

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

# Статистическая теория граничного трения атомарно-гладких твёрдых поверхностей при наличии смазочного слоя

А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко

*Предложены реологическая и термодинамическая модели, которые описывают плавление ультратонкой плёнки смазки, заключённой между атомарно-гладкими твёрдыми поверхностями. Проанализированы гистерезисные явления с учётом зависимости модуля сдвига смазки от напряжений и деформации. Исследован самоподобный режим плавления смазки с учётом аддитивного некоррелированного шума основных параметров. На фазовой диаграмме определены области сухого, жидкостного и прерывистого трения. При численном анализе уравнения Ланжевена получены временные ряды сдвиговых напряжений. Проведён их мультифрактальный флуктуационный анализ. Исследована зависимость стационарной силы трения от температуры смазки и скорости сдвига трущихся поверхностей.*

PACS numbers: 05.70.Ce, 05.70.Ln, 47.15.gm, 62.20.Qp, **64.60.** –i, 68.35.Af, **68.60.** –p DOI: 10.3367/UFNr.0182.201210f.1081

## Содержание

1. Введение (1081).
  2. Фазовая динамика трения ультратонких плёнок смазки (1082).  
2.1. Методика эксперимента и модель фазовых переходов прерывистого режима трения. 2.2. Неньютоновские свойства молекулярно-тонких плёнок и теоретические подходы для их описания.
  3. Нелинейная модель плавления ультратонкой плёнки смазки (1088).  
3.1. Основные уравнения. 3.2. Условия перехода. 3.3. Гистерезисные явления при зависимости модуля сдвига от напряжений. 3.4. Гистерезисные явления при зависимости модуля сдвига от деформации.
  4. Влияние флуктуаций на плавление ультратонкой плёнки смазки (1097).  
4.1. Динамическая фазовая диаграмма. 4.2. Временные ряды напряжений. 4.3. Мультифрактальный флуктуационный анализ самоподобных временных рядов.
  5. Термодинамическое представление граничного трения (1102).  
5.1. Свободная энергия. 5.2. Стационарные состояния и фазовая диаграмма. 5.3. Сила трения. 5.4. Кинетика плавления. 5.5. Прерывистый режим
  6. Заключение (1108).
- Список литературы (1109).

А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко. Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова 2, 40007 Сумы, Украина  
Тел. +38 (0542) 333 155  
E-mail: khom@mss.sumdu.edu.ua, nabla04@ukr.net

Статья поступила 16 августа 2011 г.,  
после доработки 31 мая 2012 г.

## 1. Введение

Выявление причин, которые обуславливают трение твёрдых тел, имеет большое значение как с фундаментальной, так и с практической точек зрения [1–3]. С одной стороны, развитие нанотехнологий и создание новых высокотехнологичных приборов, например компьютерных запоминающих устройств и миниатюрных двигателей, требуют глубокого понимания процессов, которые имеют место при трении [4–10]. С другой стороны, несмотря на значительные усилия, до сих пор ещё не существует целостной теории рассматриваемого явления. В настоящее время особое место в физических исследованиях занимают наноразмерные системы, поскольку их поведение отличается от поведения объёмных тел и, кроме того, они имеют большое прикладное значение. В частности, узлы трения, представляющие собой атомарно-гладкие поверхности, разделённые тонким слоем смазки, могут использоваться в системах позиционирования в микроустройствах. При проектировании последних минимальность трения между их подвижными частями является одним из основных критериев.

В последние 20 лет с помощью экспериментального [1, 2, 4–6, 11–13] и теоретического [1, 14, 15] исследования, а также компьютерного моделирования [16–24] удалось значительно продвинуться в понимании физики граничного трения скольжения гладких твёрдых поверхностей при наличии ультратонкой (толщиной менее десяти атомарных диаметров) плёнки жидкости между ними. Экспериментально обнаружено, что в процессе трения жидкая плёнка становится всё более тонкой, сначала её физические свойства изменяются постепенно количественным образом, а затем изменения приобре-

тают резко выраженный качественный характер [1, 2, 5, 6, 11]. Качественные изменения выражаются в ньютоновском механизме течения и замене обычного плавления стеклованием, однако плёнка смазки продолжает вести себя как жидкость. Такое поведение, которое в трибологии называют "смешанным смазыванием", представляет собой промежуточный режим трения, характеризующийся переходом от объёмных свойств к граничным.

Для более тонких плёнок изменения чаще всего значительнее, поскольку их свойства изменяются качественно. Так, в тонких плёнках могут происходить фазовые переходы первого рода в твердоподобные или жидкоподобные фазы [4–6, 17, 18, 24], свойства которых невозможно описать в терминах, приемлемых для свойств жидкости, занимающей большой объём (объёмной жидкости), таких, например, как вязкость. Эти плёнки характеризуются пределом текучести, который является характеристикой разрушения в твёрдых телах, а их времена молекулярной диффузии и релаксации могут более чем на 10 порядков превышать значения соответствующих времён для объёмной жидкости или даже для плёнок, которые только немного толще.

В настоящем обзоре описываются динамические свойства плёнок в граничном режиме, в частности, когда происходят переходы между различными типами динамических состояний во время скольжения. Недавние эксперименты с поверхностями, например, из слюды, кварца, оксидов металлов и мономолекулярных поверхностно-активных веществ, между которыми при скольжении помещались разнообразные органические жидкости и водные растворы [4–6, 12, 13], показали, что такие фазовые переходы являются скорее правилом, чем исключением. При этом они проявляют себя в возникновении прерывистого движения (stick-slip motion), подобного реализующемуся при сухом трении твёрдых поверхностей [25] режиму, который характеризуется периодическими переходами между двумя или более динамическими состояниями во время стационарного скольжения.

Целью настоящего обзора является рассмотрение феноменологических моделей, позволяющих описать поведение ультратонких плёнок смазок при трении между атомарно-гладкими твёрдыми поверхностями, с использованием как детерминистического, так и стохастического подходов.

Раздел 2 посвящён описанию особенностей граничного режима трения. Рассмотрена геометрия трибологического эксперимента. При обсуждении различных моделей описания прерывистого режима трения (stick-slip-режим) основное внимание сосредоточено на концепции фазовых переходов слоя молекул из твердоподобного состояния в жидкоподобное и наоборот. При этом может возникать большое число различных кинетических режимов трения. Особое внимание уделяется описанию ньютоновских свойств молекулярно-тонких плёнок жидкостей. Приведена обобщённая диаграмма Герси–Штрибека, на которой показаны новые трибологические режимы. Проанализированы теоретические подходы для описания граничного режима трения, которые имеют механистический, термодинамический и реологический характер. Сделан вывод о том, что реологическая и термодинамическая модели позволяют учесть как термодинамическое, так и сдвиговое плавление смазки, и потому их рассмотрению посвящён данный обзор.

На основе представлений о вязкоупругой среде, обладающей теплопроводностью, в разделе 3 представлена разработанная нами нелинейная модель плавления ультратонкой плёнки смазки, учитывающая гистерезисные явления и температурную зависимость вязкости. Построены фазовые портреты кинетических режимов плавления, соответствующих различным соотношениям времён релаксации сдвиговых напряжений, деформации и температуры смазки. Определены тепловые и упругие параметры, при которых трение уменьшается.

С помощью учёта случайного характера изменения сдвиговых компонент напряжений и деформации, а также температуры объяснена прерывистая динамика смазки (раздел 4), привлекающая в последнее время повышенное внимание как на атомарном [6, 13, 26, 27], так и на макроскопическом [12, 14, 15] уровнях. В реальных условиях контактирующие тела обладают изначально шероховатой поверхностью — системой впадин и выступов. И стохастическая модель прерывистого трения связана именно с фрактальной природой контактирующих тел. Показано, что воздействие шума температуры приводит к самоподобному поведению временных рядов напряжений, в этом случае временные ряды являются мультифрактальными. Поэтому введение случайных сил (шумов) призвано учесть шероховатости поверхности и неоднородности, которые не присутствуют в модели явным образом.

В разделе 5 рассмотрена термодинамическая модель, описывающая фазовый переход первого рода между структурными состояниями смазочного материала в режиме граничной смазки. Показано, что плавление смазки осуществляется в результате как повышения её температуры, так и сдвига трущихся поверхностей при превышении упругими деформациями (напряжениями) критического значения. Построена фазовая диаграмма с областями сухого и жидкостного трения. С использованием механического аналога трибологической системы проанализирована зависимость силы трения от температуры смазки и относительной скорости сдвига трущихся поверхностей. Описан экспериментально наблюдаемый прерывистый (stick-slip) режим трения, являющийся основной причиной разрушения трущихся деталей [28]. Выяснены причины, приводящие к прерывистому трению.

## 2. Фазовая динамика трения ультратонких плёнок смазки

### 2.1. Методика эксперимента и модель фазовых переходов прерывистого режима трения

Исследование свойств ультратонких слоёв смазки требует специального высокотехнологичного оборудования, что связано с их молекулярными размерами. Однако, несмотря на сложность, существуют экспериментальные установки и соответствующие методики, позволяющие измерять толщину молекулярных слоёв, их вязкость, коэффициент трения, сдвиговые компоненты вязких и упругих напряжений и т.д.

Типичная схема механического аналога трибологической системы представлена на рис. 1. Здесь пружина, имеющая жёсткость  $K$ , связана с блоком массой  $M$ . Блок расположен на гладкой поверхности и отделён от неё слоем смазки толщиной  $h$ . Свободный конец пружины

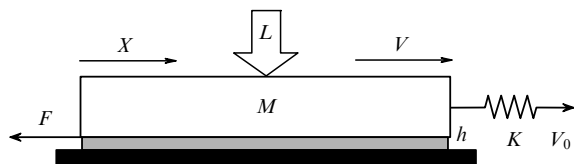


Рис. 1. Схема трибологической системы.

жины приводится в движение с фиксированной скоростью  $V_0$ . При движении блока возникает сила трения  $F$ , оказывающая сопротивление его передвижению. В общем случае скорости блока  $V$  и пружины  $V_0$  не совпадают из-за осциллирующего характера силы  $F$ , что приводит к прерывистому движению блока.

Самый простой способ измерения динамических параметров смазки при трении между двумя твердыми поверхностями — это использование двух атомарно-гладких поверхностей небольшого размера, нанесенных на сферические или цилиндрические поверхности, которые трутся между собой. Этот принцип использован при построении аппарата поверхностных сил (Surface Force Apparatus (SFA)) и атомно-силового микроскопа [29–33].

В аппарате поверхностных сил для измерения расстояния между трущимися поверхностями используются оптические интерференционные методики. При этом белый свет проходит через взаимодействующие поверхности в перпендикулярном к ним направлении. Прошедший луч света фокусируется на спектрометре, который разделяет его на составляющие с различными длинами волн. В результате образуется спектр цветных полос, анализ которого позволяет определить форму трущихся поверхностей и расстояние между ними (с точностью до 0,1 нм). Также можно определить площадь контакта  $A \sim 1-10^4$  мкм<sup>2</sup> (с точностью до  $\pm 5\%$ ). С помощью аппарата поверхностных сил измеряются нормальные и сдвиговые компоненты действующих сил (с точностью до  $\pm 1\%$ ) и величина приложенной нагрузки  $L$  (с точностью до  $\pm 5\%$ ). Камера, в которой находятся трущиеся поверхности, целиком заполнена жидкой исследуемой смазкой. При этом смазка не выдавливается из-под поверхностей трения под действием нагрузки, что облегчает проведение эксперимента. С помощью указанных методик проводились эксперименты с атомарно-гладкими поверхностями из слюды [5, 6, 12, 13, 34–36], кварца [37] и сапфира [38]. Роль смазки при этом играли полимерные цепочки [39], поверхностно-активные вещества [32, 40], протеиновые составы [41] и металлические слои, осажденные на слюду [42].

