $\theta$. Густина і коефіцієнт поверхневого натягу ртуті рівні: $\rho_{\text{рт}} = 13,6$ г/см$^3$ і $\sigma_{\text{рт}} = 0,47$ Н/м.

# 4. Вільні незгасні механічні коливання

## Основні формули

- Диференціальне рівняння вільних незгасних коливань

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x, \tag{4.1}$$

де $x$ — зміщення від положення рівноваги точки, що коливається (м); $t$ — час (с); $\omega_0$ — власна циклічна (колова) частота коливань (рад/с).

- Циклічна частота коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{4.2}$$

де $k$ — коефіцієнт квазіпружної сили ($F = -kx$ (2.8)), що виникає в системі при її виході із положення рівноваги (Н/м); $m$ — маса точки, що коливається (кг).

- Розв'язок рівняння (4.1) (часова залежність координати точки, що коливається)

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{4.3}$$

де $A$ — амплітуда коливань (м); $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ — фаза коливань (рад); $\varphi_0$ — початкова фаза коливань (рад) ($\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$); $\omega_0$ — циклічна частота коливань (рад/с).

- Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \\ &= -v_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = v_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

де $v_m = A\omega_0$ — амплітуда швидкості (м/с).

- Прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \\ &= -a_m\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = a_m\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

  де $a_m = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення (м/с$^2$).

- Зв'язок між частотою $\nu$, періодом $T$ та циклічною частотою $\omega_0$:

$$\omega_0 = 2\pi\nu, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{4.6}$$

- Якщо тіло, що коливається, за деякий проміжок часу $t$ здійснює $n$ коливань, то період та частоту можна знайти за формулами

$$T = \frac{t}{n}, \quad \nu = \frac{n}{t}. \tag{4.7}$$

- Період коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{4.8}$$

  де $l$ – довжина маятника (м); $g$ – прискорення вільного падіння (м/с$^2$).

- Період коливань пружинного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{4.9}$$

  де $m$ – маса вантажу (кг); $k$ – жорсткість пружини (Н/м).

- Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \tag{4.10}$$

  де $J$ – момент інерції фізичного маятника відносно осі, що проходить крізь точку підвісу (кг·м$^2$); $l$ – відстань між точкою підвісу та центром маси маятника (м).

## 4. Вільні незгасні механічні коливання

- Зведена довжина фізичного маятника

$$l_{\text{зв}} = \frac{J}{ml}. \tag{4.11}$$

- Кінетична енергія матеріальної точки, що коливається:

$$E_k = \frac{kA^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \tag{4.12}$$

- Потенціальна енергія матеріальної точки, що коливається:

$$E_p = \frac{kA^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \tag{4.13}$$

- Повна механічна енергія матеріальної точки, що коливається:

$$E = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \tag{4.14}$$

- Амплітуда результуючого коливання при додаванні двох однаково спрямованих коливань з однаковою частотою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right)}, \tag{4.15}$$

  де $A_1, A_2$ — амплітуди гармонічних коливань, що додаються (м); $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ — початкові фази цих коливань (рад).

- Початкова фаза результуючого коливання при додаванні двох однаково спрямованих коливань з однаковою частотою

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}. \tag{4.16}$$

- При додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, що задані рівняннями

$$x = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{01}), \quad y = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{02}), \tag{4.17}$$

  отримаємо періодичний рух матеріальної точки по еліптичній траєкторії. В загальному випадку рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \tag{4.18}$$

## Приклади розв'язування задач

**4.1.** Записати рівняння гармонічного коливання, якщо амплітуда прискорення $a_{max} = 50$ см/с$^2$, частота коливань $\nu = 0,5$ Гц, зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу $x_0 = 25$ мм. Знайти амплітуду швидкості.

| |
|---|
| $a_{max} = 0,5$ м/с$^2$, |
| $\nu = 0,5$ Гц, |
| $x_0 = 0,025$ м |
| $x(t), v_{max}$–? |

Рівняння гармонічного коливання має вигляд (4.3)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Знайдемо швидкість як першу похідну від координати за часом $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$:

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Звідси амплітуда швидкості визначається як

$$v_{max} = A\omega_0.$$

Прискорення – це друга похідна від координати за часом, або перша похідна від швидкості ($a = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$):

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

З останнього рівняння випливає вираз для амплітуди прискорення:

$$a_{max} = A\omega_0^2.$$

Розрахуємо циклічну частоту коливань за формулою (4.6):

$$\omega_0 = 2\pi\nu = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 = \pi \text{ (рад/с)}.$$

Отже, тепер можна знайти амплітуду коливань:

$$A = \frac{a_{max}}{\omega_0^2} = \frac{0,5}{3,14159^2} = 0,05 \text{ (м)}.$$

Залишилося знайти початкову фазу $\varphi_0$:

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\varphi_0, \quad \cos\varphi_0 = \frac{x_0}{A}, \quad \varphi_0 = \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right),$$

або після підстановки відомих значень:

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{0,025}{0,05}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Шукане рівняння гармонічного коливання набирає вигляду

$$x = 0,05\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

За умовою також потрібно знайти амплітуду швидкості:

$$v_{max} = A\omega_0 = 0,05 \cdot 3,14159 = 0,157 \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

**4.2.** Записати рівняння гармонічного коливання, якщо амплітуда швидкості $v_{max} = 0,63$ м/с, період коливань $T = 1$ с, а зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу дорівнює нулю. Знайти амплітуду прискорення $a_{max}$ та частоту коливань $\nu$.

| |
|---|
| $v_{max} = 0,63$ м/с,<br>$T = 1$ с,<br>$x_0 = 0$ |
| $x(t), a_{max}, \nu$–? |

Рівняння гармонічного коливання (4.3):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання (4.4):

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Прискорення точки при гармонічних коливаннях (4.5):

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Знайдемо частоту коливань $\nu$ та циклічну частоту $\omega_0$ за формулами (4.6):

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right), \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1 \ (\text{Гц}).$$

Тепер знайдемо амплітуду коливань через відоме за умовою значення амплітуди швидкості $v_{max}$:

$$v_{max} = A\omega_0, \quad A = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{0,63}{2\pi} = 0,1 \ (\text{м}).$$

Початкову фазу шукатимемо аналогічно до першої задачі:

$$A\cos\varphi_0 = x_0, \quad A\cos\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Рівняння гармонічного коливання набирає вигляду

$$x = 0,1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

а амплітуда прискорення

$$a_{max} = A\omega_0^2 = 0,1 \cdot (2\pi)^2 = 3,94\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

**4.3.** Математичний маятник здійснює гармонічні коливання. Через який проміжок часу він при першому коливанні відхилиться від положення рівноваги на відстань, що дорівнює амплітуді, якщо період коливання $T = 4$с, а початкова фаза коливань $\varphi_0 = \pi/2$?

| |
|---|
| $x = \mp A,$ |
| $T = 4$ с, |
| $\varphi_0 = \pi/2$ |
| $t-?$ |

За умовою потрібно знайти мінімальний час, за який зміщення точки від положення рівноваги досягне амплітудного значення. Оскільки у процесі коливань зміщення відбувається у двох напрямах, можна записати таке співвідношення:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \mp A.$$

Потрібно обрати знак перед амплітудою, якому відповідатиме менший час $t$. З того, що початкова фаза $\varphi = \pi/2$, випливає, що координата спочатку буде змінюватися від 0 до $-A$. Отже, обираємо знак "$-$":

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -A,$$

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -1,$$

$$\omega_0 t + \varphi_0 = \arccos(-1) = \pi.$$

Із урахуванням співвідношення $\omega_0 = 2\pi/T$ та підставляючи значення $\varphi_0 = \pi/2$ маємо

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

або після підстановки значення періоду

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

З останнього співвідношення знаходимо значення шуканого часу $t = 1$ (с).

**4.4.** Матеріальна точка масою $m = 0,002$ кг здійснює гармонічні коливання. В деякий момент часу $t$ зміщення точки $x = 0,05$ м, швидкість $v = 0,2$ м/с, прискорення $a = -80$ см/с$^2$. Знайдіть колову частоту $\omega_0$, період $T$, фазу коливань $\varphi$ в заданий момент часу, а також амплітуду $A$ та повну енергію $E$ точки.

## 4. Вільні незгасні механічні коливання

| $m = 0,002$ кг, $x = 0,05$ м, $v = 0,2$ м/с, $a = -0,8$ м/с$^2$ |
| --- |
| $\omega_0, T, \varphi, A, E-?$ |

Рівняння гармонічних коливань (4.3)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання (4.4):

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Прискорення матеріальної точки при гармонічних коливаннях

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Щоб знайти частоту та період коливань, поділимо прискорення точки $a$ на її координату $x$:

$$\frac{a}{x} = -\frac{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}{A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)} = -\omega_0^2,$$

звідси

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-a}{x}} = \sqrt{\frac{0,8}{0,05}} = 4 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

Період коливань $T$ визначається за формулою (4.6)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14159}{4} = 1,57 \text{ (с)}.$$

Для знаходження фази в заданий момент часу розділимо швидкість $v$ на прискорення $a$:

$$\frac{v}{a} = \frac{-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}{-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)} = \omega_0^{-1} \mathrm{tg}(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\mathrm{tg}(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{v}{a}\omega_0 = \frac{0,2}{-0,8} \cdot 4 = -1,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тепер знайдемо амплітуду коливань із часової залежності для координати:

$$A = \frac{x}{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)} = \frac{0,05}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 0,0707 \text{ (м)}.$$

Знайдемо повну енергію $E$ гармонічних коливань. Вона буде рівна сумі кінетичної $E_k$ та потенціальної $E_p$:

$$E = E_k + E_p.$$

Коли реалізується максимальне значення швидкості $v = v_{max}$, потенціальна енергія $E_p = 0$, тому

$$E = E_k + E_p = E_{kmax} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо

$$E = \frac{0,002 \cdot 0,0707^2 \cdot 4^2}{2} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

**4.5.** Початкова фаза коливань точки $\varphi_0 = 0$, період коливань $T = 1$ с. Знайти найближчі моменти часу, в які зміщення, швидкість та прискорення удвічі менші за їх амплітудні значення.

| |
|---|
| $\varphi_0 = 0$ рад, |
| $T = 1$ с, |
| $x(t_1) = A/2$, |
| $v(t_2) = v_{max}/2$, |
| $a(t_3) = a_{max}/2$ |
| $t_1, t_2, t_3$–? |

Знайдемо циклічну частоту (4.6):

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

Із урахуванням цього значення та початкової фази $\varphi_0 = 0$ часова залежність координати точки, що коливається, відповідно до (4.3) набирає вигляду

$$x = A\cos(2\pi t).$$

За умовою потрібно знайти найближчий момент часу $t_1$, в якій зміщення точки $x$ удвічі менше за амплітудне значення $A$, тобто можна записати

$$\frac{A}{2} = A\cos(2\pi t_1), \quad \cos(2\pi t_1) = \frac{1}{2}, \quad 2\pi t_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Звідси знайдемо значення часу $t_1$:

$$2\pi t_1 = \frac{\pi}{3}, \quad 2t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_1 = \frac{1}{6} \text{ (с)}.$$

Для знаходження моменту часу, в який швидкість $v$ вдвічі менша за своє амплітудне значення, запишемо закон зміни швидкості із часом відповідно до виразу (4.4) та знайденого значення циклічної частоти $\omega_0$:

$$v = -v_{max}\sin(2\pi t_2).$$

Оскільки потрібно знайти мінімальний час $t_2$, потрібно використовувати співвідношення $v = -0,5v_{max}$, тому що функція sin у першій чверті набуває додатних значень. Отже, отримаємо таке:

$$-\frac{v_{max}}{2} = -v_{max}\sin(2\pi t_2), \quad \sin(2\pi t_2) = \frac{1}{2}, \quad 2\pi t_2 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$2\pi t_2 = \frac{\pi}{6}, \quad 2t_2 = \frac{1}{6}, \quad t_2 = \frac{1}{12} \text{ (с)}.$$

Залишилося знайти найближчий момент часу $t_3$, в який прискорення вдвічі менше за амплітудне значення. Закон зміни прискорення із часом згідно виразу (4.5) для умови цієї задачі набере вигляду

$$a = -a_{max}\cos(2\pi t_3).$$

Згідно з останнім рівнянням на початку процесу прискорення матиме від'ємне значення, оскільки функція cos у першій чверті додатна. Із урахуванням цієї обставини запишемо таке:

$$-\frac{a_{max}}{2} = -a_{max}\cos(2\pi t_3), \quad \cos(2\pi t_3) = \frac{1}{2}, \quad 2\pi t_3 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$2\pi t_3 = \frac{\pi}{3}, \quad 2t_3 = \frac{1}{3}, \quad t_3 = \frac{1}{6} \text{ (с)}.$$

**4.6.** Матеріальна точка масою $m = 0,005$ кг коливається згідно з законом $x = 0,1\cos(2t + \varphi_0)$. Знайдіть максимальну силу, що діє на точку, та повну енергію $E$ системи.

| |
|---|
| $m = 0,005$ кг, |
| $x = 0,1\cos(2t + \varphi_0)$ |
| $F_{max}, E$–? |

В умові задачі даний закон коливань у канонічному вигляді:

$$x = 0,1\cos(2t + \varphi_0).$$

Якщо порівняти його та рівняння для гармонічних коливань (4.3)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

отримаємо значення амплітуди та частоти:

$$A = 0,1 \text{ (м)}, \quad \omega_0 = 2 \text{ (рад/с)}.$$

Максимальну силу, що діє на точку, будемо знаходити за другим законом Ньютона:

$$F = ma_{max} = mA\omega_0^2 = 0,005 \cdot 0,1 \cdot 2^2 = 0,002 \text{ (Н)}.$$

Повну енергію точки знайдемо як максимальну кінетичну (див. задачу 4):

$$E = E_{kmax} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2},$$

або після підстановки числових даних

$$E = \frac{0,005 \cdot 0,1^2 \cdot 2^2}{2} = 10^{-4}\ (\text{Дж}).$$

**4.7.** Пружина, до якої підвішене тіло, видовжилася на $x = 0,04$ м. Знайти частоту коливань пружинного маятника.

| $x = 0,04$ м, $g = 9,8$ м/с$^2$ |
|---|
| $\nu$–? |

Частота коливань пружинного маятника визначається формулою (див. (4.9), (4.6))

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Згідно із законом Гука пружна сила, що виникає при розтягу пружини під дією вантажу, дорівнює (2.8)

$$F_{\text{п}} = -kx.$$

На вантаж також діє сила тяжіння (1.8)

$$F_{\text{т}} = mg.$$

Оскільки пружина розтягується під дією вантажу та потім знаходиться у стані спокою, ці дві сили за третім законом Ньютона рівні за модулем та протилежні за напрямком, тому

$$F_{\text{п}} = -F_{\text{т}},$$

$$kx = mg, \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{x}.$$

Підставляючи одержане відношення у формулу для частоти, отримуємо

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x}},$$

або після підстановки числових значень

$$\nu = \frac{1}{2 \cdot 3,14159}\sqrt{\frac{9,8}{0,04}} = 2,49\ (\text{Гц}).$$

**4.8.** На горизонтально та вертикально відхиляючі пластини осцилографа подаються відповідно напруги $U_1 = 3\sin 2t$, $U_2 = 5\sin 2t$. Записати рівняння траєкторії, що описується електронним променем на екрані осцилографа.

| $U_1 = 3\sin 2t,$ <br> $U_2 = 5\sin 2t$ |
| --- |
| $U_1(U_2)$–? |

Будемо виходити з рівняння еліптичної траєкторії, що реалізується при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань (4.18):

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

За умовою задачі додаються дві напруги із амплітудами 3 В та 5 В і нульовою різницею фаз $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0$. Оскільки $\sin(0) = 0$, а $\cos(0) = 1$, маємо таке рівняння:

$$\left(\frac{U_1}{3}\right)^2 - 2\frac{U_1U_2}{3\cdot 5} + \left(\frac{U_2}{5}\right)^2 = 0,$$

або із застосуванням відомої формули $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ отримуємо

$$\left(\frac{U_1}{3} - \frac{U_2}{5}\right)^2 = 0, \quad \frac{U_1}{3} - \frac{U_2}{5} = 0, \quad 5U_1 = 3U_2.$$

Отже, електронний промінь буде описувати на екрані пряму лінію, що задається рівнянням

$$U_1 = 0,6U_2.$$

**4.9.** Суцільний циліндр висотою $h = 32$ см плаває у вертикальному положенні в рідині, на $2/3$ занурений у неї. Знайти період його вертикальних коливань навколо положення рівноваги.

| $h = 0,32$ м, <br> $V_{\text{зан}} = 2V/3,$ <br> $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| --- |
| $T$–? |

Нехай $V$ – об'єм усього циліндра, тоді занурена частина його об'єму $V_{\text{зан}} = 2V/3$. Оскільки циліндр знаходиться у стані спокою, на нього діють сила тяжіння (1.8) $F_{\text{т}} = mg$ та сила Архімеда (1.7) $F_{\text{А}} = \rho_{\text{р}}gV_{\text{зан}}$, які згідно умови плавання тіл (1.9) протилежно напрямлені та однакові за модулем:

$$mg = \rho_{\text{р}}gV_{\text{зан}},$$

де $m = \rho V$ – маса циліндра; $\rho_{\text{р}}$ – густина рідини; $\rho$ – густина матеріалу циліндра. Отже, маємо

$$\rho Vg = \rho_{\text{р}}g\frac{2}{3}V, \quad \rho = \frac{2}{3}\rho_{\text{р}}.$$

Диференціальне рівняння вертикальних коливань циліндра отримуємо із другого закону Ньютона:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -F,$$

де квазіпружна сила $F$ — це сила, яка повертає циліндр у стан спокою при його додатковому зануренні у воду. Сила тяжіння, що діє на циліндр, при його зануренні не змінюється. Отже, квазіпружна сила $F$ — це додаткова сила Архімеда, що виникає при його зануренні. Нехай циліндр занурений додатково на величину $x$ по відношенню до свого рівноважного положення. При цьому нескомпенсована частина сили Архімеда дорівнює квазіпружній силі і знаходиться за формулою

$$F = \rho_\mathrm{p} gSx,$$

де $S$ — площа поперечного перерізу циліндра або площа його основи. Маса циліндра знаходиться за формулою

$$m = \rho Sh.$$

Після підстановки останніх двох рівностей у другий закон Ньютона маємо

$$\rho Sh\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_\mathrm{p} gSx, \quad \rho h\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_\mathrm{p} gx,$$

або із урахуванням знайденого раніше співвідношення між густинами $\rho = (2/3)\rho_\mathrm{p}$:

$$\frac{2}{3}\rho_\mathrm{p} h\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_\mathrm{p} gx, \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3g}{2h}x.$$

Порівняємо останнє рівняння із диференціальним рівнянням для гармонічних коливань (4.1):

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x.$$

Звідси знайдемо циклічну частоту:

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2h}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2h}}.$$

Період знайдемо із останнього співвідношення (4.6):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{3g}}.$$

Кінцева формула отримана, підставимо числові значення:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{3g}} = 2 \cdot 3,14159\sqrt{\frac{2 \cdot 0,32}{3 \cdot 9,8}} = 0,93 \text{ (с)}.$$

**4.10.** У годиннику довжина сталевого маятника розрахована для температури 0°С. На скільки відставатиме годинник за добу при температурі повітря 30°С?

| |
|---|
| $t = 30^\circ$С, |
| $t_{\text{доб}} = 86400$ с, |
| $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$ |
| $\Delta t - ?$ |

Із підвищенням температури довжина металевого маятника стає більшою за рахунок процесів лінійного розширення сталі. Довжина $l$ при підвищеній температурі визначається за формулою

$$l = l_0(1 + \alpha t),$$

де $l_0$ — довжина при температурі 0°С; $\alpha$ — коефіцієнт лінійного розширення металу; $t$ — температура у градусах Цельсія. Нехай $T_0$ — період при нулі Цельсія (коли годинник іде точно), а $T$ — період при ненульовій температурі. Згідно з формулою (4.8) для періоду коливань математичного маятника маємо

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha t)}{g}}.$$

Оскільки при підвищенні температури довжина маятника $l$ збільшується, збільшується також і період коливань $T$, і за один і той самий час система встигає зробити меншу кількість коливань. Отже, при підвищенні температури годинник починає відставати. Знайдемо, на скільки він відстане за добу. У добі $t_{\text{доб}} = 86400$ секунд. Кількість коливань за добу при нульовій температурі $N_0$ та ненульовій $N$ визначиться як

$$N_0 = \frac{t_{\text{доб}}}{T_0}, \quad N = \frac{t_{\text{доб}}}{T}.$$

Щоб знайти час $\Delta t$, на який відстає годинник при підвищеній температурі, потрібно кількість коливань $N$, що він здійснює, помножити на час $(T - T_0)$, на який він відстає за одне коливання:

$$\Delta t = N(T - T_0) = \frac{t_{\text{доб}}}{T}(T - T_0) = t_{\text{доб}}(1 - \frac{T_0}{T}),$$

або після підстановки виразів для періодів

$$\Delta t = t_{\text{доб}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha t}}\right).$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta t = 86400\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+12\cdot 10^{-6}\cdot 30}}\right) = 15,55\ (\text{с}).$$

## Задачі для самостійного розв'язування

**4.11.** Диференціальне рівняння гармонічних коливань має вигляд $0,2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 0,8x = 0$. Знайти період та частоту цих коливань.

**4.12.** Тіло масою $m = 0,5$ кг здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A = 4$ см. Знайти період коливань, якщо максимальна кінетична енергія тіла, що коливається, дорівнює $E_{max} = 0,98$ Дж.

**4.13.** Ареометр масою $m = 50$ г, що має у верхній частині циліндричну трубку діаметром $D = 1$ см, плаває у воді. Знайти частоту власних вертикальних коливань ареометра навколо його положення рівноваги.

**4.14.** Довжина стовпчика ртуті у трубках манометра, що сполучаються, дорівнює $l = 50$ см. Знайти період власних коливань ртуті у манометрі.

**4.15.** Вантаж масою $m = 200$ г підвішений до пружини з коефіцієнтом пружності $k = 9,8$ Н/м. Знайти довжину математичного маятника, що має такий самий період коливань, як цей пружинний маятник.

**4.16.** Вантаж масою $m = 0,3$ кг, що підвішений до пружини, розтягує її на $\Delta x = 2,2$ см. Знайти кінетичну та потенціальну енергії вантажу через $\Delta t = 3$ с після початку коливань, якщо в початковий момент вантаж відтягнули на $x_1 = 5$ см від положення рівноваги і відпустили.

**4.17.** Повна енергія тіла масою $m = 1$ кг, що здійснює гармонічні коливання, $E = 1$ Дж, максимальна повертаюча сила $F_{max} = 0,1$ Н. Записати диференціальне рівняння коливань та його розв'язок, якщо початкова фаза $\varphi_0 = \pi/4$.

**4.18.** Рівняння коливань матеріальної точки масою $m = 16$ г має вигляд $x = 0,02\sin(\pi t/8 + \pi/4)$. Знайти кінетичну, потенціальну та повну енергію точки через $\Delta t = 2$ с після початку коливань.

## 4. Вільні незгасні механічні коливання

**4.19.** На ідеально гладкому горизонтальному столі знаходиться куля масою $M$, що прикріплена до вертикальної стійки пружиною із коефіцієнтом пружності $k$. Куля масою $m$ летить зі швидкістю $v$, потрапляє в кулю та залишається в ній. Знайти амплітуду та період коливань, що виникають при цьому, а також максимальні значення швидкості та прискорення.

**4.20.** Знайти момент інерції фізичного маятника масою $m = 20$ кг, якщо він здійснює коливання з періодом $T = 3,14$ с, а відстань від точки підвісу до центра маси $l = 1$ м.

**4.21.** Зведеною довжиною фізичного маятника називають довжину такого математичного маятника, період коливань якого збігається з періодом коливань фізичного маятника. Знайти частоту власних коливань ноги людини, розглядаючи її як фізичний маятник зі зведеною довжиною $l = 40$ см.

**4.22.** Два однаково спрямованих коливання задаються рівняннями

$$x_1 = 3\cos 5(t + 0,04\pi), \quad x_2 = 5\cos 5(t + 0,14\pi).$$

Записати рівняння результуючого коливання, що є результатом додавання цих двох.

**4.23.** Розкладіть гармонічне коливання, що здійснюється за законом $x = 10\cos(6t + 0,2\pi)$, на два гармонічних коливання тієї самої частоти та того самого напрямку таким чином, щоб початкові фази цих коливань дорівнювали $\varphi_{01} = 0,1\pi$ та $\varphi_{02} = 0,5\pi$ відповідно.

**4.24.** Два однаково спрямованих гармонічних коливання з однаковою частотою та амплітудами $A_1 = 3$ см та $A_2 = 5$ см поєднуються в одне гармонічне коливання з амплітудою $A = 7$ см. Знайдіть різницю фаз коливань, що додаються.

**4.25.** На горизонтальний та вертикальний входи осцилографа подають напруги $U_1 = 2\sin 5t$ та $U_2 = 2\sin(5t+\alpha)$. Знайти рівняння траєкторії, яка описується електронним променем на екрані осцилографа, при: а) $\alpha = \pi/2$; б) $\alpha = \pi$.

**4.26.** В електронній трубці зміщення пучка електронів пропорційне напрузі на відхиляючих пластинах. Знайти рівняння кривої, що описується електронним променем на екрані трубки, якщо на горизонтально та вертикально відхиляючі пластини подані відповідно напруги $U_1 = 2\sin 5t, \quad U_2 = 2\cos 5t$.

**4.27.** Два коливання спрямовані уздовж однієї прямої та мають однаковий період, що дорівнює 10 с. Амплітуди коливань також однакові й дорівнюють $0,01$ м. Різниця фаз коливань становить $45°$, початкова фаза одного з коливань дорівнює нулю. Записати рівняння результуючого коливання.

**4.28.** Маятник (сталева кулька на нитці) масою 5 г має період коливань 1 с. Коли під кулькою помістили магніт, період зменшився до $0,8$ с. Визначити силу притягання кульки до магніту.

**4.29.** Вантаж, підвішений на пружині, вивели із положення рівноваги та відпустили. Якщо період коливань вантажу дорівнює $0,9$ с, то його кінетична енергія буде у 3 рази більша за потенціальну енергію пружини через проміжок часу $\Delta t$. Знайти цей проміжок $\Delta t$.

**4.30.** Вантаж на пружині здійснює коливання з періодом 1 с, проходячи уздовж вертикалі відстань 15 см. Яка максимальна швидкість вантажу?

**4.31.** Знайти прискорення вільного падіння на Місяці, якщо маятниковий годинник іде на його поверхні у 2,46 раза повільніше, ніж на Землі.

**4.32.** Яким стане період коливань секундного маятника при його переміщенні з Землі на Місяць, якщо сила тяжіння на поверхні Місяця в 6 разів менша, ніж на Землі?

**4.33.** У скільки разів і як відрізняється період гармонічних коливань математичного маятника на планеті, маса і радіус якої у 4 рази більші, ніж у Землі, від періоду коливань такого самого маятника на Землі?

**4.34.** Періоди коливань двох математичних маятників відносяться як 3:2. У скільки разів і який маятник довший?

**4.35.** Один із маятників здійснює за один і той самий час на 30 коливань менше за інший. Відношення їх довжин 9:4. Знайдіть число коливань кожного з маятників за цей час.

**4.36.** Один із маятників здійснив 10 коливань, інший за такой самий час здійснив 6 коливань. Різниця довжин маятників 16 см. Знайти довжини обох маятників.

**4.37.** Яка довжина математичного маятника, що здійснює коливання за законом $x = 0,004\cos(2t + 0,8)$?

**4.38.** Годинник із маятником довжиною 1 м за добу відстає на 1 годину. Що потрібно зробити, щоб годинник не відставав?

**4.39.** Математичний маятник довжиною 1 м підвішений у ліфті. Яким буде період коливань маятника, якщо ліфт підіймається із прискоренням 1,8 м/с$^2$ та опускається із таким самим прискоренням?

**4.40.** Підвішений на невагомій пружині вантаж здійснює вертикальні коливання з амплітудою 4 см. Знайти енергію гармонічного коливання вантажу, якщо для пружного видовження пружини на 1 см потрібна сила 0,1 Н.

**4.41.** Гиря, що підвішена до пружини, коливається з амплітудою 3 см. Жорсткість пружини 980 Н/м. Знайти найбільшу кінетичну енергію гирі.

**4.42.** Потенціальна енергія тіла масою 0,4 кг, що здійснює гармонічні коливання на невагомій пружині, становить $3,2 \cdot 10^{-2}$ Дж. Знайти швидкість тіла, що коливається, у момент проходження ним положення рівноваги.

**4.43.** Тіло здійснює гармонічні коливання на пружині за законом $x = 0,07\cos(\pi t + 0,5\pi)$. Жорсткість пружини 20 Н/м. Знайти частоту коливань та повну енергію тіла.

**4.44.** Знайти масу тіла, що здійснює гармонічні коливання на пружині з амплітудою 0,1 м та частотою 2 Гц, якщо повна енергія коливань дорівнює 7,7 мДж.

**4.45.** Коливання задані рівнянням $x(t) = A\sin(\omega t)$. При фазі коливання $\varphi_1 = \pi/6$ зміщення складає $x_1 = 2$ см. Визначити амплітуду коливань і зміщення при фазі $\varphi_2 = 3\pi/4$.

# 5. Вільні та вимушені згасні коливання

## Основні формули

- Диференціальне рівняння вільних згасних коливань

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5.1}$$

де $\omega_0$ – власна частота коливань системи при відсутності загасання (рад/с); $\beta = r/(2m)$ – коефіцієнт загасання ($\text{с}^{-1}$); $m$ – маса точки, що коливається (кг); $r$ (кг/с) – коефіцієнт пропорційності між швидкістю матеріальної точки та силою тертя $F_{\text{тр}}$:

$$F_{\text{тр}} = -rv, \tag{5.2}$$

де $v$ – швидкість (м/с).

Розв'язок рівняння (5.1) залежить від знака різниці:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \tag{5.3}$$

де $\omega$ – колова частота згасних коливань.

При $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ розв'язок набирає вигляду

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{5.4}$$

де $A_0$ – початкова амплітуда (м); $\varphi_0$ – початкова фаза коливань (рад); $t$ – час (с).

При $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ частота стає уявною, а процес – аперіодичним.

- Період згасних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{5.5}$$

- Амплітуда згасних коливань

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}. \tag{5.6}$$

## 5. Вільні та вимушені згасні коливання

- Логарифмічний декремент загасання

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}, \tag{5.7}$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ — два послідовних значення амплітуди згасних коливань, що розділені інтервалом часу, який дорівнює періоду коливань $T$.

- Зв'язок коефіцієнта загасання $\beta$ та логарифмічного декремента загасання $\lambda$

$$\lambda = \beta T. \tag{5.8}$$

- Часова залежність повної енергії згасних коливань, усередненої за періодом коливань при слабкому загасанні $\beta \ll 1$:

$$E = \frac{mA_0^2\omega^2}{2}\mathrm{e}^{-2\beta t}. \tag{5.9}$$

- Час релаксації коливань (час, за який амплітуда зменшується в e разів):

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \tag{5.10}$$

- Кількість коливань, що здійснює коливальна система за час релаксації $\tau$:

$$N_\mathrm{e} = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}. \tag{5.11}$$

- Добротність коливної системи

$$Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{1-\mathrm{e}^{-2\lambda}}, \tag{5.12}$$

де $E$ — повна енергія коливань; $\Delta E$ — втрата енергії за один повний період коливань.

При $\beta \ll 1$ із використанням наближень $1-\mathrm{e}^{-2\lambda} \approx 2\lambda$, $\omega_0 \approx \omega$:

$$Q = \pi N_\mathrm{e} = \pi\frac{\tau}{T} = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \tag{5.13}$$

- Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t), \tag{5.14}$$

де $F_0$ — амплітуда вимушувальної сили (Н); $m$ — маса матеріальної точки (кг); $\omega$ — циклічна частота вимушувальної сили (рад/с).

- Зміщення матеріальної точки після встановлення стаціонарного режиму вимушених коливань

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{5.15}$$

де амплітуда розраховується за формулою

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{5.16}$$

а початкова фаза

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{5.17}$$

- Циклічна частота вимушених коливань, за якої спостерігається резонанс:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{5.18}$$

- Амплітуда вимушених коливань при резонансі

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{5.19}$$

## Приклади розв'язування задач

**5.1.** Математичний маятник довжиною $l = 50$ см, виведений із положення рівноваги, відхилився при першому коливанні на $x_1 = 5$ см, а при другому (у той самий бік) — на $x_2 = 4$ см. Знайти логарифмічний декремент загасання та час релаксації (час спадання амплітуди в e разів) для цих коливань.

## 5. Вільні та вимушені згасні коливання

| |
|---|
| $l = 0,5$ м, |
| $A_0 = 0,05$ м, |
| $A_1 = 0,04$ м, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $\lambda, \tau$–? |

Рівняння згасних коливань має вигляд (5.4):

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де частота визначається за формулою (5.3):

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2,$$

де $\omega_0$ — власна частота коливань без загасання; $\beta$ — коефіцієнт загасання.

За умовою задачі моменти часу, коли зміщення рівне $x_1$ та $x_2$, розділені повним періодом коливань $T$. Отже, візьмемо $x_1$ за початкову амплітуду $A_0$, а $x_2$ позначимо як амплітуду $A_1$. Знайдемо логарифмічний декремент загасання за формулою (5.7):

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0}{A_1} = \ln \frac{0,05}{0,04} \approx 0,223.$$

Амплітуда коливань при загасанні визначається за формулою (5.6):

$$A_1 = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}.$$

За умовою потрібно знайти час релаксації $\tau$, за який амплітуда зменшується в e разів. Отже, маємо

$$A_1 = \frac{A_0}{\mathrm{e}}, \quad \frac{A_0}{\mathrm{e}} = A_0 \mathrm{e}^{-\beta\tau}, \quad \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-\beta\tau}, \quad \beta\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Отже, щоб знайти час $\tau$, потрібно знайти коефіцієнт загасання $\beta$. Згідно формули для визначення логарифмічного декременту загасання (5.6):

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}}{A_0 \mathrm{e}^{-\beta(t+T)}} = \ln \mathrm{e}^{\beta T} = \beta T.$$

Тепер задача зводиться до знаходження періоду коливань $T$.

Використаємо формулу (5.5):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Пригадаємо, що в умові задачі нам даний математичний маятник, а його власний період коливань без загасання $T_0$ визначається за формулою (4.8):

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Із урахуванням цього знайдемо власну циклічну частоту коливань маятника за останньою формулою (4.6):

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Підставимо всі знайдені величини в раніше отримане рівняння $\lambda = \beta T$, й отримаємо таке:

$$\lambda = \beta T, \quad \lambda = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \lambda\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 2\pi\beta,$$

$$\lambda^2(\omega_0^2 - \beta^2) = 4\pi^2\beta^2, \quad \beta^2(4\pi^2 + \lambda^2) = \lambda^2\omega_0^2,$$

$$\beta = \frac{\lambda\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} = \lambda\sqrt{\frac{g}{l(4\pi^2 + \lambda^2)}}.$$

Після підстановки числових значень та відповідного розрахунку

$$\beta = 0,223\sqrt{\frac{9,8}{0,5(4 \cdot 3,14159^2 + 0,223^2)}} = 0,157 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Тепер можна знайти час релаксації:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{0,157} = 6,37 \text{ (с)}.$$

**5.2.** За час $\Delta t = 10$ с амплітуда коливань зменшилася в e разів. Знайти коефіцієнт загасання цих коливань $\beta$.

| |
|---|
| $\Delta t = 10$ с, |
| $A_1/A_2 = \mathrm{e}$ |
| $\beta$–? |

Запишемо згідно з формулою (5.6) вирази для знаходження двох амплітуд $A_1$ та $A_2$, що розділені проміжком часу $\Delta t$:

$$A_1 = A_0\mathrm{e}^{-\beta t_1},$$

$$A_2 = A_0\mathrm{e}^{-\beta(t_1+\Delta t)}.$$

Поділимо перше рівняння на друге й отримаємо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0\mathrm{e}^{-\beta t_1}}{A_0\mathrm{e}^{-\beta(t_1+\Delta t)}} = \mathrm{e}^{\beta\Delta t}.$$

За умовою задачі

$$\frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}.$$

Отже, із порівняння двох останніх співвідношень маємо

$$\mathrm{e}^{\beta\Delta t} = \mathrm{e}^1, \quad \beta\Delta t = 1, \quad \beta = \frac{1}{\Delta t}.$$

Після розрахунку

$$\beta = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{10} = 0,1 \ \left(\mathrm{c}^{-1}\right).$$

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати за один крок, скориставшись формулою (5.10).

**5.3.** Логарифмічний декремент загасання камертона, що коливається із частотою $\nu = 100$ Гц, дорівнює $0,002$. Через який проміжок часу амплітуда коливань камертона зменшиться у 100 разів?

| |
|---|
| $\nu = 100$ Гц, |
| $\lambda = 0,002$, |
| $N = A_1/A_2 = 100$ |
| $\Delta t$–? |

Запишемо вираз для знаходження амплітуди (див. (5.6) та третє співвідношення попередньої задачі):

$$A_2 = A_1\mathrm{e}^{-\beta\Delta t}.$$

Із цього співвідношення можна отримати таке:

$$\frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta\Delta t} = N, \quad \ln N = \beta\Delta t, \quad \Delta t = \frac{\ln N}{\beta}.$$

Для знаходження коефіцієнта загасання коливань $\beta$ використаємо вираз для визначення логарифмічного декременту загасання $\lambda$ (5.8) та з'вязок періоду коливань $T$ з частотою $\nu$ (4.6):

$$\lambda = \beta T, \quad T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta}{\nu}, \quad \beta = \lambda\nu.$$

Після підстановки цього значення у знайдений вираз для $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{\ln N}{\beta} = \frac{\ln N}{\lambda\nu},$$

або після підстановки числових значень

$$\Delta t = \frac{\ln 100}{0,002 \cdot 100} = 23,03 \ (\mathrm{c}).$$

**5.4.** Логарифмічний декремент загасання маятника дорівнює $\lambda = 0,02$. У скільки разів зменшиться амплітуда після 50 повних коливань?

| |
|---|
| $\lambda = 0,02,$ |
| $N = 50$ |
| $A_1/A_2 - ?$ |

Нехай $t$ — час, необхідний для зменшення амплітуди коливань в $N$ разів. Тоді згідно із (5.6) маємо

$$A_2 = A_1 \mathrm{e}^{-\beta t}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta t}.$$

Для здійснення системою $N$ повних коливань згідно із (4.7) потрібний час

$$t = NT,$$

де $T$ — період коливань або час одного повного коливання. Коефіцієнт загасання виразимо через логарифмічний декремент загасання згідно із (5.8):

$$\lambda = \beta T, \quad \beta = \frac{\lambda}{T}.$$

Підставимо дані вирази у першу формулу:

$$\frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta t} = \exp\left\{\frac{\lambda}{T} NT\right\} = \mathrm{e}^{\lambda N}.$$

Знайдемо числове значення шуканої величини:

$$\frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{0,02 \cdot 50} = \mathrm{e} = 2,71.$$

Зазначимо, що оскільки амплітуда зменшується в е разів, то $N = 50$ повних коливань системи у цьому випадку відповідають часу релаксації.

**5.5.** За час $\Delta t_1 = 10$ с амплітуда коливань маятника зменшилась у 3 рази. За який час вона зменшиться в 10 разів?

| |
|---|
| $\Delta t_1 = 10$ с, |
| $A_1/A_2 = 3,$ |
| $A_1/A_3 = 10$ |
| $\Delta t_2 - ?$ |

Запишемо вирази для визначення амплітуди через часи $\Delta t_1$ та $\Delta t_2$, згідно із (5.6), позначивши початкову амплітуду як $A_1$:

$$A_2 = A_1 \mathrm{e}^{-\beta \Delta t_1},$$

$$A_3 = A_1 \mathrm{e}^{-\beta \Delta t_2}.$$

Із першого виразу отримуємо

$$\frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta \Delta t_1}, \quad \beta \Delta t_1 = \ln \frac{A_1}{A_2},$$

а із другого

$$\frac{A_1}{A_3} = e^{\beta \Delta t_2}, \quad \beta \Delta t_2 = \ln \frac{A_1}{A_3}.$$

Почленно поділивши два останні вирази, отримаємо

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\ln(A_1/A_2)}{\ln(A_1/A_3)}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta t_1 \ln(A_1/A_3)}{\ln(A_1/A_2)}.$$

Знайдемо числове значення шуканої величини:

$$\Delta t_2 = \frac{10 \ln 10}{\ln 3} = 10 \log_3 10 = 21 \text{ (с)}.$$

**5.6.** Вимушені коливання описуються диференціальним рівнянням

$$0,4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 0,48\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 1,6x = 0,8\sin(3t).$$

Знайти циклічну частоту вимушених коливань та циклічну частоту власних коливань системи. При якій частоті зовнішньої сили буде спостерігатися резонанс?

| $0,4\ddot{x} + 0,48\dot{x} + 1,6x = 0,8\sin(3t)$ |
| --- |
| $\omega, \omega_0, \omega_{\text{рез}}$—? |

Для знаходження всіх необхідних величин достатньо використати задане рівняння, оскільки воно повністю описує властивості системи.

Однак його потрібно переписати у канонічній формі (5.14):

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t).$$

Для цього поділимо всі члени даного рівняння на $0,4$ й отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\cdot 0,6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2^2 x = 2\sin(3t).$$

Із порівняння останнього виразу із канонічною формою випливає значення частоти власних коливань $\omega_0 = 2$ (рад/с), значення частоти вимушених коливань $\omega = 3$ (рад/с) та величина коефіцієнта загасання $\beta = 0,6\,(\text{с}^{-1})$.