На рисунке 2а изображены типичные траектории трения, полученные с помощью аппарата поверхностных сил для двух скользящих поверхностей слюды, разделенных смазочным слоем гексадекана толщиной  $\approx 1$  нм. На рисунке 2б, где приведены результаты эксперимента для сферических молекул октаметилциклотетрасилоксана (ОМЦТС) — пики прерывистого режима представляют твердopodobное и жидкоподобное состояния плёнки [4, 18], давая сначала статическую силу трения  $F_s$  (сухое трение), а затем кинетическую силу трения  $F_k$  (жидкостное трение). В этом эксперименте сдвиговая скорость  $V_0$  (см. рис. 1) и температура постоянны. На начальном этапе сила трения  $F$  моно-

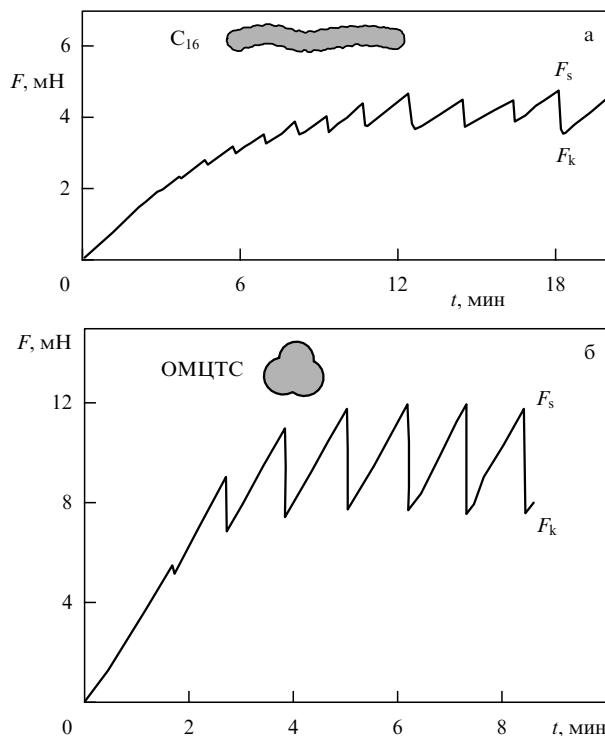


Рис. 2. Зависимость полной силы трения  $F$  от времени  $t$  в эксперименте по трению двух атомарно-гладких поверхностей в аппарате поверхностных сил при начале движения в момент  $t = 0$ . Слой смазки состоит: (а) из цепных молекул гексадекана; (б) из квазисферических молекул ОМЦТС [6].

тонно возрастает, а затем наступает режим прерывистого трения. Из сравнения рис. 2а и б видно, что для упорядочения цепных молекул необходимо большее время, чем для упорядочения сферических, т.е. латентный период первых является более продолжительным [3]. Также следует отметить, что в случае сферических молекул установившийся stick-slip-режим практически стационарен (значения  $F_s$  и  $F_k$  не изменяются с течением времени).

Результаты компьютерного моделирования молекулярной динамики показали, что тонкая межповерхностная плёнка во время скольжения испытывает фазовый переход первого рода между твердopodobным и жидкоподобным состояниями [17, 18, 43], и позволили предположить, что этот фазовый переход является причиной наблюдаемого прерывистого режима поведения простых изотропных жидкостей, находящихся между двумя твердыми кристаллическими поверхностями. Согласно такой интерпретации, прерывистый режим возникает скорее в результате резких изменений текущих свойств плёнки во время перехода [18, 24], чем вследствие постепенных или непрерывных изменений. Соответствующая модель, схематически представленная на рис. 3а, предполагает, что внутренняя сила трения изменяется прерывистым образом (во время фазовых переходов), а не непрерывно. Результирующий прерывистый режим также отличается, например, пики являются более острыми, и этот режим может исчезнуть после превышения некоторой критической скорости  $V_c$  — наступает кинетический режим скольжения [44, 45]. Отметим, что показанное на рис. 3 смещение при скольжении порядка только двух постоянных решётки, тогда как во многих

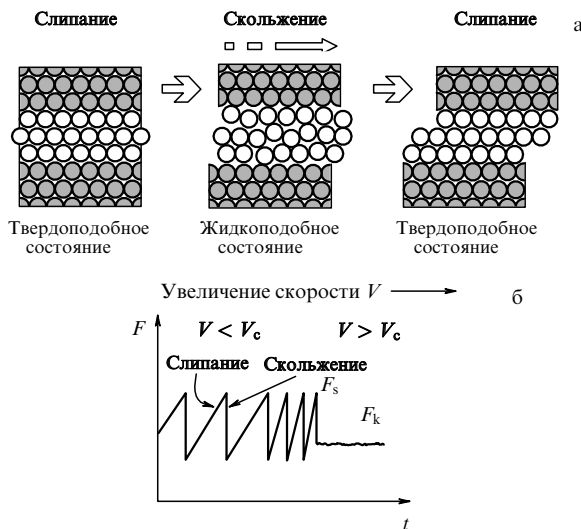


Рис. 3. (а) Модель "фазовых переходов" прерывистого режима трения, в которой тонкая плёнка жидкости попеременно застывает или плавится в течение времени сдвига между двумя твёрдыми кристаллическими поверхностями. (б) Временная эволюция силы трения  $F$  при температуре  $T < T_c$  с увеличением скорости  $V$  [6].

практических задачах оно намного больше. Указанный тип трения можно наблюдать главным образом в экспериментах с гладкими поверхностями при наличии различных жидких смазочных материалов или конденсирующихся паров [4, 6, 16]. Моделирование [17, 18], которое проводилось для многих из рассматриваемых свойств ультратонких жидких плёнок, испытывающих сдвиг между молекулярно-гладкими поверхностями, до сих пор предлагает наиболее адекватное объяснение экспериментальных данных для случая, приведённого на рис. 2.

Так как прерывистое движение наблюдается и в экспериментах при неизменной температуре поверхностей трения, для его объяснения вводится концепция "сдвигового плавления" [15, 22], которая схематически представлена на рис. 3. Этот рисунок объясняет прерывистый (stick-slip) режим. Сначала смазка твердоподобна (stick), затем при превышении некоторого критического напряжения  $\sigma$  (напряжение текучести) она резко переходит в жидкоподобную фазу (slip) в результате разупорядочения, при этом верхняя поверхность немного приподнимается. При дальнейшем движении вследствие сдавливания стенок под воздействием нагрузки  $L$  (см. рис. 1) смазка снова затвердевает (stick).

Тем не менее, как отмечалось ранее и будет подробно показано ниже, два состояния тонкой межповерхностной плёнки нельзя отождествлять с объёмной жидкой или твёрдой фазами [6, 13]. Свойства указанных состояний плёнки обычно сильно отличаются от свойств объёмных фаз, и более корректно рассматривать эти состояния как жидкоподобное и твердоподобное или, возможно, как динамическое и статическое "эпитаксиальные" состояния. Это обусловлено тем, что данные состояния возникают только в межповерхностных плёнках, свойства которых определяются не столько взаимодействием молекул смазки между собой (что имеет место в объёмных жидкостях), сколько ограничением и эпитаксиальными взаимодействиями между атомами плёнки и поверхностями. При этом результаты моделирования молекулярной

динамики показывают [24], что структуры цепных молекул как в твердоподобном, так и в жидкоподобном состояниях (режимы слипания и скольжения) не различаются.

В заключение этого раздела отметим, что прерывистый (stick-slip) режим движения, выяснению особенностей которого посвящена значительная часть данного обзора, наблюдался Боуденом и Тейбором более 50 лет назад [2] при проведении экспериментов по определению влияния молекулярного веса полимеров на коэффициент трения. В прерывистом режиме движения скорость скольжения периодически изменяется со временем, поскольку периоды проскальзывания чередуются с периодами "слипания" контактирующих поверхностей. Однако до сих пор не существует единой теории, которая описывала бы все особенности прерывистого режима трения. Одной из задач настоящего обзора является описание прерывистого режима граничного трения двух атомарно-гладких твёрдых поверхностей, разделённых плёнкой неполярной смазки толщиной в несколько атомарных диаметров, без учёта физико-химических процессов.

## 2.2. Неньютоновские свойства молекулярно-тонких плёнок и теоретические подходы для их описания

С одной стороны, высказывались предположения [32] о всего лишь большей упорядоченности смазки вследствие сжатия стенок, при котором функция распределения плотности становится более выраженной, но жидкость остаётся "истинной". С другой стороны, при дискретных толщинах плёнок (в несколько молекулярных слоёв) результаты численных экспериментов [17, 18] показали, что жидкость кристаллизуется. Согласно [6], обе точки зрения вполне обоснованы, поскольку результаты моделирования жидкости, находящейся между гладкими бесструктурными поверхностями, показали, что каждая молекула может стать захваченной ими, сохраняя способность довольно быстро переходить с одной поверхности на другую. Таким образом, одновременно наблюдаются упорядоченность и высокая диффузная подвижность в направлении, перпендикулярном поверхностям. Существует вероятность того, что даже при наличии дальнего порядка в направлении, параллельном структурным поверхностям, молекулы, замороженные в каждый из центров захвата, могут перепрыгивать между ними (и поверхностями) с частотами, близкими к характерным для объёмных жидкостей. Очевидно, что эти межповерхностные плёнки проявляют уникальные свойства, качественно и количественно отличающиеся от свойств, присущих жидкой фазе большого объёма.

Как показано в работе [11], времена релаксации жидкостей, ограниченных двумя твёрдыми поверхностями, могут увеличиваться на много порядков, даже если сравнивать их с временами релаксации жидких плёнок, которые толще всего на несколько ангстремов. Кроме того, процессы молекулярного переупорядочивания, возникающие в таких тонких плёнках, скоррелированы на больших расстояниях [46]. Недавние численные исследования также обосновали точку зрения, что при фазовых переходах в тонких плёнках жидкости происходят процессы согласованного движения большого количества молекул с различными характерными временами [47].

Довольно большие времена релаксации для цепных молекул являются причиной возникновения "эффектов памяти". Если в ходе эксперимента трущиеся поверхности остановить на время  $t_s$ , а затем вновь позволить им скользить в том же направлении и с такой же скоростью, то для установления стационарного режима потребуется время, которое будет зависеть от  $t_s$ . Однако, как показано в работе [6], в некоторых случаях стационарный режим наступает немедленно. Для вязких жидкостей справедлив закон вязкого течения

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

где  $\sigma$  — напряжение, под действием которого смазка течёт,  $\eta$  — вязкость,  $\varepsilon$  — деформация, производная от которой связывается со скоростью движения.

При остановке поверхностей трения ( $\dot{\varepsilon} = 0$ ), согласно (2.1), напряжения должны мгновенно релаксировать к нулю. Однако такой релаксации не происходит, так как после остановки длительностью  $t_s$  при последующем движении продолжается установившийся режим прерывистого трения [6]. Если бы напряжения быстро релаксировали, то после такой остановки прерывистому режиму должно было бы предшествовать монотонное увеличение силы трения. Такая особенность свойственна только ультратонким слоям, и она связана с тем, что смазка во время положения покоя поверхностей трения остаётся зажатой между ними в том состоянии, в котором находилась перед остановкой. Следовательно, при температурах, при которых объёмные смазки ведут себя как жидкости, ультратонкие плёнки смазки могут проявлять свойства твёрдых тел.

Резкое падение величины силы трения  $F$  на пике (см. рис. 2) указывает, что плавление плёнки и соответствующее изменение трения имеют скачкообразный характер. Таким образом, как отмечается в работе [6], если плавление зарождается в определённой точке внутри контактной зоны, то оно должно быстро распространяться по всей площади контакта. По-видимому, этот процесс аналогичен хрупкому разрушению в твёрдом теле, при котором трещина, появившаяся в каком-то месте, быстро распространяется по всему материалу. Указанное также подобно резкому увеличению скорости зернограничного проскальзывания в неравновесных границах зёрен вследствие слияния их жидкоподобных участков при достижении сдвиговым напряжением  $\sigma$  критического значения [48].

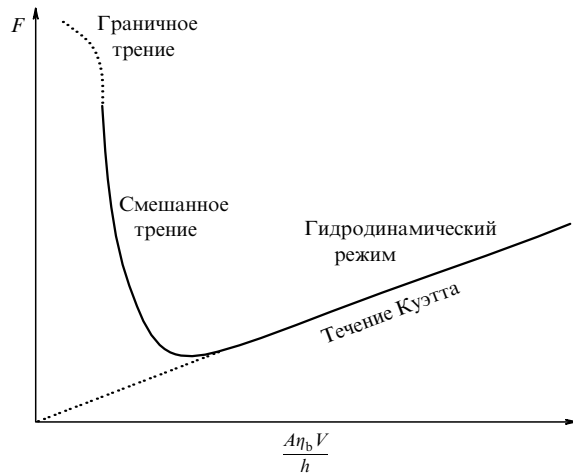
Согласно [6], жидкоподобное состояние характеризуется эффективной вязкостью  $\eta_{\text{эф}}$ , которая на много порядков превосходит характерную для объёмной жидкости и является неньютоновской. Неньютоновские свойства гидрокарбонатных плёнок в жидкоподобном состоянии также проявляются в поведении кинетической силы трения  $F_k$ , которая не зависит от скорости скольжения. Это означает, что эффективная вязкость уменьшается с увеличением скорости сдвига, т.е. плёнка, находясь в жидкоподобном состоянии, проявляет сдвиговое утончение [49, 50]. При различных условиях скольжения обнаружено [4, 24], что две поверхности продолжают оставаться разделёнными несколькими слоями жидкости, хотя и немного изменёнными по толщине и структуре. Кроме того, эти многослойные жидкости испытывают динамические фазовые переходы более чем одного типа, что проявляется в существовании

различных типов прерывистого режима движения и в других трибологических свойствах [4, 11, 16, 21].

С увеличением температуры смазки силы трения прерывистого режима, как правило, уменьшаются, а при превышении температурой некоторого критического значения  $T_c$  прерывистое скольжение полностью исчезает и движение продолжается равномерно в жидкоподобном кинетическом режиме [6]. Статический и кинетический коэффициенты трения также уменьшаются с возрастанием температуры. Это может происходить за счёт уменьшения активационного энергетического барьера для скачков молекул при более высокой температуре, поскольку плёнка становится более жидкоподобной. С другой стороны, такая характеристика прерывистого трения, как отношение статической и кинетической сил трения ( $F_s/F_k$ ), остаётся приблизительно постоянной [51] или незначительно возрастает с увеличением температуры, даже несмотря на то что при критической температуре  $T_c$  статическая компонента  $F_s$  полностью исчезает. Согласно [6], резкое исчезновение статического трения при температуре выше  $T_c$  подобно его резкому исчезновению при превышении критической скорости  $V_c$ . Установлено, что чем больше скорость скольжения, тем более жидкоподобной, или "нетвердоподобной", становится плёнка и тем большее последующее время  $\tau_0$  требуется ей для того, чтобы снова затвердеть.

Согласно [6], модель фазовых переходов подтверждается также тем обстоятельством, что молекулы плёнки достигают полностью жидкоподобного состояния с максимальным беспорядком, когда скорость скольжения  $V$  или температура  $T$  превышают некоторые наибольшие значения. Таким образом, любое дальнейшее возрастание  $V$  или  $T$  не может больше увеличить беспорядок в плёнке при заданном значении нагрузки. Поскольку время затвердевания  $\tau_0$  определяется состоянием плёнки в момент прекращения скольжения, вышесказанное даёт ответ на вопрос: почему  $\tau_0$  становится независимым от  $V$  и  $T$  при превышении ими некоторых критических значений? Эти верхние критические величины должны отличаться от значений  $V_c$  и  $T_c$ , которые отвечают исчезновению прерывистого режима. Указанные верхние критические величины больше, чем  $V_c$  и  $T_c$ , и их можно считать скоростями и температурами, при которых параметр порядка (или фактор Дебая–Валлера) сдвигаемой плёнки [18] достигает наименьшего значения и при дальнейшем увеличении  $V$  или  $T$  уже не изменяется [6].

Особенности реализации граничного режима трения уже давно привлекают внимание многих исследователей. Так, в 1902 г. немецкий учёный Рихард Герман Штрибек экспериментально получил зависимость коэффициента трения в подшипнике от скорости вращения при наличии смазки [3, 52]. Эта зависимость, впоследствии получившая название диаграммы Герси–Штрибека (рис. 4), широко используется в трибологии для представления известных режимов трения для тонких слоёв смазок. На рисунке 4 сила трения  $F$  представлена как функция аргумента  $A\eta_b V/h$ , где  $A$  — площадь контакта,  $\eta_b$  — объёмная вязкость смазочного материала,  $h$  — толщина смазки. Причём возникающие механические напряжения определяются стандартным образом:  $\sigma = F/A$ , скорость сдвиговой деформации  $\dot{\varepsilon} \equiv V/h$ . Для тонких слоёв смазок сила трения даётся классическим уравнением



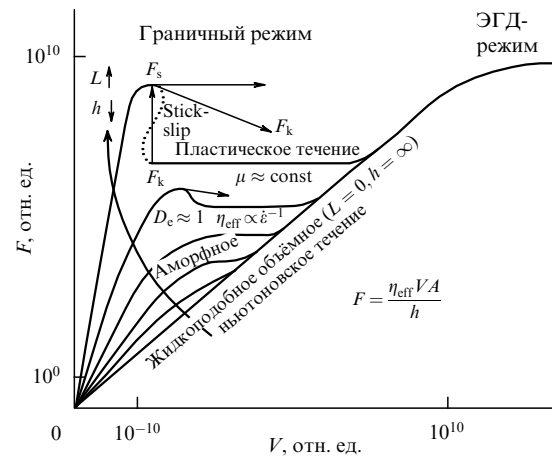
**Рис. 4.** Диаграмма Герси–Штрибека. Сплошная линия показывает, как сила трения смазочного материала зависит от экспериментальных параметров [7, 52].

для течения Куэтта:

$$F = \frac{AV\eta_b}{h} = A\eta_b\dot{\epsilon}, \quad \sigma = \frac{F}{A} = \frac{V\eta_b}{h} = \eta_b\dot{\epsilon}. \quad (2.2)$$

На диаграмме показан режим граничного трения при малой толщине смазки. Данный режим в указанной ситуации имеет большое значение, поскольку он реализуется в начале движения подшипника. При дальнейшем движении подшипника смазка распределяется по нему и наступает гидродинамический режим. На границе между зонами смешанной и гидродинамической смазки наблюдается эластогидродинамический (ЭГД) режим. Граничная смазка, согласно диаграмме Герси–Штрибека, характеризуется большим коэффициентом трения  $\mu$ , соответственно в этом режиме имеют место большая диссипация энергии, сопровождающаяся разогревом и, возможно, разрушением движущихся деталей. Поэтому исследование граничного режима трения имеет важное практическое значение. В настоящее время благодаря появлению современного инструментария стало возможным прямое наблюдение за процессами, происходящими в зоне контакта [31]. Характерно, что современные эксперименты подтверждают многие выводы, сделанные учёными в XX в.

Как показано выше, граничный режим трения приводит ко множеству эффектов, которые, однако, никак не отображены на диаграмме Герси–Штрибека. Поэтому для их учёта предложена новая карта трения [7], согласующаяся с экспериментальными данными [5, 6, 12, 13, 31–42]. Эта карта, показанная на рис. 5, представляет собой обобщённую диаграмму Герси–Штрибека<sup>1</sup>. С увеличением нагрузки  $L$  ньютоновское течение вязкой жидкости в ЭГД-режиме переходит в граничный режим. При больших нагрузках  $L$  и малых толщинах  $h$  смазки сила трения имеет максимум (статическое трение  $F_s$ ). Если теперь повысить скорость, то установится прерывистый (stick-slip) режим, а дальнейшее возрастание  $V$



**Рис. 5.** Новая карта трения, раскрывающая особенности граничного режима [7]. Скорость скольжения  $V$  и сила трения  $F$  измерены в произвольных единицах, и значения соответственно  $10^{-10}$ ,  $10^{10}$  и  $0$ ,  $10^{10}$  условно показывают большие диапазоны.

приведёт к постоянному значению коэффициента трения  $\mu$ , независящему от величины скорости, и соответственно к постоянной кинетической силе трения  $F_k$ .

Неньютоновское сдвиговое утончение наблюдается при меньшей нагрузке и большей толщине плёнки смазки. Сила трения проходит через максимум в точке, где число Дебора — отношение времени естественной релаксации граничного слоя смазки ко времени проскальзывания при прерывистом режиме —  $D_e \sim 1$  [6, 53].

Основной характеристикой трения, имеющей прикладное значение, является коэффициент трения  $\mu$ , связывающий силу трения с приложенной к трущимся поверхностям нагрузкой  $L$  [3]:

$$F = \mu L. \quad (2.3)$$

Этот закон установлен ещё Леонардо да Винчи в 1508 г., однако точно он был сформулирован спустя 200 лет Амонтоном и поэтому получил название закона Амонтона. Из соотношения (2.3) видно, что сила трения не зависит от площади контакта. В 1785 г. Кулон обобщил закон Амонтона, учтя адгезию поверхностей С:

$$F = C + \mu L. \quad (2.4)$$

Согласно закону Амонтона–Кулона (2.4), даже при нулевой нагрузке  $L$  существует трение, обусловленное взаимодействием поверхностей. Это особенно чётко выражено в случае граничного трения, когда тонкий слой смазки не способен полностью экранировать взаимодействие трущихся поверхностей. Более того, в процессе трения возможно частичное разрушение граничных слоёв, приводящее к возникновению непосредственных зон контакта, в которых становится существенным первое слагаемое в правой части (2.4).

Соотношения (2.3) и (2.4) являются эмпирическими и не указывают на процессы либо механизмы трения. В связи с этим многие учёные пытались получить указанные законы теоретически, что позволило бы расширить представления о граничном трении. С другой стороны, при накоплении экспериментальных данных всё более очевидным становилось, что законы Амонтона и Амонтона–Кулона выполняются не всегда, что указывает на

<sup>1</sup> Здесь эффективная вязкость  $\eta_{\text{eff}} = Fh/AV$ , которая не совпадает с объёмной, может быть найдена только экспериментально, причём  $\eta_{\text{eff}}$  уже не является константой, а зависит от скорости сдвиговой деформации  $\dot{\epsilon}$ .

их приближённый характер. Например, Гарди [54], проводя эксперименты по трению двух плоских поверхностей, разделённых граничным слоем ароматических соединений, показал, что коэффициент статического трения  $\mu$  уменьшается с возрастанием нагрузки. То есть в формуле (2.3)  $\mu$  является функцией  $L$ , что нарушает данный закон. Гарди объясняет этот факт тем, что малые давления соответствуют мультимолекулярному смазочному слою, который не обладает текучестью, свойственной объёмным смазкам. Иными словами, существуют предельные внутренние напряжения, при превышении которых начинается течение. Гарди приходит к выводу, что с повышением давления слой смазки становится тоньше и это приводит к изменению  $\mu$ . Таким образом, Гарди вводит зависимость коэффициента трения от толщины смазки  $h$ . В настоящем обзоре рассматриваются именно такие системы и указывается на то, что граничные слои смазок характеризуются пределом текучести, который является характеристикой разрушения в твёрдых телах.

В разделе 3.4 исследуется случай, в котором смазка плавится при превышении напряжениями определённой критической величины, найденной аналитически. В разделе 5 описана количественная термодинамическая модель, в которой толщина смазки  $h$  входит в зависимость для силы трения в явном виде.

Гарди также отмечал: "Состояние смазки нельзя назвать ни жидким, ни твёрдым". В современной литературе вводятся понятия жидкоподобного и твердоподобного состояний, отличающихся от равновесных термодинамических фаз, поскольку микрорельеф поверхностей трения оказывает существенное влияние на смазку, нарушая симметрию состояния. Таким образом, предположения Гарди являются вполне обоснованными и согласуются с современными представлениями о граничном трении. Любопытным является тот факт, что Гарди наблюдал явление чрезвычайно лёгкого скольжения [55]. Он пишет, что при смазывании поверхностей оксиолеиновой кислотой можно было наблюдать самопроизвольные перемещения верхней трущейся поверхности, вызванные незначительными отклонениями поверхностей трения от горизонтальной плоскости. В этом случае трущиеся поверхности сложно удержать на месте. Если они были предоставлены сами себе, то верхняя пластина немедленно соскальзывала с нижней. Позднее этот режим наблюдался Л.В. Пановой (см. [3] и приведённые там ссылки) при наличии на поверхностях с высокой точностью обработки граничных слоёв стеариновой кислоты. Такой режим, получивший в современной англоязычной литературе название *superlubricity* (сверхскользкость), в последние годы в связи с потребностью уменьшения размера систем и созданием наномеханических систем приобретает всё большую актуальность и привлекает внимание многих исследователей [9, 56].