Резонансну частоту визначимо за формулою (5.18):

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{2^2 - 2\cdot 0,6^2} = 1,81\ \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

**5.7.** Знайти частоту власних коливань системи, якщо при зменшенні коефіцієнта загасання коливань удвічі резонансна частота змінюється від $\omega_{\text{р}1} = 3,88$ рад/с до $\omega_{\text{р}2} = 3,97$ рад/с.

| |
|---|
| $\omega_{\text{р}1} = 3,88$ рад/с, |
| $\omega_{\text{р}2} = 3,97$ рад/с, |
| $\beta_2 = \beta_1/2$ |
| $\omega_0$–? |

Відповідно до виразу для визначення резонансної частоти (5.18) запишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \omega_{\text{р}1} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_1^2}, \\ \omega_{\text{р}2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2}. \end{cases}$$

З умови задачі $\beta_2 = \beta_1/2$, тому система набирає вигляду

$$\begin{cases} \omega_{\text{р}1}^2 = \omega_0^2 - 2\beta_1^2, \\ \omega_{\text{р}2}^2 = \omega_0^2 - 0,5\beta_1^2. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше й отримаємо

$$\omega_{\text{р}2}^2 - \omega_{\text{р}1}^2 = \frac{3}{2}\beta_1^2.$$

Звідси виразимо $\beta_1$:

$$\beta_1^2 = \frac{2(\omega_{\text{р}2}^2 - \omega_{\text{р}1}^2)}{3}.$$

Згідно із першим рівнянням системи

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{\text{р}1}^2 + 2\beta_1^2} = \sqrt{\omega_{\text{р}1}^2 + \frac{4(\omega_{\text{р}2}^2 - \omega_{\text{р}1}^2)}{3}} = \sqrt{\frac{4\omega_{\text{р}2}^2 - \omega_{\text{р}1}^2}{3}}.$$

Підставимо числові значення:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,97^2 - 3,88^2}{3}} = 4 \,\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

**5.8.** При незмінній амплітуді вимушувальної сили $F_0$ амплітуди вимушених коливань для значень частот $\omega_1 = 100$ с$^{-1}$ і $\omega_2 = 300$ с$^{-1}$ є однаковими. Знайти резонансну частоту $\omega_{\text{рез}}$.

| |
|---|
| $F_0 = \text{const}$, |
| $\omega_1 = 100$ с$^{-1}$, |
| $\omega_2 = 300$ с$^{-1}$, |
| $A_1 = A_2$ |
| $\omega_{\text{рез}}$–? |

При дії вимушувальної сили із часом встановлюється стаціонарне значення амплітуди, що дається формулою (5.16):

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Нехай частотам $\omega_1$ і $\omega_2$ відповідають амплітуди $A_1$ і $A_2$ відповідно. Оскільки за умовою $A_1 = A_2$, із урахуванням останнього співвідношення маємо таке:

$$\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\beta^2\omega_1^2}}=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+4\beta^2\omega_2^2}}.$$

Із останнього співвідношення випливає, що вирази під знаками радикалів однакові:

$$(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\beta^2\omega_1^2=(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+4\beta^2\omega_2^2,$$

$$(\omega_0^2-\omega_1^2)^2-(\omega_0^2-\omega_2^2)^2=4\beta^2\omega_2^2-4\beta^2\omega_1^2,$$

$$(\omega_0^2-\omega_1^2-\omega_0^2+\omega_2^2)(\omega_0^2-\omega_1^2+\omega_0^2-\omega_2^2)=4\beta^2(\omega_2^2-\omega_1^2),$$

$$(\omega_2^2-\omega_1^2)(2\omega_0^2-\omega_1^2-\omega_2^2)=4\beta^2(\omega_2^2-\omega_1^2),$$

$$2\omega_0^2-\omega_1^2-\omega_2^2=4\beta^2,$$

$$2\omega_0^2-4\beta^2=\omega_1^2+\omega_2^2,$$

$$\omega_0^2-2\beta^2=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}.$$

Оскільки згідно із означенням резонансної частоти коливань (5.18)

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2},$$

маємо кінцеву відповідь

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}}.$$

Після підстановки відомих $\omega_1$ та $\omega_2$ отримаємо числове значення цієї частоти

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\frac{100^2+300^2}{2}}=223,61\ \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

**5.9.** Деяка точка здійснює згасні коливання за законом $x=A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)$ із частотою $\omega = 25$ рад/с. Знайти коефіцієнт загасання $\beta$, якщо в початковий момент часу швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення від положення рівноваги в цей момент у $\eta=1,02$ раза менше за амплітуду.

| |
|---|
| $\omega = 25$ рад/с, |
| $v_0 = 0$, |
| $A_0 = \eta x_0$, |
| $\eta = 1,02$ |
| $\beta$–? |

За умовою

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Знайдемо із цього рівняння зміщення в початковий момент часу $x_0 = x(t = 0)$:

$$x_0 = A_0 \sin\varphi_0,$$

оскільки за умовою $A_0 = \eta x_0$ маємо

$$\frac{A_0}{\eta} = A_0 \sin\varphi_0, \quad \sin\varphi_0 = \frac{1}{\eta}.$$

Знайдемо швидкість із першого рівняння як похідну за часом від координати:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A_0 \beta e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A_0 \omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$v = -A_0 e^{-\beta t} \left(\beta \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega \cos(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Знайдемо з отриманого рівняння швидкість у початковий момент часу $v_0 = v(t = 0)$:

$$v_0 = -A_0 \left(\beta \sin\varphi_0 - \omega \cos\varphi_0\right).$$

Оскільки за умовою задачі $v_0 = 0$, приходимо до рівняння

$$\beta \sin\varphi_0 = \omega \cos\varphi_0.$$

Якщо ми піднесемо до другого степеня обидві частини отриманого рівняння та врахуємо співвідношення $\cos^2\varphi_0 = 1 - \sin^2\varphi_0$, матимемо:

$$\beta^2 \sin^2\varphi_0 = \omega^2(1 - \sin^2\varphi_0), \quad \beta^2 \sin^2\varphi_0 = \omega^2 - \omega^2 \sin^2\varphi_0,$$

$$\sin^2\varphi_0 \left(\beta^2 + \omega^2\right) = \omega^2, \quad \sin^2\varphi_0 = \frac{\omega^2}{\beta^2 + \omega^2}.$$

Із урахуванням раніше отриманої рівності $\sin\varphi_0 = 1/\eta$ маємо

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{\omega^2}{\beta^2 + \omega^2}, \quad \omega^2 \eta^2 = \beta^2 + \omega^2, \quad \beta^2 = \omega^2(\eta^2 - 1),$$

або остаточно виражаючи коефіцієнт загасання $\beta$:

$$\beta = \omega \sqrt{\eta^2 - 1}.$$

Після підстановки відомих величин отримаємо числове значення коефіцієнта загасання
$$\beta = 25\sqrt{1,02^2 - 1} = 5,023\ (\text{c}^{-1}).$$

## Задачі для самостійного розв'язування

**5.10.** Амплітуда коливань маятника зменшується у десять разів за 100 повних коливань. Знайти логарифмічний декремент загасання. За скільки коливань амплітуда маятника зменшилась в е разів?

**5.11.** Амплітуда згасних коливань спадає за 10 коливань на 1/10 частину своєї початкової величини. Період коливань $T = 0,4$ с. Знайти логарифмічний декремент та коефіцієнт загасання. Записати диференціальне рівняння цих коливань.

**5.12.** До пружини підвісили тіло, яке розтягує її на $\Delta x = 5$ см. Записати диференціальне рівняння коливань пружинного маятника та його розв'язок при початковій амплітуді $A = 10$ см, якщо через час $\Delta t = 5$ с амплітуда коливань зменшується в е разів.

**5.13.** Сталева кулька діаметром $D = 23$ см прикріплена до пружини. Колова частота її коливань в повітрі $\omega_0 = 5\ \text{c}^{-1}$, в гліцерині $\omega = 4\ \text{c}^{-1}$. Знайти в'язкість гліцерину в умовах досліду. Врахувати, що на кульку діє сила тертя $F_{\text{тр}} = 6\pi\eta R v$ (закон Стокса (3.7)), де $\eta$ – в'язкість гліцерину. В'язкістю повітря та опором пружини в гліцерині знехтувати. Густина сталі $\rho = 7800$ кг/м$^3$.

**5.14.** Вимушені коливання описуються диференціальним рівнянням
$$0,4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 0,48\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 1,6x = 0,8\sin(3t).$$
Через який час після припинення дії вимушувальної сили амплітуда коливань зменшиться в е разів?

**5.15.** Вантаж масою $m = 2,5$ кг, підвішений до пружини з жорсткістю $k = 3,6\cdot 10^2$ Н/м, здійснює вимушені коливання під дією зовнішньої сили $F = 13,5\sin 6t$. Знайти амплітуду вимушених коливань вантажу. Тертям знехтувати.

**5.16.** Знайти коефіцієнт загасання коливань терезів, якщо відомо, що за 10 с амплітуда зменшилася в 20 разів.

**5.17.** Усереднений коефіцієнт загасання тіла дорослої людини дорівнює $0,3$ с$^{-1}$. Частота власних коливань тіла в лежачому положенні становить $3,5$ Гц, а в положенні стоячи – близько 8 Гц. У скільки разів зміниться резонансна частота тіла людини в різних положеннях при дії на організм інфразвуку?

**5.18.** До невагомої пружини підвісили вантаж, та вона розтягнулася на $\Delta x = 9,8$ см. З яким періодом буде коливатися цей вантаж, якщо йому надати невеликий поштовх у вертикальному напрямі? Логарифмічний декремент загасання коливань $\lambda = 3,1$.

**5.19.** За час $t$ система встигає здійснити $n$ коливань. За цей самий час амплітуда коливань зменшується в $\eta$ разів. Знайдіть коефіцієнт загасання $\beta$, логарифмічний декремент загасання $\lambda$ і добротність системи $Q$.

**5.20.** Коливальна система складається із пружини з коефіцієнтом жорсткості $k = 10,05$ Н/м та підвішеної до неї пластинки масою $m = 0,1$ кг, яку занурено в рідину. Знайти коефіцієнт опору рідини, якщо відомо, що амплітуда вимушених коливань пластинки максимальна при частоті вимушувальної сили $\omega = 10$ с$^{-1}$.

**5.21.** Осцилятор масою $m$ рухається за законом $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$ під дією вимушувальної сили $F = F_0 \sin(\omega t)$. Знайти коефіцієнт загасання осцилятора.

**5.22.** Згасні коливання точки відбуваються за законом $x = a_0 \mathrm{e}^{-\beta t} \sin(\omega t)$. Знайти амплітуду коливань і швидкість точки в момент часу $t = 0$, а також моменти часу, коли точка досягає крайніх положень.

**5.23.** Математичний маятник здійснює коливання в середовищі із логарифмічним декрементом загасання $\lambda = 1,5$. Яким буде логарифмічний декремент загасання, якщо опір середовища збільшити в $n = 2$ рази? У скільки разів потрібно збільшити опір середовища, щоб коливання стали неможливими?

**5.24.** Амплітуда згасних коливань зменшується за період в 3 рази. На скільки відсотків період згасних коливань більший, ніж період при відсутності загасання?

## 5. Вільні та вимушені згасні коливання

**5.25.** Період згасних коливань $T = 4$ с, логарифмічний декремент загасання $\lambda = 1,6$, початкова фаза дорівнює нулю. Зміщення точки в початковий момент часу становить $4,5$ см. Записати рівняння коливань і знайти зміщення та швидкість точки в момент часу через один період після початку коливань.

**5.26.** Логарифмічний декремент загасання камертона, що коливається з частотою 100 Гц, дорівнює 0,002. За який час амплітуда коливань камертона зменшиться в $\mathrm{e}^2$ разів?

**5.27.** Диференціальне рівняння згасних коливань має вигляд

$$0,5\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 0,25\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 8x = 0.$$

Знайти коефіцієнт загасання та циклічну частоту цих коливань. Записати відповідне рівняння згасних коливань за законом синуса або косинуса.

**5.28.** Амплітуда згасних коливань маятника за час $t = 5$ хв зменшилася в 2 рази. За який час $t_2$, вибравши відлік від початкового моменту, амплітуда зменшиться у 8 разів?

**5.29.** За час $t = 8$ хв амплітуда згасних коливань маятника зменшилася втричі. Знайти коефіцієнт загасання $\beta$.

**5.30.** Логарифмічний декремент коливань маятника $\lambda$ дорівнює 0,003. Визначити число $N$ повних коливань, які повинен здійснити маятник, щоб амплітуда зменшилася в 2 та в 4 рази.

**5.31.** Тіло масою $m = 5$ г здійснює згасні коливання. За час $t = 60$ с тіло втратило $60\%$ своєї енергії. Визначити коефіцієнт загасання $\beta$.

**5.32.** Визначити період $T$ згасних коливань, якщо період $T_0$ власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент коливань $\lambda = 0,628$.

**5.33.** Знайти число $N$ повних коливань системи, протягом яких енергія системи зменшилася в $n = 2$ рази. Логарифмічний декремент коливань $\lambda = 0,01$.

**5.34.** Коливна система здійснює згасні коливання з частотою 1000 Гц. Визначити частоту власних коливань $\nu_0$, якщо резонансна частота $\nu_{\text{рез}} = 998$ Гц.

**5.35.** Період $T_0$ власних коливань пружинного маятника дорівнює 0,55 с. У в'язкому середовищі період $T$ того самого маятника дорівнює 0,56 с. Визначити резонансну частоту $\nu_{\text{рез}}$ для цих коливань.

**5.36.** Кулька масою $m$ може здійснювати гармонічні коливання зі слабким загасанням в околі точки $x = 0$ із власною частотою $\omega_0$. У момент часу $t = 0$, коли кулька знаходилася у стані рівноваги, до неї приклали вимушувальну силу $F = F_0 \cos \omega t$, яка збігається за напрямом із віссю $x$. Знайти рівняння вимушених коливань кульки $x(t)$ після встановлення стаціонарного режиму.

**5.37.** Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти $\nu_0 = 1$ кГц власних коливань системи, що характеризується коефіцієнтом загасання $\beta = 400$ с$^{-1}$.

**5.38.** Визначити логарифмічний декремент коливань $\lambda$ коливальної системи, для якої резонанс спостерігається при частоті, що менша за власну частоту $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц.

**5.39.** Амплітуди вимушених гармонічних коливань при частотах $\nu_1 = 400$ Гц і $\nu_2 = 600$ Гц однакові. Визначити резонансну частоту $\nu_{\text{рез}}$. Загасанням знехтувати.

**5.40.** Гиря з масою $m = 0,2$ кг, що висить на вертикальній пружині з жорсткістю $k = 500$ Н/м, здійснює коливання з коефіцієнтом загасання $\beta = 0,75$ с$^{-1}$. Побудувати залежність амплітуди $A$ вимушених коливань гирі від частоти $\omega$ зовнішньої періодичної сили, якщо відомо, що максимальне значення зовнішньої сили $F_0 = 0,98$ Н. Для побудови графіка знайти значення $A$ для частот: $\omega = 0$, $\omega = 0,5\omega_0$, $\omega = 0,75\omega_0$, $\omega = \omega_0$, $\omega = 1,5\omega_0$, $\omega = 2\omega_0$, де $\omega_0$ – частота власних коливань гирі.

# 6. Хвильові процеси. Акустичні явища

## Основні формули

- Рівняння плоскої пружної хвилі

$$s = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right], \tag{6.1}$$

де $s$ — зміщення точок, що коливаються у хвилі відносно їх положення рівноваги (м); $A$ — амплітуда коливань джерела хвилі (м); $\omega$ — частота коливань джерела (рад/с); $t$ — час (с); $y$ — координата положення рівноваги будь-якої точки (м); $v$ — швидкість поширення хвилі (фазова швидкість) (м/с).

- Об'ємна густина енергії пружної хвилі, що поширюється в речовині:

$$\omega_p = \frac{\rho A^2\omega^2}{2}, \tag{6.2}$$

де $\rho$ — густина речовини (кг/м$^3$).

- Інтенсивність хвилі (густина потоку енергії)

$$I = \omega_p v. \tag{6.3}$$

- Зв'язок інтенсивності звуку $I$ та звукового тиску $p$ для плоскої хвилі

$$I = \frac{p^2}{2\rho v}. \tag{6.4}$$

- Виражений у белах (Б) рівень інтенсивності звуку $I$ відносно її значення $I_0$

$$L_{\text{Б}} = \lg\frac{I}{I_0}, \quad L_{\text{Б}} = 2\lg\frac{p}{p_0}, \tag{6.5}$$

де $I_0$ — рівень інтенсивності (Вт/м$^2$), що прийнятий за початковий рівень логарифмічної шкали; $p_0$ — відповідний рівень звукового тиску (Па).

- Інтенсивність звуку $I$ та звуковий тиск $p$, виражені через рівні інтенсивності $L_{\text{Б}}$, що випливає із виразу (6.5):

$$I = I_0 \cdot 10^{L_{\text{Б}}}, \quad p = p_0 \cdot 10^{0,5L_{\text{Б}}}. \tag{6.6}$$

- Записаний у децибелах (дБ) рівень інтенсивності звуку

$$L_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad L_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{p}{p_0}. \tag{6.7}$$

- Інтенсивність звуку $I$ та звуковий тиск $p$, що визначаються з (6.7):

$$I = I_0 \cdot 10^{0,1L_{\text{дБ}}}, \quad p = p_0 \cdot 10^{0,05L_{\text{дБ}}}. \tag{6.8}$$

- Гучність

$$E = k \lg \frac{I}{I_0}, \tag{6.9}$$

де $k$ – коефіцієнт пропорційності.

- Гучність на частоті 1 кГц

$$E_{\text{Б}} = L_{\text{Б}} = \lg \frac{I}{I_0}, \quad E_{\text{ф}} = L_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \tag{6.10}$$

де $E_{\text{ф}}$ – гучність, що виражена у фонах.

- Питомий акустичний імпеданс (хвильовий опір)

$$Z = \rho c, \tag{6.11}$$

де $\rho$ – густина середовища (кг/м$^3$); $c$ – швидкість поширення звукової хвилі в середовищі (м/с).

- Звуковий тиск

$$p = Zv = \rho c v, \tag{6.12}$$

де $v$ – швидкість руху частинок середовища (м/с); $Z = \rho c$ – хвильовий опір середовища (кг/(м$^2 \cdot$с)).

## 6. Хвильові процеси. Акустичні явища

- Коефіцієнт проникнення звукової хвилі

$$\beta = \frac{I_2}{I_1}, \tag{6.13}$$

де $I_1, I_2$ – інтенсивності звуків (Вт/м$^2$) у першому та другому середовищах відповідно.

- Формула Релея

$$\beta = \frac{4c_1\rho_1}{c_2\rho_2}\left(1 + \frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}\right)^{-2}, \tag{6.14}$$

де $c_1, \rho_1$ - характеристики першого середовища; $c_2, \rho_2$ – характеристики другого.

- Наближене співвідношення Релея (6.14) при $c_2\rho_2 \gg c_1\rho_1$

$$\beta \approx \frac{4c_1\rho_1}{c_2\rho_2}. \tag{6.15}$$

- Коефіцієнт відбиття звуку при переході із одного середовища в інше

$$r = \left(\frac{c_2\rho_2 - c_1\rho_1}{c_2\rho_2 + c_1\rho_1}\right)^2. \tag{6.16}$$

- Частота коливань, шо сприймається спостерігачем (ефект Доплера):

$$\nu' = \frac{v \pm v_{\text{с}}}{v \mp v_{\text{д}}}\nu, \tag{6.17}$$

де $v_{\text{с}}$ та $v_{\text{д}}$ – швидкості руху спостерігача та джерела пружної хвилі відносно середовища (м/с); $v$ – швидкість поширення хвилі в цьому середовищі (м/с); $\nu$ – частота коливань, що випромінюються джерелом (Гц). Знаки згори відповідають руху спостерігача та джерела назустріч один одному, нижні відповідають їх руху у протилежних напрямах.

- Доплерівський зсув частоти

$$\nu_{\text{д}} = \frac{2v_0}{v}\nu_{\text{г}}, \tag{6.18}$$

де $v_0$ — швидкість тіла, що рухається (м/с); $v$ — швидкість хвилі (ультразвуку) (м/с); $\nu_{\text{г}}$ — частота ультразвуку, що випромінюється генератором (Гц). Формула отримана в наближенні $v \gg v_0$.

- Довжина хвилі (відстань, яку хвиля із фазовою швидкістю $v$ проходить за один повний період коливань $T$)

$$\lambda = vT. \tag{6.19}$$

**Приклади розв'язання задач**

**6.1.** Джерело звуку здійснює коливання за законом $x = \sin 2000\pi t$. Швидкість поширення звуку 340 м/с. Записати рівняння коливань для точки, що знаходиться на відстані $y = 102$ м від джерела. Втратами енергії знехтувати, хвилю вважати плоскою.

| |
|---|
| $x = \sin 2000\pi t$, <br> $v = 340$ м/с, <br> $y = 102$ м |
| $s(t)$–? |

Рівняння плоскої пружної хвилі має вигляд (6.1)

$$s = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right].$$

Джерелом пружної хвилі є коливання, рівняння яких задано в умові задачі. Для джерела хвилі $y = 0$, отже, маємо

$$A \sin \omega t = \sin 2000\pi t,$$

звідки значення амплітуди $A$=1 м, а частоти $\omega$=2000$\pi$ (рад/с). Отже, шукане рівняння набирає вигляду

$$s(t) = A \sin \omega\left(t - \frac{y}{v}\right) = \sin 2000\pi(t - 0,3).$$

**6.2.** Знайти різницю фаз коливань двох точок, що знаходяться на промені на відстані $\Delta y = 1,75$ м одна від іншої, якщо довжина хвилі $\lambda = 1$ м.

| |
|---|
| $\Delta y = 1,75$ м, <br> $\lambda = 1$ м |
| $\Delta\varphi$–? |

Згідно із рівнянням (6.1) фаза коливань записується як

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{y}{v}\right).$$

Різницю фаз коливань двох точок в один і той самий момент часу знайдемо як

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega\left(t - \frac{y_1}{v}\right) - \omega\left(t - \frac{y_2}{v}\right) = \frac{\omega}{v}(y_2 - y_1).$$

Отже, формула для різниці фаз коливань двох точок, що знаходяться на одному промені, набирає вигляду

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{v}\Delta y,$$

де $\Delta y$ – відстань між точками. Використаємо формулу для періоду коливань джерела (4.6):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

З іншого боку, згідно з (6.19)

$$T = \frac{\lambda}{v}.$$

Далі прирівнюємо ці два вирази для періодів та виражаємо циклічну частоту:

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

Після підстановки останнього виразу у формулу для знаходження різниці фаз маємо

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{v}\Delta y = \frac{2\pi v}{\lambda}\frac{\Delta y}{v} = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda},$$

або після підстановки числових значень

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 1,75}{1} = 3,5\pi.$$

**6.3.** Яка частота коливань, якщо найменша відстань між точками, що коливаються в однакових фазах, дорівнює $\Delta y = 1$ м. Швидкість поширення хвиль $v = 300$ м/с.

| |
|---|
| $\Delta y = 1$ м, |
| $v = 300$ м/с |
| $\nu$–? |

У попередній задачі отримана формула для знаходження різниці фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda}.$$

Із врахуванням (6.19), (4.6) маємо

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

де $\nu$ – частота коливань. Отже, для різниці фаз із урахуванням останнього співвідношення одержуємо

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta y}{v}.$$

Із цього співвідношення легко отримати вираз для знаходження частоти коливань

$$\nu = \frac{v\Delta\varphi}{2\pi\Delta y}.$$

Згідно умови задачі розглядають дві найближчі точки, що коливаються в однакових фазах. Це означає, що точки знаходяться на відстані, що рівна довжині хвилі $\lambda$. Різниця фаз між такими точками дорівнює $\Delta\varphi = 2\pi$. Підставляючи це значення в останню формулу, маємо

$$\nu = \frac{2\pi v}{2\pi\Delta y} = \frac{v}{\Delta y} = \frac{300}{1} = 300 \text{ (Гц)}.$$

**6.4.** Точка, що знаходиться на відстані $y = 0,5$ м від джерела коливань, має в момент часу $t = T/3$ зміщення, що дорівнює половині амплітуди. Знайти довжину хвилі, якщо при $t = 0$ зміщення джерела дорівнює нулю.

| |
|---|
| $y = 0,5$ м, |
| $t_1 = T/3$, |
| $s(t_1) = A/2$, |
| $s(t=0, y=0) = 0$ |
| $\lambda$–? |

Із умови $s(t = 0, y = 0) = 0$ випливає, що рівняння хвилі (6.1) записується через синус:

$$s = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right].$$

За умовою у час $t_1 = T/3$ зсув при $y = 0,5$ м дорівнює $s = A/2$, отже, маємо

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{v}\right), \quad \sin\omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{v}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{v}\right) = \arcsin\frac{1}{2}, \quad \omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{v}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Після підстановки виразу (4.6)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

в останнє співвідношення отримаємо

$$\frac{2\pi}{T}\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{v}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{2}{T}\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{v}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2y}{Tv} = \frac{1}{6}, \quad \frac{2y}{Tv} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}, \quad \frac{2y}{Tv} = \frac{1}{2}, \quad Tv = 4y.$$

Оскільки згідно з (6.19) $\lambda = vT$, маємо

$$\lambda = 4y = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ (м)}.$$

**6.5.** Дослідження руху барабанної перетинки показує, що швидкість коливання її ділянок є величиною одного порядку із швидкістю зміщення молекул повітря при поширенні плоскої хвилі. Виходячи з цього, визначити приблизну амплітуду коливань ділянок барабанної перетинки для двох випадків: а) поріг чутності $I_0$; б) поріг больового відчуття $I_{max}$. Частота звуку $\nu = 1$ кГц.

| |
|---|
| $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м$^2$, |
| $I_{max} = 10$ Вт/м$^2$, |
| $\nu = 1000$ Гц, |
| $v = 340$ м/с, |
| $\rho = 1,29$ кг/м$^3$ |
| $A_0, A_{max}$—? |

Згідно з умовою задача зводиться до розгляду поширення плоскої звукової хвилі у повітрі. Із амплітудою руху частинок пов'язана об'ємна густина енергії пружної хвилі (6.2):

$$\omega_p = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}.$$

Із урахуванням виразу (6.3) для визначення інтенсивності

$$I = \omega_p v$$

матимемо

$$\frac{I}{v} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, \quad \rho A^2 \omega^2 v = 2I, \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}}.$$

Після врахування виразу (4.6) $\omega = 2\pi\nu$ отримуємо остаточну формулу у вигляді

$$A = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}}.$$

Для розрахунку числових значень використаємо значення швидкості поширення звуку в повітрі $v = 340$ м/с, а також густини повітря $\rho =$1,29 кг/м$^3$. Отже, після розрахунку матимемо

$$A_0 = \frac{1}{2 \cdot 3,14159 \cdot 1000}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12}}{1,29 \cdot 340}} = 0,0107 \text{ (нм)},$$

$$A_{max} = \frac{1}{2 \cdot 3,14159 \cdot 1000}\sqrt{\frac{2 \cdot 10}{1,29 \cdot 340}} = 33,4 \text{ (мкм)}.$$

**6.6.** Чи однакової висоти звук буде у таких випадках: а) джерело звуку рухається назустріч нерухомому спостерігачу зі швидкістю $v_1 = 40$ м/с; б) спостерігач рухається назустріч нерухомому джерелу із тією самою швидкістю? Частота джерела звуку $\nu = 600$ Гц.

| |
|---|
| $v_{с1} = 0,$ |
| $v_{д1} = 40$ м/с, |
| $v_{с2} = 40$ м/с, |
| $v_{д2} = 0,$ |
| $\nu = 600$ Гц, |
| $v = 340$ м/с |
| $\nu_1, \nu_2$–? |

Оскільки в обох випадках відбуваються наближення об'єктів, використовуємо для розрахунку частот формулу (6.17) із верхніми знаками:

$$\nu_1 = \frac{v + v_{с1}}{v - v_{д1}}\nu = \frac{340 + 0}{340 - 40} \cdot 600 = 680 \text{ (Гц)},$$

$$\nu_2 = \frac{v + v_{с2}}{v - v_{д2}}\nu = \frac{340 + 40}{340 - 0} \cdot 600 = 670,6 \text{ (Гц)}.$$

Отже, ці частоти істотно відрізняються.

**6.7.** На скільки збільшилася гучність звуку, якщо його інтенсивність збільшилася від порогу чутності $I_0$ у 1000 разів. Розв'язати задачу для двох випадків: а) частота звуку 1000 Гц; б) частота звуку 100 Гц.

| |
|---|
| $I_1 = I_0,$ |
| $I_2 = 1000I_0,$ |
| $\nu_1 = 1000$ Гц, |
| $\nu_2 = 100$ Гц |
| $\Delta E$–? |

На частоті $\nu_1 = 1000$ Гц шкала гучності $E$ збігається зі шкалою рівня інтенсивності, тобто $\Delta E_ф = \Delta L_{дБ}$. Отже, маємо

$$\Delta E = L_{дБ2} - L_{дБ1},$$

або із урахуванням (6.7)

$$\Delta E = 10\left(\lg\frac{I_2}{I_0} - \lg\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\lg\left(\frac{I_2}{I_0}\cdot\frac{I_0}{I_1}\right) =$$

$$= 10\lg\frac{I_2}{I_1} = 10\lg\frac{1000I_0}{I_0} = 10\lg 1000 = 30 \text{ (фон)}.$$

Тепер розв'яжемо задачу для частоти $\nu_2 = 100$ Гц. На кривій однакової гучності (див. додаток), що відповідає порогу чутності $I_0$, абсциса 100 Гц відповідає рівню інтенсивності звуку 40 дБ. Збільшення інтенсивності звуку відбувається у 1000 разів, тобто на величину

$$\Delta L_{дБ} = 10\lg 1000 = 30 \text{ (дБ)}.$$

Таким чином, створюється рівень інтенсивності звуку, що дорівнює $40 + 30 = 70$ (дБ). Цей рівень інтенсивності звуку на частоті 100 Гц відповідає кривій, що побудована для гучності 60 фон. Отже, рівень гучності зростає від 0 фон до 60 фон.

**6.8.** Розрив барабанної перетинки відбувається при рівні інтенсивності звуку $L_0 = 150$ дБ. Знайти інтенсивність, амплітудне значення звукового тиску та амплітуду зміщення частинок у хвилі для звуку із частотою $\nu = 1$ кГц, при яких можливий розрив барабанної перетинки.

| |
|---|
| $L_0 = 150$ дБ, |
| $\nu = 1000$ Гц, |
| $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м$^2$, |
| $\rho = 1,29$ кг/м$^3$, |
| $v = 340$ м/с |
| $I, p, A$–? |

Для знаходження інтенсивності $I$ використаємо першу формулу (6.7):

$$L_0 = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad \lg \frac{I}{I_0} = \frac{L_0}{10}, \quad \frac{I}{I_0} = 10^{L_0/10},$$

$$I = I_0 \cdot 10^{L_0/10}, \quad I = I_0 \cdot 10^{0,1L_0},$$

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{0,1 \cdot 150} = 1000 \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right).$$

Рівень звукового тиску $p$ знайдемо за формулою (6.4):

$$I = \frac{p^2}{2\rho v}, \quad p^2 = 2\rho v I, \quad p = \sqrt{2\rho v I},$$

$$p = \sqrt{2 \cdot 1,29 \cdot 340 \cdot 1000} = 936,6 \text{ (Па)}.$$

Густина енергії пружної хвилі визначається виразом (6.2):

$$\omega_p = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}.$$

Із урахуванням (6.3) для розрахунку інтенсивності

$$I = \omega_p v$$

маємо таке:

$$\frac{I}{v} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, \quad \rho A^2 \omega^2 v = 2I, \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}}.$$

Після врахування виразу (4.6) $\omega = 2\pi\nu$ отримуємо остаточну формулу у вигляді

$$A = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}},$$

або після підстановки відомих та знайдених величин

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3,14159 \cdot 1000}\sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{1,29 \cdot 340}} = 3,4 \cdot 10^{-4}\ (\text{м}).$$

**6.9.** Шум на вулиці відповідає рівню гучності $E_1 = 70$ фон, крику відповідає гучність $E_2 = 80$ фон. Який буде рівень гучності звуку, що отриманий унаслідок додавання крику та шуму вулиці? Значення частоти звуку $\nu = 1$ кГц.

| |
|---|
| $E_1 = 70$ фон, |
| $E_2 = 80$ фон, |
| $\nu = 1000$ Гц, |
| $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м$^2$ |
| $E$–? |

Нехай гучності $E_1$ відповідає інтенсивність $I_1$, а гучності $E_2$ – інтенсивність $I_2$. Оскільки частота звуків $\nu = 1000$ Гц, шкали гучності $E$ та рівня інтенсивності $L$ збігаються. Згідно з цим, відповідно до (6.10), (6.8), запишемо

$$\begin{cases} I_1 = I_0 10^{0,1E_1}, \\ I_2 = I_0 10^{0,1E_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 10^{-12} \cdot 10^7 = 10^{-5}\ (\text{Вт/м}^2), \\ I_2 = 10^{-12} \cdot 10^8 = 10^{-4}\ (\text{Вт/м}^2). \end{cases}$$

Загальна інтенсивність $I$ дорівнюватиме сумі цих двох величин:

$$I = I_1 + I_2 = 10^{-5} + 10^{-4} = 1,1 \cdot 10^{-4}\ (\text{Вт/м}^2).$$

Шукану гучність знайдемо за формулою (6.10):

$$E = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg \frac{1,1 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 80,4\ (\text{фон}).$$

**6.10.** Густина здорової м'язової тканини становить 1060 кг/м$^3$. Її хвильовий опір дорівнює $1,63 \cdot 10^6$ кг/(м$^2$·с). Під час дослідження ультразвуком відбитий сигнал буде прийнятий через $2 \cdot 10^{-5}$ с після випромінювання. На якій глибині у м'язовій тканині було знайдено неоднорідність?

| |
|---|
| $\rho = 1060$ кг/м$^3$, |
| $Z = 1,63 \cdot 10^6$ кг/(м$^2$·с), |
| $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ с |
| $h$–? |

Ультразвуковий сигнал проходить шукану відстань $h$ двічі – спочатку від генератора до перешкоди, а потім у зворотний бік до датчика. Отже, спостерігатиметься співвідношення

$$2h = c\Delta t,$$

де $c$ — швидкість поширення ультразвуку; $\Delta t$ — заданий у задачі час. Швидкість $c$ може бути знайдена за формулою (6.11):

$$Z = \rho c, \quad c = \frac{Z}{\rho},$$

або після підстановки отриманої швидкості у першу формулу

$$2h = \frac{Z}{\rho}\Delta t, \quad h = \frac{Z\Delta t}{2\rho}.$$

Після підстановки значень

$$h = \frac{Z\Delta t}{2\rho} = \frac{1,63 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 1060} = 0,0154 \text{ (м)}.$$

### Задачі для самостійного розв'язування

**6.11.** Джерело здійснює коливання згідно із законом $x = 5 \sin 3140t$. Знайдіть зміщення від положення рівноваги, швидкість та прискорення точки, що знаходиться на відстані $y = 340$ м від джерела, через час $\Delta t = 1$ с після початку коливань. Швидкість поширення хвилі $v = 340$ м/с.

**6.12.** Дві точки знаходяться на прямій, уздовж якої поширюється хвиля зі швидкістю $v = 50$ м/с. Період коливань $T = 0,05$ с, відстань між точками $\Delta y = 50$ см. Знайти різницю фаз коливань у цих точках.

**6.13.** Знайти різницю фаз у пульсовій хвилі між двома точками артерії, розташованими на відстані $\Delta y = 20$ см одна від іншої. Швидкість пульсової хвилі дорівнює 10 м/с. Серце здійснює гармонічні коливання із частотою $\nu = 1,2$ Гц.

**6.14.** Різниця ходу звукових хвиль, шо потрапляють у ліве та праве вухо людини, становить 1 см. Знайти зсув фаз між двома звуковими відчуттями для тону із частотою $\nu = 1000$ Гц.

**6.15.** Інтенсивність плоскої хвилі в повітрі дорівнює $I = 10^{-10}$ Вт/м$^2$. Знайти амплітуду коливань молекул повітря за нормальних умов та об'ємну густину енергії коливального руху для частот $\nu_1 = 20$ Гц, $\nu_2 = 1000$ Гц, $\nu_3 = 20000$ Гц. Швидкість звуку в повітрі $v = 330$ м/с.

**6.16.** Відомо, що людське вухо сприймає пружні хвилі в інтервалі частот від $\nu_1 = 20$ Гц до $\nu_2 = 20$ кГц. Яким довжинам хвиль відповідає цей інтервал у повітрі та у воді? Швидкості звуку в цих середовищах $v_1 = 340$ м/с та $v_2 = 1400$ м/с.

**6.17.** Знайти середню силу, що діє на барабанну перетинку людини площею $S = 66$ мм$^2$ для двох випадків: а) поріг чутності $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м$^2$; б) поріг больового відчуття $I_{max} = 10$ Вт/м$^2$. Частота звуку $\nu = 1$ кГц.

**6.18.** Дві машини рухаються назустріч із швидкостями $v_1 = 20$ м/с та $v_2 = 10$ м/с. Перша машина подає сигнал із частотою $\nu_1 = 800$ Гц. Якої частоти сигнал почує водій іншої машини: а) до зустрічі машин; б) після їх зустрічі?

**6.19.** Два звуки однакової частоти $\nu = 1$ кГц відрізняються за гучністю на $\Delta E = 20$ фон. У скільки разів відрізняються їх інтенсивності?

**6.20.** Два звуки однакової частоти відрізняються за інтенсивністю на $\Delta L = 30$ дБ. Знайти відношення амплітуд звукового тиску.

**6.21.** Знайти максимально допустиму інтенсивність звуку на виробництві, якщо допустимий рівень шуму $E = 70$ фон. Вважати, що шум відповідає звуку із частотою $\nu = 1$ кГц.

**6.22.** Звичайна розмова людини оцінюється рівнем гучності звуку $E_1 = 50$ фон (для частоти $\nu = 1$ кГц). Знайти рівень гучності звуку, що створюють три людини, які одночасно розмовляють.

**6.23.** Два звуки з частотою 1 кГц відрізняються за гучністю на 1 фон. Знайти відношення інтенсивностей звуків.

**6.24.** Шум на вулиці, якому відповідає рівень інтенсивності звуку $L_1 = 50$ дБ, чути в кімнаті як шум $L_2 = 30$ дБ. Знайти відношення інтенсивностей звуку на вулиці та в кімнаті.

**6.25.** Рівень гучності звуку із частотою $\nu = 5000$ Гц дорівнює $E = 50$ фон. Знайдіть інтенсивність цього звуку.

**6.26.** Рівні інтенсивності звуків з частотами $\nu_1 = 100$ Гц та $\nu_2 = 3000$ Гц дорівнюють $L = 50$ дБ. Визначити рівні гучності цих звуків.

**6.27.** Звук із частотою $\nu = 200$ Гц проходить деяку відстань у поглинаючому середовищі. Інтенсивність звуку при цьому зменшується від $I_1 = 10^{-4}$ Вт/м$^2$ до $I_2 = 10^{-8}$ Вт/м$^2$. На скільки при цьому зменшується рівень гучності?

**6.28.** Знайти інтенсивності звуків із частотами $\nu_1 = 100$ Гц, $\nu_2 = 500$ Гц та $\nu_3 = 1000$ Гц, якщо рівень гучності звуків однаковий і дорівнює $E = 40$ фон.

**6.29.** Доплерівський зсув частоти при відбитті механічної хвилі від еритроцитів, що рухаються, дорівнює 50 Гц. Частота генератора 100 кГц. Знайти швидкість руху крові, якщо швидкість ультразвуку в ній $v = 1520$ м/с.

**6.30.** Використовуючи ефект Доплера, визначають швидкість руху шарів крові залежно від їх віддалення від осі судини $v = f_1(r)$. Нехай ця залежність відповідає залежності для руху рідини із в'язкістю $\eta$ по трубі із радіусом $R$ та довжиною $l$:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right),$$

де $p_1$ і $p_2$ — тиски по обидві сторони труби; $r$ — відстань від центра труби до шару рідини, для якого визначається швидкість $v$. Який вигляд за цієї умови має графік залежності $v_д = f_2(r)$, де $v_д$ — доплерівський зсув частоти?

**6.31.** Джерело ультразвуку створює в повітрі хвилю довжиною $4,4$ мкм. Як зміниться довжина хвилі при переході ультразвуку у воду, якщо прийняти швидкість поширення ультразвуку у воді 1500 м/с, а в повітрі — 330 м/с?

**6.32.** Порівняйте довжини хвиль у повітрі для ультразвуку із частотою 1 МГц та звуку із частотою 1 кГц. Чим визначається нижня межа довжин хвиль ультразвуку в середовищі?

**6.33.** Знайти різницю фаз двох точок хвилі, що знаходяться на відстані 20 см одна від іншої. Швидкість хвилі 4 м/с, частота 5 Гц.

**6.34.** У фізіотерапії використовується ультразвук із частотою 800 кГц та інтенсивністю 1 Вт/м$^2$. Знайти амплітуду коливань молекул при дії ультразвуку на м'які тканини (воду).

**6.35.** Знайти коефіцієнт відбиття ультразвукової хвилі від поверхні розділу м'яка тканина—повітря. Хвильовий опір м'яких тканин у 3000 разів більший, ніж хвильовий опір повітря.

**6.36.** Знайти густину м'язової тканини, якщо її хвильовий опір дорівнює $1,6 \cdot 10^6$ кг/(м$^2 \cdot$с), а швидкість поширення ультразвуку в тканині становить 1500 м/с.

**6.37.** Різниця фаз звукових хвиль із частотою 1 кГц, що потрапляють від одного джерела у різні вуха, дорівнює 0,2 рад. Знайти різницю ходу для цих хвиль.

**6.38.** Рівень інтенсивностей серцевих тонів, що сприймаються за допомогою стетоскопа, дорівнює 10 дБ. Чому рівна інтенсивність тонів серця?

**6.39.** Людина зі звичайним слухом здатна відчувати різницю у гучності величиною 1 фон. У скільки разів змінюється при цьому інтенсивність звуку частотою 1 кГц?

**6.40.** Відомо, що кішки сприймають звуки, які створюють тиск, близький до тиску броунівського руху молекул повітря при кімнатній температурі ($10^{-6}$ Па). Якому рівню інтенсивності відповідають ці звуки? Порівняйте їх із порогом чутності для людини із нормальних слухом.

**6.41.** Гучність звуку із частотою 1 кГц зменшилася на 30 фон при проходженні крізь тонку перешкоду з фанери. Якою стала інтенсивність звуку, якщо до проходження перешкоди вона становила $10^{-8}$ Вт/м$^2$?

**6.42.** Як зміниться швидкість руху еритроцитів у кровоносному руслі у пацієнтів зі сфероцитозом, якщо доплерівський зсув частоти у 1,3 раза менший у порівнянні з нормою?