Исследования Гарди позднее продолжили Бир и Боуден, экспериментально изучившие зависимость кинетической силы трения от давления [57]. Бир и Боуден определили ряд смазок и поверхностей трения, для которых закон Амонтона выполняется или нарушается. Основываясь, в частности, на этих экспериментах, Б.В. Дерягин развивает молекулярную теорию трения [58], согласно которой сила трения выражается в виде

$$F = \mu(Ap_0 + L), \quad (2.5)$$

где  $A$  — площадь истинного контакта,  $p_0$  — удельная сила молекулярного взаимодействия. Таким образом, по Дерягину, сила трения зависит от адгезии поверхностей  $\mu Ap_0$ , а также от нормального давления  $\mu L$ , что подтверждает закон Амонтона — Кулона (2.4). Г.И. Епифанов предлагает следующую зависимость для силы трения [3, 59]:

$$F = \Theta A, \quad (2.6)$$

$$\Theta = \Theta_0 + k\sigma_N, \quad (2.7)$$

где  $\Theta$  — прочность на сдвиг,  $A$  — площадь, по которой происходит сдвиг,  $k$  — коэффициент. Прочность на сдвиг в свою очередь определяется прочностью на сдвиг  $\Theta_0$  при нулевом нормальном напряжении  $\sigma_N$ , а также самим значением  $\sigma_N$ . Если подставить (2.7) в (2.6), то получим двучленный закон трения в виде

$$F = \Theta_0 A + kL. \quad (2.8)$$

Таким образом, согласно теории Епифанова, увеличение силы трения с возрастанием нагрузки  $L$  происходит за счёт увеличения площади  $A$ . Последние три формулы важны для нашего рассмотрения в рамках термодинамической теории, приведённой в разделе 5. Для определения силы трения мы используем формулы (5.18) и (5.22), в которых сила трения является пропорциональной площади контакта  $A$  и не зависит от нагрузки  $L$ . Это связано с тем, что рассматриваются специфические условия трения двух атомарно-гладких поверхностей, разделённых слоем простой неполярной смазки. В таком случае площадь  $A$  близка к площади поверхностей трения и она не зависит от приложенного давления. Кроме того, в рассматриваемом нами случае между поверхностями, вне зависимости от их площади, поддерживается неизменное расстояние, т.е. толщина смазки  $h$  постоянна во времени. Современный инструментарий позволяет создавать такие специфические условия. Епифанов делает вывод о том, что силы граничного трения полностью определяются сопротивлением сдвигу и не зависят от сил адгезии [3, 59]. Причём Епифанов не вводит в рассмотрение такое понятие, как коэффициент трения, поскольку оно теряет смысл. Далее мы рассматриваем именно такой случай (ср. (2.6) и (5.18)).

Закон Амонтона и все приведённые выше его интерпретации не учитывают зависимость силы трения от скорости скольжения. Однако зависимости  $F(V)$  имеют разный вид для различных смазок, поверхностей трения, условий скольжения и т.п. Причём сила трения может как уменьшаться, так и увеличиваться с возрастанием скорости  $V$ , а также может изменяться немонотонно. Большой вклад в изучение зависимости силы трения от скорости внесли Боуден [2, 57], Ахматов, Сухов и др. (см. [3] и приведённые там ссылки). Однако современные сведения об этом вопросе основываются на работах таких экспериментаторов, как, например, Израелашвили [31], поскольку в настоящее время появились более тонкие методы эксперимента, позволяющие проводить прямые наблюдения и измерения. Д.М. Толстой и Р.Л. Каплан обнаружили [60], что зависимость  $F(V)$  при малых скоростях скольжения имеет максимум, что подтверждается и нашими выводами (рис. 196 в разделе 5.3).

В технических приложениях, например при трении в подшипниках, поверхности практически всегда являются

шероховатыми. В случае трения металлических шероховатых поверхностей, разделённых граничной смазкой, Боуден предлагает следующее соотношение [2]:

$$F = [\alpha\tau_M + (1 - \alpha)\tau_L]A, \quad (2.9)$$

где  $A$  — площадь, несущая нагрузку,  $\alpha$  — доля общей площади, на которой вследствие выдавливания или разрушения смазочного слоя образовались металлические мостики,  $\tau_M$  — сопротивление срезу мостиков,  $\tau_L$  — сопротивление сдвигу смазочного слоя. В случае, когда поверхности являются атомарно-гладкими и они всюду разделены однородным слоем смазки одной толщины, величина  $\alpha = 0$ , и тогда получаем формулу

$$F = \tau_L A, \quad (2.10)$$

совпадающую с приведённым в разделе 5 соотношением (5.18). Причём Боуден делает вывод, что напряжение  $\tau_L$  постоянно для данного вещества, вне зависимости от толщины слоя. Ахматов, основываясь на логических рассуждениях и экспериментальных результатах, обобщает [3] формулу Боудена (2.9) как

$$F = [\alpha\tau_M(V, T) + (1 - \alpha)\tau_L(h, V, T)]A. \quad (2.11)$$

Далее нами показано, что  $\tau_L$  является функцией температуры  $T$ , относительной скорости сдвига  $V$  и толщины смазки  $h$ , что полностью подтверждает выводы Ахматова.

Для объяснения результатов экспериментов в основном используется феноменологическая концепция фазового перехода плёнки смазки из жидкоподобного состояния в твердоподобное и наоборот. Следует отметить, что это фазовое превращение, в отличие от обычного перехода жидкость — твёрдое тело, может быть как первого, так и второго рода. Последний вариант связан с тем, что этот переход происходит в условиях, когда симметрия обоих состояний плёнки существенно изменена вследствие наличия, во-первых, ограничивающих твёрдых тел, а во-вторых, упругой деформации [4, 61].

Описанию прерывистого движения посвящён ряд теоретических работ. В одной из первых таких работ представлено феноменологическое материальное уравнение, связывающее силы трения со скоростью, координатами и переменной, играющей роль параметра порядка и отражающей степень плавления плёнки [14]. Также существует подход [61], в котором фазовый переход плёнки смазки рассматривается с точки зрения теории Ландау в предположении, что имеется состояние частичного термодинамического равновесия при медленно изменяющемся параметре порядка, квадрат которого равен модулю сдвига.

Объяснить природу описанных в данном разделе аномальных особенностей граничного трения позволило, в частности, экспериментальное исследование реологических свойств плёнки смазки [5, 6, 12]. Кроме того, с этой целью использовалось теоретическое представление смазочного материала как вязкоупругой среды, обладающей теплопроводностью. Так, в работе [15] на основе уравнения Гинзбурга — Ландау, в котором параметр порядка определяет сдвиговое плавление [16] и затвердевание, описано экспериментально наблюдаемое поведение ультратонкой плёнки смазки. Построена динамическая фазовая диаграмма, определяющая области

жидкостного, прерывистого и сухого трения в координатах температура — толщина плёнки. Фазовая динамика в случае адсорбированных молекул рассмотрена в работах [51, 62], где отмечено важное значение сдвигового плавления. С помощью исследования временных рядов силы трения представлена связь трения на макроуровне с образованием и разрушением молекулярных связей [23].

Исследование влияния шума на трение имеет очевидное фундаментальное и практическое значение, поскольку в конкретных экспериментальных ситуациях флуктуации изменяют фрикционное поведение критическим образом, например, обеспечивая условия для уменьшения трения [1, 20, 22, 63]. В частности, тепловой шум, проявляющийся в любых экспериментах, может переводить ультратонкую плёнку смазки из устойчивого твердоподобного состояния в жидкоподобное и таким образом преобразовывать сухое трение в жидкостное трение или в прерывистый (stick-slip) режим. Поэтому в последнее время значительное внимание уделялось изучению влияния шума и случайных примесей в граничной области на статическое и динамическое трение [20, 64, 65]. Эти исследования показали, что периодические поверхности характеризуются меньшим коэффициентом трения в процессе скольжения, чем непериодические.

### 3. Нелинейная модель плавления ультратонкой плёнки смазки

#### 3.1. Основные уравнения

Основой предлагаемого подхода является синергетическая концепция фазового перехода [66–70], которая представляет собой обобщение феноменологической теории Ландау. Согласно последней, фазовое превращение описывается параметром порядка  $\phi$ , по степеням которого проводится разложение свободной энергии  $F$  [71]. Равновесное значение  $\phi$  определяется условием

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = h, \quad (3.1)$$

где  $h$  — внешнее поле,  $F$  — свободная энергия при  $h = 0$ .

Процесс релаксации к равновесию описывается уравнением [72]

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi} - h \right). \quad (3.2)$$

Здесь  $\eta$  — кинетический коэффициент, который можно рассматривать как обобщённую вязкость. При величине  $\phi$ , близкой к равновесному значению  $\phi_0 = 0$ , используется линейное приближение  $\partial F / \partial \phi \approx \phi / \chi$ , где  $\chi \equiv \partial \phi / \partial h = (\partial^2 F / \partial \phi^2)^{-1}$  — восприимчивость. В результате релаксационное уравнение (3.2) принимает линейный вид:

$$\tau \dot{\phi} = -\phi + \chi h, \quad (3.3)$$

где

$$\tau = \chi \eta \quad (3.4)$$

представляет собой время релаксации.

Выражения (3.3), (3.4) использовались Ландау и Халатниковым для исследования аномального поглощения звука вблизи точки фазового перехода второго рода [73], где, согласно их предположению, восприимчивость



стремится к бесконечности,  $\chi \rightarrow \infty$ , а вязкость  $\eta$  практически не зависит от температуры  $T$ . В теории Ландау и Халатникова аномально большая величина  $\tau$  отвечает процессу замораживания.

Для вязкоупругой среды модуль сдвига  $G$  играет роль обратной восприимчивости. В случаях вязкоупругого перехода и перехода типа смещения (например, мартенситного) модуль  $G$  стремится к нулю вблизи точки перехода и время релаксации стремится к бесконечности [74, 75]. В некоторых работах (см., например, [76]) используется тот факт, что обобщённая восприимчивость фактически не зависит от температуры, а вязкость сильно возрастает при температуре стеклования. Таким образом, аномально большое значение восприимчивости типично для фазового перехода, и аномально большая величина кинетического коэффициента (вязкости) свойственна стеклованию.

Согласно экспериментальным данным, смазка представляет собой очень вязкую жидкость, которая ведёт себя подобно аморфному твёрдому телу — имеет большую эффективную вязкость и характеризуется пределом текучести [6, 77, 78]. Исходя из этого, на основе реологического описания вязкоупругой среды, обладающей теплопроводностью, получим систему кинетических уравнений, которые определяют взаимно согласованное поведение сдвиговых напряжений  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$ , а также температуры  $T$  в ультратонкой плёнке смазки в процессе трения между атомарно-гладкими слюдяными поверхностями [69, 79]. Основное предположение используемого подхода состоит в том, что релаксационное уравнение для  $\sigma$  по математической структуре подобно уравнению Ландау–Халатникова (3.3):

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + G\varepsilon. \quad (3.5)$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает дебаевскую релаксацию в течение времени  $\tau_\sigma \equiv \eta_\sigma/G$ , определяемого эффективной вязкостью  $\eta_\sigma$  и нерелаксированным модулем сдвига  $G \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ . Посредством замены  $\varepsilon/\tau_\sigma \rightarrow d\varepsilon/dt$  кинетическое уравнение (3.5) сводится к соотношению типа Максвелла для вязкоупругой среды, широко используемому в теории граничного трения [1, 80]. В стационарном случае,  $\dot{\sigma} = 0$ , уравнение (3.5) сводится к закону Гука  $\sigma = G\varepsilon$ .

Релаксационное поведение вязкоупругой смазки в процессе трения описывается также уравнением Кельвина–Фойгта [77, 78]

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (3.6)$$

где  $\tau_\varepsilon$  — время релаксации деформации,  $\eta$  — сдвиговая вязкость. Второе слагаемое в правой части описывает течение вязкой жидкости под действием сдвиговой компоненты напряжений. В стационарном случае,  $\dot{\varepsilon} = 0$ , получаем выражение, подобное закону Гука,  $\sigma = G_\varepsilon \varepsilon$ , где  $G_\varepsilon \equiv \eta/\tau_\varepsilon \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$  — релаксированное значение модуля сдвига. Поскольку формально (3.5) не сводится к уравнению Кельвина–Фойгта (3.6) [77, 78, 80], далее мы полагаем, что эффективная вязкость  $\eta_\sigma \equiv \tau_\sigma G$  не совпадает с действительной  $\eta$ . Кроме того, примем простейшие приближения для температурных зависимостей:  $G_\varepsilon(T), G(T), \eta_\sigma(T) = \text{const}$ ,

$$\eta = \frac{\eta_0}{T/T_c - 1}, \quad (3.7)$$

где  $\eta_0$  — характерное значение вязкости  $\eta$  при  $T = 2T_c$ . Это обусловлено тем, что величины  $G_\varepsilon, G, \eta_\sigma$  очень слабо зависят от температуры, в то время как действительная вязкость  $\eta$  при уменьшении температуры до критического значения  $T_c$  стремится к бесконечности [70, 76, 81]. Совместно уравнения (3.5)–(3.7) представляют собой новую реологическую модель, поскольку они сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка относительно напряжения  $\sigma$  или деформации  $\varepsilon$ . Следует отметить, что реологические свойства плёнок смазки исследуются экспериментально, что позволяет построить фазовую диаграмму [5, 6].

Согласно синергетической концепции [66–70], для дополнения системы уравнений (3.5), (3.6), которые содержат параметр порядка  $\sigma$ , сопряжённое поле  $\varepsilon$  и управляющий параметр  $T$ , необходимо получить кинетическое уравнение для температуры. Это уравнение можно вывести, используя основные соотношения теории упругости [80]. Будем исходить из выражения, связывающего производные по времени от энтропии  $S$  и внутренней энергии  $U$  с равновесным упругим напряжением  $\sigma_{el}$ :

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{dU}{dt} - \sigma_{el} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.8)$$

(в равновесии изменение количества тепла  $\delta Q = T\delta S$ ). В неравновесном случае неоднородного нагрева среды эта связь принимает вид

$$-\text{div} \mathbf{q} = \frac{dU}{dt} - \sigma \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3.9)$$

Здесь поток тепла даётся соотношением Онсагера

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (3.10)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности, а полное напряжение  $\sigma = \sigma_{el} + \sigma_v$  включает в себя также вязкую составляющую  $\sigma_v$ . Вычитая (3.9) из (3.8), учитывая выражение

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial U} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_\varepsilon \frac{dT}{dt} + \frac{\partial S}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \left( \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right)_U \frac{d\varepsilon}{dt} = \\ &= \frac{\rho c_v}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma_{el}}{T} \frac{d\varepsilon}{dt} \end{aligned} \quad (3.11)$$

и предполагая, что слой смазки и атомарно-гладкие поверхности слюды имеют различные температуры,  $T$  и  $T_c$  соответственно, получаем

$$\rho c_v \dot{T} = \frac{\kappa}{h^2} (T_c - T) + \sigma_v \dot{\varepsilon} + T \frac{\partial \sigma_{el}}{\partial T} \dot{\varepsilon}. \quad (3.12)$$

Здесь  $\rho$  — плотность смазки,  $c_v$  — удельная теплоёмкость,  $h$  — толщина смазки и использованы равенства  $(\kappa/h^2)(T_c - T) \approx -\text{div} \mathbf{q}$  и  $\partial U/\partial \varepsilon = \sigma_{el} - T \partial \sigma_{el}/\partial T$ .

Первое слагаемое в правой части (3.12) описывает передачу тепла от слоя смазки поверхностям трения. Второе слагаемое учитывает диссипативный разогрев вязкой жидкости, текущей под действием напряжений [82, 83]. Третье слагаемое представляет собой источник тепла, обусловленный обратимым механокалорическим эффектом, для которого в линейном приближении  $T(\partial \sigma_{el}/\partial T)\dot{\varepsilon} \approx \sigma_{el}\dot{\varepsilon}$ . В результате уравнение тепло-

проводности принимает вид

$$\rho c_v \dot{T} = \frac{\kappa}{h^2} (T_c - T) + \sigma \dot{\varepsilon}. \quad (3.13)$$

Введём единицы измерения

$$\sigma_s = \left( \frac{\rho c_v \eta_0 T_c}{\tau_T} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{G_0} \equiv \tau_\varepsilon \left( \frac{\rho c_v T_c}{\eta_0 \tau_T} \right)^{1/2}, \quad T_c \quad (3.14)$$

для переменных  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  соответственно ( $G_0 = \eta_0/\tau_\varepsilon$ ,  $\tau_T \equiv \rho h^2 c_v/\kappa$  — время теплопроводности). Тогда после подстановки в (3.13) производной  $\dot{\varepsilon}$ , выраженной по формуле (3.6), основные уравнения (3.5), (3.6), (3.13) принимают вид:

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g\varepsilon, \quad (3.15)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (3.16)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_c - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (3.17)$$

где константа  $g = G/G_0$ . Уравнения (3.15)–(3.17) формально совпадают с синергетической системой Лоренца [66–68], которая используется для описания как фазовых термодинамических, так и кинетических превращений. Положительная обратная связь напряжений  $\sigma$  и температуры  $T$  с деформацией  $\varepsilon$  в (3.16) обуславливает плавление, которое вызывает возрастание  $\varepsilon$ , связанное с неустойчивостью твердоподобной фазы. С другой стороны, отрицательная обратная связь напряжений  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$  с температурой  $T$  в уравнении (3.17) является отражением принципа Ле Шателье для рассматриваемой задачи, поскольку приводит к уменьшению  $T$  вследствие процесса самоорганизации.

Указанная положительная обратная связь  $\sigma$  и  $T$  с  $\varepsilon$  означает, что переход смазки из твердоподобного состояния в жидкоподобное обусловлен как нагреванием, так и влиянием напряжений, создаваемых твёрдыми поверхностями при трении [69]. Это согласуется с рассмотрением неустойчивости твёрдой фазы в рамках представления сдвигового динамического плавления, индуцированного беспорядком, при отсутствии тепловых флуктуаций [15]. Если деформации сдвига отсутствуют, то тепловое среднеквадратическое отклонение молекул (атомов) определяется равенством

$$\langle u^2 \rangle = \frac{T}{Ga}, \quad (3.18)$$

где  $a$  — постоянная решётки или межмолекулярное расстояние. Среднее значение смещения в результате сдвига находится из соотношения

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\sigma^2 a^2}{G^2}. \quad (3.19)$$

Таким образом, согласно предлагаемому подходу, рассматриваемый переход плёнки смазки из твердоподобного состояния в жидкоподобное происходит вследствие термодинамического и сдвигового плавления. Будем предполагать, что плёнка смазки становится более жидкоподобной и сила трения убывает с возрастанием температуры за счёт уменьшения энергии активации скачков молекул.

### 3.2. Условия перехода

Согласно экспериментальным данным для органических смазочных материалов [5, 6], время релаксации напря-

жений, составляющее при нормальном давлении  $\tau_\sigma \sim 10^{-10}$  с, возрастает на несколько порядков при высоких давлениях, принимая макроскопические значения. Релаксация сдвиговой деформации происходит за микроскопическое время  $\tau_\varepsilon \approx a/c \approx 10^{-12}$  с, где  $a \approx 1$  нм,  $c \approx 10^3$  м с<sup>-1</sup> — скорость звука. Поскольку ультратонкая плёнка смазки содержит менее десяти молекулярных слоёв, температура релаксирует к значению  $T_c$  в течение времени  $\tau_T \ll \tau_\sigma$ . Поэтому для анализа системы (3.15)–(3.17) воспользуемся адиабатическим приближением, в рамках которого характерные временные масштабы удовлетворяют неравенствам

$$\tau_\varepsilon \ll \tau_\sigma, \quad \tau_T \ll \tau_\sigma. \quad (3.20)$$

Неравенства (3.20) означают, что в процессе эволюции деформация  $\varepsilon(t)$  и температура  $T(t)$  следуют за изменением напряжений  $\sigma(t)$ . Используя определения температуропроводности  $\chi \equiv \kappa/c_v$ , эффективной кинематической вязкости  $\nu_\sigma \equiv \eta_\sigma/\rho$  и скорости звука  $c \equiv (G/\rho)^{1/2}$ , второе условие (3.20) удобно записать в виде

$$h \ll L, \quad (3.21)$$

согласно которому толщина смазки не должна превышать значения

$$L = \sqrt{\frac{\chi \nu_\sigma}{\rho c^2}}. \quad (3.22)$$

Тогда левые части уравнений (3.16), (3.17) можно приравнять нулю и на основе (3.15) получить уравнение типа уравнения Ландау–Халатникова [72, 73]:

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad (3.23)$$

где синергетический потенциал имеет вид

$$V = \frac{1}{2}(1-g)\sigma^2 + g\left(1 - \frac{T_c}{2}\right) \ln(1 + \sigma^2). \quad (3.24)$$

В стационарном состоянии  $\dot{\sigma} = 0$  и потенциал (3.24) принимает минимальное значение. При температуре  $T_c$ , меньшей критического значения

$$T_{c0} = 1 + g^{-1}, \quad g \equiv \frac{G}{G_0} < 1, \quad G_0 \equiv \frac{\eta_0}{\tau_\varepsilon}, \quad (3.25)$$

данный минимум соответствует напряжению  $\sigma = 0$ , при этом плавления не происходит и реализуется твердоподобное состояние смазки. В противном случае,  $T_c > T_{c0}$ , стационарное значение напряжения не равняется нулю,

$$\sigma_0 = \left[ \frac{gT_c - (g+1)}{1-g} \right]^{1/2}, \quad (3.26)$$

и возрастает как квадратный корень из  $T_c$ . Это приводит к плавлению смазки и её переходу в жидкоподобное состояние. Соответствующие стационарные значения деформации и температуры имеют вид

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{g}, \quad T_0 = 1 + g^{-1}. \quad (3.27)$$

Следует отметить, что величина стационарной температуры  $T_0$ , с одной стороны, совпадает с критическим

значением (3.25), а с другой — отличается от температуры  $T_e$ . Это обусловлено тем, что в стационарном состоянии реализуется первое равенство (3.27) вместо связи  $\sigma_0 = \varepsilon_0$ . Поскольку  $T_{c0}$  представляет собой минимальное значение температуры, при котором начинается переход из твердopodobного состояния в жидкоподобное, указанное означает, что отрицательная обратная связь сдвиговых напряжений  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$  с температурой  $T$  (см. третье слагаемое в правой части уравнения (3.17)) уменьшает температуру смазки настолько, что процесс самоорганизации обеспечивается только в пределе. В стационарном состоянии вязкость при плавлении принимает значение  $\eta_m = \eta_0 g$ .

Твердopodobное состояние смазки соответствует сдвиговым напряжениям  $\sigma = 0$ , поскольку уравнение (3.15) выпадает из рассмотрения. Уравнение (3.16), содержащее вязкие напряжения, сводится к закону Дебая, описывающему быструю релаксацию сдвиговой деформации в течение микроскопического времени  $\tau_\varepsilon \sim 10^{-12}$  с. При этом уравнение теплопроводности (3.17) принимает вид простейшего выражения для релаксации температуры, которое не содержит слагаемых, описывающих диссипативный разогрев и механокалорический эффект вязкой жидкости.

Согласно уравнению (3.16), появление вязких напряжений  $\sigma_v$  приводит к пластическому течению жидкоподобной смазки со скоростью  $V = h \partial \varepsilon / \partial t$  [69]. В частности, в случае аппарата поверхностных сил [31, 84, 85] в уравнениях (3.15)–(3.17) эффективная амплитуда деформации  $\varepsilon = x_{\max} / h$  определяется как отношение амплитуды деформации (отклонения)  $x_{\max}$  к толщине  $h$ . Эффективная скорость сдвига

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon \omega = \frac{V}{h} = \frac{\varepsilon}{\tau_\sigma} \quad (3.28)$$

представляет собой произведение деформации  $\varepsilon$  на частоту колебаний  $\omega$ . Отметим, что в нашей задаче под  $\varepsilon$  следует понимать сумму упругой и вязкой компонент сдвиговой деформации.

В работах [61, 84] показано, что пластическое течение слоя смазки реализуется при наличии в нём упругих напряжений. При этом действие сдвиговых напряжений приводит к уменьшению модуля сдвига смазочного материала [86]. Согласно [7], в случае граничного режима трения с увеличением вязких напряжений

$$\sigma_v = \frac{F_v}{A} \quad (3.29)$$

возрастает вязкая сила трения

$$F_v = \frac{\eta_{\text{eff}} V A}{h}, \quad (3.30)$$

где  $\eta_{\text{eff}}$  — эффективная вязкость,  $A$  — площадь контакта.

Сопоставляя (3.29) и (3.30), получим выражение для скорости через напряжения:

$$V = \frac{\sigma_v h}{\eta_{\text{eff}}}. \quad (3.31)$$

Следовательно, с увеличением напряжений возрастает относительная скорость перемещения сдвигаемых поверхностей и смазка плавится. Это согласуется с соотношением максвелловского типа между напряжениями и деформацией:  $\partial \sigma / \partial t = -\sigma / \tau_\sigma + G \partial \varepsilon / \partial t$ .