**6.43.** Чому заповнення простору між ультразвуковою голівкою та шкірою мастилом сприяє ефективному проходженню ультразвуку в біологічні тканини (воду)? Відповідні густини мастила, повітря та води — $\rho_1 = 800$ кг/м$^3$, $\rho_2 = 1,3$ кг/м$^3$, $\rho_3 = 1000$ кг/м$^3$, швидкості поширення ультразвуку у цих середовищах — $v_1 = 1500$ м/с, $v_2 = 330$ м/с,

$v_3 = 1500$ м/с.

**6.44.** Знайти довжину УЗ хвилі, що поширюється із частотою 1,5 МГц у воді зі швидкістю 1483 м/с та у повітрі зі швидкістю 343,1 м/с. Як змінюється довжина хвилі зі збільшенням швидкості її поширення? Як залежить довжина звукової хвилі від частоти коливань частинок середовища?

**6.45.** Знайти коефіцієнт проникнення на межі розділу повітря-шкіра. Швидкість поширення УЗ-хвилі в повітрі дорівнює 343,1 м/с, у шкірі – 1610 м/с, густина повітря – 1,205 кг/м$^3$, густина шкіри – 1250 кг/м$^3$.

**6.46.** Знайти коефіцієнт проникнення на межі розділу рідина-шкіра. Швидкість поширення УЗ-хвилі в рідині (гліцерин) дорівнює 1923 м/с, у шкірі – 1610 м/с, густина гліцерину – 1260 кг/м$^3$, густина шкіри – 1250 кг/м$^3$. Навіщо при діагностичних УЗ-методах поверхню шкіри пацієнта покривають водним желе або вазеліном?

**6.47.** Знайти звуковий тиск у крові ($\rho = 1050$ кг/м$^3$) при поширенні УЗ-хвилі із частотою 1 МГц та інтенсивністю 10 Вт/см$^2$. Швидкість поширення УЗ-хвилі в крові 1590 м/с.

**6.48.** Знайти амплітуду, швидкість та прискорення частинок що коливаються у рідкому середовищі (кров) під дією УЗ-хвилі з інтенсивністю 10 Вт/см$^2$ та частотою 1 МГц. Густина крові $\rho = 1050$ кг/м$^3$. Порівняти прискорення частинок крові із прискоренням вільного падіння. Зробити висновок про середню кінетичну енергію частинок середовища.

# 7. Основи молекулярної фізики. Ізопроцеси

## Основні формули

- Маса одного моля речовини

$$\mu = m_0 N_A = M_r \cdot 10^{-3}, \tag{7.1}$$

де $m_0$ – маса молекули (кг); $N_A = 6,028 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; $M_r$ – відносна молекулярна маса, яку наведено в таблиці Менделєєва (а.о.м.).

- Кількість молей речовини

$$\nu = \frac{m}{\mu}, \tag{7.2}$$

де $m$ – маса речовини (кг); $\mu$ – молярна маса речовини (кг/моль).

- Кількість молекул у довільній масі речовини

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A, \tag{7.3}$$

де $\nu$ – кількість молей речовини (моль); $m$ – маса речовини (кг); $\mu$ – молярна маса (кг/моль).

- Густина речовини

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{7.4}$$

де $m$ – маса речовини (кг); $V$ – об'єм, що займає речовина (м$^3$).

- Концентрація молекул

$$n = \frac{N}{V}, \tag{7.5}$$

де $N$ – кількість молекул; $V$ – об'єм (м$^3$).

- Тиск, що створює ідеальний газ (основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії):

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle W \rangle, \tag{7.6}$$

де $m_0$ – маса молекули газу (кг); $n$ – концентрація молекул ($м^{-3}$); $\langle v^2 \rangle$ – середнє значення квадрата швидкості молекул ($м^2/с^4$); $\langle W \rangle$ – середня кінетична енергія молекул газу (Дж).

- Тиск суміші газів, що хімічно не взаємодіють (закон Дальтона):

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n, \tag{7.7}$$

де $p_i$ (Па) – парціальні тиски (тиски, що створював би кожний газ окремо, якщо б тільки він знаходився у посудині); $n$ – кількість газів.

- Середня кінетична енергія руху молекул

$$\langle W \rangle = \frac{i}{2} kT, \tag{7.8}$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; $T$ – абсолютна температура (К); $i$ – кількість ступенів вільності.

- Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії для ідеального газу ($i = 3$) із урахуванням сталої Больцмана (див. (7.6), (7.8))

$$p = nkT. \tag{7.9}$$

- Рівняння стану газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{7.10}$$

де $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

- Рівняння Клапейрона для сталої маси газу

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \tag{7.11}$$

- Закон Бойля-Маріотта для ізотермічного процесу ($T = \text{const}$):

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \tag{7.12}$$

- Закон Гей-Люссака для ізобарного процесу ($p = \text{const}$)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{7.13}$$

- Закон Шарля для ізохорного процесу ($V = \text{const}$)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{7.14}$$

- Зв'язок температури $t$, вираженої у градусах Цельсія (°C) із абсолютною температурою $T$, що вимірюється у кельвінах (K):

$$T = t + 273,15. \tag{7.15}$$

### Приклади розв'язання задач

**7.1.** Знайдіть масу молекули кисню.

| |
|---|
| $\mu = 0,032$ кг/моль, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ |
| $m_0$–? |

Масу одного молю кисню знайдемо за таблицею Менделєєва: відносна маса атома кисню $M_r = 16$ а.о.м. Отже, маса молекули кисню $O_2$ буде дорівнювати 32 а.о.м. Ця маса зв'язана з молярною співвідношенням (7.1):

$$\mu = M_r \cdot 10^{-3} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}.$$

В одному молі будь-якого газу міститься число молекул, що дорівнює $N_A$. Тому маса однієї молекули визначається таким чином (7.1):

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}.$$

Обчислимо це значення:

$$m_0 = \frac{32 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 5,32 \cdot 10^{-26} \text{ (кг)}.$$

**7.2.** Знайти значення середньої квадратичної швидкості вільного електрона при температурі $-23$°C.

| |
|---|
| $i=3$, <br> $T=250$ К, <br> $m=9,11\cdot 10^{-31}$ кг, <br> $k=1,38\cdot 10^{-23}$ Дж/К |
| $v_{\text{кв}}$–? |

Використовуючи співвідношення (7.8) та вираз для кінетичної енергії, запишемо

$$\frac{m\langle v^2\rangle}{2}=\frac{3kT}{2}.$$

Звідси можна визначити середній квадрат швидкості:

$$\langle v^2\rangle=\frac{3kT}{m}.$$

Середня квадратична швидкість – це квадратний корінь із середнього квадрата швидкості молекул:

$$v_{\text{кв}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Знайдемо числове значення цієї швидкості:

$$v_{\text{кв}}=\sqrt{\frac{3\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 250}{9,11\cdot 10^{-31}}}=1,07\cdot 10^5\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

**7.3.** Густина газу в балоні електричної лампи 0,9 кг/м$^3$. При горінні лампи середня квадратична швидкість молекул газу в ній зросла від 547 м/с до 632 м/с. На скільки змінився при цьому тиск у лампі?

| |
|---|
| $\rho=0,9$ кг/м$^3$, <br> $\sqrt{\langle v_1^2\rangle}=547$ м/с, <br> $\sqrt{\langle v_2^2\rangle}=632$ м/с |
| $\Delta p$–? |

При нагріванні газу збільшується швидкість руху молекул, тому збільшується кількість ударів за одиницю часу об стінки посудини, в якій знаходиться газ. Завдяки цьому збільшується імпульс сили, що діє на стінку при ударі молекули, з яким пов'язаний тиск $p$. Отже, будемо шукати різницю тисків як

$$\Delta p=p_2-p_1,$$

де $p_1$ і $p_2$ – тиски при різних температурах. Тиск газу на стінку визначається за формулою (7.6):

$$p=\frac{1}{3}m_0n\langle v^2\rangle,$$

де $m_0$ – маса молекули, а концентрація $n$ визначається за формулою (7.5):

$$n=\frac{N}{V},$$

де $N$ — кількість молекул; $V$ — об'єм системи. З останнього виразу можна виразити добуток $m_0 n$:

$$m_0 n = \frac{m_0 N}{V},$$

а добуток маси молекули на їх кількість $m_0 N$ — це загальна маса газу $m$. Згідно з цим та виразом (7.4) матимемо

$$m_0 n = \frac{m}{V} = \rho,$$

де $\rho$ — густина газу. Підставляючи цей результат у вираз для тиску, отримуємо

$$p = \frac{1}{3}\rho\langle v^2\rangle,$$

або для різниці тисків

$$\Delta p = \frac{1}{3}\rho\langle v_2^2\rangle - \frac{1}{3}\rho\langle v_1^2\rangle = \frac{1}{3}\rho\left(\langle v_2^2\rangle - \langle v_1^2\rangle\right).$$

Після розрахунку одержимо

$$\Delta p = \frac{1}{3}\rho\left(\langle v_2^2\rangle - \langle v_1^2\rangle\right) = \frac{1}{3}\cdot 0,9\cdot\left(632^2 - 547^2\right) = 30064,5\ (\text{Па}).$$

Таким чином, тиск у працюючій лампі на 30 кПа більший, ніж у вимкненій лампі при кімнатній температурі.

**7.4.** Скільки молекул повітря знаходиться в кімнаті з об'ємом 240 м$^3$ при температурі 15°С та тиску 750 мм рт. ст.?

$V = 240$ м$^3$,
$T = 288$ К,
$p = 9,999\cdot 10^4$ Па,
$R = 8,31$ Дж/(моль·К),
$N_A = 6,02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$N$—?

Спочатку переведемо тиск із мм рт. ст. у паскалі. Відомо, що тиск за нормальних умов $p_0 = 101325$ Па, або $p_0 = 760$ мм рт. ст. Відповідно до пропорції

$$p = \frac{101325\cdot p_1}{760},$$

де $p_1$ — це тиск, що виражений у мм рт. ст.

Згідно з нашими значеннями

$$p = \frac{101325\cdot 750}{760} = 9,999\cdot 10^4\ \text{Па}.$$

Перейдемо безпосередньо до розв'язування задачі. Кількість молекул $N$ можна знайти, використовуючи визначення числа Авогадро (7.3):

$$N = N_A \nu,$$

де $\nu$ — кількість молей газу, яке знайдемо із рівняння стану газу Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}.$$

Отже, з останніх двох рівностей маємо

$$N = \frac{pVN_A}{RT}.$$

Знайдемо числове значення:

$$N = \frac{9,999 \cdot 10^4 \cdot 240 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8,31 \cdot 288} = 6,04 \cdot 10^{27}.$$

**7.5.** У воді спливає бульбашка з повітрям. Коли вона знаходиться на глибині 3 м, її об'єм дорівнює 5 мм$^3$. Який об'єм бульбашки, коли вона знаходиться поблизу поверхні водоймища? Атмосферний тиск брати за нормальних умов, зміну температури бульбашки не враховувати.

| |
|---|
| $h = 3$ м, |
| $V_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ м$^3$, |
| $p_0 = 101325$ Па, |
| $\rho = 1000$ кг/м$^3$, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $V_2$—? |

Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона (7.10) для двох станів бульбашки — на глибині $h = 3$ м та біля поверхні води, коли $h = 0$:

$$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT, \quad p_2V_2 = \frac{m}{M}RT,$$

де $p_1, V_1$ — тиск та об'єм бульбашки на глибині, а $p_2, V_2$ — на поверхні. Тут враховано, що маса газу в бульбашці $m$ та її температура $T$ залишаються сталими. З останніх рівнянь маємо

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Звідси виразимо $V_2$:

$$V_2 = \frac{p_1V_1}{p_2}.$$

Тиск на глибині визначимо як суму атмосферного та гідростатичного:

$$p_1 = p_0 + \rho g h,$$

а тиск на поверхні дорівнює атмосферному, тобто $p_2 = p_0$. Складовою тиску (3.10), що виникає за рахунок сил поверхневого натягу, нехтуємо. Після підстановки цих значень маємо кінцеву формулу

$$V_2 = \frac{V_1 (p_0 + \rho g h)}{p_0}.$$

Знайдемо це значення:

$$V_2 = \frac{5 \cdot 10^{-9} (101325 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 3)}{101325} = 6,451 \cdot 10^{-9} \text{ (м}^3\text{)}.$$

**7.6.** При нагріванні газу на 1 К при сталому тиску його об'єм збільшився удвічі. В якому інтервалі температур відбувалося нагрівання?

| |
|---|
| $\Delta T = 1$ К, <br> $V_2 = 2V_1$, <br> $p = \text{const}$ |
| $T_1, T_2$–? |

В описаному випадку відбувається ізобарний процес, отже, справедливим є закон Гей-Люссака (7.13):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Згідно з умовою температури обох станів газу пов'язані співвідношенням

$$T_2 = T_1 + \Delta T.$$

В результаті матимемо

$$\frac{V_1}{2V_1} = \frac{T_1}{T_1 + \Delta T}, \quad \frac{2V_1}{V_1} = \frac{T_1 + \Delta T}{T_1}, \quad 2 = 1 + \frac{\Delta T}{T_1},$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = 1, \quad T_1 = \Delta T = 1 \text{ (К)}.$$

Тепер можна знайти температуру після процесу нагрівання:

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 1 + 1 = 2 \text{ (К)}.$$

**7.7.** У циліндрі під поршнем знаходиться повітря при тиску $2 \cdot 10^5$ Па та температурі 27°С. Якої ваги вантаж потрібно покласти на поршень після нагрівання повітря до температури 50°С, щоб об'єм газу в циліндрі не змінився? Площа поршня 30 см$^2$.

| |
|---|
| $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, <br> $T_1 = 300$ К, <br> $T_2 = 323$ К, <br> $S = 3 \cdot 10^{-3}$ м$^2$ |
| $P$–? |

У задачі не змінюються об'єм та маса газу, отже, відбувається ізохорний процес, для якого справедливим є закон Шарля (7.14):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Оскільки в другому випадку на поршень додатково поклали вантаж вагою $P$, то тиск при цьому збільшився на величину $P/S$, тобто

$$p_2 = p_1 + \frac{P}{S} = \frac{P + Sp_1}{S},$$

або після підстановки цього тиску у наведений вище закон Шарля

$$\frac{p_1 S}{P + Sp_1} = \frac{T_1}{T_2}, \quad p_1 S T_2 = (P + Sp_1) T_1,$$

$$p_1 S T_2 = P T_1 + S p_1 T_1, \quad P = \frac{S p_1 (T_2 - T_1)}{T_1},$$

й після розрахунків

$$P = \frac{S p_1 (T_2 - T_1)}{T_1} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot (323 - 300)}{300} = 46 \text{ (Н)}.$$

**7.8.** Закритий з обох кінців горизонтальний циліндр наповнений газом при тиску 100 кПа і температурі 30°C та розділений легким рухомим поршнем на дві рівні частини із довжиною 50 см кожна. На яку величину потрібно підвищити температуру газу в лівій частині циліндра, щоб поршень змістився на відстань 20 см? У правій частині циліндра при нагріванні лівої частини температура не змінюється. Визначити тиск газу після зміщення поршня.

| |
|---|
| $p_1 = 10^5$ Па, |
| $T_1 = 303$ К, |
| $l = 0,5$ м, |
| $\Delta l = 0,2$ м |
| $\Delta T, p_2$–? |

Якщо поршень знаходиться у стані рівноваги, то тиски по обидві його сторони однакові. До нагрівання системи тиски у лівій та правій частинах циліндра будемо позначати $p_1$, температури до нагрівання також однакові, позначимо їх $T_1$. За умовою задачі поршень спочатку розділяє циліндр на дві рівні частини, отже, однакові також і об'єми цих частин, позначимо їх $V_1$.

Після нагрівання лівої частини знову встановлюється стан рівноваги, отже, в обох частинах знову встановляться однакові тиски, позначимо їх $p_2$. Температура правої частини не змінюється, тому дорівнює $T_1$. Оскільки ліва частина нагрівається, позначимо її температуру $T_2$. Об'єми обох частин змінюються, оскільки поршень переміщається. Позначимо об'єм лівої частини $V_1'$, а об'єм правої $V_2'$.

Рівняння стану для лівої частини поршня записується у представленні Клапейрона (7.11):

$$\frac{pV}{T} = \text{const},$$

оскільки для неї після нагрівання змінюються всі три параметри $p, V, T$. Отже, для двох станів запишемо

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_1'}{T_2}.$$

Для правої частини залишається незмінною температура, тому згідно з (7.12)

$$p_1 V_1 = p_2 V_2', \quad p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2'}.$$

Після підстановки знайденого $p_2$ до рівняння стану газу в лівій частині циліндра матимемо

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{V_1'}{T_2}\frac{p_1 V_1}{V_2'}, \quad \frac{1}{T_1} = \frac{V_1'}{T_2 V_2'}, \quad V_1' T_1 = V_2' T_2.$$

Ми отримали закон, подібний до закону Гей-Люссака (7.13), але для різних областей циліндра. Об'єм циліндра можна знайти за формулою $V = Sl$, де $S$ – площа перерізу циліндра; $l$ – його довжина. Згідно з умовою задачі матимемо:

$$V_1 = lS, \quad V_1' = (l + \Delta l)S, \quad V_2' = (l - \Delta l)S,$$

або після підстановки до останнього виразу та скорочення $S$

$$(l + \Delta l)T_1 = (l - \Delta l)T_2, \quad T_2 = \frac{(l + \Delta l)T_1}{l - \Delta l}.$$

За умовою задачі потрібно знайти різницю температур, отже, маємо

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{lT_1 + \Delta l T_1}{l - \Delta l} - T_1 = \frac{2T_1 \Delta l}{l - \Delta l}.$$

Знайдемо числове значення шуканої величини:

$$\Delta T = \frac{2T_1 \Delta l}{l - \Delta l} = \frac{2 \cdot 303 \cdot 0,2}{0,5 - 0,2} = 404 \text{ (K)}.$$

Тиск, що встановився після нагрівання, знайдемо за раніше отриманою формулою:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2'} = \frac{p_1 l S}{(l - \Delta l)S} = \frac{p_1 l}{l - \Delta l} = \frac{10^5 \cdot 0,5}{0,5 - 0,2} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

**7.9.** Горизонтальну циліндричну посудину довжиною 36 см розділено легким рухомим поршнем на дві частини. В одній частині знаходиться кисень, в іншій – вдвічі менша маса водню. Яку частину об'єму буде займати водень? Температура газів однакова.

# 7. Основи молекулярної фізики. Ізопроцеси

| |
|---|
| $l = 0,36$ м, <br> $m_К = 2m_В$, <br> $\mu_К = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, <br> $\mu_В = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, <br> $T = \text{const}$ |
| $V_В/V$—? |

Оскільки поршень знаходиться в рівновазі, тиски з обох його сторін однакові. Запишемо для водню та кисню відповідні рівняння стану (7.10):

$$pV_К = \frac{m_К}{\mu_К}RT, \quad pV_В = \frac{m_В}{\mu_В}RT.$$

Поділимо перше рівняння на друге та скоротимо однакові частини:

$$\frac{V_К}{V_В} = \frac{m_К\mu_В}{m_В\mu_К}.$$

Нехай $l$ — загальна довжина циліндра; $x$ — довжина циліндра, яку займає кисень. Тоді водень займе $(l-x)$ частину циліндра. Відповідно до цього об'єм циліндра $V$, а також об'єми, що займають водень та кисень, будуть однакові:

$$V = lS, \quad V_К = xS, \quad V_В = (l-x)S.$$

Після підстановки цих значень в останнє рівняння матимемо таке:

$$\frac{x}{l-x} = \frac{m_К\mu_В}{m_В\mu_К}, \quad xm_В\mu_К = lm_К\mu_В - xm_К\mu_В,$$

$$x\left(m_В\mu_К + m_К\mu_В\right) = lm_К\mu_В, \quad x = \frac{lm_К\mu_В}{m_В\mu_К + m_К\mu_В},$$

або із урахуванням умови $m_К = 2m_В$ отримаємо

$$x = \frac{l \cdot 2m_В\mu_В}{m_В\mu_К + 2m_В\mu_В} = \frac{2l\mu_В}{\mu_К + 2\mu_В}.$$

Розрахуємо це значення:

$$x = \frac{2l\mu_В}{\mu_К + 2\mu_В} = \frac{2 \cdot 0,36 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,04 \text{ (м)}.$$

Знайдемо, яку частину об'єму займає водень:

$$\frac{V_В}{V} = \frac{(l-x)S}{lS} = \frac{l-x}{l} = 1 - \frac{x}{l} = 1 - \frac{0,04}{0,36} = 0,89.$$

Таким чином, водень займає 89% об'єму циліндра, хоча його маса вдвічі менша. Причина в тому, що однакові кількості речовини (або кількості молекул) газу займають однакові об'єми, а оскільки молярна маса водню значно менша, він містить набагато більше молекул у своїй масі, ніж удвічі важча частина кисню.

**7.10.** Відкрита з обох кінців циліндрична трубка невеликого перерізу довжиною 100 см наполовину занурена у ртуть. Верхній кінець трубки закривають та виймають її із ртуті, при цьому частина ртуті витікає. Знайдіть довжину стовпчика ртуті, що залишилась у трубці. Атмосферний тиск нормальний.

| |
|---|
| $l = 1$ м, |
| $p_0 = 10^5$ Па, |
| $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м$^3$, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $h$–? |

Розглянемо два випадки стану повітря у трубці. До того як трубку вийняли із ртуті, повітря займало об'єм $V_0 = lS/2$, де $S$ – площа перерізу трубки.

Нехай у трубці, після того як її вийняли, залишився стовпчик ртуті довжиною $h$, тоді іншу частину об'єму $V_1 = (l - h)S$ займає повітря. Оскільки у процесі не змінюються маса повітря та його температура, використовуємо закон Бойля-Маріотта (7.12):

$$p_0 V_0 = p_1 V_1,$$

або із урахуванням знайдених об'ємів:

$$p_0 \frac{lS}{2} = p_1 (l - h) S.$$

Тиск $p_1$ у трубці буде меншим на величину гідростатичного тиску, що створює стовпчик ртуті, тобто

$$p_1 = p_0 - \rho g h.$$

Підставимо це значення у верхнє рівняння, одночасно скоротивши площу $S$:

$$p_0 \frac{l}{2} = (p_0 - \rho g h)(l - h), \quad \frac{p_0 l}{2} = p_0 l - \rho g h l - p_0 h + \rho g h^2,$$

$$\rho g h^2 - (\rho g l + p_0) h + \frac{p_0 l}{2} = 0.$$

Підставимо в це рівняння числові значення й отримаємо

$$13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 h^2 - (13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1 + 10^5) h + \frac{10^5 \cdot 1}{2} = 0,$$

$$133280 h^2 - 233280 h + 50000 = 0,$$

або поділивши кожен доданок на 160:

$$833h^2 - 1458h + 312,5 = 0.$$

Це звичайне квадратне рівняння, що у загальному випадку має два корені. При його розв'язанні отримуємо $h_1 = 1,5$ (м), $h_2 = 0,25$ (м). Перший корінь не має фізичного сенсу, оскільки ця довжина більша загальної довжини трубки. Отже, відповідь $h = 0,25$ м.

**7.11.** У балоні ємністю 20 л знаходиться кисень при температурі 17°C та тиску 400 кПа. За кілька годин температура кисню зросла до 27°C, а тиск залишився незмінним. Скільки кисню вийшло із балона?

| |
|---|
| $V = 0,02$ м$^3$, |
| $p = 4 \cdot 10^5$ Па, |
| $T_1 = 290$ К, |
| $T_2 = 300$ К, |
| $\mu = 0,032$ кг/моль, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К), |
| $p = \text{const}$ |
| $\Delta m$–? |

Оскільки газ із балона витікає (при підвищенні температури тиск не змінюється), то для цього процесу не можна записувати закон Шарля, а потрібно використовувати рівняння Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$pV = \frac{m_1}{\mu}RT_1, \quad pV = \frac{m_2}{\mu}RT_2,$$

де враховано, що об'єм балона та тиск газу залишаються сталими. Виразимо із цих рівнянь маси газу до зростання температури $m_1$ та після її зростання $m_2$:

$$m_1 = \frac{pV\mu}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{pV\mu}{RT_2}.$$

Тепер можна знайти зміну маси, яка буде дорівнювати масі кисню, що вийшов із балона:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{pV\mu}{RT_1} - \frac{pV\mu}{RT_2} = \frac{pV\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Після розрахунку матимемо

$$\Delta m = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 0,02 \cdot 0,032}{8,31}\left(\frac{1}{290} - \frac{1}{300}\right) = 3,541 \cdot 10^{-3} \text{ (кг)}.$$

**7.12.** Балон ємністю 10 л, що містить газ під тиском 21 кПа, з'єднують з балоном ємністю 40 л, в якому газ знаходиться під тиском 1 кПа. Знайти тиск, що встановився у посудинах. Вважати, що температура не змінюється.

| |
|---|
| $V_1 = 10^{-2}$ м$^3$,<br>$p_1 = 2,1 \cdot 10^4$ Па,<br>$V_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ м$^3$,<br>$p_2 = 10^3$ Па,<br>$T = \mathrm{const}$ |
| $p$—? |

Коли балони з'єднують, кожен із газів займає об'єм $V_1 + V_2$, і їх тиск можна знайти із закону Дальтона (7.7):

$$p = p_1' + p_2',$$

де $p_1'$ та $p_2'$ — парціальні тиски, тобто такі, що створював би кожний газ окремо, якщо б тільки він знаходився в посудині. Оскільки температура газів не змінюється, ці тиски можна знайти за законом Бойля-Маріотта для ізотермічного процесу (7.12):

$$p_1V_1 = p_1'(V_1 + V_2), \quad p_2V_2 = p_2'(V_1 + V_2),$$

$$p_1' = \frac{p_1V_1}{V_1 + V_2}, \quad p_2' = \frac{p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

Або для шуканого тиску

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1V_1}{V_1 + V_2} + \frac{p_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

Після підстановки значень

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} + 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} + 4 \cdot 10^{-2}} = 5000 \text{ (Па)}.$$

**7.13.** Обчислити для нормальних умов та температури 100°C значення середньої квадратичної швидкості молекул газу $CO_2$.

| |
|---|
| $p_0 = 10^5$ Па,<br>$T_0 = 293$ К,<br>$T_1 = 373$ К,<br>$\mu = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,<br>$R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $v_{0\text{кв}}, v_{1\text{кв}}$—? |

Середню квадратичну швидкість можна знайти за формулою (7.6):

$$p = \frac{1}{3}m_0 n\langle v^2\rangle, \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3p}{m_0 n}},$$

де $m_0$ — маса молекули, а концентрацію газу $n$ можна визначити за формулою (7.5):

$$n = \frac{N}{V},$$

де $N$ — кількість молекул, $V$ — об'єм системи. Звідси можна виразити добуток $m_0 n$:

$$m_0 n = \frac{m_0 N}{V},$$

а добуток маси молекули на їх кількість $m_0N$ — це загальна маса газу $m$. Згідно із цим та виразом (7.4) матимемо таке:

$$m_0 n = \frac{m}{V} = \rho,$$

де $\rho$ — густина газу. Підставивши цей результат у вираз для швидкості, отримуємо

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

Густину будемо знаходити із рівняння Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Із урахуванням цього вираз для знаходження середньої квадратичної швидкості набере вигляду

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3pRT}{p\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Проведемо розрахунки для двох значень температур:

$$v_{0\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 293}{44 \cdot 10^{-3}}} = 407,44 \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right),$$

$$v_{1\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 373}{44 \cdot 10^{-3}}} = 459,72 \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

**7.14.** Знайти молярну масу газу, властивості якого відповідають властивостям суміші 160 г кисню та 120 г азоту.

$m_{\text{к}} = 0,16$ кг,
$m_{\text{а}} = 0,12$ кг,
$\mu_{\text{к}} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$\mu_{\text{а}} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\mu$—?

Кількість молей суміші — це сума кількостей молей азоту $\nu_{\text{а}}$ та кисню $\nu_{\text{к}}$:

$$\nu = \nu_{\text{а}} + \nu_{\text{к}}.$$

Кількість молей цих газів знайдемо за формулою (7.2):

$$\nu_{\text{к}} = \frac{m_{\text{к}}}{\mu_{\text{к}}}, \quad \nu_{\text{а}} = \frac{m_{\text{а}}}{\mu_{\text{а}}},$$

тобто

$$\nu = \frac{m_{\text{к}}}{\mu_{\text{к}}} + \frac{m_{\text{а}}}{\mu_{\text{а}}} = \frac{m_{\text{к}}\mu_{\text{а}} + m_{\text{а}}\mu_{\text{к}}}{\mu_{\text{к}}\mu_{\text{а}}}.$$

Загальна маса газу – це сума складових:

$$m = m_{\text{а}} + m_{\text{к}}.$$

Молярна маса суміші визначиться таким чином:

$$\mu = \frac{m}{\nu} = \frac{(m_{\text{а}} + m_{\text{к}})\mu_{\text{к}}\mu_{\text{а}}}{m_{\text{к}}\mu_{\text{а}} + m_{\text{а}}\mu_{\text{к}}}.$$

Кінцеву формулу знайдено, обчислимо числове значення:

$$\mu = \frac{(0,12 + 0,16) \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0,16 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 0,12 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 30,15 \ \left(\frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right).$$

**Задачі для самостійного розв'язування**

**7.15.** Скільки молекул повітря вийде з кімнати, що має об'єм 240 м$^3$, якщо температура в кімнаті підвищується від 15°С до 30°С, а тиск залишається сталим та дорівнює 740 мм рт. ст.? Яким потрібно зробити тиск після підвищення температури, щоб кількість молекул повітря в кімнаті не змінилася?

**7.16.** Скільки молекул міститься в краплі води діаметром 0,1 мм?

**7.17.** Знайти температуру газу, якщо середня кінетична енергія поступального руху його молекул $4,14 \cdot 10^{-21}$ Дж.

**7.18.** У посудині знаходиться газ при тиску 0,15 МПа та температурі 273°С. Знайти концентрацію молекул цього газу.

**7.19.** Знайти густину кисню при тиску 0,13 МПа, якщо середня квадратична швидкість його молекул дорівнює 1,4 км/с.

**7.20.** Визначити середню кінетичну енергію та швидкість однієї молекули водню при температурі 500 К, якщо її маса дорівнює $3,4 \cdot 10^{-27}$ кг.

**7.21.** Знайти число молекул водню в об'ємі 15 см$^3$, якщо його тиск дорівнює 26,6 кПа, а середня квадратична швидкість молекул при даних умовах становить 2,4 км/с.

**7.22.** У балоні з об'ємом 1 л знаходиться азот під тиском 200 кПа, причому в кожному 1 см$^3$ газу міститься $4,3 \cdot 10^{19}$ молекул. Обчислити енергію поступального руху однієї молекули та сумарну енергію всіх молекул. Знайти середню квадратичну швидкість молекул.

**7.23.** Є дві однакові посудини, що містять однакові кількості молекул азоту. В першій посудині середня квадратична швидкість молекул дорівнює 400 м/с, а в іншій — 500 м/с. Яка встановиться швидкість, якщо ці посудини з'єднати? Втратами теплоти знехтувати.

**7.24.** Який тиск на стінки посудини створюють молекули газу, якщо маса газу дорівнює 3 г, об'єм посудини — 0,15 л, а середня квадратична швидкість молекул — 500 м/с?

**7.25.** У закриту посудину з повітрям додали ефір, після випаровування якого концентрація молекул газоподібного ефіру стала рівна $10^{23}$ м$^{-3}$, а тиск підвищився на 414 Па. Температура суміші газів у посудині 27°С. Використовуючи ці дані, знайти сталу Больцмана.

**7.26.** Концентрація молекул невідомого газу при нормальних умовах дорівнює $2,7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Цей газ при температурі 91°С і тиску 800 кПа має густину 5,4 кг/м$^3$. Знайти масу однієї молекули невідомого газу.

**7.27.** У циліндр двигуна, робочий об'єм якого 9,16 л, надходить повітря під тиском $10^5$ Па. Яким стане тиск повітря, якщо його об'єм зменшиться до 0,61 л? Температура у процесі стискування не змінюється.

**7.28.** Посудину, що містить газ під тиском $1,4 \cdot 10^5$ Па, з'єднали із порожнім об'ємом 6 л. Після цього в ній встановився тиск $10^5$ Па. Знайдіть об'єм посудини, якщо $T = \text{const}$.

**7.29.** Із балона об'ємом 2 л відкачали повітря до тиску 400 мм рт. ст. за кімнатної температури, після чого горловину балона закрили пробкою. Потім балон занурюють у воду тієї самої температури, і на глибині 1,2 м пробка виймається із горловини. Який об'єм води заходить у балон, якщо атмосферний тиск у цей момент дорівнює 750 мм рт. ст.?

**7.30.** Визначити тиск газу в електричній лампі, об'єм якої 1 л, якщо при відламуванні кінчика останньої у воді на глибині 1 м в лампу увійшло 998,7 г води? Атмосферний тиск нормальний.

**7.31.** У циліндрі із площею основи 0,2 м$^2$ знаходиться 500 л повітря. Зовнішній тиск дорівнює $0,98 \cdot 10^5$ Па. На скільки опуститься поршень, якщо на нього подіяти силою 980 Н? Масою поршня та його тертям об стінки посудини знехтувати.

**7.32.** У циліндрі під поршнем знаходиться газ. Маса поршня дорівнює 600 г, а площа його основи – 20 см$^2$, атмосферний тиск – 100 кПа. Яку додаткову силу потрібно прикласти до поршня, щоб об'єм газу в циліндрі зменшився вдвічі?

**7.33.** Посередині циліндра, що закритий з обох кінців, знаходиться легкий рухомий поршень. Тиски газу в обох частинах циліндра однакові й дорівнюють $10^5$ Па. Поршень змістили таким чином, що об'єм однієї із частин зменшився удвічі. Яка різниця тисків по обидві сторони поршня, якщо температура газу не змінилася?

**7.34.** У циліндрі, що закритий з обох кінців, знаходиться легкий поршень, який не проводить тепло і може ковзати по циліндрові без тертя. Цей поршень розділяє циліндр на дві частини таким чином, що об'єм однієї частини в 3 рази більший за об'єм іншої. Температура газів з обох сторін однакова. Де встановиться поршень, якщо температуру газу в меншій частині збільшити в 3 рази?

**7.35.** Закритий циліндр довжиною 0,5 м розділений на дві однакові частини поршнем, що не проводить тепло. В обох частинах знаходяться однакові маси одного і того самого газу при температурі 200 К. На яку відстань зміститься поршень, якщо в одній із частин температуру газу підвищити до 300 К?

**7.36.** У вертикальній трубці, що зачинена знизу, із площею поперечного перерізу 0,1 см$^2$ знаходиться 6 см$^3$ повітря, який закритий стовпчиком ртуті висотою 4 см. Яка буде висота стовпчика повітря, якщо додати 27,2 г ртуті? Атмосферний тиск нормальний.

**7.37.** У посудину із ртуттю опускають відкриту з обох кінців скляну трубку, залишаючи над поверхнею кінець довжиною 60 см. Потім трубку закривають та занурюють додатково ще на 30 см. Знайдіть висоту стовпчика повітря у трубці. Атмосферний тиск нормальний.

**7.38.** Газ при температурі 27°C займає об'єм 0,25 л. Який об'єм може зайняти та сама маса газу, якщо температура підвищиться до 51°C? Тиск вважати сталим.

**7.39.** При якій температурі знаходився газ, якщо при його нагріванні на 22 K та сталому тиску об'єм став у 3 рази більший за первісний?

**7.40.** Якщо тиск, під яким знаходиться газ, змінити на 200 кПа, об'єм газу зміниться на 3 л. Якщо тиск змінити на 500 кПа, об'єм зміниться на 5 л. Які були початкові об'єм та тиск газу? Температура не змінюється.

**7.41.** Яка температура газу, що знаходиться під тиском 0,5 МПа у посудині з об'ємом 30 л, якщо в цій посудині знаходиться $3,6 \cdot 10^{24}$ молекул цього газу?

**7.42.** Гумовий човен надувають зранку при температурі повітря 280 K. На скільки відсотків збільшиться тиск повітря в човні, якщо повітря нагрівається до температури 308 K? Зміною об'єму човна знехтувати.

**7.43.** Об'єм, що займає газ, збільшили на 20%, а тиск зменшили на 10%. На скільки градусів змінилася температура газу, якщо його початкова температура дорівнювала 100 K?

**7.44.** Кубічну посудину з об'ємом 8 л наповнили повітрям при нормальному тиску та температурі 20°C. Посудину закрили та нагріли до температури 150°C. Яка результуюча сила буде діяти на кожну з граней куба?

**7.45.** У циліндрі під поршнем знаходиться газ об'ємом $6 \cdot 10^{-3}$ м$^3$ при температурі 323 K. До якого об'єму потрібно ізобарно стискувати цей газ, щоб його температура знизилася до 223 K?

**7.46.** Скляна відкрита колба об'ємом 500 см$^3$, що містить повітря, нагрівається до температури 227°C. Після цього її горловину занурюють у воду. Яка кількість води потрапить у колбу, коли її температура знизиться до 27°C? Вважати, що відбувається ізобарний процес.

**7.47.** Дві кулі з об'ємами 1 л кожна з'єднані трубкою діаметром 6 мм та довжиною 1 м. У трубці знаходиться краплина ртуті, яка при

$0^\circ$C знаходиться посередині трубки. На скільки зміститься краплина ртуті, якщо ліву кулю нагріти на $2^\circ$C, а праву охолодити на $1^\circ$C? Розширенням стінок знехтувати.

**7.48.** Закритий з обох кінців циліндр заповнено газом та розділено легким рухомим поршнем на дві однакові частини довжиною 0,34 м кожна. Температура газу дорівнює $27^\circ$C. На скільки градусів потрібно нагріти газ в одній із частин циліндра, щоб поршень змістився на 0,1 м?

**7.49.** Газ знаходиться в герметичному балоні при температурі $12^\circ$C та тиску $5 \cdot 10^6$ Па. Яким стане тиск при підвищенні температури до $27^\circ$C?

**7.50.** У балоні знаходиться стиснений газ. Чи витікатиме газ з балона, якщо при температурі $-3^\circ$C його тиск становить $18 \cdot 10^5$ Па, а при температурі $27^\circ$C тиск дорівнює $20 \cdot 10^5$ Па?

**7.51.** Знайдіть температуру ідеального газу, що знаходиться в герметичній посудині, якщо тиск газу збільшився на 0,4 % від початкового тиску при нагріванні на 1 К.

**7.52.** У ксеноновій лампі кінопроектора при температурі $0^\circ$C тиск газу дорівнює $8 \cdot 10^5$ Па. В робочому стані його тиск підвищується до $24 \cdot 10^5$ Па. Знайдіть температуру ксенону під час роботи лампи.

**7.53.** Відкриту пробірку з повітрям, що знаходиться при атмосферному тиску $p_1$, повільно нагріли до температури $T_1$, а потім герметично закрили та охолодили до 283 К. Тиск при цьому впав на величину $0,3p_1$. До якої температури була нагріта пробірка? Розширення пробірки не враховувати.

**7.54.** У циліндрі під поршнем знаходиться повітря при тиску 250 кПа та температурі $27^\circ$C. На поршень поклали вантаж масою 5 кг. До якої температури потрібно нагріти повітря, щоб його об'єм при цьому не змінився? Площа поршня – 20 см$^2$.

**7.55.** Із дна озера, де температура води дорівнює $7^\circ$C, а тиск 3,5 атм, на поверхню із температурою води $17^\circ$C та тиском 1 атм підіймається повітряна бульбашка. Яким стане її об'єм на поверхні озера, якщо на дні бульбашка мала об'єм 1 мм$^3$?

**7.56.** Газ, що займає при температурі 400 К та тиску 100 кПа об'єм 2 л, ізотермічно стискають до деякого об'єму $V_2$ та тиску $p_2$. Потім його ізобарно охолоджують до температури 200 К, після чого ізотермічно змінюють його об'єм до 1 л. Знайти кінцевий тиск.

**7.57.** Деякий газ масою 0,007 кг, що знаходиться в балоні при температурі 27°С, створює тиск 50 кПа. Водень масою 0,004 кг в цьому балоні при 60°С створює тиск 444 кПа. Яка молярна маса невідомого газу? Який це газ?

**7.58.** На деякій висоті тиск повітря становить 230 мм рт. ст., а температура дорівнює $-43$°С. Знайти густину повітря.

**7.59.** Балон із газом, тиск якого дорівнює 80 кПа, з'єднали з балоном, об'єм якого в 3 рази більший, а тиск такого самого газу в ньому дорівнює 40 кПа. Знайдіть тиск газу після того, як обидва балони з'єднали тонкою трубкою.

**7.60.** У двох посудинах, що сполучені тонкою трубкою із закритим краном, при однакових температурах знаходиться гелій. Об'єм першої посудини $V_1 = 2$ л, тиск у ній $p_1 = 4 \cdot 10^5$ Па. Тиск у другій посудині $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Після відкриття крану в посудинах встановився тиск $p = 0,28$ МПа. Знайти об'єм другої посудини $V_2$, якщо температура гелію не змінюється.

**7.61.** Використовуючи закон Дальтона, визначити молярну масу повітря, враховуючи лише дві основні його складові: 76% азоту та 24% кисню за масою.

**7.62.** Визначити густину суміші газів водню з масою $m_1 = 8$ г і кисню з масою $m_2 = 64$ г при температурі $T = 290$ К і тиску $p = 0,1$ МПа. Вважати, що гази поводять себе як ідеальні.

# 8. Елементи термодинаміки. Робота й енергія газу

## Основні формули

- Теплоємність
$$C = \frac{\delta Q}{\delta T}, \tag{8.1}$$
де $\delta Q$ — нескінченно малий приріст теплоти (Дж); $\delta T$ — нескінченно малий приріст температури (К), якому відповідає $\delta Q$.

- Молярна теплоємність речовини
$$C = \frac{\delta Q}{\nu \cdot \delta T}, \tag{8.2}$$
де $\nu$ — кількість речовини (моль).

- Питома теплоємність речовини
$$c = \frac{\delta Q}{m \cdot \delta T}, \tag{8.3}$$
де $m$ — маса речовини (кг).

- Зв'язок між молярною $C$ та питомою $c$ теплоємностями газу
$$C = c\mu, \tag{8.4}$$
де $\mu$ — молярна маса газу (кг/моль).

- Молярна та питома теплоємності при сталому об'ємі
$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad c_V = \frac{iR}{2\mu}, \tag{8.5}$$
де $i$ — кількість ступенів вільності; $R = 8,31$ Дж/(моль·К) — універсальна газова стала.

- Молярна та питома теплоємності при сталому тиску
$$C_p = \frac{(i+2)R}{2}, \quad c_p = \frac{(i+2)R}{2\mu}. \tag{8.6}$$

## 8. Елементи термодинаміки. Робота й енергія газу

- Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R. \tag{8.7}$$

- Показник адіабати

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \tag{8.8}$$

- Показник політропи

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \tag{8.9}$$

  де $C$ — молярна теплоємність для політропічного процесу.

- Перший закон термодинаміки

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A, \tag{8.10}$$

  де $\delta Q$ — приріст теплоти, що наданий системі ззовні (Дж); $\mathrm{d}U$ — диференціал (приріст) внутрішньої енергії системи (Дж); $\delta A$ — елементарна робота, що виконується системою над зовнішніми тілами (Дж).

- Внутрішня енергія газу

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = N\frac{i}{2}kT, \tag{8.11}$$

  де $N$ — кількість молекул газу; $\langle\varepsilon\rangle$ — середня кінетична енергія молекули (Дж); $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — стала Больцмана; $T$ — температура (К).

- Внутрішня енергія газу (8.11)

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{i}{2}pV = \nu C_V T, \tag{8.12}$$

  де $\nu$ — кількість речовини (моль); $m$ — маса газу (кг); $\mu$ — молярна маса газу (кг/моль); $p$ — тиск (Па); $V$ — об'єм (м$^3$); $C_V$ — молярна теплоємність (Дж/(моль·К)).

- Робота, що пов'язана зі зміною об'єму газу:

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V, \tag{8.13}$$

де $V_1, V_2$ – початковий та кінцевий об'єми газу (м$^3$).

- Робота при ізобарному процесі ($p = \mathrm{const}$)

$$A = p\Delta V, \tag{8.14}$$

де $\Delta V = V_2 - V_1$ – зміна об'єму (м$^3$).

- Робота при ізотермічному процесі ($T = \mathrm{const}$)

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{8.15}$$

- Робота при адіабатному процесі ($\delta Q = 0$)

$$A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right], \tag{8.16}$$

де $V_1, V_2$ – початковий та кінцевий об'єми газу (м$^3$); $T_1, T_2$ – початкова та кінцева температури (К); $\gamma$ – показник адіабати (8.8).

- Рівняння стану для газу при адіабатному процесі (рівняння Пуассона)

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}, \quad pV^{\gamma} = \mathrm{const}, \quad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \mathrm{const}. \tag{8.17}$$

- Рівняння стану газу для політропічного процесу

$$TV^{n-1} = \mathrm{const}, \quad pV^{n} = \mathrm{const}, \quad T^{n} p^{1-n} = \mathrm{const}, \tag{8.18}$$

де $n$ – показник політропи (8.9). Для ізотермічного процесу $n = 1$, для ізобарного $n = 0$, для адіабатного $n = \gamma$, для ізохорного $n = \infty$.

## 8. Елементи термодинаміки. Робота й енергія газу

- Перший закон термодинаміки (8.10) для ізобарного процесу ($p = \mathrm{const}$)

$$\mathrm{d}U=\frac{m}{\mu}C_V\mathrm{d}T, \quad \delta A=\frac{m}{\mu}R\mathrm{d}T, \quad \delta Q=\frac{m}{\mu}C_p\mathrm{d}T. \qquad (8.19)$$

- Перший закон термодинаміки (8.10) для ізохорного процесу ($V = \mathrm{const}$)

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{\mu}C_V\mathrm{d}T, \quad \delta A = 0, \quad \delta Q = \mathrm{d}U. \qquad (8.20)$$

- Перший закон термодинаміки (8.10) для ізотермічного процесу ($T = \mathrm{const}$)

$$\mathrm{d}U = 0, \quad \delta A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}, \quad \delta Q = \delta A. \qquad (8.21)$$

- Перший закон термодинаміки (8.10) для адіабатного процесу ($\delta Q = 0$)

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{\mu}C_V\mathrm{d}T, \quad \delta A = -\mathrm{d}U, \quad \delta Q = 0. \qquad (8.22)$$

### Приклади розв'язання задач

**8.1.** Різниця питомих теплоємностей $c_p - c_V$ деякого двоатомного газу дорівнює 260 Дж/(кг·К). Знайти молярну масу $\mu$ газу та його питомі теплоємності $c_V$ і $c_p$.

| |
|---|
| $c_p - c_V = 260$ Дж/(кг·К), |
| $i = 5$, |
| $R = 8,31$ Дж/(кг·К) |
| $\mu, c_V, c_p$–? |

За формулами (8.5), (8.6):

$$c_p = \frac{(i+2)R}{2\mu}, \quad c_V = \frac{iR}{2\mu}.$$

Отримаємо вираз для різниці цих теплоємностей:

$$c_p - c_V = \frac{(i+2)R}{2\mu} - \frac{iR}{2\mu} = \frac{R}{\mu}.$$

Звідси легко знайти молярну масу газу:

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_V}.$$

Із урахуванням цього знайдемо вирази для розрахунку теплоємностей:

$$c_p = \frac{(i+2)R}{2\mu} = \frac{(i+2)R}{2} \cdot \frac{c_p - c_V}{R} = \frac{(i+2)(c_p - c_V)}{2},$$

$$c_V = \frac{iR}{2\mu} = \frac{iR}{2} \cdot \frac{c_p - c_V}{R} = \frac{i(c_p - c_V)}{2}.$$

Залишилося провести розрахунки:

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_V} = \frac{8,31}{260} = 32 \cdot 10^{-3} \ \left(\frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right),$$

$$c_p = \frac{(i+2)(c_p - c_V)}{2} = \frac{(5+2) \cdot 260}{2} = 910 \ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right),$$

$$c_V = \frac{i(c_p - c_V)}{2} = \frac{5 \cdot 260}{2} = 650 \ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right).$$

**8.2.** Які питомі теплоємності $c_V$ і $c_p$ суміші газів, що містить кисень масою $m_1 = 10$ г та азот масою $m_2 = 20$ г.

| |
|---|
| $m_1 = 10^{-2}$ кг, |
| $m_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг, |
| $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг, |
| $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг, |
| $i = 5$, |
| $R = 8,31$ Дж/(кг·К) |
| $c_V, c_p$–? |

Із визначення питомої теплоємності (8.3):

$$c = \frac{\delta Q}{m \cdot \delta T}, \quad Q = cm\Delta T,$$

де $Q$ – кількість теплоти, отримана газом; $m$ – його маса; $\Delta T$ – різниця температур. При наданні кількості теплоти суміші газів можна записати рівняння теплового балансу у вигляді

$$cm\Delta T = \sum c_i m_i \Delta T,$$

де $c, m = \sum m_i$ – теплоємність та маса суміші газів; $c_i, m_i$ – теплоємність та маса кожного газу окремо. Із останнього рівняння отримуємо вираз для розрахунку теплоємності суміші

$$c = \frac{\sum c_i m_i}{m} = \sum c_i \omega_i,$$

де введено масову частку $i$-го газу, яка визначається формулою

$$\omega_i = \frac{m_i}{\sum m_i}.$$

У нашому випадку суміш складається з двох типів газів, отже, отримуємо

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Спочатку знайдемо теплоємність суміші при сталому об'ємі $c_V$, яка визначається формулою (8.5):

$$c_V = \frac{iR}{2\mu}.$$

Оскільки за умовою обидва гази двоатомні, для обох $i = 5$. Згідно з отриманою раніше формулою матимемо

$$c_V = c_{V1}\omega_1 + c_{V2}\omega_2 = \frac{iR}{2\mu_1}\omega_1 + \frac{iR}{2\mu_2}\omega_2 =$$

$$= \frac{iR \cdot m_1}{2\mu_1(m_1 + m_2)} + \frac{iR \cdot m_2}{2\mu_2(m_1 + m_2)} = \frac{iR}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right).$$

Для визначення теплоємності при сталому тиску $c_p$ потрібно використовувати формулу (8.6):

$$c_p = \frac{(i+2)R}{2\mu}.$$

Проводячи аналогічні дії, матимемо кінцеву формулу у вигляді

$$c_p = \frac{(i+2)R}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right).$$

Проведемо розрахунки:

$$c_V = \frac{5 \cdot 8,31}{2(10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2})} \left(\frac{10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}}\right) = 711 \ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right),$$

$$c_p = \frac{7 \cdot 8,31}{2(10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2})} \left(\frac{10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}}\right) = 995,5 \ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right).$$

**8.3.** Розрахувати зміну внутрішньої енергії у результаті випаровування води при кип'ятінні інструментів у стерилізаторі, якщо тиск при цьому був сталий і дорівнював $10^5$ Па, а випарувалося 18 г води. Питома теплота випаровування води при 100°С дорівнює $22,6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

| |
|---|
| $p = 10^5$ Па, |
| $m = 18 \cdot 10^{-3}$ кг, |
| $T = 373$ К, |
| $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К), |
| $r = 22,6 \cdot 10^5$ Дж/кг |
| $\Delta U$–? |

У даному випадку відбувається ізотермічне випаровування рідини при сталому тиску. По-перше, системі ззовні надається теплота для нагрівання рідини, по-друге, пара, що утворюється, здійснює роботу з розширення проти зовнішнього (атмосферного) тиску. Використаємо перший закон термодинаміки (8.10):

$$Q = \Delta U + A, \quad \Delta U = Q - A,$$

де необхідну для випаровування кількість теплоти розраховуємо за формулою

$$Q = rm,$$

де $r$ – питома теплота пароутворення (конденсації); $m$ – маса пари. Робота з розширення $A$ визначається формулою (8.14):

$$A = p(V_2 - V_1) \approx pV_2,$$

де $V_2$ – об'єм води у газоподібному стані; $V_1$ – початковий об'єм до випаровування. Із урахуванням вищезазначеного для визначення зміни внутрішньої енергії маємо співвідношення

$$\Delta U = rm - pV_2.$$

Оскільки за умовою температура не змінюється, згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона (7.10) маємо

$$pV_2 = \frac{m}{\mu}RT$$

або після підстановки до виразу для визначення $\Delta U$

$$\Delta U = rm - \frac{m}{\mu}RT = m\left(r - \frac{RT}{\mu}\right).$$

Після розрахунку матимемо

$$\Delta U = 18 \cdot 10^{-3} \cdot \left(22,6 \cdot 10^5 - \frac{8,31 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3}}\right) = 37580 \text{ (Дж)}.$$

**8.4.** У кисневій подушці об'ємом 1 л міститься 2 молі кисню під тиском 300 кПа. При відкриванні клапана газ розширюється, і при цьому його температура падає від 325 К до 275 К. Розрахуйте роботу, що здійснює газ, якщо зовнішній тиск 100 кПа.

| |
|---|
| $V = 10^{-3}$ м$^3$, |
| $\nu = 2$ моль, |
| $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па, |
| $T_1 = 325$ К, |
| $T_2 = 275$ К, |
| $p_2 = 10^5$ Па, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $A$–? |

Роботу, що здійснюється у незворотному процесі проти сил зовнішнього тиску при розширенні газу, розраховуємо за формулою (8.14):

$$A = p_2(V_2 - V_1),$$

де об'єми знайдемо за рівнянням Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$p_1V_1 = \nu RT_1, \quad p_2V_2 = \nu RT_2,$$

$$V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1}, \quad V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_2}.$$

Після підстановки цих об'ємів у вираз для роботи матимемо

$$A = p_2(V_2 - V_1) = p_2\left(\frac{\nu RT_2}{p_2} - \frac{\nu RT_1}{p_1}\right) = \nu R\left(T_2 - \frac{p_2T_1}{p_1}\right).$$

Отже, ми отримали формулу для знаходження роботи газу проти сил зовнішнього тиску при адіабатному незворотному розширенні. Розрахуємо числове значення роботи:

$$A = \nu R\left(T_2 - \frac{p_2T_1}{p_1}\right) = 2 \cdot 8,31 \cdot \left(275 - \frac{10^5 \cdot 325}{3 \cdot 10^5}\right) = 2770 \text{ (Дж)}.$$

**8.5.** 0,85 моль ідеального одноатомного газу, що спочатку знаходився під тиском 1,5 МПа та температурі 300 К, розширюється ізотермічно, доки тиск не стане 100 кПа. Розрахуйте роботу, яку в цьому процесі виконує газ, якщо розширення відбувається: а) зворотно; б) проти зовнішнього тиску 100 кПа.

| |
|---|
| $\nu = 0,85$ моль, |
| $p_1 = 1,5 \cdot 10^6$ Па, |
| $T = 300$ К, |
| $p_2 = 10^5$ Па, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $A$–? |

Розглянемо спочатку випадок, в якому відбувається зворотний процес — при цьому зовнішній тиск не є сталим, а змінюється разом зі зміною тиску газу, що розширюється. В цьому випадку для розрахунку роботи газу потрібно використовувати формулу (8.15) для ізотермічного процесу:

$$A = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1}$$

або із урахуванням закону Бойля-Маріотта для ізотермічного процесу (7.12):

$$p_1V_1 = p_2V_2, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

можна записати

$$A = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Розрахуємо це значення:

$$A = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2} = 0,85 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \ln \frac{1,5 \cdot 10^6}{10^5} = 5738,5 \text{ (Дж)}.$$

Розглянемо другий випадок, коли газ здійснює роботу проти сил сталого зовнішнього тиску (випадок б)). Робота, що здійснюється у необоротному процесі проти сил зовнішнього тиску при розширенні газу розраховується за формулою (8.14):

$$A = p_2(V_2 - V_1),$$

де об'єми знайдемо за рівнянням Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$p_1V_1 = \nu RT, \quad p_2V_2 = \nu RT,$$

$$V_1 = \frac{\nu RT}{p_1}, \quad V_2 = \frac{\nu RT}{p_2}.$$

Після підстановки цих об'ємів у вираз для роботи матимемо

$$A = p_2(V_2 - V_1) = p_2\left(\frac{\nu RT}{p_2} - \frac{\nu RT}{p_1}\right) = \nu RT\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right).$$

Розрахуємо числове значення роботи:

$$A = 0,85 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \left(1 - \frac{10^5}{1,5 \cdot 10^6}\right) = 1977,78 \text{ (Дж)}.$$

Отже, в оборотному процесі газ здійснює набагато більшу роботу, ніж у необоротному.

**8.6.** На нагрівання кисню масою $m = 160$ г на $\Delta T = 12$ К було витрачено кількість теплоти $Q = 1,75$ кДж. Яким чином проходив процес: за сталого тиску або за сталого об'єму?

| |
|---|
| $m = 0,16$ кг, |
| $\Delta T = 12$ К, |
| $Q = 1750$ Дж, |
| $i = 5$, |
| $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $Q_p, Q_V$–? |

Позначимо через $Q_p$ та $Q_V$ кількості теплоти, що були б затрачені в ізобарному ($p = \text{const}$) та ізохорному ($V = \text{const}$) процесах. Ці величини можуть бути знайдені згідно із першим законом термодинаміки і відповідно до (8.19), (8.20) записуються як

$$Q_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T, \quad Q_V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

Теплоємності $C_V$ і $C_p$ знайдемо за формулами (8.5), (8.6):

$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2}.$$

Після комбінування цих виразів отримуємо розрахункові формули

$$Q_p = \frac{(i+2)Rm\Delta T}{2\mu}, \quad Q_V = \frac{iRm\Delta T}{2\mu}.$$

Розрахуємо ці значення:

$$Q_p = \frac{(i+2)Rm\Delta T}{2\mu} = \frac{(5+2) \cdot 8,31 \cdot 0,16 \cdot 12}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 1745,1 \text{ (Дж)},$$

$$Q_V = \frac{iRm\Delta T}{2\mu} = \frac{5 \cdot 8,31 \cdot 0,16 \cdot 12}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 1246,5 \text{ (Дж)}.$$

Отже, оскільки $Q \approx Q_p$, процес проходив ізобарно, тобто за сталого тиску в системі.

**8.7.** При адіабатному стисканні газу його об'єм зменшився в $n = 10$ разів, а тиск збільшився в $k = 21,4$ раза. Знайти відношення $C_p/C_V$ для цього газу.

| |
|---|
| $V_1 = nV_2$, |
| $p_2 = kp_1$, |
| $n = 10$, |
| $k = 21,4$ |
| $C_p/C_V$–? |

Згідно із виразом (8.8) відношення $C_p/C_v$ – це показник адіабати $\gamma$:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

Для адіабатного процесу виконується рівняння Пуассона (8.17):

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

Для двох станів газу матимемо

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma.$$

Після підстановки співвідношень між тисками та об'ємами в обох станах

$$\frac{p_1}{kp_1} = \left(\frac{V_2}{nV_2}\right)^{\gamma}, \quad \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma}, \quad k = n^{\gamma},$$

$$\ln k = \ln n^{\gamma}, \quad \ln k = \gamma \ln n, \quad \gamma = \frac{\ln k}{\ln n}, \quad \gamma = \log_n k$$

або після розрахунку

$$\gamma = \log_n k = \log_{10} 21,4 = 1,33.$$

**8.8.** Кисень масою $m = 2$ кг займає об'єм $V_1 = 1$ м$^3$ і знаходиться під тиском $p_1 = 0,2$ МПа. Газ був спочатку нагрітий при сталому тиску до об'єму $V_2 = 3$ м$^3$, а потім при сталому об'ємі до тиску $p_3 = 0,5$ МПа. Знайти: 1) зміну внутрішньої енергії $\Delta U$ газу; 2) виконану газом роботу $A$; 3) кількість теплоти $Q$, яка була надана газу. Побудувати графік процесу.

| |
|---|
| $m = 2$ кг, |
| $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, |
| $i = 5$, |
| $V_1 = 1$ м$^3$, |
| $p_1 = 0,2 \cdot 10^6$ Па, |
| $V_2 = 3$ м$^3$, |
| $p_3 = 0,5 \cdot 10^6$ Па |
| $\Delta U, A, Q$–? |

Оскільки відомі всі необхідні величини, спочатку побудуємо діаграму процесу (рис. 8.1). На цьому рисунку показано стани системи у координатах тиск $p$ (МПа) – об'єм $V$ (м$^3$). Перший стан (точка 1 на рисунку) описується параметрами стану $p_1, V_1, T_1$, для точки 2 це $p_1, V_2, T_2$, а в кінцевому стані (точка 3 на рисунку) система набуває значень $p_3, V_2, T_3$. Внутрішня

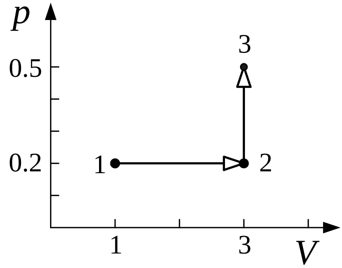



**Рисунок 8.1**

енергія газу, як це можна бачити із (8.11), не залежить від шляху процесу, а лише від температури газу. Зміну внутрішньої енергії можна обчислити за формулою (8.12). В нашому випадку зручно скористатися варіантом формули, де енергія виражена через тиск та об'єм:

$$U = \frac{i}{2} pV, \quad \Delta U = U_3 - U_1 = \frac{i}{2}\left(p_3 V_2 - p_1 V_1\right).$$

Знайдемо числове значення:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \left(0,5 \cdot 10^6 \cdot 3 - 0,2 \cdot 10^6 \cdot 1\right) = 3,25 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

Робота, що виконується газом, дорівнює площі під кривою, якою показано процес. У процесі 1-2 робота визначається формулою для ізобарного процесу (8.14):

$$A_{12} = p\Delta V = p_1(V_2 - V_1).$$

Оскільки у процесі 2–3 об'єм газу не змінюється, робота дорівнює нулю (див. (8.20)):

$$A_{23} = 0.$$

Загальна робота всього процесу – це сума цих складових:

$$A = A_{12} + A_{23} = p_1(V_2 - V_1),$$

або після розрахунків

$$A = p_1(V_2 - V_1) = 0,2 \cdot 10^6 \cdot (3 - 1) = 0,4 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

Кількість теплоти, що була надана газу, знайдемо за першим законом термодинаміки (8.10):

$$Q = A + \Delta U = 0,4 \cdot 10^6 + 3,25 \cdot 10^6 = 3,65 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

**8.9.** Автомобільну шину накачали до тиску $p_1 = 220$ кПа при температурі $T_1 = 290$ К. Під час руху вона нагрілася до температури $T_2 = 330$ К та розірвалася. Вважаючи процес, що відбувся після руйнування шини за адіабатний, знайти зміну температури $\Delta T$ повітря, що вийшов із шини. Зовнішній тиск повітря $p_0 = 100$ кПа.

| |
|---|
| $p_1 = 2,2 \cdot 10^5$ Па, |
| $T_1 = 290$ К, |
| $T_2 = 330$ К, |
| $p_0 = 10^5$ Па, |
| $i = 5$ |
| $\Delta T-?$ |

До нагрівання шини повітря в ній характеризується параметрами $p_1, V_1, T_1$, після нагрівання сталим залишається лише об'єм, отже, після нагрівання параметри набувають значень $p_2, V_1, T_2$. Після пошкодження шини у результаті адіабатного процесу змінюються всі величини, тому в кінцевому стані $p_0, V_0, T_0$. Згідно з цим процес нагрівання шини до її руйнування є ізохорним і для нього справедливий закон Шарля (7.14):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

звідки знайдемо тиск після нагрівання:

$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1}.$$

За умовою процес розширення газу після порушення герметичності є адіабатним, тому для нього справедливе рівняння (8.17):

$$T_2^{\gamma} p_2^{1-\gamma} = T_0^{\gamma} p_0^{1-\gamma}, \quad \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1-\gamma},$$

$$\frac{T_0}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1/\gamma-1}, \quad T_0 = T_2 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1/\gamma-1}.$$

Або із урахуванням знайденого раніше виразу для $p_2$

$$T_0 = T_2 \left(\frac{p_1 T_2}{p_0 T_1}\right)^{1/\gamma-1}.$$

Знайдемо зміну температури в цьому процесі:

$$\Delta T = T_0 - T_2 = T_2 \left[\left(\frac{p_1 T_2}{p_0 T_1}\right)^{1/\gamma-1} - 1\right].$$

Показник адіабати розраховуємо за формулою (8.8):

$$\gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Підставляючи це значення у знайдений вираз для зміни температури, отримуємо кінцеву формулу у вигляді

$$\Delta T = T_2 \left[\left(\frac{p_1 T_2}{p_0 T_1}\right)^{i/(i+2)-1} - 1\right].$$

Відомо, що повітря складається із 78% азоту $N_2$, та 21% кисню $O_2$ (за об'ємом). Частка інших газів при цьому становить лише 1% загального об'єму. Отже, нехтуючи наявністю інших газів, можна сказати, що повітря складається з двоатомних молекул, тому $i = 5$. Тепер розрахуємо числове значення зміни температури:

$$\Delta T = 330 \cdot \left[ \left( \frac{2,2 \cdot 10^5 \cdot 330}{10^5 \cdot 290} \right)^{5/(5+2)-1} - 1 \right] = -76,11 \text{ (K)}.$$

Це значення отримали зі знаком "−", оскільки при адіабатному розширенні робота здійснюється за рахунок зменшення внутрішньої енергії, а температура газу при цьому зменшується (див. 8.22).

**8.10.** У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0,02$ кг при температурі $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатно, збільшив свій об'єм у п'ять разів, а потім був стиснений ізотермічно, причому об'єм газу при цьому зменшився в п'ять разів. Знайти температуру $T_2$ у кінці адіабатного розширення та повну роботу $A$, яку здійснив газ. Зобразити процес графічно при початковому тиску $p_1 = 10^5$ Па.

| |
|---|
| $m = 0,02$ кг, |
| $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, |
| $T_1 = 300$ К, |
| $V_2 = 5V_1$; $V_3 = V_1$, |
| $i = 5$, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К), |
| $p_1 = 10^5$ Па |
| $T_2, A$–? |

Нехай спочатку водень знаходиться при параметрах $p_1, V_1, T_1$, а після адіабатного розширення система набуває значень $p_2, V_2, T_2$. Оскільки процес адіабатний, виконується рівняння (8.17):

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

або для нашого випадку

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

Показник адіабати $\gamma$ розраховується за формулою (8.8):

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

Тепер знайдемо числове значення температури $T_2$:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left( \frac{V_1}{5V_1} \right)^{1,4-1} = 300 \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{0,4} = 157,6 \text{ (K)}.$$

Після адіабатного стискання за умовою відбувається ізотермічне розширення до початкового об'єму $V_1$. Знайдемо сумарну роботу, яка виконується в обох процесах. Робота адіабатного розширення розраховується за формулою (8.16):

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2),$$

де теплоємність $C_V$ знайдемо за формулою (8.5):

$$C_V = \frac{iR}{2}$$

та із урахуванням цього матимемо

$$A_{12} = \frac{iRm}{2\mu}(T_1 - T_2).$$

Розрахуємо це значення:

$$A_{12} = \frac{5 \cdot 8,31 \cdot 0,02}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cdot (300 - 157,6) = 29583,6 \text{ (Дж)}.$$

При подальшому ізотермічному процесі виконується робота (8.15):

$$A_{23} = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2},$$

$$A_{23} = \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 157,6 \cdot \ln \frac{V_1}{5V_1} = -21078,1 \text{ (Дж)}.$$

Знак "–" вказує на те, що робота у цьому випадку виконується зовнішніми силами над газом. Загальна робота – це сума робіт, що виконуються у цих двох процесах:

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = 29583,6 - 21078,1 = 8505,5 \text{ (Дж)}.$$

Тепер побудуємо графік процесу в координатах $p(V)$. Початковий тиск за умовою $p_1 = 10^5$ Па. Початковий об'єм знайдемо за рівнянням Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \quad V_1 = \frac{mRT_1}{p_1 \mu} = \frac{0,02 \cdot 8,31 \cdot 300}{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,25 \text{ (м}^3\text{)}.$$

У першому процесі для побудови графіка будемо використовувати рівняння адіабати (8.17):

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$$

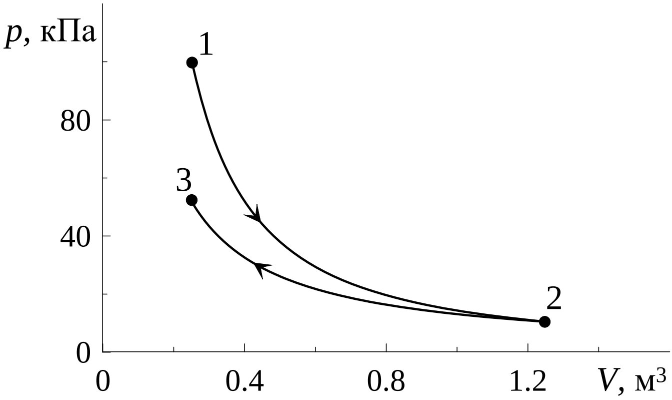



**Рисунок 8.2**

із показником адіабати $\gamma = 1,4$. Будуємо залежність $p_2(V_2)$ до моменту $V_2 = 5V_1$. При цьому ми потрапимо у точку 2. Після відбувається зменшення об'єму в ізотермічному процесі. Для розрахунку можна використовувати ту саму залежність, що й у адіабатному, тільки при $\gamma = 1$ (див. (8.18)). Розрахунки проводимо до моменту $V_2 = V_1$. Графік, побудований за вказаним алгоритмом за допомогою комп'ютерної програми, наведений на рис. 8.2.

**Задачі для самостійного розв'язування**

**8.11.** Розрахувати питомі теплоємності $c_V$ і $c_p$ газів: 1) гелію; 2) водню; 3) вуглекислого газу.

**8.12.** Визначити питому теплоємність $c_V$ суміші газів, що містить $V_1 = 5$ л водню та $V_2 = 3$ л гелію. Гази знаходяться за однакових умов.

**8.13.** Визначити питому теплоємність $c_p$ суміші кисню та азоту, якщо кількість речовини першого компонента $\nu_1$ дорівнює 2 молі, а кількість речовини другого $\nu_2$ складає 4 молі.

**8.14.** Знайти показник адіабати $\gamma$ суміші водню та неону, якщо масові частки обох газів однакові та дорівнюють $\omega = 0,5$.

**8.15.** Знайти показник адіабати $\gamma$ суміші газів, що містить кисень та аргон, якщо кількості речовини обох газів однакові й дорівнюють $\nu$.

**8.16.** У барокамері для створення потрібного тиску використали газовий балон об'ємом 20 л, в якому знаходилося повітря при нормальному атмосферному тиску. При виході всього газу з балона була здійснена робота 350 Дж. Який об'єм барокамери, якщо температура у процесі залишалася сталою та дорівнювала 22°C?

**8.17.** Один моль водяної пари оборотно та ізотермічно сконденсували в рідину при 100°C. Розрахувати роботу, теплоту та зміну внутрішньої енергії в цьому процесі. Питома теплота випаровування води при 100°C дорівнює $22,6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

**8.18.** 5 моль ідеального одноатомного ($i = 3$) газу адіабатно розширюється від початкового тиску 1 МПа. При цьому температура газу зменшується від 320 К до 275 К. Яка при цьому виконується робота? Розрахувати роботу у випадку двоатомного газу ($i = 5$).

**8.19.** Водень масою $m = 4$ г був нагрітий на $\Delta T = 10$ К за сталого тиску. Знайти роботу розширення газу $A$.

**8.20.** Газ, що займав об'єм $V_1 = 12$ л під тиском $p_1 = 100$ кПа, був ізобарно нагрітий від температури $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Знайти роботу $A$ з розширення газу.

**8.21.** Яка робота здійснюється при ізотермічному розширенні водню масою $m = 5$ г за температури $T = 290$ К, якщо об'єм газу збільшується втричі?

**8.22.** При адіабатному стисканні кисню масою $m = 1$ кг була здійснена робота $A = 100$ кДж. Знайти кінцеву температуру $T_2$ газу, якщо до стискання кисень знаходився при температурі $T_1 = 300$ К.

**8.23.** Визначити роботу $A$ адіабатного розширення водню масою $m = 4$ г, якщо температура газу при розширенні знизилася на $\Delta T = 10$ К.

**8.24.** Азот масою $m = 2$ г, що має температуру $T_1 = 300$ К, був адіабатно стиснутий таким чином, що його об'єм зменшився в $n = 10$ разів. Знайти кінцеву температуру $T_2$ газу та роботу $A$, що виконується при стисканні.

**8.25.** Кисень, що займав об'єм $V_1 = 1$ л під тиском $p_1 = 1,2$ МПа, адіабатно розширився до об'єму $V_2 = 10$ л. Знайти роботу $A$ з розширення газу.

**8.26.** Азот масою $m = 5$ кг, нагрітий на $\Delta T = 150$ К, не змінив свого об'єму $V$. Знайти: 1) кількість теплоти $Q$, що була надана газу; 2) зміну внутрішньої енергії $\Delta U$; 3) здійснену газом роботу $A$.

**8.27.** Гелій масою $m = 1$ г був нагрітий на $\Delta T = 100$ К при сталому тиску $p$. Визначити кількість теплоти $Q$, що була надана газу, роботу розширення $A$, а також приріст внутрішньої енергії $\Delta U$ газу.

**8.28.** Яка частка $\omega_1 = \Delta U/Q$ кількості теплоти $Q$, що підводиться до ідеального газу при ізобарному процесі, піде на збільшення $\Delta U$ внутрішньої енергії газу, а яка частка $\omega_2 = A/Q$ – на роботу розширення $A$? Розглянути три випадки: одноатомний, двоатомний та трьохатомний газ.

**8.29.** Пара, що складається із молекул води, розширюється при сталому тиску. Знайти роботу $A$ розширення, якщо парі надана кількість теплоти $Q = 4$ кДж.

**8.30.** Азот масою $m = 200$ г розширюється ізотермічно при температурі $T = 280$ К, причому об'єм газу збільшується удвічі. Знайти зміну внутрішньої енергії газу $\Delta U$, здійснену при розширенні роботу $A$, а також кількість теплоти $Q$, яка була отримана газом.

**8.31.** Знайти кількість теплоти $Q$, що виділиться, якщо азот масою $m = 1$ г, узятий за температури $T = 280$ К під тиском $p_1 = 0,1$ МПа, ізотермічно стиснути до тиску $p_2 = 1$ МПа?

**8.32.** Розширюючись, водень здійснив роботу $A = 6$ кДж. Знайти кількість теплоти $Q$, що була підведена до системи, якщо процес розширення: а) ізобарний; б) ізотермічний.

**8.33.** При адіабатному розширенні кисню із початковою температурою $T_1 = 320$ К внутрішня енергія зменшилася на $\Delta U = 8,4$ кДж, а його об'єм збільшився в $n = 10$ разів. Визначити масу $m$ кисню.

**8.34.** Водень за нормальних умов займав об'єм $V_1 = 100$ м$^3$. Знайти зміну $\Delta U$ внутрішньої енергії газу при його адіабатному розширенні до об'єму $V_2 = 150$ м$^3$.

**8.35.** При адіабатному стисканні кисню масою $m = 20$ г його внутрішня енергія збільшилася на $\Delta U = 8$ кДж, а температура підвищилася до $T_2 = 900$ К. Знайти: 1) підвищення температури $\Delta T$; 2) кінцевий тиск газу $p_2$, якщо початковий тиск $p_1 = 200$ кПа.

**8.36.** Повітря, що займає об'єм $V_1 = 10$ л при тиску $p_1 = 100$ кПа, було адіабатно стиснуто до об'єму $V_2 = 1$ л. Під яким тиском $p_2$ повітря знаходиться після стискання?

**8.37.** Горюча суміш у двигуні дизеля загорілася при температурі $T_2 = 1,1$ кК. Початкова температура суміші $T_1 = 350$ К. У скільки разів потрібно зменшити об'єм суміші при стискуванні, щоб вона загорілася? Стискування вважати за адіабатне. Показник адіабати $\gamma$ для суміші взяти 1,4.

**8.38.** Вуглекислий газ $CO_2$ масою $m = 400$ грамів був нагрітий на $\Delta T = 50$ К при сталому тиску. Визначити зміну $\Delta U$ внутрішньої енергії газу, кількість теплоти $Q$, отриману газом, а також виконану ним роботу $A$.

**8.39.** Кисень масою $m = 800$ г, охолоджений від температури $t_1 = 100^\circ$C до $t_2 = 20^\circ$C, зберігає незмінним об'єм. Визначити: 1) кількість теплоти $Q$, що отримана газом; 2) зміну $\Delta U$ внутрішньої енергії газу; 3) виконану газом роботу $A$.

**8.40.** Тиск азоту, що має об'єм $V = 3$ л при нагріванні збільшився на $\Delta p = 1$ МПа. Визначити кількість теплоти $Q$, отриману газом, якщо його об'єм не змінився.

**8.41.** Один моль аргону за температури $25^\circ$C та тиску 1 атм, розширюється: а) оборотно та ізотермічно до об'єму 50 л; б) оборотно та адіабатно до такого самого об'єму. Знайти кінцеві тиски в обох випадках, вважаючи газ ідеальним.

**8.42.** Система містить 0,5 моля ідеального одноатомного газу в об'ємі 1 л при тиску 10 атм. Газ розширюється оборотно та адіабатно до тиску 1 атм. Розрахувати початкову та кінцеву температури, кінцевий об'єм газу, а також здійснену в процесі роботу та зміну внутрішньої енергії газу.

**8.43.** У балоні при 25°C міститься невідомий газ (азот чи аргон). При рівноважному адіабатному розширенні 5 л цього газу до об'єму 6 л його температура зменшилася приблизно на 20°C. Який газ міститься в балоні?

**8.44.** Розрахувати зміну температури та кінцевий тиск при оборотному адіабатному стисканні 1 моля гелію від температури 0°C та об'єму 44,8 л до об'єму 22,4 л.

**8.45.** Три молі ідеального одноатомного газу, що знаходиться при температурі 350 К, адіабатно розширюються в необоротньому режимі від початкового тиску 5 атм проти сталого зовнішнього тиску 1 атм. Розрахувати, яка при цьому здійснюється робота та який кінцевий об'єм газу.

**8.46.** Один моль ксенону, що знаходиться при 25°C та 2 атм, розширюється адіабатно: а) оборотно до тиску 1 атм; б) проти тиску 1 атм. Знайти кінцеву температуру в кожному випадку.

**8.47.** Розрахувати максимальну роботу ізотермічного розширення 10 г гелію від об'єму 10 л до 50 л при температурі 25°C. Яка буде здійснена робота при адіабатному розширенні при таких самих початкових умовах та кінцевому об'ємі 50 л?

**8.48.** Два молі двоатомного ідеального газу, що взяті при тиску 1 атм та температурі 100 К, були ізобарно стиснуті до зменшення об'єму вдвічі, а потім при сталому об'ємі нагріті до деякої температури та після ізотермічного розширення повернуті в початковий стан. Зобразити цикл у координатах $p(V)$. Розрахувати $\Delta U$, $A$, $Q$ для кожної стадії та для циклу в цілому.

**8.49.** Розв'язати задачу 8,48 для випадку, коли газ повертається в початковий стан після адіабатного розширення.

**8.50.** Два різних гази, з яких один одноатомний, а інший двоатомний, перебувають при однакових температурах і займають однакові об'єми. Гази стискають адіабатно таким чином, що їх об'єми зменшуються вдвічі. Який з газів нагріється більше і у скільки разів?

# 9. Колові процеси. Теплова машина. Ентропія

## Основні формули

- Коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{9.1}$$

  де $Q_1$ – кількість теплоти, що отримує робоче тіло (газ) від нагрівача (Дж); $Q_2$ – кількість теплоти, що передається робочим тілом (газом) охолоджувачу (Дж); $A = Q_1 - Q_2$ – робота, що виконується газом у коловому процесі (Дж).

- ККД теплової машини, що працює за циклом Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \tag{9.2}$$

  де $T_1$ – температура нагрівача (К); $T_2$ – температура охолоджувача (К).

- Зміна ентропії в оборотному процесі

$$\Delta S = \int\limits_A^B \frac{\mathrm{d}Q}{T}, \tag{9.3}$$

  де $A, B$ – межі інтегрування, які відповідають початковому та кінцевому станам системи (Дж/К).

- Зміна ентропії при нагріванні тіла за сталого тиску

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{9.4}$$

  де $T_1, T_2$ – початкова та кінцева температури (К); $\nu$ – кількість речовини (моль); $C_p$ – молярна теплоємність речовини при постійному тиску (Дж/(моль·К)).

## 9. Колові процеси. Теплова машина. Ентропія

- Зміна ентропії при плавленні тіла

$$\Delta S_{\text{пл}} = \frac{\lambda m}{T}, \tag{9.5}$$

  де $\lambda$ – питома теплота плавлення або тверднення (Дж/кг).

- Зміна ентропії при пароутворенні

$$\Delta S_{\text{пар}} = \frac{rm}{T}, \tag{9.6}$$

  де $r$ – питома теплота пароутворення або конденсації (Дж/кг).

- Зміна ентропії при адіабатному процесі

$$\Delta S_{\text{ад}} = 0. \tag{9.7}$$

- Формула Больцмана для визначення ентропії

$$S = k \ln W, \tag{9.8}$$

  де $W$ – термодинамічна ймовірність, яка дорівнює кількості мікростанів, що відповідають даному макростанові системи; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана.

- Швидкість зміни ентропії для стаціонарного стану в живому організмі

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_e}{\mathrm{d}t}, \tag{9.9}$$

  де $\mathrm{d}S_i/\mathrm{d}t$ – швидкість зміни ентропії, що пов'язана з необоротними процесами в біологічній системі; $\mathrm{d}S_e/\mathrm{d}t$ – швидкість зміни ентропії внаслідок взаємодії системи з навколишнім середовищем.