### 3.3. Гистерезисные явления

#### при зависимости модуля сдвига от напряжений

**3.3.1. Скачкообразное плавление.** Уравнение Максвелла предполагает использование идеализированной модели Генки. Для зависимости напряжений от деформации  $\sigma(\varepsilon)$  эта модель представляется законом Гука  $\sigma = G\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon_m$  и константой  $\sigma_m = G\varepsilon_m$  при  $\varepsilon \geq \varepsilon_m$  ( $\sigma_m$ ,  $\varepsilon_m$  — максимальные значения упругих сдвиговых напряжений и деформации;  $\sigma > \sigma_m$  приводит к вязкому течению со скоростью деформации  $\dot{\varepsilon} = (\sigma - \sigma_m) / \eta$ ). В действительности, простейшая кривая  $\sigma(\varepsilon)$  обладает не одним, а двумя участками: первый, гуковский, имеет большой наклон, задаваемый модулем сдвига  $G$ , а за ним следует на много более пологий участок пластической деформации, наклон которого определяется коэффициентом упрочнения  $\Theta < G$ . Очевидно, представленная картина означает, что модуль сдвига смазки, входящий в уравнение (3.5), зависит от величины напряжений [61, 86]. Будем использовать простейшее приближение:

$$G(\sigma) = \Theta + \frac{G - \Theta}{1 + (\sigma / \sigma_p)^\beta}, \quad (3.32)$$

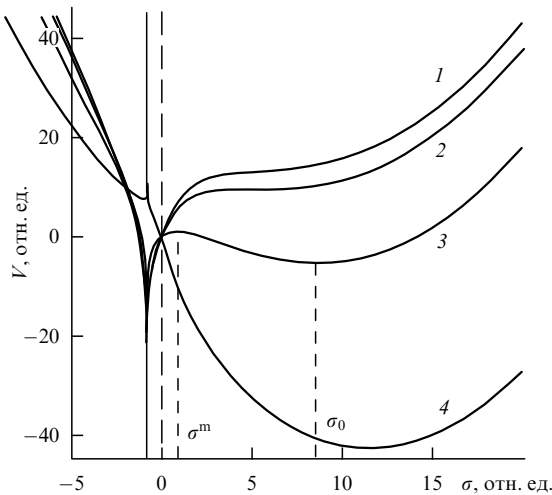
( $\sigma_p$  — характерное значение сдвигового напряжения), описывающее представленный выше переход режима упругой деформации в пластический режим. Этот переход учитывается с помощью замены постоянного коэффициента  $g$  в (3.15) зависимостью (3.32) в безразмерном виде  $g(\sigma) = G(\sigma) / G_0$ :

$$g(\sigma) = g_\theta \left[ 1 + \frac{\theta^{-1} - 1}{1 + (\sigma / \alpha)^\beta} \right], \quad (3.33)$$

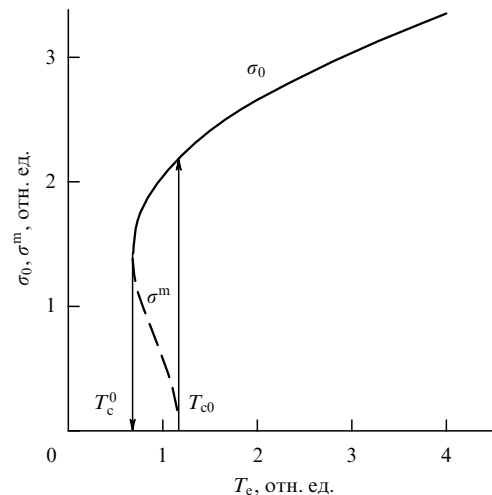
где  $g_\theta = \Theta / G_0 < 1$ ,  $\alpha = \sigma_p / \sigma_s < 1$ ,  $\theta = \Theta / G < 1$  — параметр, определяющий отношение углов наклона кривой деформации на пластическом и гуковском участках. Следует отметить, что выражение типа (3.33), впервые предложенное Хакеном [66] для описания жёсткого режима излучения лазера, использовалось ранее [68] для представления кинетики фазового перехода первого рода. Однако при этом (3.33) содержало квадрат отношения  $\sigma / \sigma_p$  ( $\beta = 2$ ) и получающаяся зависимость  $V(\sigma)$  синергетического потенциала от параметра порядка являлась чётной функцией. При описании структурных фазовых переходов жидкости характерно наличие инвариантов третьего порядка, которые нарушают указанную чётность [71]. Поэтому в приближении (3.33) используется также линейный член  $\sigma / \sigma_p$  ( $\beta = 1$ ) вместо квадратичного  $(\sigma / \sigma_p)^2$  ( $\beta = 2$ ). Отметим, что приведённая ниже зависимость (3.40) уже не является чётной<sup>2</sup>.

В случае  $\beta = 2$  удалось провести более полное аналитическое исследование, и этот случай представлен более подробно (положительная область  $\sigma$  на рис. 6). В рамках адиабатического приближения (3.20) система уравнений Лоренца (3.15)–(3.17), в которой вместо  $g$  необходимо использовать зависимость  $g(\sigma)$ , как и ранее, сводится к уравнению Ландау–Халатникова (3.23). Однако в синергетическом потенциале (3.24) коэффициент  $g = G / G_0$  заменяется параметром  $g_\theta = \Theta / G_0 < 1$  и появляется сла-

<sup>2</sup> Нечётные значения  $\beta$  отвечают эксперименту, в котором скольжение блока во взаимно противоположных направлениях неэквивалентны с энергетической точки зрения.



**Рис. 6.** Зависимость синергетического потенциала (3.40) от напряжения для фазового перехода первого рода при  $g_\theta = 0,6$ ,  $\theta = 0,1$ ,  $\alpha = 0,75$  при температурах:  $T_c < T_c^0$  (кривая 1),  $T_c = T_c^0$  (кривая 2),  $T_c^0 < T_c < T_{c0}$  (кривая 3),  $T_c \geq T_{c0}$  (кривая 4).



**Рис. 7.** Зависимость стационарных значений напряжений от температуры  $T_c$  при  $g_\theta = 0,6$ ,  $\theta = 0,1$ ,  $\alpha = 0,75$  (сплошная кривая соответствует устойчивому значению  $\sigma_0$ , штриховая — неустойчивому значению  $\sigma^m$ ).

гаемое, пропорциональное  $\theta^{-1} - 1$ :

$$V = \frac{1}{2}(1 - g_\theta)\sigma^2 + g_\theta \left(1 - \frac{T_c}{2}\right) \ln(1 + \sigma^2) - \frac{1}{2} g_\theta \alpha^2 (\theta^{-1} - 1)(\alpha^2 - 1)^{-1} \times \left[ (T_c - 2) \ln(1 + \sigma^2) + (\alpha^2 - T_c + 1) \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\right) \right]. \quad (3.34)$$

При малых значениях  $T_c$  зависимость  $V(\sigma)$  (3.34) монотонно возрастает и имеет минимум в точке  $\sigma = 0$ , который соответствует стационарному твердоподобному состоянию (кривая 1). Как видно из рис. 6, при

$$T_c^0 = 1 + g_\theta^{-1} + \frac{\alpha^2}{\theta g_\theta} (\theta + g_\theta - 2) + \frac{2\alpha}{\theta g_\theta} D^{1/2}, \quad (3.35)$$

$$D = (\theta - 1)(\alpha^2 - \theta)(g_\theta - 1), \quad (3.36)$$

появляется плато (кривая 2), переходящее при  $T_c > T_c^0$  в минимум, отвечающий напряжению  $\sigma_0 \neq 0$ , и максимум  $\sigma^m$ , который разделяет минимумы в точках  $\sigma = 0$  и  $\sigma = \sigma_0$  (кривая 3). С дальнейшим возрастанием температуры  $T_c$  минимум "упорядоченной" фазы, соответствующий жидкоподобному состоянию  $\sigma = \sigma_0$ , становится глубже, при этом высота межфазного барьера уменьшается, исчезая при критическом значении  $T_{c0} = 1 + \theta/g_\theta$  (3.25). Стационарные значения сдвиговых напряжений в жидкоподобном состоянии имеют вид (см. рис. 6, 7)

$$\sigma_0^m = \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 (g_\theta - 1)^{-1} \times \left[ 1 + \alpha^{-2} - g_\theta \alpha^{-2} (T_c - 1) - g_\theta \theta^{-1} \pm D_0^{1/2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (3.37)$$

$$D_0 = [g_\theta (T_c - 1) \alpha^{-2} + g_\theta \theta^{-1} - 1 - \alpha^{-2}]^2 - 4\alpha^{-2} (g_\theta - 1) [g_\theta \theta^{-1} (T_c - 1) - 1], \quad (3.38)$$

где верхний знак соответствует максимуму функции  $V(\sigma)$ , а нижний — минимуму. При  $T_c \geq T_{c0}$  зависимость  $V(\sigma)$  имеет тот же характер, что и в отсутствие дефекта модуля (см. кривую 4 на рис. 6).

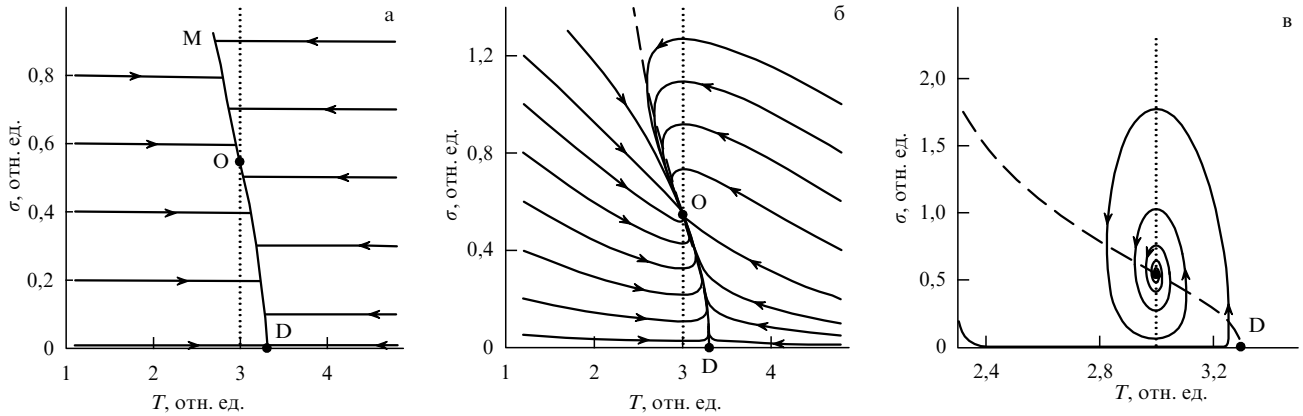
Характерной особенностью нашего подхода является тот факт, что энергетический барьер, присущий синергетическому переходу первого рода — плавлению кристаллической смазки, наблюдается только при наличии дефекта модуля сдвига. Представленная ситуация является более сложной, чем обычные фазовые переходы. Действительно, в последнем случае стационарное значение температуры системы  $T_0$  сводится к значению  $T_c$ , определяемому термостатом. В нашем случае  $T_0$  сводится к критическому значению  $T_{c0}$  для синергетического перехода второго рода — плавления аморфной смазки, которое происходит при отсутствии дефекта модуля (см. раздел 3.2). При учёте дефекта модуля реализуется температура

$$T_0 = T_c + (2 - T_c) \frac{\sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2}, \quad (3.39)$$

задаваемая положением минимума зависимости (3.34), (3.40). Согласно выражениям (3.37)–(3.39) стационарное значение температуры системы  $T_0$  плавно увеличивается от значения  $T_m$  при  $T_c = T_c^0$ . Стационарная температура  $T_0$  линейно возрастает от 0 до  $T_{c0}$  с увеличением температуры  $T_c$ , значения которой находятся в том же интервале, и после скачка вверх при  $T_c = T_{c0}$  значение  $T_0$  плавно увеличивается. При уменьшении температуры  $T_c$  стационарное значение температуры  $T_0$  убывает. При достижении точки  $T_c^0$  (3.35) величина  $T_0$  уменьшается скачком от  $T_m$  до  $T_c^0$ . При  $T_c < T_c^0$  стационарная температура  $T_0$  снова становится равной  $T_c$ .

В случае  $\beta = 1$  синергетический потенциал является нечётной функцией  $\sigma$  и определяется выражением (см. рис. 6)

$$V = \frac{1}{2}(1 - g_\theta)\sigma^2 + g_\theta \left(1 - \frac{T_c}{2}\right) \ln(1 + \sigma^2) - g_\theta (\theta^{-1} - 1) \alpha \times \left\{ \sigma - \alpha \ln \left| 1 + \frac{\sigma}{\alpha} \right| + (T_c - 2) \left[ \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \ln \left| 1 + \frac{\sigma}{\alpha} \right| + \frac{\alpha}{2(1 + \alpha^2)} \ln(1 + \sigma^2) + (1 + \alpha^2)^{-1} \arctan \sigma \right] \right\}. \quad (3.40)$$



**Рис. 8.** Фазовые портреты жидкоподобной фазы ( $T_e = 3,3, g = 0,5$ ): (а)  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma = 10^2 \tau_T$ , (б)  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma = \tau_T$ , (в)  $\tau_\epsilon \ll \tau_T = 10^2 \tau_\sigma$ . Штриховая и пунктирная линии указывают точки, в которых фазовые траектории имеют соответственно вертикальную и горизонтальную касательные.