- Зміна ентропії при змішуванні ідеальних газів при сталих температурі та тиску, якщо $\nu_1$ молів одного газу, що займає об'єм $V_1$, змішується із $\nu_2$ молями іншого газу, який займає об'єм $V_2$, та у рівноважному стані загальний об'єм газів дорівнює $V_1 + V_2$:

$$\Delta S = \nu_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \nu_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}. \tag{9.10}$$

## Приклади розв'язання задач

**9.1.** У результаті колового процесу газ здійснив роботу $A = 1$ Дж та передав охолоджувачу кількість теплоти $Q_2 = 4,2$ Дж. Знайти термічний ККД $\eta$ циклу.

| |
|---|
| $A = 1$ Дж, |
| $Q_2 = 4,2$ Дж |
| $\eta$–? |

Термічний ККД розраховується за формулою (9.1):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де частина кількості теплоти $Q_1$ йде на здійснення роботи $A$, а частина передається охолоджувачу, тобто

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Після підстановки цього виразу у попередній матимемо

$$\eta = \frac{Q_2 + A - Q_2}{Q_2 + A} = \frac{A}{Q_2 + A}$$

або після розрахунку

$$\eta = \frac{A}{Q_2 + A} = \frac{1}{4,2 + 1} = 0,1923 = 19,23\%.$$

**9.2.** Ідеальний двоатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 1$ моль, здійснює цикл, що складається із двох ізохор та двох ізобар. Найменший об'єм $V_{\min} = 10$ л, найбільший $V_{\max} = 20$ л, найменший тиск $p_{\min} = 246$ кПа, найбільший $p_{\max} = 410$ кПа. Побудувати графік циклу. Знайти температури $T$ газу для характерних точок циклу та термічний ККД $\eta$.

| |
|---|
| $i = 5,$ |
| $\nu = 1$ моль, |
| $V_{\min} = 10^{-2}$ м$^3$, |
| $V_{\max} = 2 \cdot 10^{-2}$ м$^3$, |
| $p_{\min} = 246 \cdot 10^3$ Па, |
| $p_{\max} = 410 \cdot 10^3$ Па, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $T_1, T_2, T_3, T_4, \eta$–? |

Спочатку зобразимо процес у координатах $p(V)$ (див. рис. 9.1). На цьому рисунку показано циклічний процес, що складається із двох ізохор (процеси 1-2 та 3-4) і двох ізобар (2-3 та 4-1). Значення об'ємів та тисків у всіх характерних точках циклу показано на рисунку. Знайдемо температури системи у цих точках. Відповідно до рівняння стану газу Менделєєва-Клапейрона (7.10)

## 9. Колові процеси. Теплова машина. Ентропія

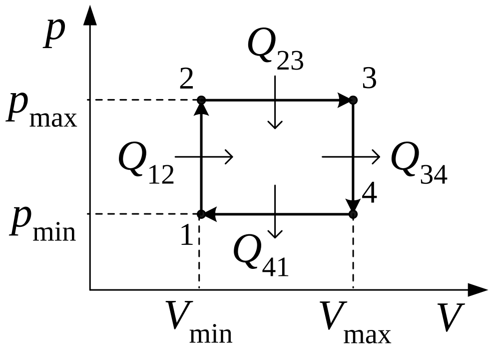



**Рисунок 9.1**

$$pV = \nu RT, \quad T = \frac{pV}{\nu R}.$$

Отже, у всіх точках система матиме різні температури:

$$T_1 = \frac{p_{\min}V_{\min}}{\nu R} = \frac{246 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 8,31} = 296 \text{ (K)},$$

$$T_2 = \frac{p_{\max}V_{\min}}{\nu R} = \frac{410 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 8,31} = 493 \text{ (K)},$$

$$T_3 = \frac{p_{\max}V_{\max}}{\nu R} = \frac{410 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 8,31} = 987 \text{ (K)},$$

$$T_4 = \frac{p_{\min}V_{\max}}{\nu R} = \frac{246 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 8,31} = 592 \text{ (K)}.$$

На рисунку стрілками показана кількість теплоти, яка надається системі нагрівачем (стрілки спрямовані всередину циклу) та яку система передає охолоджувачу (стрілки спрямовані назовні). Термічний ККД розраховується за формулою (9.1):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де $Q_1$ – кількість теплоти, яку отримує робоче тіло від нагрівача; $Q_2$ – кількість теплоти, що передається робочим тілом охолоджувачу, де у нашому випадку

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}, \quad Q_2 = Q_{34} + Q_{41}.$$

Кількість теплоти при ізохорному процесі розраховується відповідно до першого закону термодинаміки (8.10) за формулою (8.20):

$$Q_{\text{ізохор}} = \nu C_V \Delta T,$$

а при ізобарному процесі – за формулою (8.19)

$$Q_{\text{ізобар}} = \nu C_p \Delta T,$$

де молярні теплоємності при сталому об'ємі $C_V$ та тиску $C_p$ визначаємо за формулами (8.5), (8.6):

$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2}.$$

Комбінуючи ці вирази, знайдемо значення $Q_1$ та $Q_2$:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2) =$$

$$= \nu \frac{iR}{2}(T_2 - T_1) + \nu \frac{(i+2)R}{2}(T_3 - T_2) =$$

$$= \frac{\nu R}{2}\left[i(T_2 - T_1) + (i+2)(T_3 - T_2)\right] =$$

$$= \frac{1{\cdot}8,31}{2}\cdot [5{\cdot}(493{-}296) + (5{+}2){\cdot}(987{-}493)] = 18461 \text{ (Дж)},$$

$$Q_2 = Q_{34} + Q_{41} = \nu C_V (T_4 - T_3) + \nu C_p (T_1 - T_4) =$$

$$= \nu \frac{iR}{2}(T_4 - T_3) + \nu \frac{(i+2)R}{2}(T_1 - T_4) =$$

$$= \frac{\nu R}{2}\left[i(T_4 - T_3) + (i+2)(T_1 - T_4)\right] =$$

$$= \frac{1{\cdot}8,31}{2}\cdot [5{\cdot}(592{-}987) + (5{+}2){\cdot}(296 - 592)] = -16815 \text{ (Дж)}.$$

Знак "–" у значенні $Q_2$ свідчить про те, що система втрачає цю теплоту. Іншими словами, вона набуває теплоту із від'ємним значенням. Тому у формулі для розрахунку термічного ККД (9.1) теплоту $Q_2$ потрібно брати за абсолютним значенням, оскільки в цій формулі це теплота, яку віддає система. Отже, маємо

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{18461 - 16815}{18461} = 0,089 = 8,9\,\%.$$

Оскільки значення ККД досить низьке, будувати теплову машину, що працює за циклом, який замикається двома ізохорами та двома ізобарами, немає сенсу. Тому теплові машини зазвичай працюють за циклом Карно, що складається з двох ізотерм та двох адіабат і має набагато більший ККД.

**9.3.** Одноатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 0,1$ кмоль, під тиском $p_1 = 100$ кПа займав об'єм $V_1 = 5$ м$^3$. Газ стискувався ізобарно до об'єму $V_2 = 1$ м$^3$, потім стискувався адіабатно та розширювався при сталій температурі до початкових тиску та об'єму. Побудувати графік процесу. Знайти: 1) температури $T_1, T_2$, об'єм $V_3$ та тиск $p_3$, що відповідають характерним точкам циклу; 2) кількість теплоти $Q_1$, що отримав газ від нагрівача; 3) кількість теплоти $Q_2$, що передав газ охолоджувачу; 4) роботу $A$, яку здійснив газ за увесь цикл; 5) термічний ККД $\eta$ циклу.

| |
|---|
| $i = 3$, |
| $\nu = 100$ моль, |
| $p_1 = 10^5$ Па, |
| $V_1 = 5$ м$^3$, |
| $V_2 = 1$ м$^3$, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $T_1, T_2, V_3, p_3,$ |
| $Q_1, Q_2, A, \eta$–? |

Для розв'язання задачі спочатку потрібно схематично побудувати рисунок у координатах $p(V)$. Після розв'язання можна вже побудувати точний рисунок із використанням відомих газових законів та характерних точок. Ми наведемо лише точний рисунок процесу (рис. 9.2). Для зручності подання на цьому рисунку застосовано логарифмічну вісь ординат. На рисунку реалізується замкнений цикл, що складається із ізобари, адіабати та ізотерми. Нехай у точці 1 система має значення $p_1, V_1, T_1$, у точці 2 – значення $p_1, V_2, T_2$, та у точці 3 параметри стану набувають значень $p_3, V_3, T_1$. Характерні температури знайдемо за рівнянням стану Менделєєва-Клапейрона (7.10):

$$pV = \nu RT, \quad T = \frac{pV}{\nu R},$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} = \frac{10^5 \cdot 5}{100 \cdot 8,31} = 602 \text{ (К)},$$

$$T_2 = \frac{p_1 V_2}{\nu R} = \frac{10^5 \cdot 1}{100 \cdot 8,31} = 120 \text{ (К)}.$$

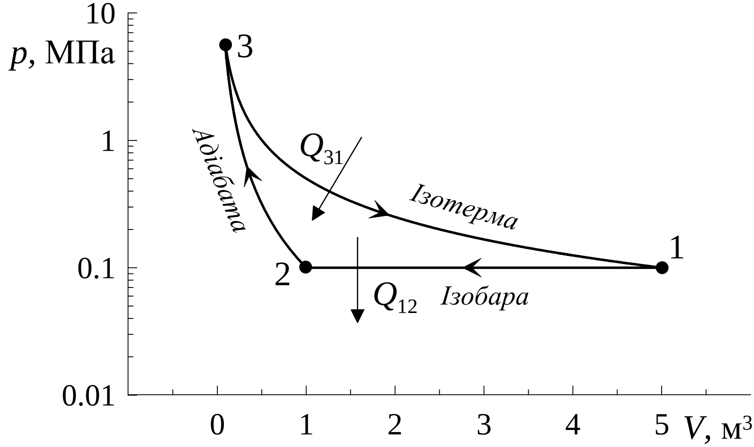



**Рисунок 9.2**

Для знаходження об’єму $V_3$ використаємо рівняння адіабати (8.17):

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1},$$

зліва в якому підставлено параметри для точки 2, а праворуч – параметри точки 3. Виразимо із цього рівняння об’єм $V_3$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{V_3}{V_2}, \quad V_3 = V_2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Показник адіабати розраховується за формулою (8.8):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i},$$

звідки випливає вираз

$$\frac{1}{\gamma-1} = \frac{i}{2} = 0,5i.$$

Отже, остаточне співвідношення для знаходження $V_3$ набирає вигляду

$$V_3 = V_2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{0,5i}$$

або після підстановки відомих та знайдених значень

$$V_3 = 1 \cdot \left(\frac{120}{602}\right)^{0,5\cdot 3} = 0,089\ (\text{м}^3).$$

Тиск $p_3$ можна знайти із використанням рівняння (8.17), але оскільки у точці 3 тепер відомі температура та об'єм, набагато простіше використати рівняння (7.10):

$$p_3V_3{=}\nu RT_1, \quad p_3{=}\frac{\nu RT_1}{V_3}{=}\frac{100\cdot 8,31\cdot 602}{0,089} = 5,621\cdot 10^6\ (\text{Па}).$$

Усі параметри для характерних точок знайдено. Зараз знайдемо кількості тепла, які надаються системі у всіх процесах. Для ізобарного процесу 1—2 кількість тепла знаходиться за формулами (8.19), (8.6):

$$Q = \nu C_p \Delta T, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2}.$$

Для нашого випадку

$$Q_{12} = \frac{\nu(i+2)R}{2}(T_2 - T_1),$$

$$Q_{12} = \frac{100\cdot(3+2)\cdot 8,31}{2}\cdot(120-602) = -1001355\ (\text{Дж}).$$

Знак "—" означає, що у цьому процесі система віддає тепло зовнішнім тілам.

Оскільки процес 2-3 адіабатний, у ньому немає обміну теплотою із зовнішнім середовищем та $Q_{23} = 0$ (див. (8.22)).

В ізотермічному процесі 3-1 теплота розраховується за формулою (8.21):

$$Q_{31} = \nu RT_1 \ln\frac{V_1}{V_3} = 100\cdot 8,31\cdot 602\cdot \ln\frac{5}{0,089} = 2015334\ (\text{Дж}).$$

Згідно з умовою задачі $Q_1 = Q_{31} = 2015334$ Дж, $Q_2 = |Q_{12}| = 1001355$ Дж.

Робота газу $A$ — це різниця між теплотою, що газ отримав від нагрівача $Q_1$ та теплотою, яку він передав охолоджувачу $Q_2$:

$$A = Q_1 - Q_2 = 2015334 - 1001355 = 1013979\ (\text{Дж}).$$

Тепер розрахуємо останню необхідну величину — термічний ККД $\eta$ (9.1):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{1013979}{2015334} = 0,503 = 50,3\%.$$

**9.4.** Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура $T_1$ нагрівача 470 К, температура $T_2$ охолоджувача 280 К. При ізотермічному розширенні газ здійснює роботу $A = 100$ Дж. Визначити термічний ККД $\eta$ циклу, а також кількість теплоти $Q_2$, яку газ віддає охолоджувачу при ізотермічному стисканні.

| |
|---|
| $T_1 = 470$ К, |
| $T_2 = 280$ К, |
| $A = 100$ Дж |
| $\eta, Q_2$–? |

Цикл Карно – це зворотний коловий процес, що складається з двох ізотермічних та двох адіабатних процесів. Уперше такий цикл був розглянутий французьким інженером Л.С. Карно у 1824 р. у зв'язку з визначенням ККД теплових машин. ККД циклу Карно не залежить від властивостей робочого тіла (пари, газу та ін.), а визначається лише температурою нагрівача $T_1$ та охолоджувача $T_2$ (9.2):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

ККД будь-якої теплової машини не може бути більшим за ККД цикла Карно при тих самих $T_1$ і $T_2$.

На рис. 9.3 наведено розрахований для параметрів даної задачі цикл Карно. Оскільки ККД циклу залежить лише від $T_1$ і $T_2$, для за-

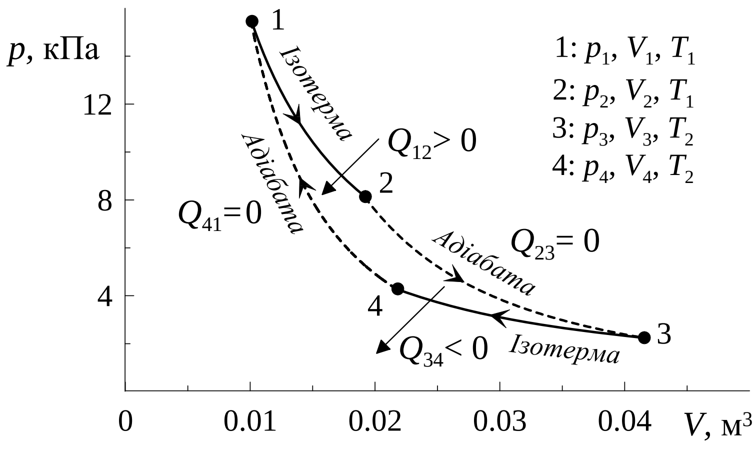



**Рисунок 9.3**

даних умов може реалізуватися багато циклів і для їх графічної реалізації потрібні додаткові параметри. У випадку, показаному на рисунку, обрані значення $i = 3$, $V_1 = 0,01$ м$^3$, $\nu = 0,04$ моля. Ці значення можуть бути будь-якими і при розв'язанні задачі не використовуються.

За умовою задачі відома робота $A$, яка виконується газом при ізотермічному розширенні (процес 1-2). Робота в ізотермічному процесі визначається формулою (8.15):

$$A_{12} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Згідно із першим законом термодинаміки (8.21) для такого процесу кількість теплоти $Q_{12} = A_{12}$. Оскільки у циклі Карно система отримує тепло від нагрівача лише у процесі 1-2 (а у процесі 3-4 віддає частину цього тепла охолоджувачу), то у формулі для визначення ККД теплової машини (9.1)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

кількість теплоти $Q_1$ чисельно дорівнює роботі ізотермічного розширення $A$, значення якої відоме в умові задачі. Після заміни матимемо

$$\eta = \frac{A - Q_2}{A} = 1 - \frac{Q_2}{A}.$$

З іншого боку, згідно із формулою (9.2)

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Прирівнявши два останніх співвідношення, матимемо

$$1 - \frac{Q_2}{A} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1}, \quad Q_2 = \frac{A T_2}{T_1}.$$

Знайдемо це значення:

$$Q_2 = \frac{100 \cdot 280}{470} = 59,57\ (\text{Дж}).$$

ККД циклу може бути знайдений як через температури, так і через кількості теплоти:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{470 - 280}{470} = 0,4043 = 40,43\%,$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{100 - 59,57}{100} = 0,4043 = 40,43\%.$$

**9.5.** Зміна ентропії при розширенні 1 моля закису азоту $N_2O$ від 10 л при сталій температурі становить 5,8 Дж/К. Який кінцевий об'єм газу?

| |
|---|
| $\nu = 1$ моль,<br>$V_1 = 10^{-2}$ м$^3$,<br>$\Delta S = 5,8$ Дж/К,<br>$R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $V_2$–? |

Загальна формула для визначення зміни ентропії у оборотному процесі має вигляд (9.3):

$$\Delta S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Оскільки температура газу за умовою не змінюється, матимемо

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int \mathrm{d}Q, \quad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Зміна кількості теплоти в ізотермічному процесі розраховується за формулою (8.21):

$$\Delta Q = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

отже, після поєднання цих формул отримаємо

$$\Delta S = \frac{\nu RT \ln (V_2/V_1)}{T}, \quad \Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta S}{\nu R},$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \exp\left\{\frac{\Delta S}{\nu R}\right\}, \quad V_2 = V_1 \cdot \exp\left\{\frac{\Delta S}{\nu R}\right\}.$$

Розрахуємо це значення:

$$V_2 = V_1 \cdot \exp\left\{\frac{\Delta S}{\nu R}\right\} = 10^{-2} \cdot \exp\left\{\frac{5,8}{1 \cdot 8,31}\right\} = 0,02\ (\text{м}^3).$$

**9.6.** Змішали воду масою $m_1 = 5$ кг при температурі $T_1 = 280$ К з водою масою $m_2 = 8$ кг при температурі $T_2 = 350$ К. Знайти температуру $\theta$ суміші та зміну ентропії, яка відбувається при змішуванні.

| |
|---|
| $m_1 = 5$ кг,<br>$T_1 = 280$ К,<br>$m_2 = 8$ кг,<br>$T_2 = 350$ К,<br>$c = 4200$ Дж/(кг·К) |
| $\theta, \Delta S$–? |

Із визначення питомої теплоємності (8.3) випливає вираз для кількості теплоти $Q$, що передається речовині масою $m$ при її нагріванні на $\Delta T$:

$$Q = cm\Delta T.$$

Після змішування двох частин води із різними температурами із часом установиться стан термодинамічної рівноваги, у якому будь-яка частина суміші матиме однакову температуру $\theta$. У процесі встановлення рівноваги теплота від більш нагрітої частини води переходить до менш нагрітої. Згідно із законом збереження енергії можна записати рівняння теплового балансу:

$$Q_1 = Q_2,$$

де $Q_1$ – це теплота, яку передає більш нагріта частина води, а $Q_2$ – теплота, якої набирає менш нагріта частина. Отже, з двох останніх рівнянь отримаємо

$$cm_1(\theta - T_1) = cm_2(T_2 - \theta), \quad m_1(\theta - T_1) = m_2(T_2 - \theta),$$

$$\theta(m_1 + m_2) = m_2T_2 + m_1T_1, \quad \theta = \frac{m_2T_2 + m_1T_1}{m_1 + m_2}$$

або після розрахунку

$$\theta = \frac{m_2T_2 + m_1T_1}{m_1 + m_2} = \frac{8 \cdot 350 + 5 \cdot 280}{5 + 8} = 323\ (\text{K}).$$

Для розрахунку зміни ентропії системи використаємо загальну формулу (9.3):

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T},$$

де цифрами 1 та 2 умовно позначені межі інтегрування у початковому та кінцевому станах. Якщо використати співвідношення

$$\mathrm{d}Q = cm\mathrm{d}T,$$

формула набирає вигляду

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{cm}{T}\mathrm{d}T.$$

Оскільки початкова система складається з двох частин, матимемо

$$\Delta S = \int\limits_{T_1}^{\theta} \frac{cm_1}{T}\mathrm{d}T + \int\limits_{T_2}^{\theta} \frac{cm_2}{T}\mathrm{d}T = cm_1 \int\limits_{T_1}^{\theta} \frac{\mathrm{d}T}{T} + cm_2 \int\limits_{T_2}^{\theta} \frac{\mathrm{d}T}{T} =$$

$$= cm_1 \ln T|_{T_1}^{\theta} + cm_2 \ln T|_{T_2}^{\theta} =$$

$$= cm_1(\ln\theta - \ln T_1) + cm_2(\ln\theta - \ln T_2) =$$

$$= cm_1 \cdot \ln\frac{\theta}{T_1} + cm_2 \cdot \ln\frac{\theta}{T_2}.$$

Розрахуємо це значення:

$$\Delta S = cm_1 \cdot \ln\frac{\theta}{T_1} + cm_2 \cdot \ln\frac{\theta}{T_2} =$$

$$= 4200 \cdot 5 \cdot \ln\frac{323}{280} + 4200 \cdot 8 \cdot \ln\frac{323}{350} =$$

$$= 3000 - 2697 = 303 \ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right).$$

**9.7.** Лід масою $m_1 = 2$ кг при температурі $t_1 = 0^\circ$С був перетворений у воду такої самої температури за допомогою пари, яка мала температуру $t_2 = 100^\circ$С. Визначити масу $m_2$ витраченої пари. Яка зміна ентропії $\Delta S$ відбулася у системі лід-пара?

| |
|---|
| $m_1 = 2$ кг, |
| $t_1 = 0^\circ$С, |
| $t_2 = 100^\circ$С, |
| $c = 4200$ Дж/(кг·К), |
| $r = 2260 \cdot 10^3$ Дж/кг, |
| $\lambda = 330 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| $m_2, \Delta S$–? |

Спочатку знайдемо масу пари, яка була витрачена на повне плавлення шматка льоду. Згідно закону збереження енергії запишемо рівняння теплового балансу у вигляді

$$Q_1 = Q_2,$$

де $Q_1$ – теплота, яку набирає лід, а $Q_2$ – теплота, яку втрачає пара. Оскільки за умовою лід знаходиться при температурі плавлення $t_1 = 0^\circ$С, він під дією пари відразу почне плавитися. Для повного плавлення льоду йому потрібно надати кількість теплоти

$$Q_1 = \lambda m_1,$$

де $\lambda$ – питома теплота плавлення льоду.

Пара у систему підводиться при температурі конденсації $t_2 = 100^\circ$С, отже, вона одразу буде віддавати тепло за рахунок конденсації. За умовою задачі у кінці процесу ми отримуємо воду із температурою $t_1 = 0^\circ$С, яка буде складатися із розплавленого льоду та сконденсованої пари. Оскільки пара конденсується при температурі $t_2 = 100^\circ$С, а кінцева температура води, що отримана з неї, дорівнює $t_1 = 0^\circ$С, вона буде віддавати тепло у двох процесах – при конденсації та охолодженні до кінцевої температури. Отже, матимемо

$$Q_2 = rm_2 + cm_2(t_2 - t_1),$$

де $c$ — питома теплоємність води; $r$ — питома теплота пароутворення (конденсації) води. Із рівняння теплового балансу матимемо

$$\lambda m_1 = rm_2 + cm_2(t_2 - t_1),$$

$$m_2 = \frac{\lambda m_1}{r + c(t_2 - t_1)}$$

або після розрахунку

$$m_2 = \frac{330 \cdot 10^3 \cdot 2}{2260 \cdot 10^3 + 4200 \cdot (100 - 0)} = 0,246 \text{ (кг)}.$$

Знайдемо зміну ентропії у зазначених процесах. Оскільки лід плавиться, для нього зміну ентропії розрахуємо за формулою (9.5):

$$\Delta S_{\text{льоду}} = \frac{\lambda m_1}{T_1}.$$

При плавленні кристалічного льоду він перетворюється у воду, яка поводить себе більш хаотично (молекули переміщуються довільним чином по всьому об'єму, який займають), отже, ентропія у процесі плавлення збільшується і її потрібно брати зі знаком "+". Зміна ентропії для пари буде складатися з двох частин — зміни при конденсації (9.6) та наступної зміни при охолодженні сконденсованої пари (9.4):

$$\Delta S_{\text{пари}} = -\frac{rm_2}{T_2} + \nu C_p \ln\frac{T_1}{T_2},$$

де перший доданок узятий зі знаком "−", оскільки ентропія пари при конденсації зменшується (вода більш впорядкована, ніж пара), а другий доданок автоматично від'ємний, оскільки $T_1 < T_2$. Відмітимо, що у формулі (9.4) $T_1$ — це початкова температура, а $T_2$ — кінцева. У нашому випадку початкова температура пари позначена як $T_2$, а кінцева $T_1$, тому їх місця у формулі змінено. Використаємо зв'язок між молярною $C$ та питомою $c$ теплоємностями (8.4) і правило знаходження кількості молів речовини (7.2):

$$C = c\mu, \quad \nu = \frac{m}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \nu C_p = \frac{m}{\mu} c\mu = cm.$$

Із урахуванням цього отримаємо

$$\Delta S_{\text{пари}} = -\frac{rm_2}{T_2} + cm_2 \ln\frac{T_1}{T_2}.$$

Загальна зміна ентропії $\Delta S$ у системі лід-пара дається сумою змін ентропій для льоду і пари:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{льоду}} + \Delta S_{\text{пари}} = \frac{\lambda m_1}{T_1} - \frac{r m_2}{T_2} + c m_2 \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Розрахуємо це значення, переводячи температури $t_1$ і $t_2$ в абсолютну шкалу Кельвіна $T_1$ і $T_2$ за формулою (7.15):

$$\Delta S = \frac{330 \cdot 10^3 \cdot 2}{273} - \frac{2260 \cdot 10^3 \cdot 0,246}{373} + 4200 \cdot 0,246 \cdot \ln \frac{273}{373} =$$

$$= 604,6 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right).$$

**9.8.** Знайти зміну ентропії при нагріванні 58,82 кг твердого $B_2O_3$ від 298 К до 700 К. Температурна залежність теплоємності $B_2O_3$ описується рівнянням $C_p = 36,5525 + 106,345 \cdot 10^{-3} T$ (в одиницях Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$).

| |
|---|
| $m_1 = 58,82$ кг, |
| $T_1 = 298$ К, |
| $T_2 = 700$ К, |
| $C_p = 36,5525 + 106,345 \cdot 10^{-3} T$, |
| $\mu = 70 \cdot 10^{-3}$ кг/моль |
| $\Delta S$–? |

Використаємо загальну формулу (9.3):

$$\Delta S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Кількість теплоти при ізобарному процесі (8.19):

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{\mu} C_p \mathrm{d}T,$$

або після підстановки до інтегрального виразу

$$\Delta S = \int \frac{m}{\mu} \frac{C_p}{T} \mathrm{d}T = \frac{m}{\mu} \int \frac{C_p}{T} \mathrm{d}T.$$

Оскільки температура системи змінюється від $T_1$ до $T_2$, ці значення є межами інтегрування:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T} \mathrm{d}T = \frac{m}{\mu} \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{36,5525 + 106,345 \cdot 10^{-3} T}{T} \mathrm{d}T =$$

$$= \frac{m}{\mu}\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{36,5525}{T}\mathrm{d}T + \frac{m}{\mu}\int\limits_{T_1}^{T_2}106,345\cdot 10^{-3}\mathrm{d}T =$$

$$= 36,5525\cdot\frac{m}{\mu}\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T} + 106,345\cdot 10^{-3}\cdot\frac{m}{\mu}\int\limits_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T =$$

$$= \frac{m}{\mu}\cdot 36,5525\cdot\ln T|_{T_1}^{T_2} + \frac{m}{\mu}\cdot 106,345\cdot 10^{-3}\cdot T|_{T_1}^{T_2} =$$

$$= \frac{m}{\mu}\cdot 36,5525(\ln T_2 - \ln T_1) + \frac{m}{\mu}\cdot 106,345\cdot 10^{-3}(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{m}{\mu}\cdot 36,5525\cdot\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu}\cdot 106,345\cdot 10^{-3}\cdot(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{m}{\mu}\left(36,5525\cdot\ln\frac{T_2}{T_1} + 106,345\cdot 10^{-3}\cdot(T_2 - T_1)\right) =$$

$$= \frac{58,82}{70\cdot 10^{-3}}\left(36,5525\cdot\ln\frac{700}{298} + 106,345\cdot 10^{-3}\cdot(700 - 298)\right) =$$

$$= 62152,6\ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right).$$

**9.9.** 12 г кисню охолоджують від 290 К до 233 К, одночасно підвищуючи тиск від 1 атм до 60 атм. Як зміниться ентропія газу, якщо припустити, що теплоємність кисню в заданому температурному інтервалі не змінюється і дорівнює 32,9 Дж/(моль·К)?

| |
|---|
| $m = 12\cdot 10^{-3}$ кг, |
| $T_1 = 290$ К, |
| $T_2 = 233$ К, |
| $p_1 = 10^5$ Па, |
| $p_2 = 60\cdot 10^5$ Па, |
| $C_p = 32,9$ Дж/(моль·К), |
| $\mu = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль, |
| $R = 8,31$ Дж/(моль·К) |
| $\Delta S$–? |

Згідно із виразом (9.8) ентропія не залежить від характеру еволюції, а лише від конкретного стану системи. Отже, для знаходження необхідної зміни $\Delta S$ подамо наш процес як два послідовних процеси: 1) охолодження газу від $T_1$ до $T_2$ при сталому тиску $p_1$; 2) збільшення тиску від $p_1$ до $p_2$ при сталій температурі $T_2$. При цьому ми переміщуємося між такими самими станами системи, що задані в умові та можемо розрахувати зміну ентропії як суму змін у двох вказаних послідовних процесах:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Оскільки в першому процесі відбувається охолодження при сталому тиску, зміну ентропії розраховуємо за формулою (9.4):

$$\Delta S_1 = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \Delta S_1 = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Другий процес є ізотермічним ($T = \mathrm{const}$). Згідно із загальною формулою (9.3) матимемо

$$\Delta S_2 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T} \int \mathrm{d}Q = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Кількість теплоти в отриманому виразі визначатимемо за формулою для ізотермічного процесу (8.21):

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Після поєднання двох останніх виразів одержимо:

$$\Delta S_2 = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{T} \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \Delta S_2 = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Оскільки маса газу не змінюється, для визначення відношення об'ємів $V_2/V_1$ використаємо рівняння Клапейрона (7.11):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}.$$

Із урахуванням цього формула для розрахунку зміни ентропії в ізотермічному процесі набирає вигляду

$$\Delta S_2 = \frac{m}{\mu} R \ln \left( \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right).$$

Отже, отримуємо загальну формулу для розрахунку зміни ентропії $\Delta S$ у заданому в умові процесі:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \left( \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right) =$$
$$= \frac{m}{\mu} \left[ C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \left( \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right) \right].$$

Проведемо розрахунки:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \left[ C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \left( \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right) \right] =$$
$$= \frac{12 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[ 32,9 \cdot \ln \frac{233}{290} + 8,31 \cdot \ln \left( \frac{10^5 \cdot 233}{60 \cdot 10^5 \cdot 290} \right) \right] =$$
$$= -16,141 \text{ (Дж/К)}.$$

## 9. Колові процеси. Теплова машина. Ентропія

### Задачі для самостійного розв'язування

**9.10.** Здійснюючи замкнений процес, газ отримав від нагрівача кількість теплоти $Q_1 = 4$ кДж. Визначити роботу $A$ газу під час перебігу циклу, якщо його термічний ККД $\eta = 0,1$.

**9.11.** Ідеальний двоатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 1$ кмоль, здійснює замкнений цикл, графік якого зображений на рис. 9.4. Знайти: 1) кількість теплоти $Q_1$, що отримана газом від нагрівача; 2) кількість теплоти $Q_2$, що передається охолоджувачу; 3) роботу $A$, яку здійснює газ за цикл; 4) термічний ККД $\eta$ циклу.

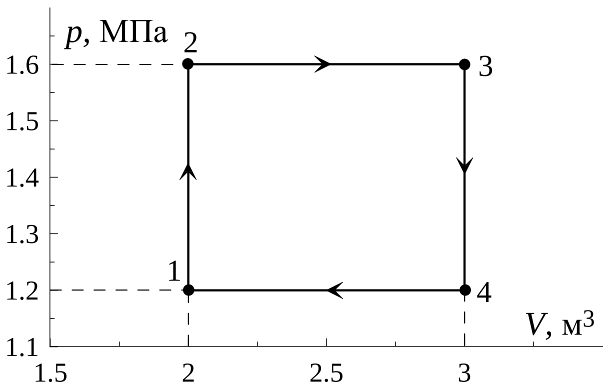



**Рисунок 9.4**

**9.12.** Ідеальний двохатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 1$ моль та знаходиться під тиском $p_1 = 0,1$ МПа при температурі $T_1 = 300$ К, нагрівають при сталому об'ємі до тиску $p_2 = 0,2$ МПа. Після цього газ ізотермічно розширився до початкового тиску $p_1$, а потім був ізобарно стиснений до початкового об'єму $V_1$. Побудувати графік циклу. Визначити температуру $T$ газу для характерних точок циклу та знайти його термічний ККД $\eta$.

**9.13.** Ідеальний багатоатомний газ здійснює цикл, що складається із двох ізохор та двох ізобар, причому найбільший тиск газу у два рази більший від найменшого, а найбільший об'єм у чотири рази більший від найменшого. Знайти ККД $\eta$ циклу.

**9.14.** Ідеальний газ, що здійснює цикл Карно, $2/3$ кількості теплоти $Q_1$, яку отримує від нагрівача, віддає охолоджувачу. Температура $T_2$ охолоджувача дорівнює 280 К. Визначити температуру $T_1$ нагрівача.

**9.15.** Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура $T_2$ охолоджувача становить 290 К. У скільки разів збільшиться ККД циклу, якщо температуру нагрівача підвищити від значення $T_1' = 400$ К до $T_1'' = 600$ К?

**9.16.** Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура $T_1$ нагрівача у три рази вище ніж температура $T_2$ охолоджувача. Нагрівач передає газу кількість теплоти $Q_1 = 42$ кДж. Яку роботу $A$ здійснив газ?

**9.17.** Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура $T_1$ нагрівача у чотири рази вища ніж температура $T_2$ охолоджувача. Яку частку $\omega$ кількості теплоти, що газ отримує за один повний цикл від нагрівача, він віддає охолоджувачу?

**9.18.** Ідеальний газ, що здійснює цикл Карно, отримав від нагрівача кількість теплоти $Q_1 = 4,2$ кДж і здійснив роботу $A = 590$ Дж. Знайти термічний ККД $\eta$ цього циклу. У скільки разів температура $T_1$ нагрівача більша ніж температура $T_2$ охолоджувача?

**9.19.** Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Робота $A_1$ ізотермічного розширення дорівнює 5 Дж. Знайти роботу $A_2$ ізотермічного стискання, якщо термічний ККД циклу дорівнює 0,2.

**9.20.** Найменший об'єм $V_1$ газу, що здійснює цикл Карно, дорівнює 153 л. Знайти найбільший об'єм $V_3$, якщо об'єм $V_2$ у кінці ізотермічного розширення та об'єм $V_4$ у кінці ізотермічного стискання становлять 600 л та 189 л відповідно.

**9.21.** Ідеальний двохатомний газ здійснює цикл Карно. Об'єм газу після ізотермічного розширення $V_2 = 12$ л, а об'єм після адіабатного розширення $V_3 = 16$ л. Знайти термічний ККД $\eta$ циклу.

**9.22.** У якому випадку ККД циклу Карно підвищиться на більшу величину: при збільшенні температури нагрівача на $\Delta T$ або при зменшенні температури охолоджувача на таку саму величину?

**9.23.** Водень здійснює цикл Карно. Знайти ККД циклу, якщо при адіабатному розширенні: а) об'єм газу збільшується в $n = 2$ рази; б) тиск зменшується в $n = 2$ рази.

**9.24.** Знайти ККД циклу, що складається із двох ізохор та двох адіабат, якщо в межах циклу об'єм газу змінюється в $n = 10$ разів. Робочою речовиною є азот.

**9.25.** У ідеальній тепловій машині за рахунок кожного кілоджоуля енергії, яку система отримує від нагрівача, здійснюється робота $A = 300$ Дж. Знайти ККД машини та температуру $T_1$ нагрівача, якщо температура охолоджувача $T_2 = 280$ К.

**9.26.** Один моль ідеального газу здійснює замкнений цикл, що складається з двох ізобар і двох ізохор. При ізобарному розширенні об'єм газу збільшується в два рази, а його температура при цьому дорівнює $t_2 = 800^\circ$С. Наприкінці ізохорного процесу температура становить $t_3 = 700^\circ$С. Визначити ККД циклу, якщо молярні теплоємності газу при сталому тиску та сталому об'ємі дорівнюють $C_p = 29$ Дж/(моль·К), $C_V = 21$ Дж/(моль·К) відповідно.

**9.27.** У ході циклу Карно робоча речовина отримує від нагрівача кількість теплоти 300 кДж. Температури нагрівача і охолоджувача дорівнюють відповідно $T_1 = 450$ К і $T_2 = 280$ К. Знайти роботу $A$, що здійснює робоча речовина за цикл.

**9.28.** Двигун внутрішнього згоряння має ККД $\eta = 28\%$ при температурі згоряння палива $T_1 = 927^\circ$С та температурі відпрацьованих газів $T_2 = 447^\circ$С. На яку величину $\Delta\eta$ ККД ідеальної теплової машини, що працює при таких самих температурах нагрівача та охолоджувача, перевищує ККД цього двигуна?

**9.29.** Робоче тіло теплової машини, що працює за ідеальним циклом Карно, в кожному циклі отримує від нагрівача $\Delta Q = 8,4$ кДж і $k = 80\%$ з них передає охолоджувачу. Знайти ККД циклу та роботу, яку здійснює машина в кожному циклі.

**9.30.** Визначити зміну ентропії в процесі плавлення 1 моля льоду при $0^\circ$С та подальшим нагріванням води, що утворилася, до $100^\circ$С.

**9.31.** Розрахувати зміну ентропії у процесі перетворення 1 моля води у пару при температурі кипіння.

**9.32.** При якій температурі знаходилися 2 молі води у посудині, якщо при її нагріванні до 100°C ентропія збільшилася на 23,5 Дж/K?

**9.33.** Розрахувати зміну ентропії при нагріванні 100 г води від 0°C до 15°C.

**9.34.** У результаті ізохорного нагрівання водню масою $m = 1$ г тиск $p$ газу збільшився у два рази. Визначити зміну $\Delta S$ ентропії газу.

**9.35.** Знайти зміну ентропії $\Delta S$ при ізобарному розширенні азоту масою $m = 4$ грама від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

**9.36.** Шматок льоду масою $m = 200$ г, узятий при температурі $t_1 = -10$°C, був нагрітий до температури $t_2 = 0$°C та розплавлений, після чого отриману воду нагріли до температури $t_1 = 10$°C. Визначити зміну $\Delta S$ ентропії в ході зазначених процесів.

**9.37.** Кисень масою $m = 2$ кг збільшив свій об'єм у $n = 5$ разів: а) ізотермічно; б) адіабатно. Знайти зміну ентропії в обох випадках.

**9.38.** Водень масою $m = 100$ г був ізобарно нагрітий таким чином, що його об'єм збільшився в $n = 3$ рази, потім водень був ізохорно охолоджений таким чином, що його тиск зменшився в $n = 3$ рази. Знайти зміну ентропії $\Delta S$ у результаті зазначених процесів.

**9.39.** 2 л аргону під сталим тиском $19,6 \cdot 10^4$ Па нагрівають до моменту, коли об'єм збільшується до 12 л. Знайти зміну ентропії, якщо початкова температура газу дорівнює 373 K.

**9.40.** Газ, узятий при температурі 300 K та тиску 20 атм, оборотно та ізотермічно розширюється від 1 л до 10 л. Розрахуйте зміну ентропії газу, а також для всієї системи, яка бере участь у розширенні.

**9.41.** Визначити зміну ентропії при нагріванні 16 кг кисню від 273 K до 373 K: а) при сталому об'ємі; б) при сталому тиску. Вважати кисень ідеальним газом.

**9.42.** Розрахувати зміну ентропії 1 моля газоподібного $O_2$ при нагріванні від 25°C до 600°C при сталому тиску, використовуючи температурну залежність теплоємності

$C_p = 6,0954 + 3,2533 \cdot 10^{-3}T - 10,171 \cdot 10^{-7}T^2$ (в кал·моль$^{-1}$·К$^{-1}$). Врахувати, що 1 кал відповідає 4,187 Дж.

**9.43.** 2 молі водяної пари конденсуються при 100°С, отримана вода охолоджується до 0°С та замерзає при цій температурі. Знайти зміну ентропії води.

**9.44.** Розрахувати зміну ентропії при змішуванні 5 кг води з температурою 80°С з 10 кг води з температурою 20°С. Питома теплоємність води $c_p = 4,184$ Дж·г$^{-1}$·К$^{-1}$.

**9.45.** Розрахувати зміну ентропії при нагріванні 11,2 л азоту від 0°С до 50°С та одночасному зменшенні тиску від 1 атм до 0,01 атм. Азот вважати ідеальним газом.

**9.46.** Стандартна ентропія золота при 25°С становить $S_{298} = 47,4$ Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$. При нагріванні до 484°С ентропія збільшується у 1,5 раза. До якої температури потрібно охолодити золото, щоб його ентропія була у 2 рази менша, ніж при 25°С? Вважати, що теплоємність не залежить від температури.

**9.47.** Знайдіть зміну ентропії при розширенні 4 г молекулярного водню, який при тиску 2 атм займав об'єм 30 л, до об'єму 100 літрів та нормального тиску.

**9.48.** Припустимо, що 1 моль ідеального газу займає половину ізольованої системи. Ми знаємо із досвіду, що в рівноважному стані газ займає весь об'єм. Розрахувати зміну кількості мікростанів системи при переході у рівноважний стан, а також зміну ентропії системи.

**9.49.** У двох посудинах, що сполучаються та розділені перегородкою, знаходяться 1 моль азоту та 2 молі кисню. Перегородку виймають і гази змішуються. Розрахувати зміну ентропії $\Delta S$, яка відбувається у процесі перемішування, якщо тиски однакові, а об'єми різні: $V_{\mathrm{N}_2} = 1$ л, $V_{\mathrm{O}_2} = 2$ л. Кінцевий тиск у системі дорівнює вихідному тиску газів.

**9.50.** Розрахувати ентропію змішування 1,5 моля аргону із 2,6 моля азоту при сталих тиску та температурі.

**9.51.** Є дві посудини з ємностями 3 м$^3$ кожна. В одній із них знаходиться 28 кг азоту, а в іншій 32 кг кисню. Температури газів в обох посудинах однакові. Знайти зміну ентропії при взаємній дифузії газів у результаті контакту цих посудин. Вважати кисень та азот ідеальними газами.

**9.52.** При сталій температурі 300 К та тиску 1 атм кожний змішано 2 л гелію та 2 л аргону. Після ізотермічного змішування отримана газова суміш нагріта до температури 600 К при сталому об'ємі. Знайти загальне зростання ентропії, вважаючи, що теплоємність газів $C_V$ не залежить від температури і дорівнює 3 кал$\cdot$моль$^{-1}\cdot$К$^{-1}$. Врахувати, що 1 калорія відповідає 4,187 Джоулям.

**9.53.** У деякому процесі температура речовини залежить від її ентропії $S$ за законом $T = aS^n$, де $a$ і $n$ − сталі. Знайти теплоємність $C$ речовини як функцію $S$. За якої умови $C < 0$?

# 10. Теплові явища. Рівняння теплового балансу

## Основні формули

- Кількість теплоти, необхідна для нагрівання, або яка виділяється при охолодженні тіла масою $m$:

$$Q = cm\Delta t, \tag{10.1}$$

де $c$ — питома теплоємність речовини (Дж/(кг·К)); $\Delta t = |t_2 - t_1|$ — зміна температури тіла (К або °С).

- Кількість теплоти, необхідна для плавлення, або яка виділяється при твердненні тіла масою $m$:

$$Q = \lambda m, \tag{10.2}$$

де $\lambda$ — питома теплота плавлення (або тверднення) (Дж/кг).

- Кількість теплоти, необхідна для випаровування рідини масою $m$, або яка виділяється при її конденсації:

$$Q = rm, \tag{10.3}$$

де $r$ — питома теплота пароутворення (або конденсації) (Дж/кг).

- Кількість теплоти, що виділяється при згорянні палива масою $m$:

$$Q = qm, \tag{10.4}$$

де $q$ — питома теплота згоряння (Дж/кг).

- Рівняння теплового балансу

$$Q_{\text{від}} = Q_{\text{отр}} + Q_{\text{втрат}}, \tag{10.5}$$

де $Q_{\text{від}}$ — кількість теплоти, що віддає одна система тіл; $Q_{\text{отр}}$ — кількість теплоти, яку отримує інша система тіл; $Q_{\text{втрат}}$ — кількість теплоти, яка втрачається при передачі та йде у зовнішнє середовище.

- Рівняння теплового балансу, виражене через ККД:

$$\eta Q_{\text{від}} = Q_{\text{отр}}, \tag{10.6}$$

де $\eta$ – ККД для процесу теплообміну (безрозмірна величина, $\eta < 1$).

## Приклади розв'язання задач

**10.1.** Скільки потрібно витратити теплоти, щоб 2 кг льоду, взятого за температури $-35^\circ$C, розплавити, а отриману воду випарувати? Зобразити графік залежності температури від отриманої кількості теплоти у процесі, що розглядається.

| |
|---|
| $m = 2$ кг, |
| $t_1 = -35^\circ$C, |
| $t_2 = 0^\circ$C, |
| $t_3 = 100^\circ$C, |
| $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·К), |
| $\lambda = 330 \cdot 10^3$ Дж/кг, |
| $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·К), |
| $r = 2300 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| $Q$–? |

Загальну кількість теплоти можна подати такою сумою:

$$Q = Q_{\text{н.л}} + Q_{\text{пл.л}} + Q_{\text{н.в}} + Q_{\text{пар}},$$

де $Q_{\text{н.л}}$ – теплота, необхідна для нагрівання льоду від початкової температури $t_1 = -35^\circ$C до температури плавлення $t_2 = 0^\circ$C; $Q_{\text{пл.л}}$ – теплота, необхідна для плавлення льоду; $Q_{\text{н.в}}$ – теплота, необхідна для нагрівання отриманої води від $t_2 = 0^\circ$C до температури кипіння (пароутворення) $t_3 = 100^\circ$C; $Q_{\text{пар}}$ – кількість теплоти, яку потрібно надати системі для повного випаровування води.

Розрахуємо ці значення, використовуючи формули (10.1)–(10.3):

$$Q_{\text{н.л}} = c_{\text{л}} m (t_2 - t_1) = 2100 \cdot 2 \cdot (0 - (-35)) = 147 \text{ (кДж)};$$

$$Q_{\text{пл.л}} = \lambda m = 330 \cdot 10^3 \cdot 2 = 660 \text{ (кДж)};$$

$$Q_{\text{н.в}} = c_{\text{в}} m (t_3 - t_2) = 4200 \cdot 2 \cdot (100 - 0) = 840 \text{ (кДж)};$$

$$Q_{\text{пар}} = rm = 2300 \cdot 10^3 \cdot 2 = 4600 \text{ (кДж)};$$

$$Q = 147 + 660 + 840 + 4600 = 6247 \text{ (кДж)}.$$

На рис. 10.1 показаний графік, де враховано те, що процеси плавлення льоду та пароутворення проходять при незмінній температурі.

## 10. Теплові явища. Рівняння теплового балансу

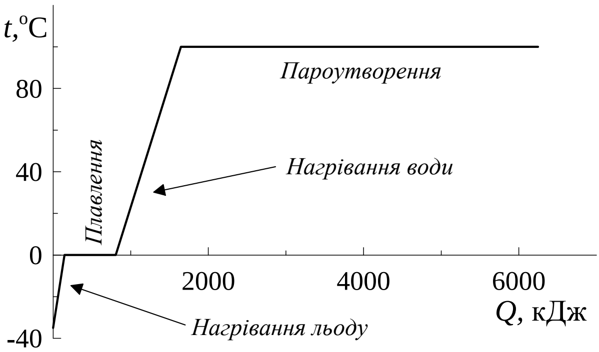



**Рисунок 10.1**

**10.2.** У латунний калориметр масою 128 г, що містить 240 г води при температурі 8,4°С, занурено металеве тіло масою 192 г, нагріте до 100°С. У процесі теплообміну в калориметрі встановлюється кінцева температура 21,5°С. Визначити питому теплоємність металевого тіла.

$m_{\text{к}} = 0,128$ кг,
$m_{\text{в}} = 0,24$ кг,
$t_{\text{в}} = t_{\text{к}} = 8,4^{\circ}$С,
$m_{\text{т}} = 0,192$ кг,
$t_{\text{т}} = 100^{\circ}$С,
$\theta = 21,5^{\circ}$С,
$c_{\text{лат}} = 380$ Дж/(кг·К),
$c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·К)

$c_{\text{т}}$—?

Спочатку вода та калориметр знаходяться в рівноважному термодинамічному стані, отже $t_{\text{в}} = t_{\text{к}}$. При зануренні у калориметр металевого тіла в процесі теплообміну вода та калориметр будуть нагріватися, а тіло охолоджуватися, аж доки не встановиться загальна температура $\theta$. Оскільки втрат тепла немає ($Q_{\text{втрат}} = 0$), співвідношення (10.5) набирає вигляду

$$Q_{\text{від}} = Q_{\text{отр}},$$

де $Q_{\text{отр}}$ – це кількість теплоти, що отримана водою та калориметром у процесі теплообміну з металевим тілом:

$$Q_{\text{отр}} = Q_{\text{в}} + Q_{\text{к}}.$$

Запишемо вираз для $Q_{\text{отр}}$, використовуючи формулу (10.1):

$$Q_{\text{отр}} = c_{\text{в}} m_{\text{в}}(\theta - t_{\text{в}}) + c_{\text{лат}} m_{\text{к}}(\theta - t_{\text{к}}) = (c_{\text{в}} m_{\text{в}} + c_{\text{лат}} m_{\text{к}})(\theta - t_{\text{в}}).$$

Кількість теплоти $Q_{\text{від}}$ – це теплота, яку віддає нагріте металеве тіло:

$$Q_{\text{від}} = c_{\text{т}} m_{\text{т}} (t_{\text{т}} - \theta).$$

Із врахуванням двох останніх співвідношень рівняння теплового балансу набирає вигляду

$$c_{\text{т}} m_{\text{т}} (t_{\text{т}} - \theta) = (c_{\text{в}} m_{\text{в}} + c_{\text{лат}} m_{\text{к}})(\theta - t_{\text{в}}),$$

з якого легко отримати вираз для визначення шуканої теплоємності:

$$c_{\text{т}} = \frac{(c_{\text{в}} m_{\text{в}} + c_{\text{лат}} m_{\text{к}})(\theta - t_{\text{в}})}{m_{\text{т}}(t_{\text{т}} - \theta)}.$$

Розрахуємо це значення:

$$c_{\text{т}} = \frac{(4200 \cdot 0,24 + 380 \cdot 0,128) \cdot (21,5 - 8,4)}{0,192 \cdot (100 - 21,5)} = 918,39 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right).$$

**10.3.** Яка кількість води перетвориться у пару, якщо в посудину, що містить 1 літр води при температурі 20°С, залити 10 кг розплавленого свинцю при температурі плавлення? Посудину зроблено з латуні, її маса 0,5 кг. Втратами тепла знехтувати.

$V = 10^{-3}$ м$^3$,
$t_{\text{в}} = t_{\text{лат}} = 20^\circ$С,
$m_{\text{св}} = 10$ кг,
$m_{\text{лат}} = 0,5$ кг,
$c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·К),
$\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м$^3$,
$c_{\text{лат}} = 380$ Дж/(кг·К),
$r_{\text{в}} = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг,
$\lambda_{\text{св}} = 2,5 \cdot 10^4$ Дж/кг,
$t_{\text{пл}} = 327^\circ$С,
$c_{\text{св}} = 130$ Дж/(кг·К)

$m_{\text{п}}$–?

В умові задачі зазначено, що тільки частина води перетворюється у пару. Це можливо лише в одному випадку: теплової енергії, що вода отримує від свинцю достатньо для надання їй температури кипіння 100°С та пароутворення частини води. Після цього в системі встановлюється стан рівноваги, отже кінцева температура свинцю, води та пари 100°С.

Оскільки втрат теплоти немає ($Q_{\text{втрат}} = 0$), справедливим є співвідношення (10.5):

$$Q_{\text{від}} = Q_{\text{отр}},$$

де $Q_{\text{отр}}$ – це кількість теплоти, отримана водою та калориметром у процесі їх нагрівання до 100°С, та теплота, що витрачається на процес пароутворення:

$$Q_{\text{отр}} = Q_{\text{в}} + Q_{\text{лат}} + Q_{\text{п}}.$$

## 10. Теплові явища. Рівняння теплового балансу

Відповідно до формул (10.1), (10.3) можна записати таке:

$$Q_{\text{в}} = c_{\text{в}} m_{\text{в}}(100 - t_{\text{в}}) = c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V (100 - t_{\text{в}});$$

$$Q_{\text{лат}} = c_{\text{лат}} m_{\text{лат}}(100 - t_{\text{лат}});$$

$$Q_{\text{п}} = r_{\text{в}} m_{\text{п}}.$$

Із урахуванням того, що $t_{\text{в}} = t_{\text{лат}}$, одержимо

$$Q_{\text{отр}} = c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V (100 - t_{\text{в}}) + c_{\text{лат}} m_{\text{лат}}(100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}} m_{\text{п}} =$$

$$= (c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V + c_{\text{лат}} m_{\text{лат}})(100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}} m_{\text{п}}.$$

Кількість теплоти, що виділяється свинцем, оскільки він залитий у воду при температурі плавлення, дорівнює

$$Q_{\text{від}} = Q_{\text{тв}} + Q_{\text{охол}},$$

де $Q_{\text{тв}}$ – це теплота, яка виділяється при твердненні свинцю і може бути розрахована за формулою (10.2):

$$Q_{\text{тв}} = \lambda_{\text{св}} m_{\text{св}},$$

а теплота $Q_{\text{охол}}$ – це та, яка виділяється після тверднення свинцю при його охолодженні від температури плавлення $t_{\text{пл}}$ до 100°C. Її розрахуємо за формулою (10.1):

$$Q_{\text{охол}} = c_{\text{св}} m_{\text{св}}(t_{\text{пл}} - 100).$$

Тепер можна знайти загальну теплоту, яку свинець передає воді:

$$Q_{\text{від}} = \lambda_{\text{св}} m_{\text{св}} + c_{\text{св}} m_{\text{св}}(t_{\text{пл}} - 100).$$

Із урахуванням вищенаведеного рівняння теплового балансу набирає вигляду

$$(c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V + c_{\text{лат}} m_{\text{лат}})(100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}} m_{\text{п}} = \lambda_{\text{св}} m_{\text{св}} + c_{\text{св}} m_{\text{св}}(t_{\text{пл}} - 100),$$

звідки легко виразити шукану масу пари $m_{\text{п}}$:

$$m_{\text{п}} = \frac{\lambda_{\text{св}} m_{\text{св}} + c_{\text{св}} m_{\text{св}}(t_{\text{пл}} - 100) - (c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V + c_{\text{лат}} m_{\text{лат}})(100 - t_{\text{в}})}{r_{\text{в}}},$$

або після підстановки числових значень

$$m_{\text{п}} = \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot 10 + 130 \cdot 10 \cdot (327 - 100)}{2,3 \cdot 10^6} -$$

$$-\frac{(4200 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} + 380 \cdot 0,5) \cdot (100 - 20)}{2,3 \cdot 10^6} = 0,0843 \text{ (кг)}.$$

**10.4.** Сталевий уламок, що падає з висоти 500 м, має біля поверхні Землі швидкість 50 м/с. На скільки градусів нагрівся уламок, якщо вважати, що 70% роботи сили опору повітря пішло на нагрівання уламка?

| |
|---|
| $h = 500$ м, |
| $v = 50$ м/с, |
| $\eta = 0,7$, |
| $c = 460$ Дж/(кг·К), |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $\Delta t$–? |

Оскільки лише частина роботи сили опору повітря пішло на нагрівання уламка, використовуємо співвідношення (10.6):

$$\eta A' = Q,$$

де $A'$ – робота сили опору повітря, у нашому випадку це джерело тепла. Кількість теплоти $Q$, яка піде на нагрівання уламка, можна розрахувати за формулою (10.1):

$$Q = cm\Delta t,$$

де $m$ – маса уламка; $c$ – питома теплоємність сталі. Робота сили опору повітря може бути розрахована як зміна механічної енергії уламка:

$$A' = W_1 - W_2,$$

де $W_1$ – енергія уламка на висоті $h = 500$ м; $W_2$ – енергія при $h = 0$. Під час руху уламка потенціальна енергія перетворюється у кінетичну, таким чином,

$$A' = mgh - \frac{mv^2}{2}.$$

Підставимо $A'$ та $Q$ у рівняння теплового балансу і матимемо

$$\eta\left(mgh - \frac{mv^2}{2}\right) = cm\Delta t, \quad \eta\left(gh - \frac{v^2}{2}\right) = c\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\eta}{c}\left(gh - \frac{v^2}{2}\right).$$

Відмітимо, що розв'язок задачі не залежить від маси уламка $m$, тобто незалежно від маси уламка він нагріється на одну і ту саму величину $\Delta t$. Розрахуємо це значення:

$$\Delta t = \frac{\eta}{c}\left(gh - \frac{v^2}{2}\right) = \frac{0,7}{460} \cdot \left(9,8 \cdot 500 - \frac{50^2}{2}\right) = 5,55\ ^\circ\text{C}.$$

**10.5.** Кулька зі свинцю підвішена на нитці довжиною 1 м. Нитку відвели від вертикалі на кут 60° і відпустили. В найнижчому положенні кулька вдарилася об вертикальну стінку та відхилилася на кут 30°. На скільки градусів нагрілася кулька, якщо 80% механічної енергії пішло на її нагрівання?

| |
|---|
| $l = 1$ м, |
| $\alpha_1 = 60°$, |
| $\alpha_2 = 30°$, |
| $\eta = 0,8$, |
| $c = 130$ Дж/(кг·К), |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $\Delta t$–? |

Оскільки частина механічної енергії кульки під час удару об стінку переходить у внутрішню, для розв'язання задачі використаємо співвідношення (10.6):

$$\eta A' = Q,$$

де кількість теплоти, яка пішла на нагрівання кульки (10.1):

$$Q = cm\Delta t.$$

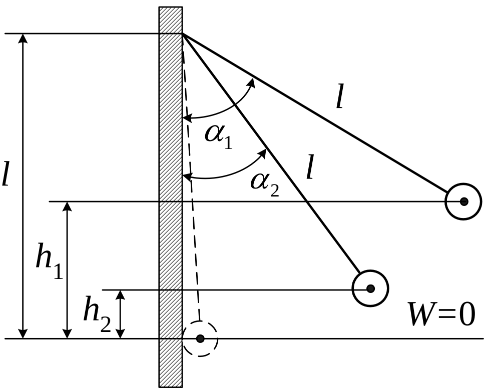



**Рисунок 10.2**

Роботу пружних сил та сил опору в момент удару можна розрахувати як зміну механічної енергії кульки:

$$A' = W_1 - W_2,$$

де згідно із рис. 10.2 відносно нульового рівня енергії кульки до удару $W_1$ та після удару $W_2$ дорівнюють

$$W_1 = mgh_1, \quad W_2 = mgh_2.$$

Із рисунка легко бачити, що

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha).$$

Згідно з останнім виразом потенціальні енергії кульки

$$W_1 = mgl(1 - \cos\alpha_1), \quad W_2 = mgl(1 - \cos\alpha_2).$$

Знайдемо роботу:

$$A' = W_1 - W_2 = mgl(1 - \cos\alpha_1) - mgl(1 - \cos\alpha_2) =$$
$$= mgl - mgl\cos\alpha_1 - mgl + mgl\cos\alpha_2 =$$
$$= -mgl\cos\alpha_1 + mgl\cos\alpha_2 =$$
$$= mgl(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1).$$

Підставимо $Q$ та $A'$ в основне рівняння і знайдемо $\Delta t$:

$$\eta mgl(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = cm\Delta t, \quad \eta gl(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = c\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\eta gl(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{c}.$$

Як і в попередній задачі, відповідь не залежить від маси кульки $m$. Розрахуємо значення $\Delta t$ за отриманою формулою:

$$\Delta t = \frac{0,8 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot (\cos 30^\circ - \cos 60^\circ)}{130} = 0,0221\ ^\circ\text{C}.$$

**10.6.** Скільки потрібно витратити газу, щоб повністю випарувати 2 л води, узятої при температурі 15°C, якщо питома теплота згоряння газу $4 \cdot 10^7$ Дж/кг, ККД газової печі 50%, а теплоємність посудини, в якій знаходиться вода, 500 Дж/К.

$V_в = 2 \cdot 10^{-3}$ м$^3$,
$t_в = 15^\circ$C,
$q = 4 \cdot 10^7$ Дж/кг,
$\eta = 0,5$,
$(cm)_{пос} = 500$ Дж/К,
$\rho_в = 10^3$ кг/м$^3$,
$r_в = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг,
$c_в = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)

$m_г$–?

Вода та посудина отримують тепло, що виділяється при згорянні палива. Оскільки 50% тепла при його передачі втрачається, використовуємо співвідношення (10.6):

$$\eta Q_{від} = Q_{отр},$$

де кількість теплоти $Q_{від}$ (10.4) виділяється при згорянні газу:

$$Q_{\text{від}} = qm_{\text{г}},$$

а $Q_{\text{отр}}$ – кількість теплоти, що витрачається на нагрівання посудини та нагрівання води до температури пароутворення 100°С, а також на повне пароутворення води. Згідно із формулами (10.1), (10.3) ця величина матиме три доданки:

$$Q_{\text{отр}} = (cm)_{\text{пос}}(100 - t_{\text{в}}) + c_{\text{в}}m_{\text{в}}(100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}}m_{\text{в}} =$$

$$= (cm)_{\text{пос}}(100 - t_{\text{в}}) + c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}}(100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}} =$$

$$= \left[(cm)_{\text{пос}} + c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}}\right](100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}}.$$

Після підстановки цих величин в основне рівняння матимемо

$$\eta qm_{\text{г}} = \left[(cm)_{\text{пос}} + c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}}\right](100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}},$$

звідки легко виразити масу газу:

$$m_{\text{г}} = \frac{\left[(cm)_{\text{пос}} + c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}}\right](100 - t_{\text{в}}) + r_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V_{\text{в}}}{\eta q}$$

або після розрахунків

$$m_{\text{г}} = \frac{\left[500 + 4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\right] \cdot (100 - 15)}{0,5 \cdot 4 \cdot 10^7} +$$

$$+ \frac{2,3 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 4 \cdot 10^7} = 0,263\ (\text{кг}).$$

**10.7.** На скільки кілометрів шляху вистачить 30 л бензину автомобілю, який рухається зі швидкістю 54 км/год? Потужність, що розвивається двигуном автомобіля, дорівнює 35 кВт, а його ККД становить 25%.

| |
|---|
| $V = 3 \cdot 10^{-2}$ м$^3$, |
| $v = 54$ км/год$= 15$ м/с, |
| $N = 3,5 \cdot 10^4$ Вт, |
| $\eta = 0,25$, |
| $\rho = 700$ кг/м$^3$, |
| $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг |
| $s$–? |

Частина внутрішньої енергії $Q$, яка виділяється при згорянні палива, переходить у роботу з переміщення автомобіля $A$. Згідно із цим використаємо співвідношення (10.6):

$$\eta Q = A,$$

де $Q$ – це кількість теплоти, що виділяється при згорянні бензину, яка може бути визначена із співвідношення (10.4):

$$Q = qm = q\rho V.$$

Робота з переміщення автомобіля дорівнює

$$A = Nt,$$

де $t$ – час руху; $N$ – потужність. Час руху знайдемо через швидкість $v$ та переміщення $s$:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Комбінуючи останні дві формули, маємо

$$A = \frac{Ns}{v}.$$

Підставимо отримані вирази для визначення роботи та кількості теплоти в основне рівняння:

$$\eta q \rho V = \frac{Ns}{v},$$

звідки знайдемо шуканий шлях $s$:

$$s = \frac{\eta q \rho V v}{N}$$

або після розрахунку

$$s = \frac{0,25 \cdot 4,6 \cdot 10^7 \cdot 700 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 15}{3,5 \cdot 10^4} = 103,5 \cdot 10^3 \text{ (м)}.$$

**10.8.** У циліндрі двигуна внутрішнього згоряння під час роботи утворюються гази, температура яких 1000 К. Температура відпрацьованого газу становить 250 К. Двигун за годину витрачає 30 кг палива, питома теплота згоряння якого 40 МДж/кг. Яку максимальну корисну потужність може розвивати цей двигун?

$T_1 = 1000$ К,
$T_2 = 250$ К,
$m = 30$ кг,
$t = 3600$ с,
$q = 4 \cdot 10^7$ Дж/кг

$N$–?

За рахунок частини теплової енергії, що виділяється при згорянні палива, двигун здійснює механічну роботу. Тому використовуємо співвідношення (10.6) у вигляді

$$\eta Q = A,$$

де $Q$ – теплота, що виділяється при згорянні палива; $A$ – механічна робота двигуна. Кількість теплоти $Q$ будемо визначати за формулою (10.4):

$$Q = qm.$$

За означенням робота – це потужність, помножена на час:

$$A = Nt.$$

Максимальне значення ККД знайдемо як ККД теплової машини (якою і є двигун внутрішнього згоряння), яка працює за циклом Карно (9.2):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Після комбінування всіх чотирьох записаних виразів матимемо

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} qm = Nt, \quad N = \frac{(T_1 - T_2)qm}{T_1 t}.$$

Ми отримали кінцевий вираз, проведемо розрахунки:

$$N = \frac{(T_1 - T_2)qm}{T_1 t} = \frac{(1000 - 250) \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 30}{1000 \cdot 3600} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ (Вт)}.$$

**10.9.** Із якою швидкістю повинна летіти свинцева куля, щоб при ударі об перешкоду вона повністю розплавилася? Початкова температура кулі 27°C. Припускається, що 80% енергії її руху перетворюється при ударі в теплоту.

$t = 27°\text{C}$,
$t_{пл} = 327°\text{C}$,
$c = 130$ Дж/(кг·К),
$\lambda = 25 \cdot 10^3$ Дж/кг,
$\eta = 0,8$

$v$–?

Згідно із виразом (10.6) маємо

$$\eta E = Q,$$

де $Q$ – теплота, що передається кулі; $E$ – кінетична енергія кулі до удару. Оскільки після удару куля повинна розплавитися, кількість теплоти $Q$ матиме два доданки:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

де $Q_1$ – теплота, необхідна для нагрівання кулі від її початкової температури $t$ до температури плавлення свинцю $t_{пл}$, а $Q_2$ – теплота, що необхідна для плавлення кулі. Відповідно до (10.1), (10.2) отримаємо

$$Q = cm(t_{пл} - t) + \lambda m.$$

Кінетичну енергію розрахуємо звичайним чином:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Після підстановки $Q$ та $E$ в перше рівняння матимемо

$$\eta\frac{mv^2}{2} = cm(t_{\text{пл}} - t) + \lambda m, \quad \eta\frac{v^2}{2} = c(t_{\text{пл}} - t) + \lambda,$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left[c(t_{\text{пл}} - t) + \lambda\right]}{\eta}},$$

або після обчислень

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot [130 \cdot (327 - 27) + 25 \cdot 10^3]}{0,8}} = 400 \, \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

**10.10.** У латунному калориметрі масою 84 г знаходиться 10 г льоду при температурі $-15^{\circ}$C. У калориметр заливають 50 г розплавленого свинцю при температурі плавлення. Що буде знаходитися в калориметрі та якою буде температура при встановленні теплової рівноваги?

$m_{\text{лат}} = 0,084$ кг,
$m_{\text{л}} = 0,01$ кг,
$t_{\text{л}} = t_{\text{лат}} = -15^{\circ}$C,
$m_{\text{св}} = 0,05$ кг,
$t_{\text{пл.св}} = 327^{\circ}$C,
$c_{\text{лат}} = 380$ Дж/(кг·К),
$c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·К),
$\lambda_{\text{л}} = 330 \cdot 10^3$ Дж/кг,
$\lambda_{\text{св}} = 25 \cdot 10^3$ Дж/кг,
$c_{\text{св}} = 130$ Дж/(кг·К),
$c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·К),
$r_{\text{в}} = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг

$\theta$–?

Задачі такого типу неможливо розв'язувати, складаючи рівняння теплового балансу, оскільки невідомо, що буде знаходитись у калориметрі в результаті встановлення теплової рівноваги. В нашому випадку можливі такі ситуації: а) лід та свинець; б) лід, вода та свинець; в) вода та свинець; г) лише свинець (коли вся вода випаровується).

Розв'язувати таку задачу потрібно "по діях", використовуючи проміжні обчислення.

Спочатку розрахуємо кількість теплоти, яка виділяється при повному твердненні свинцю та подальшому його охолодженні до температури плавлення льоду $0^{\circ}$C:

$$Q_1 = Q_{\text{тв.св}} + Q_{\text{охол.св}} = \lambda_{\text{св}} m_{\text{св}} + c_{\text{св}} m_{\text{св}}(t_{\text{пл.св}} - 0) =$$

$$= 25 \cdot 10^3 \cdot 0,05 + 130 \cdot 0,05 \cdot (327 - 0) = 3375,5 \text{ (Дж)}.$$

Кількість теплоти, що необхідна для нагрівання латунного калориметра з льодом до температури $0^{\circ}$C, дорівнює

$$Q_2 = Q_{\text{нагр.лат}} + Q_{\text{нагр.л}} = c_{\text{лат}} m_{\text{лат}}(0 - t_{\text{лат}}) + c_{\text{л}} m_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) =$$

$$= 380 \cdot 0,084 \cdot (0 + 15) + 2100 \cdot 0,01 \cdot (0 + 15) = 793,8 \text{ (Дж)}.$$

Ми отримали $Q_1 > Q_2$, тобто кількість теплоти, що виділяється свинцем при охолодженні до температури 0°C, більша від кількості теплоти, що необхідна для нагрівання калориметра з льодом до тієї самої температури 0°C. Таким чином, кількість теплоти $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ піде на процес плавлення льоду:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = 3375,5 - 793,8 = 2581,7 \text{ (Дж)}.$$

Визначимо, яка кількість теплоти необхідна для плавлення всього льоду в калориметрі:

$$Q_{\text{пл.л}} = \lambda_{\text{л}} m_{\text{л}} = 330 \cdot 10^3 \cdot 0,01 = 3300 \text{ (Дж)}.$$

Оскільки кількість теплоти, що необхідна для плавлення льоду $Q_{\text{пл.л}}$ більша, ніж $\Delta Q$, розтане не весь лід. Підрахуємо, яка маса льоду перетвориться у воду:

$$\Delta Q = \lambda_{\text{л}} m_{\text{в}}, \quad m_{\text{в}} = \frac{\Delta Q}{\lambda_{\text{л}}} = \frac{2581,7}{330 \cdot 10^3} = 0,0078 \text{ (кг)} = 7,8 \text{ (г)}.$$

У калориметрі при цьому залишиться твердий лід масою

$$m = m_{\text{л}} - m_{\text{в}} = 0,01 - 0,0078 = 0,0022 \text{ (кг)} = 2,2 \text{ (г)}.$$

Таким чином, після встановлення теплової рівноваги в калориметрі буде знаходитися твердий свинець, 7,8 г рідкої води та 2,2 г твердого льоду при температурі $\theta = 0$°C.

## Задачі для самостійного розв'язування

**10.11.** Скільки потрібно витратити теплоти, щоб 5 кг льоду, узятого при температурі $-20^\circ C$, розплавити, а отриману воду нагріти до $+15^\circ C$?

**10.12.** Пластину із масою 300 г, нагріту до $85^\circ C$, занурюють в алюмінієвий калориметр, що має масу 30 г та містить 250 г води при $22^\circ C$. Кінцева температура в калориметрі становить $28^\circ C$. Знайти питому теплоємність речовини пластини.

**10.13.** Водяну пару при 373 K ввели до алюмінієвого калориметра масою 50 г, який містив 0,25 кг води при 282 K. Після цього в калориметрі опинилося 0,259 кг води із температурою 303 K. Визначити питому теплоту пароутворення води.

**10.14.** Змішали 39 л води при температурі $20^\circ C$ і 21 л води при $60^\circ C$. Визначити температуру суміші.

**10.15.** Для отримання 300 л води при $40^\circ C$ необхідно змішати воду, температура якої $20^\circ C$, із водою, що має температуру $100^\circ C$. Скільки літрів тієї та іншої води потрібно взяти?

**10.16.** Для того щоб охолодити 2 л води, узятої при $80^\circ C$, до $60^\circ C$, в неї додають холодну воду при $10^\circ C$. Яку кількість холодної води потрібно додати?

**10.17.** Знайти температуру, що встановиться, якщо в латунний калориметр масою 150 г, що містить 200 г води при $12^\circ C$, занурити залізну гирю масою 250 г, яка нагріта до $100^\circ C$.

**10.18.** У залізному калориметрі масою 0,1 кг знаходиться 0,5 кг води при температурі $15^\circ C$. У калориметр кидають свинець та алюміній загальною масою 0,15 кг, що мають температуру $100^\circ C$. У результаті температура води підвищується до $17^\circ C$. Визначити маси свинцю та алюмінію.

**10.19.** Щоб охолодити 5 л води, узятої за температури $20^\circ C$, до $8^\circ C$, у воду кидають шматки льоду за температури $0^\circ C$. Яка кількість льоду потрібна для охолодження води?

**10.20.** До якої температури потрібно нагріти алюмінієвий куб, щоб він, будучи покладеним на лід, повністю в нього занурився? Температура льоду 0°C.

**10.21.** Розжарений алюмінієвий куб, покладений на лід, температура якого $-20^\circ$C, повністю в нього занурився. Визначити початкову температуру куба.

**10.22.** Кульку із заліза поклали на лід, температура якого 0°C. До якої температури потрібно нагріти кульку, щоб вона занурилася в лід наполовину? Вважати, що на плавлення льоду піде 50% теплоти, яку віддасть кулька.

**10.23.** Залізна кулька із радіусом $r$ нагріта до температури $t$ та покладена на лід. На яку глибину зануриться кулька в лід? Температура навколишнього середовища 0°C.

**10.24.** Яка встановиться температура води в латунному калориметрі з масою 160 г, що містить 400 г води при 25°C, після того як розплавиться поміщений у воду шматок льоду масою 50 г, узятий за температури 0°C?

**10.25.** На скільки градусів підвищилася температура 10 л води, узятої при 12°C, якщо в неї було залито 5 кг розплавленого свинцю за температури плавлення?

**10.26.** Яка кількість води перетвориться у пару, якщо в посудину, що містить 1 л води при 40°C, залити 10 кг розплавленого свинцю при температурі плавлення? Посудину виготовлено з латуні, її маса 0,5 кг. У навколишнє середовище виділяється 20% теплоти, що віддається свинцем.

**10.27.** Шматок свинцю масою 1 кг розплавиться наполовину при наданні йому кількості теплоти $54,5 \cdot 10^3$ Дж. Яка початкова температура свинцю?

**10.28.** У металеву посудину налито 200 г води температурою 10°C. У воду кинули нагріту до 200°C сталеву кульку з масою 100 г. До якої температури нагріється вода, якщо 5% теплоти, що віддається кулькою, піде на нагрівання посудини, а 1% води перетвориться у пару?

**10.29.** Лід масою 20 кг при температурі $-20^\circ$C занурений у воду, маса якої 20 кг, а температура 70°C. Визначити склад суміші та її температуру після встановлення теплової рівноваги.

**10.30.** У чашці знаходиться 500 г льоду при 0°С. В неї наливають 200 г води при 80°С. Яка встановиться температура і що буде знаходитися у чашці? Втратами тепла знехтувати.

**10.31.** У калориметр налито 2 кг води, що має температуру 5°С та покладено шматок льоду масою 5 кг при температурі –40°С. Визначити температуру та склад суміші, що буде знаходитися у калориметрі при тепловій рівновазі.

**10.32.** У латунному калориметрі масою 100 г знаходиться 5 кг льоду при температурі –10°С. В калориметр заливають 30 г розплавленого свинцю при температурі плавлення. Що буде знаходитися в калориметрі після встановлення рівноважної температури? Втратами тепла знехтувати.

**10.33.** У калориметр, що містить 250 г води за температури 15°С, кидають 20 г мокрого снігу. Температура у калориметрі знизилася на 5°С. Скільки води утворилося при таненні снігу?

**10.34.** Пару масою 1 кг при 100°С впускають у холодну воду масою 12 кг. Температура води після повної конденсації пари піднялася до 70°С. Знайти початкову температуру води.

**10.35.** Є два однакових калориметри, в одному з них 0,1 кг води при 45°С, в іншому 0,5 кг води при 24°С. В них залили однакові кількості ртуті. Після встановлення теплової рівноваги в обох калориметрах їх температура однакова і становить 17°С. Визначити теплоємність калориметрів.

**10.36.** В алюмінієвій каструлі масою 0,5 кг знаходиться 0,5 л води та 200 г льоду при 0°С. Вода нагрівається на плиті з потужністю 600 Вт за час 30 хвилин. Скільки води випаре, якщо теплова віддача плити становить 50%?

**10.37.** Вода подається у радіатори водяного опалення при температурі 341 К, а виходить з них при 313 К. До якої температури нагріється повітря в кімнаті з об'ємом 90 м$^3$, якщо початкова температура повітря в кімнаті 279 К, а крізь радіатори пройде 40 л води? Втрати тепла становлять 50%. Атмосферний тиск нормальний, питома теплоємність повітря 1 кДж/(кг·К).

**10.38.** Скільки розплавиться льоду, взятого при температурі 0°С, якщо йому надати таку саму кількість теплоти, яка виділяється при конденсації 4 кг водяної пари, узятої при 100°С та нормальному тиску.

**10.39.** Змішали 60 кг води при 90°С та 150 кг води при 23°С. При цьому 15% тепла пішло на нагрівання навколишнього середовища. Визначити кінцеву температуру води.

**10.40.** У якому співвідношенні потрібно узяти маси $m_1$ та $m_2$ двох рідин з питомими теплоємностями $c_1$ і $c_2$, початковими температурами $T_1$ і $T_2$ $(T_1 > T_2)$ для того, щоб температура після їх змішування дорівнювала $T_0$. Втрати тепла 30%.

**10.41.** У склянку зі скла масою 120 г, що має температуру 20°С, налили 200 г води при температурі 100°С. Через 5 хвилин температура склянки стала дорівнювати 40°С. Визначити, яку кількість теплоти в середньому система втрачала за 1 секунду.

**10.42.** Електрична лампа з потужністю 60 Вт занурена у прозорий калориметр, що містить 600 г води. За 5 хвилин вода нагрілася на 4°С. Яка частина енергії, що витрачається лампою, випускається калориметром назовні у вигляді тепла?

**10.43.** На скільки градусів нагрівається вода, падаючи з висоти 15 м, якщо 30% здійсненої при її падінні роботи витрачається на нагрівання?

**10.44.** З однакової висоти впали два тіла однакової маси, одне з них мідне, інше із заліза. Яке тіло нагріватиметься при ударі до вищої температури?

**10.45.** Молот масою 10 т падає з висоти 2,5 м на залізну болванку масою 200 кг. Скільки разів він повинен впасти, щоб температура болванки піднялася на 40°С? На нагрівання болванки витрачається 60% теплоти, що виділяється при ударах.

**10.46.** З якої висоти впала свинцева куля, якщо вона нагрілася при падінні на 2°С? Удар непружний, на нагрівання пішло 40% роботи сил опору, що діють при ударі об землю.

**10.47.** Сталева кулька падає з висоти 8,16 м на ідеально гладку горизонтальну поверхню та відскакує від неї на висоту 1 м. На скільки підвищиться температура кульки після удару, якщо на її нагрівання втрачається 70% енергії удару?

**10.48.** Залізний молот масою 1,2 кг під час роботи за 1,5 хвилини нагрівся на 20°C. Припускаючи, що у внутрішню енергію молота переходить 40% усієї його енергії, визначити виконану роботу та потужність, що при цьому розвивається.

**10.49.** Гиря зі свинцю падає на Землю. Швидкість при ударі становить 330 м/с. Визначити, яка частина гирі розплавиться, якщо уся теплота, що виділяється при ударі, поглинається гирею. Температура гирі перед ударом 27°C.

**10.50.** Свинцева куля пробиває дерев'яну стінку, причому швидкість кулі в момент удару об стінку 400 м/с, а у момент вильоту 100 м/с. Яка частина кулі розплавилася, якщо вважати, що на її нагрівання витрачається 60% втраченої механічної енергії? Температура кулі у момент удару 50°C.

**10.51.** Санки масою 6 кг скочуються з гори, яка становить із горизонтом кут 30°. Проїхавши по схилу гори шлях 50 м, санки розвивають швидкість 4,5 м/с. Визначити кількість теплоти, що виділяється під час тертя полозів об сніг.

**10.52.** Яку масу повинні мати залізні гальма, щоб при повній зупинці вагона від швидкості 36 км/год вони нагрівалися не більше ніж на 100 К? Маса вагона 10 т.

**10.53.** Багаторазове перегинання дроту з алюмінію масою 2 г нагріває його на 40 К. Яка була здійснена робота, якщо тільки 30% її пішло на нагрівання дроту?

**10.54.** З якої висоти повинен падати град (при 0°C), щоб при ударі об землю розтанути? Опір повітря не враховувати.

**10.55.** З якої висоти повинні падати дощові краплі при 20°C, щоб при ударі об землю вони випарувалися? Опір повітря не враховувати.

**10.56.** Грунт при 0°C вкритий шаром снігу із товщиною 10 см та густиною 500 кг/м$^3$. Який шар дощової води при 4°C повністю розплавить сніг?

**10.57.** Гусеничний трактор розвиває номінальну потужність 60 кВт та при цьому витрачає в середньому 18 кг дизельного палива за годину. Знайдіть ККД його двигуна.

**10.58.** Яку потужність розвиває встановлений на велосипеді двигун, якщо при швидкості 25 км/год витрата бензину становить 1,7 л на 100 км шляху, а ККД двигуна 20%?

**10.59.** Скільки бензину потрібно, щоб проїхати 300 км, якщо маса машини дорівнює 5 т, ККД двигуна 22%, а коефіцієнт тертя під час руху по дорозі $\mu = 0,05$? Знайдіть силу тяги двигуна та потужність при швидкості 108 км/год.

**10.60.** На спиртівці нагріли 400 г води від 16°C до 71°C. При цьому спалили 10 г спирту. Знайдіть ККД установки.

**10.61.** У примусі з ККД 40% кожну хвилину згорає 3 г гасу. Скільки часу потрібно нагрівати на ньому 1,5 л води від 10°C до температури кипіння?

**10.62.** Скільки було витрачено гасу в примусі, ККД якого становить 32%, якщо 4 л води були нагріті від 10°C до 100°C та при цьому 3% води перетворилося у пару?

**10.63.** На електричній плиті з потужністю 600 Вт та ККД 45% нагрілося 1,5 л води від 10°C до температури кипіння та 5% води перетворилося у пару. Як довго тривало нагрівання?

**10.64.** Потрібно розплавити 10 т чавуну, який має температуру 25°C. Скільки для цього потрібно спалити кам'яного вугілля, якщо ККД плавильної печі становить 20%?

**10.65.** При нагріванні у котлі 3000 л води спалили 40 кг кам'яного вугілля. До якої температури нагрілася вода, якщо її початкова температура була 10°C, а ККД печі становить 60%?

**10.66.** Автомобіль витрачає 5,67 кг бензину на 50 км шляху. Визначити потужність, що розвивається двигуном, якщо швидкість руху

90 км/год, а ККД двигуна 22%.

**10.67.** Знайдіть ККД двигуна, який витрачає 63 кг дизельного палива за 2,5 години роботи при потужності 70 кВт.

**10.68.** На скільки кілометрів шляху вистачить 10 л бензину для двигуна мотоцикла, який розвиває при швидкості 54 км/год потужність 8,5 кВт та має ККД 21%?

**10.69.** Скільки гасу згорає за 1 хвилину в примусі з ККД 40%, якщо 2 л води нагрівається на ньому від 15°С до температури кипіння за 10 хвилин?

**10.70.** Реактивний літак має чотири двигуни, які розвивають силу тяги 20 кН кожний. Скільки гасу витратять двигуни на переліт у 5000 км? ККД двигуна 25%.

**10.71.** Для нагрівання деякої кількості води від 0°С до температури кипіння (при нормальному атмосферному тиску) знадобилося 15 хвилин. Після цього 1 годину і 20 хвилин знадобилося для перетворення всієї води у водяну пару при таких самих умовах. Визначити питому теплоту пароутворення води. Вважати потужність теплових втрат сталою величиною.

**10.72.** При нормальному атмосферному тиску у відкритий калориметр поміщають однакові кількості води (при температурі $+t$ °С) і льоду (при температурі $-t$ °С). Яка максимальна частина льоду може при цьому розплавитися?

**10.73.** На плиті стоїть каструля із водою. При нагріванні температура води збільшилася від 90°С до 95°С за одну хвилину. Яка частина теплоти, що надається воді при нагріванні, розсіюється в навколишній простір, якщо час охолодження тієї самої води від 95°С до 90°С становить 9 хвилин?

# 11. Електростатика. Електричний диполь

## Основні формули

- Закон збереження електричних зарядів: в електрично ізольованій системі повна алгебраїчна сума електричних зарядів не змінюється:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}, \tag{11.1}$$

де $i$ — порядковий номер заряду; $q_i$ — $i$-й заряд (Кл); $n$ — загальна кількість зарядів.

- Відносна діелектрична проникність середовища

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F} = \frac{E_0}{E}, \tag{11.2}$$

де $F_0$ — сила взаємодії зарядів у вакуумі (Н); $F$ — сила взаємодії цих зарядів у середовищі (Н); $E_0, E$ — відповідні напруженості електричних полів (В/м).

- Поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{q}{S}, \tag{11.3}$$

де заряд $q$ (Кл) рівномірно розподілений по площі $S$ ($\text{м}^2$).

- Закон Кулона (сила взаємодії двох зарядів $q_1$ і $q_2$):

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}, \tag{11.4}$$

де $q_1, q_2$ — величини зарядів (Кл); $r$ — відстань між зарядами (м); $\varepsilon$ — відносна діелектрична проникність середовища; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — універсальна електрична стала; $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Н·м$^2$/Кл$^2$.

- Напруженість електричного поля

$$E = \frac{F}{q_0}, \tag{11.5}$$

де $F$ (Н) – сила, що діє на пробний заряд $q_0$ (Кл), який поміщено в точку, де визначається напруженість $E$.

- Напруженість електричного поля, що створюється точковим зарядом (або зарядженою сферою):

$$E = k\frac{q}{\varepsilon r^2}, \tag{11.6}$$

де $q$ – заряд, що створює поле (Кл); $r$ (м) – відстань від заряду до точки, в якій визначають напруженість. Для сфери $q$ – заряд сфери; $r$ – відстань від центра сфери з радіусом $R$ до точки, в якій визначають напруженість ($r \geq R$).