Зависимость  $V(\sigma)$  при  $\sigma > 0$  аналогична таковой в случае  $\beta = 2$ . На отрицательной полуоси при  $T_e \geq T_{c0}$  наблюдается очень слабый минимум зависимости  $V(\sigma)$ , который сопровождается бесконечным увеличением потенциала  $V$  при  $\sigma = -\sigma_p$ . Таким образом, отрицательные значения  $\sigma$  и  $\epsilon$  практически не реализуются. Для определения стационарных состояний системы необходимо решить кубическое уравнение, в результате получаются громоздкие выражения, которые здесь не приводятся.

**3.3.2. Кинетика фазового перехода второго рода.**

1. *Случай  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma, \tau_T$ .* В разделе 3.2 проведён качественный анализ системы уравнений (3.15)–(3.17) в адиабатическом приближении, когда характерные времена релаксации удовлетворяют условиям  $\tau_\epsilon, \tau_T \ll \tau_\sigma$ . В данном разделе рассмотрены случаи, в которых наименьшим является одно из времён релаксации [68, 87]. В частности, при  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma, \tau_T$  в (3.16) можно положить  $\tau_\epsilon \dot{\epsilon} = 0$ , что даёт связь

$$\epsilon = (T - 1)\sigma. \tag{3.41}$$

Учитывая (3.41) в уравнениях (3.15), (3.17) и используя масштаб  $\tau_\sigma$  для измерения времени, приходим к системе уравнений

$$\dot{\sigma} = -\sigma[1 - g(T - 1)], \tag{3.42}$$

$$\dot{T} = \tau^{-1}[T_e - T - \sigma^2(T - 2)], \tag{3.43}$$

где параметр  $\tau \equiv \tau_T/\tau_\sigma$ . Фазовый портрет характеризуется наличием двух особых точек:  $D(T_e, 0)$  и  $O(1 + g^{-1}, \{[T_e - (g^{-1} + 1)](g^{-1} - 1)\}^{1/2})$ . Поскольку аналитически получить точное решение системы уравнений (3.42), (3.43) не представляется возможным, используется метод фазовой плоскости [88], который позволяет определить фазовые портреты системы. Точный вид этих портретов находится численным интегрированием уравнений методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности.

Анализ показателей Ляпунова

$$\lambda_D = \frac{1}{2} [g(T_e - 1) - 1 - \tau^{-1}] \times \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4\tau^{-1} [g(T_e - 1) - 1] [g(T_e - 1) - 1 - \tau^{-1}]^{-2}} \right) \tag{3.44}$$

показывает, что в предкритической области  $T_e \leq T_{c0}$  точка  $D$  представляет собой устойчивый узел. Принимая во внимание, что при таких значениях  $T_e$  особая точка  $O$  не реализуется, приходим к выводу: с течением времени система эволюционирует в отвечающую точке  $D$  стационарное твердоподобное состояние.

Возрастание параметра  $\tau = \tau_T/\tau_\sigma$  приводит к закручиванию траекторий вокруг точки  $D$ , т.е. при сравнительно медленном изменении температуры и быстром изменении напряжений проявляется тенденция к возникновению прерывистого режима трения. В закритической области  $T_e > T_{c0}$  точка  $D$  является седлом (рис. 8).

Показатели Ляпунова особой точки  $O$  определяются выражением

$$\lambda_O = \frac{T_e - 2g^{-1}}{2\tau(g^{-1} - 1)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8\tau \frac{g(T_e - 1 - g^{-1})(g^{-1} - 1)^2}{(T_e - 2g^{-1})^2}} \right]. \tag{3.45}$$

Отсюда видно, что при значениях параметра  $\tau$ , ограниченных сверху величиной

$$\tau_c = \frac{(T_e - 2g^{-1})^2}{8g(T_e - 1 - g^{-1})(g^{-1} - 1)^2}, \tag{3.46}$$

точка  $O$  представляет собой устойчивый узел, а при  $\tau > \tau_c$  — фокус.

Таким образом, в закритической области  $T_e > T_{c0}$  при  $\tau_\sigma \ll \tau_T$  возникает прерывистый режим трения (рис. 8в), характеризующийся частотой

$$\omega = \frac{2g^{-1} - T_e}{2\tau_T(g^{-1} - 1)} \left[ 8\tau \frac{g(T_e - 1 - g^{-1})(g^{-1} - 1)^2}{(T_e - 2g^{-1})^2} - 1 \right]^{1/2} \tag{3.47}$$

и коэффициентом затухания

$$\alpha = \frac{1}{2} \tau_T^{-1} (g^{-1} - 1)^{-1} (T_e - 2). \tag{3.48}$$

С увеличением температуры в интервале  $T_e > T_{c0}$  величина  $\omega$  убывает, а  $\alpha$  и  $\tau_c$  возрастают. Иными словами, возбуждение системы способствует исчезновению затухающих колебаний, представляющих прерывистый режим трения. Однако, как видно из рис. 8, про-

явлению прерывистого движения способствует возрастание параметра  $\tau = \tau_T/\tau_\sigma \gg 1$ .

Обратный предел,  $\tau_T \ll \tau_\sigma$ , отвечает адиабатическому приближению, представляющему собой стандартную картину фазового перехода — плавление смазки. Как видно из рис. 8а, уменьшение параметра  $\tau \rightarrow 0$  приводит к выделению на фазовом портрете системы участка MOD, к которому быстро сбегаются со временем все траектории [68, 87]. Участок MOD, положение которого определяется внешними условиями (величиной  $T_e$ ), назван в [89] "руслом большой реки". Исследование временных зависимостей пути, пройденного конфигуративной точкой, показывает, что эта точка быстро достигает участка MOD и затем медленно движется по нему. Таким образом, движение здесь преимущественно определяет кинетику системы. В этом и состоит обнаруженная в [89] универсальность кинетической картины фазового перехода.

2. *Случай*  $\tau_\sigma \ll \tau_\varepsilon, \tau_T$ . Полагая в (3.15)  $\tau_\sigma \dot{\sigma} = 0$ , находим связь

$$\sigma = g\varepsilon, \quad (3.49)$$

подстановка которой в (3.16), (3.17) даёт систему уравнений

$$\dot{\varepsilon} = -\varepsilon[1 - g(T - 1)], \quad (3.50)$$

$$\dot{T} = \tau^{-1}[T_e - T - \varepsilon^2 g(1 - g)], \quad (3.51)$$

где время измерено в единицах  $\tau_\varepsilon$ , параметр  $\tau \equiv \tau_T/\tau_\varepsilon$ . Фазовый портрет определяется наличием особых точек  $D(T_e, 0)$  и  $O(1 + g^{-1}, \{[T_e - (g^{-1} + 1)]g^{-1}(1 - g)^{-1}\}^{1/2})$ . Показатели Ляпунова имеют вид

$$\lambda_D = \frac{1}{2} [g(T_e - 1) - \tau^{-1} - 1] \times \\ \times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 4\tau^{-1} \frac{g(T_e - 1 - g^{-1})}{[\tau^{-1} - g(T_e - 1 - g^{-1})]^2}} \right\}, \quad (3.52)$$

$$\lambda_O = -\frac{1}{2} \tau^{-1} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8\tau(T_e - 1 - g^{-1})} \right]. \quad (3.53)$$

Как и в случае 1, точка D при  $T_e \leq T_{c0}$  представляет собой устойчивый узел, а при  $T_e > T_{c0}$  — седло. Точка O реализуется только в жидкоподобной области  $T_e > T_{c0}$ , где она является устойчивым узлом при малых  $\tau$  и устойчивым фокусом, если  $\tau$  превышает критическое значение

$$\tau_c = \frac{1}{8} (T_e - 1 - g^{-1})^{-1}. \quad (3.54)$$

Соответствующие выражения для частоты и декремента затухания колебаний имеют вид

$$\omega = \frac{1}{2} \tau_T^{-1} [8\tau(T_e - 1 - g^{-1}) - 1]^{1/2}, \quad (3.55)$$

$$\alpha = (2\tau_T)^{-1}. \quad (3.56)$$

Проведённый анализ и вид фазовых портретов показывают, что, как и в случае 2, при больших значениях параметра  $\tau$  система характеризуется затухающими колебаниями, т.е. прерывистым движением (рис. 8в), а при уменьшении  $\tau$  до значений  $\tau \ll 1$  наступает диссипа-

тивный режим релаксации (рис. 8а). Подобным же образом в адиабатическом пределе  $\tau \rightarrow 0$  проявляется универсальность кинетического поведения, состоящая в наличии участка MOD, выделенного на рис. 8а, на котором система медленно эволюционирует к стационарной точке O [68, 87].

3. *Случай*  $\tau_T \ll \tau_\sigma, \tau_\varepsilon$ . Полагая в (3.17)  $\tau_T \dot{T} = 0$ , находим

$$T = T_e - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (3.57)$$

и уравнения (3.15), (3.16) принимают вид

$$\dot{\sigma} = -\sigma + g\varepsilon, \quad (3.58)$$

$$\dot{\varepsilon} = \tau^{-1} [-\varepsilon + (T_e - 1)\sigma - \sigma^2(\varepsilon + \sigma)], \quad (3.59)$$

где время измерено в единицах  $\tau_\sigma$  и параметр  $\tau \equiv \tau_\varepsilon/\tau_\sigma$ . Фазовый портрет имеет особые точки:  $D(0, 0)$  и

$$O\left(\left\{[T_e - (g^{-1} + 1)]g^{-1}(1 - g)^{-1}\right\}^{1/2}, \left\{[T_e - (g^{-1} + 1)](g^{-1} - 1)^{-1}\right\}^{1/2}\right)$$

(см. рис. 8), вторая из которых реализуется только в жидкоподобной области  $T_e > T_{c0}$ . Соответствующие показатели Ляпунова имеют вид

$$\lambda_D = -\frac{1}{2}(1 + \tau^{-1}) \times \\ \times \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 4\tau^{-1}g(1 + \tau^{-1})^{-2}(T_e - 1 - g^{-1})} \right], \quad (3.60)$$

$$\lambda_O = -\frac{1}{2} \left( 1 + \tau^{-1} \frac{T_e - 2}{g^{-1} - 1} \right) \times \\ \times \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8\tau \frac{(g^{-1} - 1)[T_e - g^{-1} - g(T_e - 1)]}{[\tau(g^{-1} - 1) + T_e - 2]^2}} \right]. \quad (3.61)$$

При  $T_e \leq T_{c0}$  точка D является устойчивым узлом, а с переходом в закритическую область  $T_e > T_{c0}$  трансформируется в седло. Точка O, характеризующая жидкоподобную фазу, при значениях параметра  $\tau$ , принадлежащих интервалу  $(\tau_-, \tau_+)$ , где

$$\tau_{\pm} = (g^{-1} - 1)^{-1} [3T_e + 2 - 4g^{-1} - 4g(T_e - 1)] \pm \\ \pm (g^{-1} - 1)^{-1} \left\{ 8[g^{-1} + g(T_e - 1) - T_e] \times \right. \\ \left. \times [2g^{-1} + 2g(T_e - 1) - T_e - 2] \right\}^{1/2}, \quad (3.62)$$