- Потенціал точки

$$\varphi = \frac{W}{q_0}, \tag{11.7}$$

де $W$ – потенціальна енергія, яку має заряд $q_0$ завдяки його взаємодії з електричним полем у точці, в якій він знаходиться. Потенціал на нескінченній відстані дорівнює нулю.

- Робота поля із переміщення заряду $q$

$$A = Fx\cos\alpha = qEx\cos\alpha, \quad A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \tag{11.8}$$

де $F$ – сила, що діє на заряд (Н); $x$ – переміщення заряду (м); $E$ – напруженість поля (В/м); $\alpha$ – кут між векторами $\vec{F}$ та $\vec{x}$ (або між векторами $\vec{E}$ та $\vec{x}$); $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів початкової та кінцевої точок траєкторії руху заряду. Тут введено напругу $U$ (В).

- Зв'язок між напруженістю однорідного поля та різницею потенціалів

$$E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = \frac{U}{d}, \tag{11.9}$$

де $d$ – відстань між двома точками в електричному полі уздовж силової лінії (м).

## 11. Електростатика. Електричний диполь

- Потенціал поля, що створюється точковим зарядом $q$:

$$\varphi = k\frac{q}{\varepsilon r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \tag{11.10}$$

  де $r$ (м) – відстань від заряду до точки, в якій визначається потенціал $\varphi$.

- Принцип суперпозиції полів: напруженість електричного поля в точці, що створюється сукупністю зарядів, дорівнює векторній сумі напруженостей полів, що створюються кожним із зарядів у цій точці окремо:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i, \tag{11.11}$$

  де $i$ – порядковий номер заряду; $\vec{E}_i$ – напруженість від $i$-го заряду (В/м); $n$ – загальна кількість зарядів.

- Потенціал, що створюється системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, що створюються кожним із зарядів у цій точці окремо:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \tag{11.12}$$

  де $i$ – порядковий номер заряду; $\varphi_i$ – потенціал від $i$-го заряду (В); $n$ – загальна кількість зарядів.

- Електричний (дипольний) момент диполя

$$p = ql, \tag{11.13}$$

  де $q$ – електричний заряд (Кл); $l$ – відстань між зарядами (м).

- Момент сили, що діє на диполь в електричному полі:

$$M = pE\sin\alpha, \tag{11.14}$$

  де $p$ – дипольний момент (Кл·м); $E$ – напруженість поля (В/м); $\alpha$ – кут між векторами $\vec{p}$ та $\vec{E}$.

- Проекція сили, що діє на диполь у неоднорідному електричному полі, на вісь $Ox$:
$$F_x = p_x \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}, \tag{11.15}$$
де $p_x$, $E_x$ — відповідно проекції $p$ і $E$ на вісь $Ox$.

- Потенціал електричного поля, створеного диполем у деякій точці $A$ на відстані $r$ ($r \gg l$):
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{p\cos\alpha}{r^2}, \tag{11.16}$$
де $\alpha$ — кут між вектором $\vec{p}$ та напрямом на точку $A$.

- Різниця потенціалів двох точок, які рівновіддалені від диполя — джерела поля:
$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{\sin(\gamma/2)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} p\cos\beta, \tag{11.17}$$
де $\gamma$ — кут, під яким спостерігаються точки $A$ і $B$ від диполя; $\beta$ — кут між вектором $\vec{p}$ та прямою $AB$.

**Приклади розв'язання задач**

**11.1.** Як потрібно змінити відстань між двома однаковими точковими зарядами, щоб при переміщенні їх з повітря в масло з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$ сила їх взаємодії зменшилася у 8 разів?

| |
|---|
| $q_1 = q_2 = q$, |
| $\varepsilon_1 = 1$, |
| $\varepsilon_2 = 2$, |
| $F_1 = 8F_2$ |
| $r_2/r_1$—? |

Сили взаємодії точкових зарядів у повітрі $F_1$ та в маслі $F_2$ визначатимемо згідно з формулою (11.4):
$$F_1 = k\frac{q_1q_2}{\varepsilon_1 r_1^2}, \quad F_2 = k\frac{q_1q_2}{\varepsilon_2 r_2^2}$$
або із урахуванням того, що $q_1 = q_2 = q$:
$$F_1 = \frac{kq^2}{\varepsilon_1 r_1^2}, \quad F_2 = \frac{kq^2}{\varepsilon_2 r_2^2}.$$
Оскільки за умовою $F_1 = 8F_2$, запишемо

$$\frac{kq^2}{\varepsilon_1 r_1^2} = \frac{8kq^2}{\varepsilon_2 r_2^2}$$

або після скорочення

$$\frac{1}{\varepsilon_1 r_1^2} = \frac{8}{\varepsilon_2 r_2^2}.$$

Звідси матимемо

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{8\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{8\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

Розрахуємо відповідне значення:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Отже, відстань між зарядами потрібно збільшити в 2 рази.

**11.2.** Як зміниться сила взаємодії двох однакових маленьких кульок із зарядами $+12$ нКл і $-24$ нКл, якщо їх привести в зіткнення, а потім розвести на початкову відстань?

| |
|---|
| $q_1 = 12 \cdot 10^{-9}$ Кл, $q_2 = -24 \cdot 10^{-9}$ Кл, $r_1 = r_2 = r$ |
| $F_2/F_1$–? |

Сила взаємодії зарядів до зіткнення дорівнює (11.4):

$$F_1 = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}.$$

Оскільки кульки однакові, після їх зіткнення вони будуть мати однакові заряди $q$. Відповідно до закону збереження заряду (11.1):

$$q_1 + q_2 = q + q, \quad q_1 + q_2 = 2q, \quad q = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

Сила взаємодії кульок після зіткнення дорівнює (11.4):

$$F_2 = k\frac{q^2}{r^2}.$$

Комбінуючи останні два вирази, отримуємо

$$F_2 = k\frac{(q_1 + q_2)^2}{4r^2}.$$

Знайдемо шукане відношення сил:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{k(q_1 + q_2)^2}{4r^2} \cdot \frac{r^2}{k|q_1||q_2|} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4|q_1||q_2|}$$

або після розрахунків

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(12 \cdot 10^{-9} - 24 \cdot 10^{-9})^2}{4 \cdot 12 \cdot 10^{-9} \cdot 24 \cdot 10^{-9}} = \frac{1}{8}.$$

Таким чином, сила взаємодії кульок зменшиться у 8 разів.

**11.3.** Біля вершин рівностороннього трикутника зі стороною 10 см розташовано заряди $q_1 = 100$ нКл, $q_2 = 200$ нКл і $q_3 = 150$ нКл. Визначити силу, що діє на третій заряд.

| |
|---|
| $r = 0,1$ м, |
| $q_1 = 10^{-7}$ Кл, |
| $q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл, |
| $q_3 = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Кл, |
| $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл² |
| $F$–? |

Оскільки всі три заряди позитивні, на заряд $q_3$ діють сили відштовхування з боку зарядів $q_1$ і $q_2$. Величини цих сил можна знайти за законом Кулона (11.4):

$$F_1 = k\frac{q_1 q_3}{r^2}, \quad F_2 = k\frac{q_2 q_3}{r^2}.$$

Рівнодіюча цих двох сил дорівнює

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}.$$

Будемо шукати рівнодіючу за правилом паралелограма (див. рис. 11.1). Величину $F$ знайдемо за теоремою косинусів:

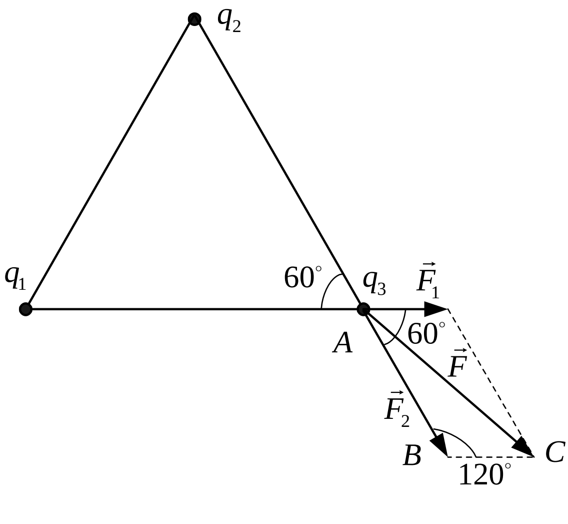



**Рисунок 11.1**

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 120^\circ$$

або із урахуванням тригонометричної формули зведення

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = \cos(\pi - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

матимемо більш зручний вигляд теореми косинусів:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60^\circ.$$

Відмітимо, що при використанні правила паралелограма для додавання векторів дуже часто застосовується саме остання інтерпретація теореми косинусів, де використовується кут між векторами, які виходять з однієї точки. При цьому, як це можна легко помітити, знак “$-$” у третьому доданку замінюється на “$+$”.

Отримаємо вираз для знаходження значення шуканої сили

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60^\circ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1F_2} =$$

$$= \sqrt{k^2\frac{q_1^2q_3^2}{r^4} + k^2\frac{q_2^2q_3^2}{r^4} + k\frac{q_1q_3}{r^2}k\frac{q_2q_3}{r^2}} =$$

$$= \frac{kq_3}{r^2}\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_1q_2}.$$

Розрахуємо це значення:

$$F=\frac{9\cdot 10^9\cdot 1,5\cdot 10^{-7}}{0,1^2}\sqrt{10^{-14}+4\cdot 10^{-14}+2\cdot 10^{-14}}=3,57\cdot 10^{-2}\ (\text{Н}).$$

**11.4.** З яким прискоренням падатиме заряджена кулька масою 1 г, якщо вона має заряд $10^{-6}$ Кл? Напруженість поля Землі дорівнює 130 В/м і спрямована до її поверхні.

| |
|---|
| $m = 10^{-3}$ кг, |
| $q = 10^{-6}$ Кл, |
| $E = 130$ В/м, |
| $g = 9,8$ м/с$^2$ |
| $a-?$ |

На рис. 11.2 показано сили, що діють на кульку. Це сила тяжіння (1.8)

$$\vec{F}_\text{т} = m\vec{g},$$

а також сила електричного поля Землі (11.5):

$$\vec{F}_e = q\vec{E}.$$

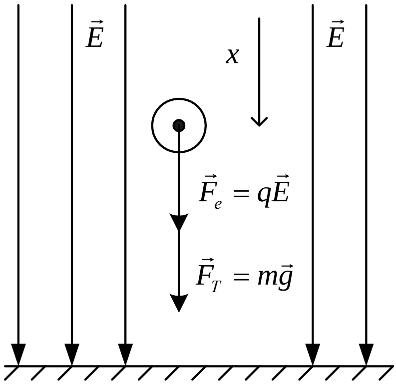



**Рисунок 11.2**

Оскільки за умовою кулька рухається із прискоренням, запишемо другий закон Ньютона:

$$\vec{F}_\text{т} + \vec{F}_e = m\vec{a}.$$

Лінії напруженості $\vec{E}$ спрямовані до Землі, що свідчить про те, що Земля має негативний заряд. Тому сила, що діє на позитивний заряд $q$, також спрямована до Землі. Отже, у проекціях на вісь $x$ останнє рівняння набирає вигляду

$$mg + qE = ma,$$

звідки легко отримати формулу для знаходження прискорення:

$$a = g + \frac{qE}{m}.$$

Отже, якщо кулька була б незарядженою ($q = 0$), вона б рухалася із прискоренням вільного падіння $g$. Наявність заряду зумовлює додаткове прискорення $qE/m$. Розрахуємо шукане значення:

$$a = g + \frac{qE}{m} = 9,8 + \frac{10^{-6} \cdot 130}{10^{-3}} = 9,93\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

**11.5.** Заряди $q_1 = 2q$ і $q_2 = -q$ знаходяться на відстані $r_1 = 0,1$ м один від одного в порожнині. На якій відстані від заряду $q_2$ на лінії центрів напруженість поля дорівнює нулю?

| |
|---|
| $q_1 = 2q$, |
| $q_2 = -q$, |
| $r_1 = 0,1$ м, |
| $\varepsilon = 1$ |
| $x$–? |

На рис. 11.3 колами показано заряди, ліворуч розташований позитивний заряд $q_1$, праворуч — негативний $q_2$. За умовою потрібно знайти точку, в якій напруженість $E$ буде дорівнювати нулю. Згідно із принципом суперпозиції полів (11.11) загальна результуюча напруженість — це векторна сума напруженостей, які створюються кожним із зарядів окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

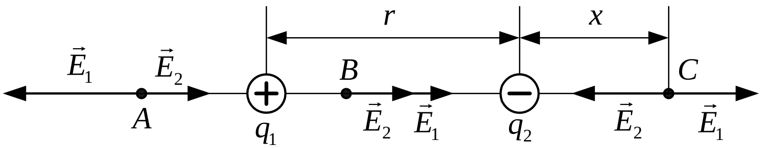



**Рисунок 11.3**

Розглянемо можливі ситуації. У будь-якій точці ліворуч від обох зарядів (точка $A$) напруженість не може дорівнювати нулю, оскільки хоча в цьому випадку $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ спрямовані у протилежних напрямах, згідно із формулою (11.6) за абсолютним значенням $E_1$ буде завжди більше ніж $E_2$, тому що величина заряду $q_1$ більше ніж $q_2$ і точка $A$ знаходиться ближче до $q_1$. У точці $B$, яка знаходиться між зарядами, напруженості спрямовані в один бік, і їх векторна сума також не може дорівнювати нулю. У точці $C$ вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ спрямовані у протилежних напрямах і можуть бути однакові за абсолютним значенням. Отже, будемо шукати розв'язок задачі у точці $C$.

Нехай $x$ — відстань від заряду $q_2$ до точки $C$, в якій напруженість дорівнює нулю. Це означає, що $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ або $E_1 = E_2$. Визначимо ці напруженості згідно із рисунком та формулою (11.6):

$$E_1 = k\frac{q_1}{\varepsilon(r+x)^2}, \quad E_2 = k\frac{q_2}{\varepsilon x^2}.$$

Підставимо в останні формули абсолютні значення зарядів (їх знаки вже враховано) та прирівняємо їх:

$$k\frac{2q}{\varepsilon(r+x)^2} = k\frac{q}{\varepsilon x^2}, \quad \frac{2}{(r+x)^2} = \frac{1}{x^2}, \quad 2x^2 = (r+x)^2,$$

$$2x^2 = r^2 + 2rx + x^2, \quad x^2 - 2rx - r^2 = 0.$$

Це звичайне квадратне рівняння, яке має два розв'язки:

$$x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})r.$$

Після підстановки значень

$$x_1 = (1 + \sqrt{2}) \cdot 0,1 = 0,24 \text{ (м)},$$

$$x_2 = (1 - \sqrt{2}) \cdot 0,1 = -0,0414 \text{ (м)}.$$

Корінь $x_2$ фізичного змісту не має, оскільки при такому значенні $x$ точка $C$ буде знаходитися між зарядами, а як показано вище, у такому випадку напруженість не може дорівнювати нулю. Отже, $x_2$ зайвий корінь, і кінцева відповідь задачі $x = 0,24$ (м).

**11.6.** Електрон влітає в однорідне поле плоского конденсатора у напрямі ліній напруженості й на ділянці шляху 2 см зменшує свою швидкість від значення $2 \cdot 10^6$ м/с до нуля. Визначити напруженість поля в конденсаторі.

| |
|---|
| $x = 2 \cdot 10^{-2}$ м, |
| $v_1 = 2 \cdot 10^6$ м/с, |
| $v_2 = 0$, |
| $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, |
| $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл |
| $E$–? |

Електрон змінює свою швидкість за рахунок того, що над ним здійснюється робота сил електричного поля. Ця робота чисельно дорівнює зміні кінетичної енергії електрона:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Оскільки електрон здійснює рух в однорідному полі плоского конденсатора, на нього діє стала сила $F$. В цьому випадку робота поля може бути визначена за формулою (11.8):

$$A = eEx\cos\alpha,$$

де кут $\alpha$ між векторами $\vec{E}$ та $\vec{x}$ дорівнюватиме $0°$, оскільки рух електрона відбувається уздовж ліній напруженості. Із урахуванням значення $\cos 0° = 1$ отримуємо

$$A = eEx.$$

Тепер прирівнюємо зміну кінетичної енергії до останнього виразу:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = eEx.$$

За умовою задачі $v_2 = 0$, тому можна записати

$$-\frac{mv_1^2}{2} = eEx, \quad E = -\frac{mv_1^2}{2ex}.$$

Обчислимо це значення:

$$E = -\frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (2 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 569,4 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right).$$

**11.7.** На відстані 0,9 м від поверхні сфери із радіусом 10 см, що має позитивний заряд з поверхневою густиною $3 \cdot 10^{-5}$ Кл/м$^2$, знаходиться точковий заряд +7 нКл. Визначити роботу, яку необхідно здійснити, щоб перенести заряд у точку, що розташована на відстані 50 см від центра сфери. Система знаходиться в повітрі.

| |
|---|
| $r_1 = 0,9$ м, |
| $R = 0,1$ м, |
| $\sigma = 3 \cdot 10^{-5}$ Кл/м$^2$, |
| $q = 7 \cdot 10^{-9}$ Кл, |
| $r_2 = 0,5$ м, |
| $\varepsilon = 1$, |
| $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м$^2$/Кл$^2$ |
| $A$–? |

На рис. 11.4 зображено сферу із радіусом $R$. За умовою задачі потрібно знайти роботу, яку необхідно здійснити для перенесення заряду $q$ із точки 1 у точку 2. Цю роботу можна знайти, використовуючи формулу (11.8):

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де $\varphi_1$ і $\varphi_2$ – потенціали точок 1 і 2 відповідно.

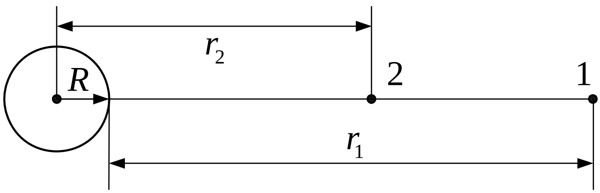



**Рисунок 11.4**

Ці потенціали шукатимемо згідно означення (11.10):

$$\varphi_1 = \frac{kq_0}{\varepsilon(r_1 + R)}, \quad \varphi_2 = \frac{kq_0}{\varepsilon r_2},$$

де $q_0$ – це повний заряд сфери. Підставимо ці потенціали у формулу для визначення роботи, врахувавши значення $\varepsilon = 1$:

$$A = q\left(\frac{kq_0}{\varepsilon(r_1+R)} - \frac{kq_0}{\varepsilon r_2}\right) = kq_0q\left(\frac{1}{r_1+R} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Тепер знайдемо заряд сфери $q_0$. Оскільки відома поверхнева густина заряду $\sigma$, заряд $q_0$ можна визначити, використовуючи формулу (11.3):

$$\sigma = \frac{q_0}{S}, \quad q_0 = \sigma S.$$

Із урахуванням формули для визначення площі поверхні сфери

$$S = 4\pi R^2$$

матимемо

$$q_0 = 4\pi R^2\sigma.$$

Підставляючи цей заряд у формулу для роботи, отримуємо

$$A = 4\pi R^2\sigma kq\left(\frac{1}{r_1+R} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Після розрахунків маємо

$$A = 4\cdot 3,14\cdot 0,1^2\cdot 3\cdot 10^{-5}\cdot 9\cdot 10^9\cdot 7\cdot 10^{-9}\left(\frac{1}{0,9{+}0,1} - \frac{1}{0,5}\right) =$$
$$= -2,374\cdot 10^{-4}\ (\text{Дж}).$$

Робота від'ємна, оскільки позитивний заряд наближається до позитивно зарядженої сфери. При цьому сила, що діє на заряд, спрямована протилежно до його переміщення.

**11.8.** Куля із радіусом 30 см має заряд +20 нКл. Інша куля із радіусом 90 см має такий самий заряд. Кулі з'єднуються дротиною. У якому напряму рухатимуться заряди по дротині? Який заряд перейде з однієї кулі на іншу?

| |
|---|
| $r_1 = 0,3$ м, |
| $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл, |
| $r_2 = 0,9$ м |
| $\Delta q$–? |

При з'єднанні куль дротиною електрони будуть переміщатися з кулі з меншим потенціалом до кулі з більшим потенціалом, доки потенціали обох куль не стануть однакові. Потенціали куль до їх з'єднання легко визначити за формулою (11.10):

$$\varphi_1 = \frac{kq}{\varepsilon r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{kq}{\varepsilon r_2}.$$

Оскільки $r_1 < r_2$, за будь якого значення $\varepsilon$ буде виконуватися нерівність $\varphi_1 > \varphi_2$.

Отже, оскільки потенціал першої кулі більший, електрони будуть переміщатися від другої кулі до першої. Нехай $\Delta q$ — величина позитивного заряду, який додатково набирає друга куля за рахунок втрати електронів. Тоді перша куля втрачає такий самий заряд $\Delta q$. Іншими словами, потенціали куль змінюються:

$$\varphi_1' = \frac{k(q-\Delta q)}{\varepsilon r_1}, \quad \varphi_2' = \frac{k(q+\Delta q)}{\varepsilon r_2}.$$

Нам цікава ситуація, коли перерозподіл електронів припиняється, тобто випадок $\varphi_1' = \varphi_2'$. Із останніх формул матимемо

$$\frac{k(q-\Delta q)}{\varepsilon r_1} = \frac{k(q+\Delta q)}{\varepsilon r_2}, \quad \frac{q-\Delta q}{r_1} = \frac{q+\Delta q}{r_2},$$

$$(q-\Delta q)r_2 = (q+\Delta q)r_1, \quad qr_2 - \Delta q r_2 = qr_1 + \Delta q r_1,$$

$$\Delta q(r_1+r_2) = qr_2 - qr_1, \quad \Delta q = q\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}.$$

Знайдемо числове значення:

$$\Delta q = q\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2} = 2\cdot 10^{-8}\cdot\frac{0,9-0,3}{0,9+0,3} = 10^{-8}\ (\text{Кл}).$$

**11.9.** Маленька від'ємно заряджена кулька рівномірно обертається навколо нерухомого позитивного точкового заряду $q = 10^{-9}$ Кл. Чому дорівнює відношення заряду кульки до її маси, якщо радіус орбіти $r = 2$ см, а кутова швидкість $\omega = 3$ рад/с?

| |
|---|
| $q = 10^{-9}$ Кл, |
| $r = 0,02$ м, |
| $\omega = 3$ рад/с, |
| $\varepsilon = 1$, |
| $k = 9\cdot 10^9$ Н·м$^2$/Кл$^2$ |
| $q'/m$–? |

Нехай $q'$ — заряд кульки; $m$ — її маса, а $v$ — лінійна швидкість її руху. Згідно із другим законом Ньютона можна записати:

$$F = m\frac{v^2}{r},$$

де $F$ — кулонівська сила притягання, що діє між кулькою та центральним зарядом, а $v^2/r$ — доцентрове прискорення. Із урахуванням (11.4) матимемо

$$\frac{kqq'}{\varepsilon r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad \frac{kqq'}{\varepsilon r} = mv^2, \quad \frac{q'}{m} = \frac{v^2\varepsilon r}{kq}.$$

У механіці відомий зв'язок між лінійною $v$ та кутовою $\omega$ швидкостями:

$$v = \omega r.$$

Із урахуванням цього зв'язку отримуємо

$$\frac{q'}{m} = \frac{\omega^2 \varepsilon r^3}{kq}.$$

Після розрахунків отримаємо відповідь

$$\frac{q'}{m} = \frac{\omega^2 \varepsilon r^3}{kq} = \frac{3^2 \cdot 1 \cdot 0,02^3}{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}} = 8 \cdot 10^{-6} \ \left(\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}\right).$$

**11.10.** Визначити силу, яка діє на диполь з електричним моментом $p = 10^{-10}$ Кл·м, якщо він розташований у вакуумі на відстані $x = 50$ см від точкового заряду $q = 1,5 \cdot 10^{-4}$ Кл уздовж ліній напруженості. Відстань між зарядами диполя набагато менша за $x$.

| |
|---|
| $p = 10^{-10}$ Кл·м, |
| $x = 0,5$ м, |
| $q = 1,5 \cdot 10^{-4}$ Кл, |
| $l \ll x$, |
| $\varepsilon = 1$, |
| $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м$^2$/Кл$^2$ |
| $F$–? |

Геометрія задачі дозволяє використовувати формулу (11.15):

$$F = p\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x},$$

де для зручності у всіх величин опущений індекс $x$. Напруженість $E$ визначатимемо за формулою (11.6):

$$E = k\frac{q}{\varepsilon x^2}.$$

Підставляючи останню формулу у вираз для знаходження сили, матимемо

$$F = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{q}{\varepsilon x^2}\right) = \frac{kqp}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{kqp}{\varepsilon}\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{2kqp}{\varepsilon x^3}.$$

Розрахуємо цю силу:

$$F = -\frac{2kqp}{\varepsilon x^3} = -\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-10}}{1 \cdot 0,5^3} = -2,16 \ (\text{мН}).$$

## 11. Електростатика. Електричний диполь

### Задачі для самостійного розв'язування

**11.11.** Дві однакові маленькі кульки заряджено рівними за величиною зарядами. На відстані 20 см вони притягуються із силою 9 мН. На скільки потрібно змінити відстань між кульками при додаванні кожній з них додатково заряду +100 нКл, щоб сила взаємодії кульок не змінилася? Відповісти на те саме запитання для випадку, якщо одній кульці додали заряд +100 нКл, а іншій −100 нКл.

**11.12.** Кульку із масою 2 г, що має заряд 50 нКл, підвішено в повітрі на тонкій ізолюючій нитці. Визначити натяг нитки, якщо знизу на відстані 5 см розташований заряд величиною −100 нКл.

**11.13.** Між двома точковими зарядами +15 нКл і +10 нКл поміщений третій заряд −5 нКл. Відстань між першим і другим зарядами дорівнює 1 м, а третій заряд розміщений на прямій, що їх сполучає, на однаковій відстані від обох зарядів. Визначити силу, що діє на третій заряд.

**11.14.** Дві однакові кульки із зарядами $2 \cdot 10^{-6}$ Кл кожна підвішено на нитках завдовжки по 25 см в одній точці. Знайти масу кожної кульки, якщо у стані рівноваги кут між нитками становить $60^\circ$. Кульки знаходяться в повітрі.

**11.15.** Два заряди, перебуваючи в повітрі на відстані 0,05 м, діють один на одного із силою $1,2 \cdot 10^{-4}$ Н, а в деякій діелектричній рідині на відстані 0,12 м із силою $1,5 \cdot 10^{-5}$ Н. Чому дорівнює діелектрична проникність рідини?

**11.16.** Заряд величиною $1,3 \cdot 10^{-9}$ Кл в гасі ($\varepsilon = 2$) на відстані $0,005$ м притягує до себе другий заряд із силою $2 \cdot 10^{-4}$ Н. Знайти величину другого заряду.

**11.17.** На якій відстані один від одного потрібно розташувати два однакових заряди величиною $5 \cdot 10^{-4}$ Кл, щоб у гасі сила взаємодії між ними виявилася $0,5$ Н? Діелектрична проникність гасу $\varepsilon = 2$.

**11.18.** Два однакових точкових заряди взаємодіють у вакуумі на відстані 0,1 м з такою самою силою, як у скипидарі на відстані 0,07 м. Знайти діелектричну проникність скипидару.

**11.19.** Два заряди величиною $3,3 \cdot 10^{-8}$ Кл кожний, які розділено шаром слюди, взаємодіють із силою $5 \cdot 10^{-2}$ Н. Визначити товщину шару слюди, якщо її діелектрична проникність $\varepsilon = 8$.

**11.20.** Визначити відстань $r_1$ між двома однаковими електричними зарядами, що знаходяться в маслі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$, якщо сила взаємодії між ними така сама, як у вакуумі на відстані $r_2 = 0,3$ м.

**11.21.** Три негативних заряди величиною $3 \cdot 10^{-9}$ Кл кожний розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. Який заряд $q$ потрібно помістити в центрі трикутника, щоб система знаходилася в рівновазі?

**11.22.** Напруженість поля в деякій точці становить 15 кН/Кл. Сила, що діє на деякий заряд у цій точці, дорівнює $3,75 \cdot 10^{-5}$ Н. На скільки потрібно змінити значення заряду, щоб сила, що діє на нього в цій точці, зросла в 3 рази?

**11.23.** Відстань між зарядами $+5$ нКл і $-9,8$ нКл дорівнює 1 м. Знайти напруженість поля в точці на прямій, що сполучає ці заряди, на відстані 30 см від першого заряду. Розв'язати ту саму задачу, змінивши знак другого заряду на "+".

**11.24.** Біля двох протилежних вершин квадрата знаходяться заряди по $+5$ нКл кожний, а біля третьої вершини – заряд величиною $-5$ нКл. Сторона квадрата 40 см. Визначити напруженість поля біля четвертої вершини, де заряду немає.

**11.25.** Визначити напруженість електричного поля, що створюється двома зарядами $q_1 = 6$ нКл і $q_2 = 1,07$ нКл у точці $A$, яка знаходиться на відстані $r_1 = 0,03$ м та $r_2 = 0,04$ м від зарядів. Заряди знаходяться один від одного на відстані $r = 0,05$ м. Заряди та точка $A$ знаходяться в середовищі з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$.

**11.26.** Два точкових електричних заряди $q_1 = 1$ нКл і $q_2 = -2$ нКл знаходяться в повітрі на відстані $r = 0,1$ м один від одного. Визначити напруженість і потенціал поля, які створюються цими зарядами у точці $A$, що віддалена від заряду $q_1$ на відстань $r_1 = 9$ см, а від заряду $q_2$ на відстань $r_2 = 7$ см.

**11.27.** Два заряди $q_1 = +3{\cdot}10^{-7}$ Кл і $q_2 = -2{\cdot}10^{-7}$ Кл перебувають у вакуумі на відстані 0,2 м один від одного. Визначити напруженість поля в точці, яка розташована на лінії, що з'єднує заряди, на відстані 0,05 м праворуч від заряду $q_2$.

**11.28.** У деякій точці поля на заряд $5 \cdot 10^{-9}$ Кл діє сила $3 \cdot 10^{-4}$ Н. Знайти напруженість поля в цій точці і визначити величину заряду, що створює поле, якщо точка віддалена від нього на 0,1 м.

**11.29.** Відстань $d$ між двома точковими зарядами $Q_1 = 9Q$ і $Q_2 = Q$ дорівнює 8 см. На якій відстані $r$ від першого заряду знаходиться точка, в якій напруженість $E$ поля зарядів дорівнює нулю? Де буде знаходитися ця точка, якщо другий заряд буде негативним?

**11.30.** Напруженість поля в гасі, що утворена точковим зарядом $10^{-6}$ Кл, на деякій відстані від нього дорівнює 5 В/м. Визначити відстань від заряду до цієї точки поля і силу, з якою поле буде діяти на заряд $3 \cdot 10^{-6}$ Кл, якщо його помістити в цю точку.

**11.31.** Електрон в однорідному електричному полі отримує прискорення $a = 10^{12}$ м/с$^2$. Знайти напруженість $E$ електричного поля, швидкість $v$, яку отримає електрон за час $t = 1$ мкс свого руху, роботу $A$ сил електричного поля за цей час і різницю потенціалів $U$, що пройдена при цьому електроном. Початкова швидкість електрона $v_0 = 0$.

**11.32.** Визначити величину точкового заряду, який утворює поле у вакуумі, якщо на відстані 0,09 м від нього напруженість поля становить $4 \cdot 10^5$ В/м. На скільки ближче до заряду перебуватиме точка, в якій буде така сама напруженість, якщо заряд помістити в середовище з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$?

**11.33.** Біля вершин гострих кутів ромба зі стороною $a$ поміщено позитивні заряди $q$, а біля вершини одного з тупих кутів — позитивний заряд $Q$. Визначити напруженість електричного поля біля четвертої вершини ромба, якщо менша діагональ ромба дорівнює його стороні.

**11.34.** Металева куля з діаметром 4 см занурена у парафін. Поверхнева густина заряду на кулі $0,8 \cdot 10^{-5}$ Кл/м$^2$. Яка напруженість поля у парафіні на відстані 20 см від поверхні кулі?

**11.35.** Знайти потенціал у точці, що розташована на відстані 70 см від поверхні негативно зарядженої сфери із радіусом 30 см, якщо поверхнева густина заряду дорівнює $-0,5$ нКл/м$^2$.

**11.36.** Знайти потенціал поля в середній точці між двома зарядами $+5$ нКл і $-10$ нКл. Відстань між зарядами становить 1 м. У якій точці між зарядами потенціал поля буде дорівнювати нулю?

**11.37.** Електрон влітає в електричне поле із початковою швидкістю $v_0 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Потенціал початкової точки поля дорівнює 6000 В. Знайти потенціал точки, в якій електрон зупиниться.

**11.38.** Електрон влітає в однорідне поле плоского конденсатора проти напряму ліній напруженості. На ділянці шляху завдовжки 3 см він збільшує свою швидкість від $0,5 \cdot 10^6$ м/с до $10^6$ м/с. Визначити різницю потенціалів між обкладками конденсатора, відстань між якими становить 10 см.

**11.39.** Пучок електронів, спрямований паралельно обкладкам плоского конденсатора, на шляху 4 см відхиляється на 2 мм від початкового напряму. Яку початкову швидкість мають електрони? Напруга між пластинами конденсатора 900 В, а відстань між ними 4 см.

**11.40.** Між внутрішньою частиною клітини та зовнішнім розчином існує різниця потенціалів (мембранний потенціал спокою), що приблизно становить $U = 80$ мВ. Припускаючи, що електричне поле всередині мембрани однорідне, і враховуючи товщину мембрани $l = 8$ нм, знайти напруженість цього поля.

**11.41.** Яка різниця потенціалів початкової і кінцевої точок траєкторії електрона в електричному полі, якщо на цьому шляху він збільшив швидкість з $10^7$ м/с до $2 \cdot 10^7$ м/с?

**11.42.** Дві точки розташовані на відстані $0,15$ м і $0,2$ м від заряду $10^{-7}$ Кл. Знайти різницю потенціалів цих точок.

**11.43.** Електрон летить із точки $A$ до точки $B$, між якими різниця потенціалів дорівнює 100 В. Яку швидкість матиме електрон у точці $B$, якщо в точці $A$ його швидкість дорівнювала нулю?

**11.44.** Два точкових заряди $7 \cdot 10^{-9}$ Кл і $14 \cdot 10^{-9}$ Кл знаходяться на відстані 0,4 м. Яку роботу потрібно виконати для наближення зарядів до відстані 0,25 м?

**11.45.** Із ядра атома радію зі швидкістю $2 \cdot 10^{7}$ м/с вилітає $\alpha$-частинка з масою $6,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Визначити енергію частинки і різницю потенціалів, яка б забезпечила частинці таку енергію. Заряд частинки $3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

**11.46.** Поле утворене зарядом $17 \cdot 10^{-9}$ Кл. Яку роботу потрібно виконати, щоб однойменний заряд $4 \cdot 10^{-9}$ Кл перенести з точки, віддаленої від першого заряду на 0,5 м в точку, яка віддалена від того самого заряду на 0,05 м?

**11.47.** Яку роботу потрібно виконати, щоб перенести точковий заряд $7 \cdot 10^{-9}$ Кл з нескінченності в точку, яка розташована на відстані $0,1$ м від поверхні металевої кульки? Потенціал кульки 200 В, а радіус 0,02 м. Кулька знаходиться в повітрі.

**11.48.** На поверхні кулі із радіусом 0,02 м рівномірно розподілений заряд $10^{-10}$ Кл. Електрон, що знаходиться дуже далеко від кулі, має початкову швидкість $v_0 = 0$. З якою швидкістю він наблизиться до кулі?

**11.49.** Між паралельними зарядженими пластинами, що розташовані горизонтально, утримується в рівновазі частинка пилу масою $10^{-12}$ кг, що має заряд $-5 \cdot 10^{-16}$ Кл. Знайти різницю потенціалів між пластинами. Відстань між ними $10^{-2}$ м.

**11.50.** Визначити кількість електронів, які утворюють заряд частинки пилу з масою $5 \cdot 10^{-12}$ кг, якщо вона знаходиться в рівновазі в електричному полі, що утворене двома зарядженими пластинами. Різниця потенціалів між пластинами 3000 В, а відстань між ними 0,02 м.

**11.51.** Між двома горизонтально розташованими пластинами, що заряджені до 6000 В, утримується в рівновазі частинка пилу з масою $3 \cdot 10^{-11}$ кг. Визначити заряд частинки, якщо відстань між пластинами 0,1 м.

**11.52.** Електрон влітає в однорідне поле, що утворене паралельними зарядженими пластинами, у напрямі ліній напруженості і втрачає свою швидкість від $v_0 = 12 \cdot 10^6$ м/с до нуля, пройшовши шлях від однієї пластини до іншої. Визначити напруженість поля, якщо відстань між пластинами 2 см.

**11.53.** До якої різниці потенціалів потрібно зарядити горизонтально розташовані на відстані 0,04 м одна від іншої пластини, щоб частинка пилу з масою $3 \cdot 10^{-11}$ кг, що несе на собі 1000 надлишкових електронів, перебувала в рівновазі між цими пластинами?

**11.54.** В електричному полі точкового заряду $q = 0,3$ нКл на відстані $r = 1$ м від нього знаходиться диполь з моментом $p = 2 \cdot 10^{-28}$ Кл·м. Знайти максимальний момент сили, що діє на диполь у вакуумі.

**11.55.** Знайти потенціал поля, який утворює диполь у точці $A$, що знаходиться на відстані $r = 0,5$ м в напрямі під кутом $\alpha = 30^\circ$ відносно електричного моменту $p$ диполя. Середовище — вода ($\varepsilon = 81$). Диполь створюється зарядами $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл, що знаходяться на відстані $l = 0,5$ см.

**11.56.** Знайти електричний момент системи електрон—ядро атома водню, розглядаючи його як диполь. Відстань між ядром та електроном $r = 10^{-8}$ см.

**11.57.** У результаті поляризації на кінцях діелектрика виникли зв'язані заряди із поверхневою густиною $\sigma_{\text{зв}} = 10^{-10}$ Кл/м$^2$. Зразок діелектрика має форму циліндра з довжиною $l = 30$ см та площею поперечного перерізу $S = 1$ см$^2$. Вважаючи поляризований діелектрик диполем, визначити його електричний момент.

**11.58.** Який максимальний момент сили діє в електричному полі з напруженістю $E = 20$ кВ/м на молекулу води ($p = 3,7 \cdot 10^{-29}$ Кл·м)? У чому різниця дії на молекулу однорідного і неоднорідного полів?

**11.59.** Використовуючи вираз для потенціалу диполя (11.16) і зв'язок між напруженістю і потенціалом $E = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r$, знайти залежність напруженості електричного поля на осі диполя від $p$ і $r$.

**11.60.** Диполь створено зарядами $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл, які знаходяться у воді ($\varepsilon = 81$) на відстані $l = 0,5$ см один від одного. Знайти різницю потенціалів двох точок, що знаходяться на відстані $r = 0,5$ м під кутами $\alpha_1 = 0°$ і $\alpha_2 = 90°$ (див. рис. 11.5).

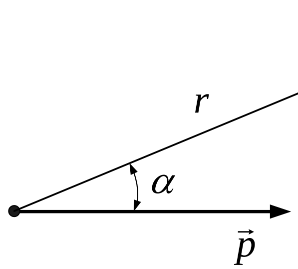



**Рисунок 11.5**

**11.61.** Диполь з електричним моментом $p = 1$ пКл·м рівномірно обертається із частотою $\nu = 10^3$ с$^{-1}$ відносно осі, що проходить через центр диполя і перпендикулярна до його плеча. Вивести закон зміни потенціалу як функцію часу в деякій точці, що віддалена від центра диполя на $r = 1$ см і лежить у площині обертання диполя. Прийняти, що в початковий момент часу потенціал $\varphi_0$, для точки, що розглядається, дорівнює нулю. Побудувати графік залежності $\varphi(t)$.

**11.62.** Диполь з електричним моментом $p = 20$ пКл·м знаходиться в неоднорідному електричному полі. Ступінь неоднорідності поля характеризується величиною $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = 1$ МВ/м$^2$, взятою у напрямі осі диполя. Обчислити силу $F$, що діє на диполь в цьому напрямі.

**11.63.** Визначити електричний момент $p$ диполя, якщо його створено зарядами $Q = 10$ нКл, які розташовані на відстані $l = 0,5$ см один від одного.

**11.64.** Визначити напруженість поля, що створює диполь з електричним моментом $p = 1$ нКл·м на відстані $r = 25$ см від центра диполя в напряму, перпендикулярному до осі диполя.

**11.65.** Поле утворене точковим диполем з електричним моментом $p = 100$ пКл·м. Визначити різницю потенціалів $U$ двох точок поля, розташованих симетрично відносно диполя на його осі на відстані $r = 10$ см від центра диполя.

# 12. Електроємність. Конденсатори

## Основні формули

- Ємність відокремленого провідника

$$C = \frac{q}{\varphi}, \tag{12.1}$$

де $q$ — заряд провідника (Кл); $\varphi$ — його потенціал (В).

- Ємність сферичного провідника

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R, \tag{12.2}$$

де $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — універсальна електрична стала; $\varepsilon$ — відносна діелектрична проникність середовища; $R$ — радіус сфери (м).

- Ємність конденсатора

$$C = \frac{q}{U}, \tag{12.3}$$

де $q$ — значення заряду на кожній з обкладок конденсатора (Кл); $U$ — напруга (або різниця потенціалів) між обкладками (В).

- Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \tag{12.4}$$

де $d$ — відстань між пластинами (м); $S$ — площа кожної пластини (м$^2$).

- Ємність плоского конденсатора, який заповнений $n$ шарами діелектрика із товщиною $d_i$ та діелектричною проникністю $\varepsilon_i$ кожний:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + ... + d_n/\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum_{i=1}^{n} d_i/\varepsilon_i}. \tag{12.5}$$

## 12. Електроємність. Конденсатори

- Ємність циліндричного конденсатора

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{L}{\ln(R_2/R_1)}, \tag{12.6}$$

де $L$ – висота циліндрів (м); $R_2$ – радіус зовнішнього циліндра (м); $R_1$ – радіус внутрішнього циліндра (м).

- Ємність сферичного конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}, \tag{12.7}$$

де $R_2$ – радіус зовнішньої сфери (м); $R_1$ – радіус внутрішньої сфери (м).

- Енергія електричного поля між обкладками зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \tag{12.8}$$

- Об'ємна густина енергії електричного поля

$$\omega_{\text{ел}} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}, \tag{12.9}$$

де $E$ – напруженість електричного поля (В/м).

- Сила притягання між обкладками конденсатора

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x}, \tag{12.10}$$

де $W$ розраховується за формулою (12.8); $x$ – координата (м). Для плоского конденсатора (12.4) $x \equiv d$, для циліндричного (12.6) і сферичного (12.7) $x \equiv R_2$.

- Батарея із паралельно з'єднаних конденсаторів

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i, \tag{12.11}$$

$$U = U_1 = U_2 = ... = U_n, \tag{12.12}$$

$$q = q_1 + q_2 + ... + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i, \tag{12.13}$$

де $i$ — порядковий номер конденсатора; $C_i$ — ємність $i$-го конденсатора; $U_i$ — напруга на $i$-му конденсаторі; $q_i$ — заряд на $i$-му конденсаторі; $n$ — загальна кількість конденсаторів.

- Батарея із послідовно з'єднаних конденсаторів

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}, \qquad (12.14)$$

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad (12.15)$$

$$q = q_1 = q_2 = ... = q_n. \qquad (12.16)$$

## Приклади розв'язання задач

**12.1.** Є $n = 1000$ однакових крапель ртуті із ємністю $C = 1$ пФ кожна. Визначити ємність великої кульової краплі, яка отримана при злитті всіх цих крапель.

| |
|---|
| $n = 1000$, $C = 10^{-12}$ Ф |
| $C'$–? |

Позначимо радіус маленької крапельки $r$, а радіус великої, отриманої при злитті всіх крапельок, $R$. Тоді згідно із формулою (12.2):

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r, \quad C' = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Знайдемо відношення цих ємностей:

$$\frac{C'}{C} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad \frac{C'}{C} = \frac{R}{r},$$

звідки легко виразити ємність $C'$:

$$C' = C\frac{R}{r}.$$

Отже, для знаходження $C'$ потрібно дізнатися, як співвідносяться радіуси крапель. Використаємо відому формулу для визначення об'єму кулі:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V' = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Оскільки велика куля — це злиття маленьких, з іншого боку,

$$V' = nV.$$

Підставимо в останнє співвідношення $V$ і $V'$ та отримаємо

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n\frac{4}{3}\pi r^3, \quad R^3 = nr^3, \quad \frac{R^3}{r^3} = n, \quad \frac{R}{r} = \sqrt[3]{n}.$$

Підставляючи отримане відношення у формулу для знаходження ємності $C'$, отримуємо

$$C' = C\frac{R}{r} = C\sqrt[3]{n}.$$

Визначимо числове значення ємності:

$$C' = C\sqrt[3]{n} = 10^{-12} \cdot \sqrt[3]{1000} = 10^{-11}\ (\Phi).$$

Таким чином, злиття 1000 маленьких крапельок підвищує ємність результуючої великої краплі по відношенню до ємності маленької початкової крапельки лише у 10 разів.

**12.2.** На пластину плоского конденсатора, відстань між пластинами якого $d = 3$ см, подано напругу $U = 1$ кВ. Простір між пластинами заповнений кров'ю ($\varepsilon = 85$). Знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів.

| |
|---|
| $d = 0,03$ м, |
| $U = 1000$ В, |
| $\varepsilon = 85$, |
| $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м |
| $\sigma$–? |

Поверхнева густина зарядів визначається за формулою (11.3):

$$\sigma = \frac{q}{S},$$

де $q$ – заряд на пластині конденсатора; $S$ – площа пластини. Заряд $q$ можна знайти за формулою (12.3):

$$C = \frac{q}{U}, \quad q = CU.$$

Ємність конденсатора будемо визначати згідно із співвідношенням (12.4):

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Підставимо останню формулу у попередню для знаходження заряду пластини:

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon SU}{d}.$$

Тепер можна знайти поверхневу густину $\sigma$:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon SU}{Sd} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{d},$$

або після розрахунку

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 85 \cdot 1000}{0,03} = 2,508 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right).$$

**12.3.** Відстань між пластинами повітряного конденсатора із площею $S = 50$ см$^2$ дорівнює $d = 3$ см. Конденсатор був заряджений до напруги $U = 200$ В та від'єднаний від джерела струму. Знайти роботу, яку потрібно здійснити для розсування пластин на відстань $d_2 = 10$ см.

| |
|---|
| $S = 5 \cdot 10^{-3}$ м$^2$, |
| $d_1 = 0,03$ м, |
| $d_2 = 0,1$ м, |
| $U = 200$ В, |
| $\varepsilon = 1$, |
| $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м |
| $A$–? |

Оскільки конденсатор від'єднали від джерела струму, заряд $Q$ на його обкладках не зміниться. Але при розсуванні пластин буде змінюватися ємність $C$, а відповідно і напруга $U$ на пластинах. Заряд можна визначити за формулою (12.3):

$$Q = C_1 U,$$

де ємність $C$ визначається згідно із (12.4):

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Енергія поля конденсатора визначається за формулою (12.8):

$$W = \frac{Q^2}{2C},$$

або після врахування виразу для ємності

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Визначимо зміну цієї енергії при розсуванні пластин:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{Q^2 d_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} - \frac{Q^2 d_1}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{Q^2 (d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Ця зміна чисельно буде рівна механічній роботі $A$, яку потрібно здійснити для розсування пластин, тобто

$$A = \frac{Q^2 (d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Але нам невідомий заряд $Q$, знайдемо його за першою формулою, що використана в цій задачі:

$$Q = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d_1}.$$

Підставимо цей заряд у формулу для визначення роботи:

$$A = \frac{Q^2 (d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{(\varepsilon_0 \varepsilon S U)^2}{d_1^2} \frac{d_2 - d_1}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2 (d_2 - d_1)}{2 d_1^2}.$$

Розрахуємо це значення:

$$A = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 200^2 \cdot (0,1 - 0,03)}{2 \cdot 0,03^2} = 68,8 \text{ (нДж)}.$$

**12.4.** Конденсатор, заряджений до напруги 100 В, з'єднують із конденсатором із такою самою ємністю, але зарядженим до напруги 200 В: один раз однойменно зарядженими обкладками, а інший — різнойменно зарядженими обкладками. Яка напруга встановиться між обкладками в обох випадках?

| |
|---|
| $U_1 = 100$ В, |
| $U_2 = 200$ В, |
| $C_1 = C_2 = C$ |
| $U', U''$–? |

Спочатку знайдемо заряди на обкладках конденсаторів до з'єднання (12.3):

$$q_1 = CU_1, \quad q_2 = CU_2.$$

Розглянемо перший випадок. При з'єднанні однойменних обкладок загальний заряд батареї дорівнює сумі зарядів на обкладках до з'єднання (12.13):

$$q' = q_1 + q_2 = CU_1 + CU_2 = C(U_1 + U_2).$$

Напруга на батареї після з'єднання (12.3):

$$U' = \frac{q'}{C'}.$$

Оскільки конденсатори з'єднуються паралельно (12.11):

$$C' = C_1 + C_2 = 2C.$$

Підставляємо у вираз для знаходження $U'$ знайдену напругу та ємність:

$$U' = \frac{q'}{C'} = \frac{C(U_1 + U_2)}{2C} = \frac{U_1 + U_2}{2}.$$

Тепер переходимо до розгляду другого випадку. При з'єднанні різнойменних обкладок загальний заряд відповідно до (12.13) можна визначити як

$$q'' = q_2 - q_1 = CU_2 - CU_1 = C(U_2 - U_1),$$

де $q_2 > q_1$, оскільки $U_2 > U_1$. Далі розв'язок аналогічний першому випадку:

$$U'' = \frac{q''}{C''} = \frac{C(U_2 - U_1)}{2C} = \frac{U_2 - U_1}{2}.$$

Розрахуємо відповідні значення:

$$U' = \frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{100 + 200}{2} = 150 \text{ (В)},$$

$$U'' = \frac{U_2 - U_1}{2} = \frac{200 - 100}{2} = 50 \text{ (В)}.$$

**12.5.** Плоский повітряний конденсатор із площею кожної з пластин $S = 1$ м$^2$ заряджений та відключений від джерела струму. Після заряджання на кожній пластині зосереджений заряд $q = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл. Визначити силу притягання між пластинами конденсатора.

$S = 1$ м$^2$,
$q = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл,
$\varepsilon = 1$,
$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

$F$—?

Сила взаємодії між пластинами визначається за формулою (12.10):

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

де енергія електричного поля у конденсаторі $W$ (12.8)

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

із урахуванням виразу для визначення ємності плоского конденсатора (12.4)

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x}$$

набирає вигляду

$$W = \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Знайдемо шукану силу:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}\right) = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Розрахуємо це значення:

$$F = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = -\frac{\left(3 \cdot 10^{-6}\right)^2}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1} = -0,508 \text{ (Н)}.$$

**12.6.** Знайти енергію системи, що складається із двох металевих куль із радіусами $R_1 = 5$ см і $R_2 = 10$ см та зарядами $Q_1 = 1$ нКл і $Q_2 = 10$ нКл, які не контактують між собою. Мінімальна відстань між поверхнями куль $R_0 = 2$ см. Кулі знаходяться у вакуумі.

| |
|---|
| $R_1 = 0,05$ м, |
| $R_2 = 0,1$ м, |
| $R_0 = 0,02$ м, |
| $q_1 = 10^{-9}$ Кл, |
| $q_2 = 10^{-8}$ Кл, |
| $\varepsilon = 1$, |
| $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м |
| $W-?$ |

Повна енергія системи двох сфер є сумою їх власних енергій і потенціальної енергії взаємодії:

$$W = W_{1p} + W_{2p} + W_{12p}.$$

Власні енергії сфер визначимо згідно із (12.8):

$$W = \frac{Q^2}{2C},$$

або, врахувавши формулу для визначення ємності сфери (12.2),

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

матимемо

$$W_{1p} = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}, \quad W_{2p} = \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}.$$

Енергія взаємодії $W_{12}$ зарядів за законом Кулона (11.4) визначається роботою з переміщення заряду $Q_2$ у полі заряду $Q_1$ (або навпаки) з нескінченності до відстані $R$ між ними. Заряджену сферу можна розглядати як точковий заряд, що міститься всередині сфери та чисельно збігається з її зарядом. Згідно з умовою відстань між такими ефективними зарядами буде дорівнювати $R_1 + R_0 + R_2$. Отже, отримуємо

$$W_{12p} = F_{12} \cdot (R_1 + R_0 + R_2) =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{(R_1 + R_0 + R_2)^2} \cdot (R_1 + R_0 + R_2) =$$
$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R_1 + R_0 + R_2)}.$$

Із урахуванням цього запишемо кінцеву формулу для розрахунку повної енергії:

$$W = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} + \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2} + \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R_1+R_0+R_2)} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} + \frac{2Q_1Q_2}{R_1+R_0+R_2}\right).$$

Розрахуємо цю енергію:

$$W = \frac{1}{8\cdot 3,14159\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 1}\times$$

$$\times\left(\frac{(10^{-9})^2}{0,05} + \frac{(10^{-8})^2}{0,1} + \frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 10^{-8}}{0,05+0,02+0,1}\right) = 5,1\cdot 10^{-6}\ (\text{Дж}).$$

**12.7.** Три конденсатори з ємностями 1 мкФ, 2 мкФ і 3 мкФ з'єднано послідовно і підключено до джерела напруги із різницею потенціалів 220 В. Який заряд та напруга на кожному конденсаторі?

| |
|---|
| $C_1 = 10^{-6}$ Ф, <br> $C_2 = 2\cdot 10^{-6}$ Ф, <br> $C_3 = 3\cdot 10^{-6}$ Ф, <br> $U = 220$ В |
| $q_1, q_2, q_3$—? <br> $U_1, U_2, U_3$—? |

Знайдемо загальну ємність батареї (12.14):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

$$C = \frac{C_1C_2C_3}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_1C_2}.$$

Загальний заряд системи можна знайти за формулою (12.3):

$$q = CU = \frac{C_1C_2C_3U}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_1C_2}.$$

Розрахуємо це значення:

$$q = \frac{10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot 220}{2\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6} + 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6} + 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-6}} = 1,2\cdot 10^{-4}\ (\text{Кл}).$$

Як відомо, при послідовному з'єднанні заряд батареї за величиною рівний заряду на кожному конденсаторі (12.16), тому

$$q_1 = q_2 = q_3 = q = 1,2\cdot 10^{-4}\ (\text{Кл}).$$

Напругу на кожному конденсаторі будемо знаходити за формулою (12.3):

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{1,2\cdot 10^{-4}}{10^{-6}} = 120\ (\text{В}),$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{1,2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}} = 60\ (\text{В}),$$

$$U_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ (В)}.$$

**12.8.** Два однакових повітряних конденсатори з ємностями 1000 пФ кожний заряджено до напруги 600 В. Один із конденсаторів занурюється в зарядженому стані в гас, після чого конденсатори з'єднують паралельно однойменно зарядженими обкладками. Визначити роботу електричних сил, що виконується при перезаряджанні конденсаторів.

| |
|---|
| $C_1 = C_2 = C = 10^{-9}$ Ф,<br>$U_1 = U_2 = U = 600$ В,<br>$\varepsilon_г = 2,1$ |
| $A$–? |

До занурення в гас енергії обох конденсаторів однакові й визначаються співвідношенням (12.8):

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Після занурення одного з конденсаторів у гас його ємність дорівнює $C'$:

$$C' = \varepsilon_г C,$$

де $\varepsilon_г$ – діелектрична проникність гасу. Енергія цього конденсатора згідно із (12.8) також змінюється:

$$W' = \frac{q^2}{2C'} = \frac{q^2}{2\varepsilon_г C}.$$

Таким чином, загальна енергія конденсаторів до їх з'єднання (один у повітрі, інший занурено в гас) дорівнює

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{q^2}{2\varepsilon_г C} = \frac{q^2(\varepsilon_г + 1)}{2\varepsilon_г C}.$$

Після паралельного з'єднання згідно із (12.13) заряд системи подвоюється:

$$q_{заг} = q + q = 2q,$$

а ємність є сумою ємностей обох конденсаторів (12.11):

$$C_{заг} = \varepsilon_г C + C = (\varepsilon_г + 1)C.$$

Енергія батареї визначиться як (12.8):

$$W = \frac{q_{заг}^2}{2C_{заг}} = \frac{(2q)^2}{2(\varepsilon_г + 1)C} = \frac{2q^2}{(\varepsilon_г + 1)C}.$$

Робота зовнішніх сил $A^*$ при перезаряджанні конденсаторів дорівнює приросту їх енергії:

$$A^* = \frac{2q^2}{(\varepsilon_\text{г}+1)C} - \frac{q^2(\varepsilon_\text{г}+1)}{2\varepsilon_\text{г}C} = \frac{q^2}{C}\left(\frac{2}{\varepsilon_\text{г}+1} - \frac{\varepsilon_\text{г}+1}{2\varepsilon_\text{г}}\right) =$$

$$= \frac{q^2}{C}\left(\frac{4\varepsilon_\text{г} - (\varepsilon_\text{г}+1)^2}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)}\right) = \frac{q^2}{C}\left(\frac{4\varepsilon_\text{г} - \varepsilon_\text{г}^2 - 2\varepsilon_\text{г} - 1}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)}\right) =$$

$$= \frac{q^2}{C}\left(\frac{-\varepsilon_\text{г}^2 + 2\varepsilon_\text{г} - 1}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)}\right) = -\frac{q^2(\varepsilon_\text{г}-1)^2}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)C}.$$

Використаємо зв'язок (12.3):

$$q = CU,$$

і будемо мати таке:

$$A^* = -\frac{q^2(\varepsilon_\text{г}-1)^2}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)C} = -\frac{C^2U^2(\varepsilon_\text{г}-1)^2}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)C} = -\frac{CU^2(\varepsilon_\text{г}-1)^2}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)}.$$

Робота електричних сил $A = -A^*$, отже, маємо

$$A = \frac{CU^2(\varepsilon_\text{г}-1)^2}{2\varepsilon_\text{г}(\varepsilon_\text{г}+1)} = \frac{10^{-9}\cdot 600^2\cdot(2,1-1)^2}{2\cdot 2,1\cdot(2,1+1)} = 3,04\cdot 10^{-5}\ (\text{Дж}).$$

## 12. Електроємність. Конденсатори

### Задачі для самостійного розв'язування

**12.9.** На кулі зосереджений заряд $6 \cdot 10^{-8}$ Кл, а потенціал кулі 18 кВ. Знайти її радіус, якщо вона знаходиться у вакуумі.

**12.10.** До якого потенціалу зарядиться провідник ємністю 1 мкФ, якщо йому надати заряду $2 \cdot 10^{-10}$ Кл?

**12.11.** Яким повинен бути радіус кулі, щоб її ємність у вакуумі дорівнювала 1 Ф?

**12.12.** Визначити ємність відокремленої металевої кулі із радіусом 10 см, якщо: а) вона знаходиться у вакуумі; б) вона знаходиться у воді ($\varepsilon = 81$).

**12.13.** Надавши провіднику заряд $10^{-8}$ Кл, його потенціал збільшили на 100 В. Визначити ємність провідника.

**12.14.** Визначити ємність Земної кулі, вважаючи її радіус таким, що дорівнює 6400 км. Який заряд потрібно передати Земній кулі для того, щоб підвищити її потенціал до 3 кВ?

**12.15.** Ємності двох металевих куль 10 пФ і 20 пФ, а заряди на них 17 нКл і 30 нКл відповідно. Чи будуть переміщуватись електрони з однієї кулі на іншу, якщо їх з'єднати дротом? Відповідь підтвердити розрахунками.

**12.16.** Заряджена до потенціалу 300 В металева куля із радіусом 15 см з'єднується з незарядженою кулею довгою тонкою дротиною. Після з'єднання потенціал кулі став рівний 100 В. Визначити радіус другої кулі.

**12.17.** Дві кулі з ємностями 100 пФ і 60 пФ зарядили до потенціалів 220 В і 240 В відповідно, а потім з'єднали провідником, ємністю якого можна знехтувати. Визначити заряд кожної кулі після з'єднання.

**12.18.** Електричний заряд на одній кулі 200 нКл, а на іншій 100 нКл. Ємності куль — 2 пФ і 3 пФ відповідно. Визначити, як розподіляться заряди між кулями після того, як вони будуть з'єднані провідником.

**12.19.** Кулі із радіусом 2 см надали електричного заряду 1,83 нКл.

Який заряд перейде на маленьку незаряджену кульку, що має радіус 2 мм, якщо її з'єднати провідником з великою кулею? Ємністю з'єднувального провідника знехтувати.

**12.20.** Один мільйон сферичних крапельок зливається в одну велику краплю. Радіус кожної крапельки $5 \cdot 10^{-4}$ см, заряд $1,6 \cdot 10^{-14}$ Кл. Яка енергія витрачається на подолання електричних сил відштовхування при з'єднанні крапельок?

**12.21.** Плоский конденсатор, відстань між пластинами якого $d = 0,5$ см, заряджений до різниці потенціалів $U = 700$ В. Діелектрик – кров ($\varepsilon = 85$). Визначити об'ємну густину енергії поля конденсатора.

**12.22.** Визначити товщину діелектрика в конденсаторі з ємністю 1400 пФ та площею перекриття пластин $1,4 \cdot 10^{-3}$ м$^2$. Діелектрик – слюда ($\varepsilon = 6$).

**12.23.** Плоский повітряний конденсатор утворений двома квадратними пластинами, які знаходяться одна від одної на відстані $10^{-3}$ м. Якою повинна бути ширина кожної з цих пластин, щоб ємність конденсатора дорівнювала 1 Ф?

**12.24.** Якої найбільшої ємності можна зробити конденсатор, використавши як діелектрик відмиту від емульсії фотопластинку розміром $9 \times 12$ см і товщиною $5 \cdot 10^{-3}$ м ($\varepsilon = 7$)?

**12.25.** Конденсатор зроблений з листів станіолю, які розділені пластинками зі слюди ($\varepsilon = 6$) з товщиною $10^{-3}$ м і площею $9 \cdot 10^{-4}$ м$^2$ кожна. Скільки листів станіолю потрібно взяти, щоб отримати ємність 10 мкФ?

**12.26.** Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин діаметром 0,22 м кожна, які відокремлені одна від одної шаром повітря з товщиною $3 \cdot 10^{-3}$ м. Напруга на пластинах конденсатора 120 В. Який заряд зосереджений на кожній пластині?

**12.27.** Плоский повітряний конденсатор складається з двох пластин. Визначити ємність конденсатора, якщо площа кожної пластини $10^{-2}$ м$^2$, а відстань між ними $0,5 \cdot 10^{-2}$ м$^2$. Як зміниться ємність конденсатора при зануренні його в гліцерин ($\varepsilon = 56,2$)?

**12.28.** Який з двох конденсаторів і у скільки разів має більшу енергію, якщо для першого конденсатора $C_1 = 4$ мкФ, $U_1 = 10$ В, а для другого $C_2 = 10$ мкФ, $U_2 = 4$ В?

**12.29.** Для вивчення структури та функцій біологічних мембран використовують моделі — штучні фосфоліпідні мембрани, що складаються із біомолекулярного шару фосфоліпідів. Товщина штучної мембрани становить близько $l = 6$ нм. Знайдіть ємність 1см$^2$ такої мембрани, якщо її відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 3$. Порівняйте отриману ємність із аналогічною характеристикою конденсатора, відстань між пластинами якого $l = 1$ мм.

**12.30.** Плоский повітряний конденсатор із площею пластин 5 дм$^2$ та відстанню між ними 2 мм заряджається до різниці потенціалів 50 В. Визначити заряд та напруженість електричного поля в конденсаторі у трьох випадках: а) конденсатор зарядили та, не від'єднуючи від джерела струму, залили гасом; б) конденсатор спочатку залили гасом, а потім почали заряджати; в) конденсатор зарядили та від'єднали від джерела струму, а вже потім залили гасом. Яку роботу потрібно здійснити, щоб в останньому випадку збільшити відстань між пластинами у три рази?

**12.31.** Як зміниться ємність конденсатора, якщо відстань між пластинами збільшити в 2 рази, а діелектрик замінити іншим, із діелектричною проникністю у 4 рази меншою?

**12.32.** Повітряний конденсатор, що складається із двох пластин площею 10 см$^2$ кожна, що знаходяться на відстані 2 см, занурили у гас. На скільки потрібно розсунути пластини, щоб ємність конденсатора не змінилася? Діелектрична проникність гасу $\varepsilon = 2,1$.

**12.33.** Плоский повітряний конденсатор зарядили від джерела із напругою 200 В. Потім конденсатор від'єднали від джерела. Якою буде напруга між пластинами, якщо відстань між ними збільшити від початкової 0,2 мм до 0,7 мм, а простір між пластинами заповнити слюдою із діелектричною проникністю $\varepsilon = 7$? Як зміниться при цьому напруженість поля між обкладками?

**12.34.** Як потрібно змінити відстань між пластинами плоского конденсатора, підключеного до джерела постійного струму, щоб напруженість поля між ними зросла в 7 разів?

**12.35.** Конденсатор підключений до акумуляторної батареї. Відстань між пластинами зменшили в 2 рази. Чи змінилася різниця потенціалів між пластинами? Як змінилася напруженість поля між пластинами та заряд конденсатора?

**12.36.** Плоский конденсатор, між обкладками якого знаходиться скляна пластинка, приєднали до акумулятора. Заряд конденсатора дорівнює 14 мкКл. Який заряд пройде через акумулятор при видаленні пластинки?

**12.37.** Максимальна ємність конденсатора, за допомогою якого налагоджують частоту в радіоелектронному пристрої, дорівнює 100 пФ. При повороті рухомих пластин ємність конденсатора може бути зменшена до 10 пФ. Припустимо, що конденсатор підключений до джерела з різницею потенціалів $U = 0,3$ кВ, коли має максимальну ємність. Потім ручка повертається, і ємність конденсатора стає мінімальною. Яка робота виконується при повороті ручки?

**12.38.** Обчислити силу взаємодії обкладок сферичного конденсатора, якщо він заповнений діелектриком з проникністю $\varepsilon = 6$, а радіуси $R_1$ і $R_2$ становлять відповідно 6 см і 8 см. Конденсатор підключений до джерела струму із різницею потенціалів $U = 1$ кВ.

**12.39.** Циліндричний конденсатор із радіусами обкладок $R_1 = 10$ см і $R_2 = 15$ см, що заповнений діелектриком із проникністю $\varepsilon = 4$, підключений до джерела струму з напругою $U = 300$ В. Визначити силу взаємодії обкладок на одиницю $L = 1$ м довжини конденсатора.

**12.40.** Потенціал зарядженої металевої кулі й напруженість на відстані $a = 5$ см від її поверхні становлять $\varphi = 1,2 \cdot 10^4$ В; $E = 6 \cdot 10^4$ В/м. Визначити енергію $W$ кулі.

**12.41.** Сферичну тонкостінну оболонку із радіусом $R_1$, яка рівномірно заряджена по поверхні зарядом $Q$, розширили до радіуса $R_2$. Визначте зміну енергії системи.

**12.42.** Дві концентричні металеві сфери із радіусами $R_1 = 2$ см і $R_2 = 2,1$ см утворюють сферичний конденсатор. Визначити його ємність, якщо простір між сферами заповнений парафіном. Який радіус повинна мати куля, що занурена у парафін, щоб мати таку саму ємність?

**12.43.** Під час вивчення фотоелектричних явищ використовується сферичний конденсатор, що складається з металевої кульки з діаметром $D = 1,5$ см (катод) і внутрішньої поверхні, яка посріблена зсередини сферичної колби з діаметром $D = 11$ см (анод). Повітря з колби висмоктується. Знайти ємність $C$ такого конденсатора.

**12.44.** Відокремлена металева сфера з ємністю $C = 10$ пФ заряджена до потенціалу $\varphi = 3$ кВ. Визначити енергію $W$ поля у сферичному шарі, який обмежений сферою і концентричною з нею сферичною поверхнею, радіус якої в три рази більший за радіус сфери.

**12.45.** Якою повинна бути відстань між обкладками плоского конденсатора, ємність якого відповідає: а) ємності послідовно з'єднаних 20 однакових конденсаторів; б) ємності таких самих 20 конденсаторів, але з'єднаних паралельно?

**12.46.** Є два конденсатори з ємностями 2 мкФ і 4 мкФ. Визначити їх загальну ємність при паралельному і послідовному з'єднанні.

**12.47.** Є три конденсатори з ємностями 20 мкФ, 50 мкФ і 70 мкФ. Визначити еквівалентну ємність при їх паралельному і послідовному з'єднанні.

**12.48.** Знайти інтервал ємностей, на які може бути налаштована система, що складається з двох послідовно з'єднаних конденсаторів: один із них має сталу ємність $C_1 = 100$ пФ, а ємність другого $C_2$ можна змінювати в інтервалі від 400 пФ до 900 пФ.

**12.49.** Знайти інтервал ємностей, на які може бути налаштована система, що складається із двох паралельно з'єднаних конденсаторів: один із них має сталу ємність $C_1 = 400$ пФ, а ємність другого $C_2$ можна змінювати в інтервалі від 100 пФ до 800 пФ.

**12.50.** Два конденсатори з'єднано послідовно в батарею, на яку подано заряд 500 нКл. Ємності конденсаторів 20 пФ і 80 пФ. Знайти загальну ємність конденсаторів, напругу на батареї і напругу на кожному з конденсаторів окремо.

**12.51.** Три конденсатори з'єднані послідовно в батарею. Заряд на конденсаторах 250 нКл. Ємності конденсаторів дорівнюють 2 мкФ, 3 мкФ і 5 мкФ. Знайти загальну ємність батареї конденсаторів, напругу батареї, а також напругу на кожному конденсаторі.

**12.52.** Два послідовно з'єднаних конденсатори з ємностями 2 мкФ і 4 мкФ приєднані до джерела напруги 120 В. Визначити напругу на кожному конденсаторі.

**12.53.** Три конденсатори з ємностями 2 мкФ, 4 мкФ і 6 мкФ з'єднані послідовно. Напруга батареї 110 кВ. Яка напруга на кожному конденсаторі?

**12.54.** Два однакових конденсатори з'єднано послідовно і підключено до джерела напруги. У скільки разів зміниться різниця потенціалів на одному з конденсаторів, якщо інший занурити в рідину з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$?

**12.55.** Два однакових плоских повітряних конденсатори з'єднано послідовно і підключено до джерела напруги. Всередину одного з них вносять діелектрик з діелектричною проникністю $\varepsilon$. Діелектрик заповнює весь простір між обкладками. Як і у скільки разів зміниться напруженість електричного поля в цьому конденсаторі?

**12.56.** Два плоских конденсатори, що мають ємність по 10 пФ кожний, з'єднали в батарею послідовно. Наскільки зміниться ємність батареї, якщо простір між пластинами одного з конденсаторів заповнити діелектриком з проникністю $\varepsilon = 2$?

**12.57.** Систему конденсаторів із загальною ємністю 100 мкФ, що складається з трьох паралельно з'єднаних конденсаторів, включили до мережі з напругою 250 В. На обкладках одного з конденсаторів з'явився заряд 10 мКл. Визначити ємність і заряд кожного з двох інших однакових конденсаторів.

**12.58.** Два конденсатори з ємностями 30 пФ і 70 пФ з'єднали паралельно і підключили до джерела з напругою 100 В. Яка напруга і який заряд буде на кожному з конденсаторів?

**12.59.** Три конденсатори з ємностями 70 пФ, 50 пФ і 30 пФ з'єднали паралельно і підключили до джерела з напругою 5 кВ. Яка напруга і заряд будуть на кожному з конденсаторів?

**12.60.** Конденсатор з ємністю 3 мкФ заряджений до різниці потенціалів 300 В, а конденсатор з ємністю 2 мкФ – до 200 В. Обидва конденсатори з'єднані після заряджання паралельно однойменними полюсами. Яка різниця потенціалів встановиться на обкладках конденсаторів після їх з'єднання?

**12.61.** Два конденсатори зарядили до напруг 600 В і 200 В і з'єднали паралельно. Визначити різницю потенціалів між обкладками конденсаторів, якщо ємність першого з них в 3 рази більша ємності другого.

**12.62.** Три однакових плоских конденсатори з'єднано між собою паралельно. Ємність отриманої батареї 90 пФ. Площа кожної пластини 100 см$^2$, діелектрик – скло. Знайти товщину скла.

**12.63.** Конденсатор з ємністю 2 мкФ заряджають до напруги 110 В. Потім його від'єднують від джерела та під'єднують до незарядженого конденсатора, який після цього заряджається до 44 В. Визначити ємність другого конденсатора.

**12.64.** Конденсатор з ємністю 20 мкФ, що заряджений до різниці потенціалів 100 В, з'єднали паралельно із зарядженим до різниці потенціалів 40 В конденсатором, ємність якого невідома. Визначити ємність другого конденсатора, якщо різниця потенціалів після з'єднання виявилася 80 В.

**12.65.** Два конденсатори з ємностями 4 мкФ і 2 мкФ заряджено до потенціалів 300 В і 600 В відповідно. Визначити різницю потенціалів на обкладках конденсаторів, якщо їх з'єднали паралельно: а) однойменно зарядженими пластинами; б) різнойменно зарядженими пластинами.

**12.66.** Відстань $d$ між пластинами плоского конденсатора дорівнює $1,33$ мм, а площа $S$ пластин становить 20 см$^2$. У просторі між пластинами конденсатора знаходяться два шари діелектриків: слюда з товщиною $d_1 = 0,7$ мм і парафін з товщиною $d_2 = 0,3$ мм. Визначити електроємність $C$ конденсатора.

**12.67.** У плоскому конденсаторі розмістили плитку парафіну із товщиною $d = 1$ см, яка щільно прилягає до його пластин. На скільки потрібно збільшити відстань між пластинами, щоб отримати початкову ємність?

# Довідковий додаток

**Таблиця 1 —** Деякі одиниці системи СІ

| Величина | Одиниця вимірювання | Позн. |
|---|---|---|
| Довжина | метр | м |
| Маса | кілограм | кг |
| Час | секунда | с |
| Сила струму | ампер | А |
| Температура | кельвін | К |
| Сила світла | кандела | кд |
| Кількість речовини | моль | моль |
| Плоский кут | радіан | рад |
| Тілесний кут | стерадіан | ср |
| Частота | герц | Гц |
| Сила | ньютон | Н |
| Енергія | джоуль | Дж |
| Потужність | ват | Вт |
| Тиск | паскаль | Па |
| Світловий потік | люмен | лм |
| Освітленість | люкс | лк |
| Електричний заряд | кулон | Кл |
| Потенціал | вольт | В |
| Опір | ом | Ом |
| Електроємність | фарад | Ф |
| Магнітний потік | вебер | Вб |
| Магнітна індукція | тесла | Тл |
| Індуктивність | генрі | Гн |
| Електрична провідність | сименс | См |

**Таблиця 2 —** Десяткові приставки СІ

| Кратність | Приставка | Позн. | Приклад |
|---|---|---|---|
| $10^{24}$ | йота | Й | ЙБ – йотабайт |
| $10^{21}$ | цета | З | Зг – цетаграм |
| $10^{18}$ | екза | Е | ЕДж – екзаджоуль |
| $10^{15}$ | пета | П | Пфлоп – петафлоп |
| $10^{12}$ | тера | Т | ТВ – теравольт |
| $10^{9}$ | гіга | Г | ГГц – гігагерц |
| $10^{6}$ | мега | М | МПа – мегапаскаль |
| $10^{3}$ | кіло | к | кН – кілоньютон |
| $10^{2}$ | гекто | г | гОм – гектоом |
| $10^{1}$ | дека | да | дал – декалітр |
| $10^{-1}$ | деци | д | дБ – децибел |
| $10^{-2}$ | санти | с | см – сантиметр |
| $10^{-3}$ | мілі | м | мТл – мілітесла |
| $10^{-6}$ | мікро | мк | мкГн – мікрогенрі |
| $10^{-9}$ | нано | н | нм – нанометр |
| $10^{-12}$ | піко | п | пФ – пікофарад |
| $10^{-15}$ | фемто | ф | фс – фемтосекунда |
| $10^{-18}$ | атто | а | ас – аттосекунда |
| $10^{-21}$ | цепто | ц | цН – цептоньютон |
| $10^{-24}$ | йокто | й | йг – йоктограм |
| $10^{-10}$ м | ангстрем | $\mathring{A}$ | ангстрем |

**Таблиця 3 —** Деякі фундаментальні фізичні сталі

| Величина | Символ | Значення |
|---|---|---|
| Маса Землі | | $5,97 \cdot 10^{24}$ кг |
| Радіус Землі | | $6,37 \cdot 10^{6}$ м |
| Прискорення вільного падіння | $g$ | $9,81$ м/с$^2$ |
| Швидкість світла у вакуумі | $c$ | $3 \cdot 10^{8}$ м/с |
| Гравітаційна стала | $G$ | $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$ |
| Стала Авогадро | $N_A$ | $6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль |
| Об'єм одного моля газу | $V_m$ | $22,4 \cdot 10^{-3}$ м$^3$/моль |
| Стала Лошмідта | $L = \frac{N_A}{V_m}$ | $2,69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ |
| Стала Больцмана | $k$ | $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К |
| Універсальна газова стала | $R = kN_A$ | $8,314$ Дж/(моль·К) |
| Стала Планка | $h$ | $6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с |
| Елементарний заряд | $e$ | $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл |
| Маса електрона | $m_e$ | $9,11 \cdot 10^{-31}$ кг |
| Маса протона | $m_p$ | $1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Маса нейтрона | $m_n$ | $1,6749 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Атомна одиниця маси | 1 а.о.м. | $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Електрична стала | $\varepsilon_0$ | $8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м |
| Магнітна стала | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м |
| Стала Фарадея | $F = eN_A$ | 96485 Кл/моль |
| Атмосферний тиск | atm | 101325 Па |

**Таблиця 4 —** Таблиця похідних

| $f(x)$ | $f'(x)$ | | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| const | $0$ | | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $x^a$ | $ax^{a-1}$ | | $\operatorname{tg} x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | | $\operatorname{ctg} x$ | $-1/\sin^2 x$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | | $\arcsin x$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\log_a x$ | $1/(x \ln a)$ | | $\arccos x$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\ln x$ | $1/x$ | | $\operatorname{arctg} x$ | $1/(1+x^2)$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | | $\operatorname{arcctg} x$ | $-1/(1+x^2)$ |

**Таблиця 5 —** Правила диференціювання

1. $(cf)' = cf'$;
2. $(f+g)' = f' + g'$;
3. $(f-g)' = f' - g'$;
4. $(fg)' = f'g + fg'$;
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
6. $(f^g)' = \left(e^{\,g \ln f}\right)'$;
7. $(f(g))' = f'_g g'$;
8. $f' = (\ln f)' f$.

**Таблиця 6 —** Діелектричні проникності речовин

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Вакуум | 1 | | Повітря | 1 |
| Вода | 81 | | Парафін | 2.1 |
| Гас | 2.1 | | Слюда | 6 |
| Мастило | 2.5 | | Скло | 7 |
| Гліцерин | 41 | | Кров | 85 |

**Таблиця 7 —** Список табличних невизначених інтегралів

1. $\int \mathrm{d}x = x + C;$

2. $\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;$

3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C;$

6. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C;$

8. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

10. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C;$

11. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + C;$

12. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C;$

13. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

14. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

**Таблиця 8 —** Фізичні властивості твердих речовин

| Речовина | Густина, кг/м$^3$ | Питома теплоємність, Дж/(кг·К) | Температура плавлення, °С | Питома теплота плавлення, кДж/кг |
|---|---|---|---|---|
| Алюміній | 2700 | 880 | 660 | 380 |
| Граніт | 2600 | – | – | – |
| Залізо | 7900 | 460 | 1535 | 270 |
| Золото | 19300 | 134 | 1063 | 66.5 |
| Залізобетон | 2200 | 880 | – | – |
| Лід | 900 | 2100 | 0 | 330 |
| Латунь | 8500 | 380 | 1000 | – |
| Мідь | 8900 | 380 | 1083 | 180 |
| Нікелін | 8500 | – | – | – |
| Нікель | 8900 | 460 | 1452 | 244-306 |
| Олово | 7300 | 230 | 232 | 59 |
| Свинець | 11300 | 130 | 327 | 25 |
| Срібло | 10500 | 210 | 960 | 87 |
| Сталь | 7800 | 460 | 1400 | 82 |
| Скло | 2500 | 830 | – | – |
| Цинк | 7130 | 400 | 420 | 102 |
| Чавун | 7400 | 550 | 1150 | 96 (сір.)<br>140 (біл.) |

**Таблиця 9 —** Фізичні властивості рідин

| Речовина | Густина, кг/м$^3$ | Питома теплоємність, Дж/(кг·К) | Температура кипіння, °C | Питома теплота пароутворення, кДж/кг |
|---|---|---|---|---|
| Вода прісна | 1000 | 4200 | 100 | 2300 |
| Вода морська | 1030 | – | – | – |
| Бензин | 700 | 2100 | 40 | – |
| Гас | 800 | 2100 | – | – |
| Нафта | 800 | – | – | – |
| Ртуть | 13600 | 120 | 357 | 290 |
| Спирт | 790 | 2400 | 78 | 850 |
| Машинне масло | 900 | 2100 | 316 | – |

**Таблиця 10 —** Питома теплота згоряння палива, МДж/кг

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Бензин | 46 | | Гас | 46 |
| Дерево | 10 | | Нафта | 43 |
| Дизельне паливо | 42 | | Спирт | 29 |
| Кам'яне вугілля | 29 | | Умовне паливо | 29 |
| Порох | 3.8 | | Деревне вугілля | 31 |
| Водень | 121 | | Метан | 50 |
| Мазут | 39.2 | | Торф | 8.1 |

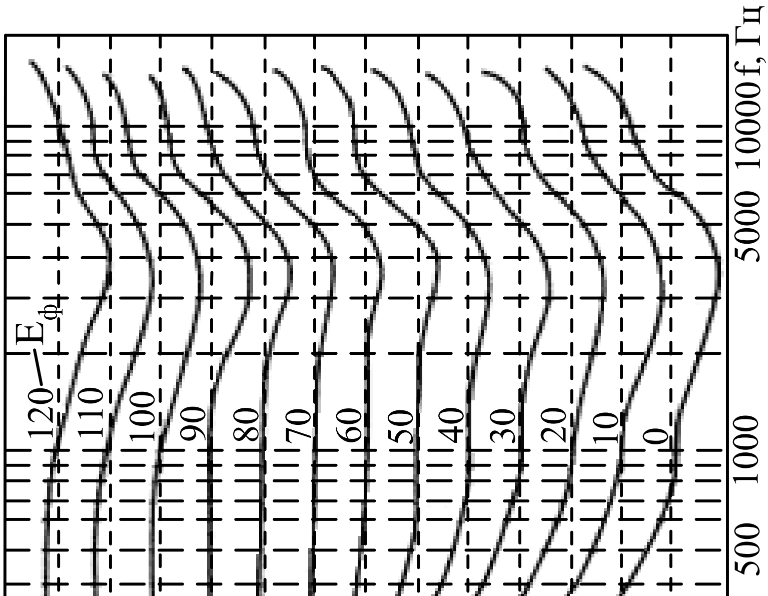



**Рисунок 12.1 —** Криві рівної гучності

# Список літератури


1. Ремизов А. Н. Медицинская и биологическая физика / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина, А. Я. Потапенко. – М. : Дрофа, 2003. – 560 с.

2. Ремизов А. Н. Сборник задач по медицинской и биологической физике / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина. – М. : Дрофа, 2001. – 192 с.

3. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Физматлит, 2001. – 640 с.

4. Варфоломеев Н. М. Международная система единиц измерения: практическое справочное руководство / Н. М. Варфоломеев, З. А. Матысина, В. П. Милюков, А. И. Шкодина. – Киев : Урожай, 1964. – 88 с.

5. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 1, 2, 3. Механика. – М. : Физматлит, 2003. – 352 с.

6. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 4. Основы молекулярной физики и термодинамики. – М. : Физматлит, 2004. – 128 с.

7. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 5, 6. Электричество и магнетизм. – М. : Физматлит, 2004. – 304 с.

8. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 7, 8. Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.

Навчальне видання

**Ляшенко** Яків Олександрович,
**Хоменко** Олексій Віталійович

# Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання

У двох частинах

## Частина 1
## Механіка. Термодинаміка. Електростатика

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки Я. О. Ляшенка
Редактор Н. А. Гавриленко
Комп'ютерне верстання Я. О. Ляшенка

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 13,02. Обл.-вид. арк. 12,15. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.