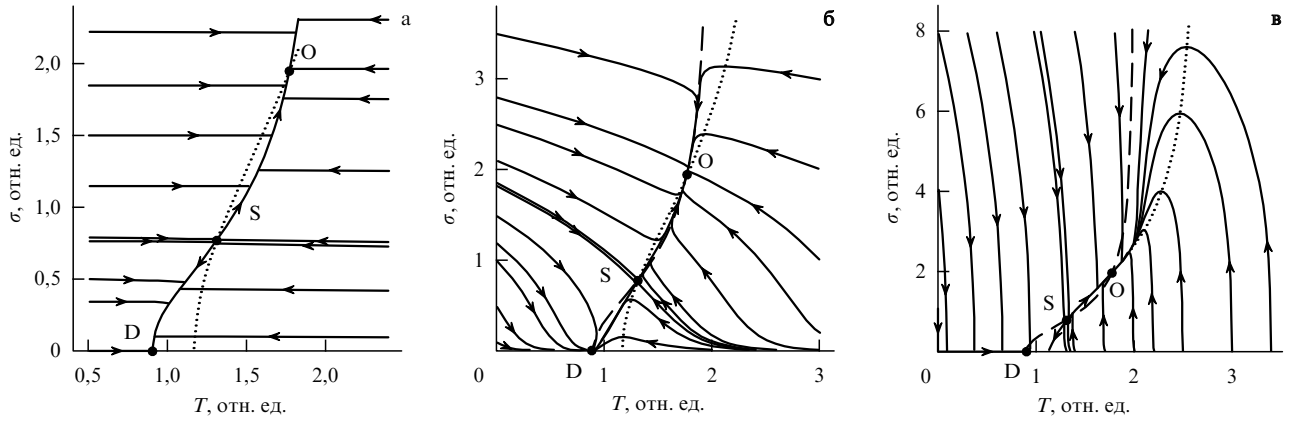
представляет собой устойчивый фокус, а при значениях  $\tau$ , лежащих вне интервала  $(\tau_-, \tau_+)$ , — устойчивый узел. Характерные величины частоты

$$\omega = \frac{1}{2} \tau_\varepsilon^{-1} (g^{-1} - 1)^{-1} \left\{ 8\tau(g^{-1} - 1) [T_e - g^{-1} - g(T_e - 1)] - \right. \\ \left. - [\tau(g^{-1} - 1) + T_e - 2]^2 \right\}^{1/2} \quad (3.63)$$

и коэффициента затухания

$$\alpha = \frac{1}{2} \tau_\varepsilon^{-1} (g^{-1} - 1)^{-1} [\tau(g^{-1} - 1) + T_e - 2] \quad (3.64)$$

являются соизмеримыми при всех значениях  $T_e, \tau$ . Поэтому здесь прерывистый режим трения практически не проявляется, в отличие от такового в рассмотренных выше случаях 1 и 2.



**Рис. 9.** Фазовые портреты для фазового перехода первого рода ( $T_c = 0,9, g_\theta = 0,6, \theta = 0,1, \alpha = 0,75$ ): (а)  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma = 10^2 \tau_T$ , (б)  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma = \tau_T$ , (в)  $\tau_\epsilon \ll \tau_T = 10^2 \tau_\sigma$ . Штриховая и пунктирная линии указывают точки, в которых фазовые траектории имеют соответственно вертикальную и горизонтальную касательные.

Согласно фазовым портретам, универсальность кинетического поведения системы проявляется как при  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma$ , так и при  $\tau_\epsilon \gg \tau_\sigma$ . В первом случае выход на универсальный участок происходит благодаря быстрому изменению деформации  $\epsilon(t)$  при практически неизменных напряжениях  $\sigma(t)$  (рис. 8а), а во втором наблюдается обратная картина —  $\sigma(t)$  изменяется очень быстро, а  $\epsilon(t)$  почти не изменяется. В промежуточной области  $\tau_\epsilon \sim \tau_\sigma$  универсальность проявляется только при малых начальных значениях деформации  $\epsilon(0)$  и напряжений  $\sigma(0)$ :  $\epsilon(0) \ll \epsilon_0, \sigma(0) \ll \sigma_0$ . Отметим, что универсальный участок фазовых траекторий, в отличие от такового в случаях 1 и 2, имеет не спадающий, а нарастающий характер, соответствующий кривой деформации [61, 90–92].

**3.3.3. Кинетика фазового перехода первого рода.**

1. *Случай*  $\tau_\epsilon \ll \tau_\sigma, \tau_T$ . Рассмотрим, как и для фазового перехода второго рода, различные предельные соотношения времён релаксации  $\tau_\sigma, \tau_\epsilon, \tau_T$  [68, 87]. При этом в исходном уравнении (3.15) вместо постоянной  $g$  используем зависимость (3.33) при  $\beta = 2$ . Отметим, что для фазового перехода первого рода не проводится стандартного аналитического анализа особых точек на устойчивость ввиду громоздкости получаемых выражений. Фазовые портреты построены для температуры поверхностей, находящейся в интервале  $(T_c^0, T_{c0})$  реализации фазового перехода первого рода. Для температур  $T_c \geq T_{c0}$  фазовые портреты аналогичны рассмотренным в разделе 3.3.2.

Полагая в (3.16)  $\tau_\epsilon \dot{\epsilon} = 0$ , получаем связь  $\epsilon = (T - 1)\sigma$ . Учитывая её в уравнениях (3.15), (3.17) и используя масштаб  $\tau_\sigma$  для измерения времени, приходим к системе (3.43) и

$$\dot{\sigma} = -\sigma \left[ 1 - g_\theta \left( 1 + \frac{\theta^{-1} - 1}{1 + (\sigma/\alpha)^2} \right) (T - 1) \right]. \quad (3.65)$$

Фазовый портрет системы (3.65), (3.43) имеет три особые точки:  $D(T_c, 0), S(T^m, \sigma^m), O(T_0, \sigma_0)$ , где

$$T_0^m = T_c - \sigma_0^m \epsilon_0^m + (\sigma_0^m)^2, \quad (3.66)$$

$$\epsilon_0^m = (1 + (\sigma_0^m)^2)^{-1} (T_c + (\sigma_0^m)^2 - 1) \sigma_0^m, \quad (3.67)$$

характерные значения  $\sigma_0^m$  определяются равенствами (3.37) и (3.38).

В рассматриваемом интервале температур точка  $S$  является седлом,  $O$  — устойчивым узлом или фокусом, а точка  $D$  — устойчивым узлом. На рисунке 9 показан, каким образом изменяется фазовый портрет с увеличением отношения времён релаксации  $\tau = \tau_T/\tau_\sigma$ . При сравнении рис. 9 с рис. 8 видно, что в окрестности точки  $O$  поведение траекторий является практически тем же, что и в случае фазового перехода второго рода: в адиабатическом пределе  $\tau_T \ll \tau_\sigma$  траектории быстро сбегаются к универсальному участку  $OS$  (рис. 9а), а в противоположном пределе,  $\tau_T \gg \tau_\sigma$ , проявляется режим затухающих колебаний, представляющих собой прерывистое движение. Основное различие состоит в появлении сепаратрисы в области малых значений напряжений, которое отражает наличие барьера на зависимости  $V(\sigma)$ .

2. *Случай*  $\tau_\sigma \ll \tau_\epsilon, \tau_T$ . Подстановка выражения (3.33) для величины  $g$  в исходное уравнение (3.15), где следует положить  $\tau_\sigma \dot{\sigma} = 0$ , приводит к кубическому уравнению, решение которого удобно записать в виде

$$\sigma = \frac{1}{3} (g_\theta \epsilon + \sigma_+^0 + \sigma_-^0). \quad (3.68)$$

Здесь введены функции

$$\sigma_\pm^0 = \left[ \frac{1}{2} (2g_\theta^3 \epsilon^3 + 27g_\theta \epsilon \alpha^2 \theta^{-1} - 9g_\theta \epsilon \alpha^2) \pm Q^{1/2} \right]^{1/3}, \quad (3.69)$$

$$Q = (3\alpha^2 - g_\theta^2 \epsilon^2)^3 + \frac{1}{4} (9g_\theta \epsilon \alpha^2 - 27g_\theta \epsilon \alpha^2 \theta^{-1} - 2g_\theta^3 \epsilon^3)^2. \quad (3.70)$$

Подстановка связи (3.68) в уравнения (3.16), (3.17) даёт систему уравнений (ср. с (3.50), (3.51))

$$\dot{\epsilon} = -\epsilon + \frac{1}{3} (T - 1) (g_\theta \epsilon + \sigma_+^0 + \sigma_-^0), \quad (3.71)$$

$$\tau \dot{T} = T_c - T - \frac{1}{3} (g_\theta \epsilon + \sigma_+^0 + \sigma_-^0) \left[ \epsilon - \frac{1}{3} (g_\theta \epsilon + \sigma_+^0 + \sigma_-^0) \right]. \quad (3.72)$$

Фазовый портрет системы (3.71), (3.72) имеет три особые точки (см. рис. 9):  $D(T_c, 0), S(T^m, \epsilon^m), O(T_0, \epsilon_0)$ ,

где характерные значения  $T_0^m, \varepsilon_0^m$  определяются соответственно равенствами (3.66), (3.67). Как и в случае 1, точка D является устойчивым узлом, S — седлом, а O — притягивающим узлом или фокусом. Также нетрудно увидеть, что при  $\tau_T \ll \tau_\varepsilon$  максимальным образом проявляется универсальность кинетического поведения системы (рис. 9а), а в противоположном пределе,  $\tau_T \gg \tau_\varepsilon$ , также наблюдается режим затухающих колебаний, представляющих прерывистое трение (рис. 9в). Сравнивая фазовый портрет системы (3.71), (3.72) с соответствующим фазовым портретом для перехода второго рода (см. рис. 8), можно отметить, как и в случае 1, появление сепаратрисы в области малых значений  $T, \varepsilon$ , отвечающей энергетическому барьеру, разделяющему жидкоподобную и твердоподобную фазы.

3. *Случай  $\tau_T \ll \tau_\sigma, \tau_\varepsilon$ .* Полагая в (3.17)  $\tau_T \dot{T} = 0$ , получаем связь (3.57)  $T = T_e - \sigma\varepsilon + \sigma^2$ , подстановка которой в (3.16) даёт уравнение (3.59), а (3.15) принимает вид (ср. с (3.58))

$$\dot{\sigma} = -\sigma + g_\theta \left[ 1 + \frac{\theta^{-1} - 1}{1 + (\sigma/\alpha)^2} \right] \varepsilon. \tag{3.73}$$

Фазовый портрет системы (3.59), (3.73) имеет три особые точки (см. рис. 9): D(0, 0), S( $\varepsilon^m, \sigma^m$ ), O( $\varepsilon_0, \sigma_0$ ), где характерные значения  $\sigma_0^m, \varepsilon_0^m$  определяются равенствами соответственно (3.37), (3.67). Как и в случаях 1 и 2, точка D является устойчивым узлом, S — седлом, а O — притягивающим узлом или фокусом.

Из сравнения с соответствующим фазовым портретом для перехода второго рода видно, что, как и ранее, единственное усложнение состоит в появлении сепаратрисы в области малых значений  $\varepsilon$  или  $\sigma$ . Как и для фазового перехода второго рода, универсальность кинетического поведения системы как при  $\tau_\varepsilon \ll \tau_\sigma$ , так и при  $\tau_\varepsilon \gg \tau_\sigma$  сохраняется для фазового перехода первого рода.

Рассмотрение случая  $\beta = 1$  показывает, что синергетический потенциал является нечётной функцией  $\sigma$  и определяется выражением (3.40). Фазовые портреты для всех соотношений времён релаксации полностью аналогичны портретам при  $\beta = 2$ .

**3.4. Гистерезисные явления при зависимости модуля сдвига от деформации**

Как отмечалось, при  $g(\sigma) = G/G_0 \equiv \text{const}$  уравнение (3.15) сводится к соотношению типа Максвелла для описания вязкоупругой среды заменой  $\varepsilon/\tau_\sigma \rightarrow \partial\varepsilon/\partial t$ . Уравнение Максвелла предполагает использование идеализированной модели Генки. Известно, что модуль сдвига смазки зависит от величины напряжений [61, 86]. Для учёта этой зависимости в разделе 3.3 мы воспользовались простейшим приближением (3.32), которое описывает переход режима упругой деформации в пластический. Этот переход имеет место при характерных значениях сдвиговых напряжений  $\sigma_p$  и деформации  $\varepsilon_p$ .

Зависимость (3.32) описывает гистерезис при плавлении тонкого слоя смазки только в координатах  $T_e - \sigma$  (см. рис. 7). При этом кривая деформации  $\sigma(\varepsilon)$  является монотонной и позволяет представить лишь непрерывный переход. Однако экспериментальные данные однозначно указывают, что плавление молекулярно-тонкой плёнки смазки имеет скачкообразный характер [5, 6], хотя и может происходить по механизму фазового перехода

второго рода. Как показано ниже [90–92], указанную особенность можно описать с помощью замены зависимости  $g(\sigma)$  в (3.15) зависимостью  $g(\varepsilon) \equiv G(\varepsilon)/G_0$ , где

$$G(\varepsilon) = \Theta + \frac{G - \Theta}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_p)^\beta}. \tag{3.74}$$

При этом величина параметра  $\beta > 0$ , определяющего характер потенциала, также играет ключевую роль.

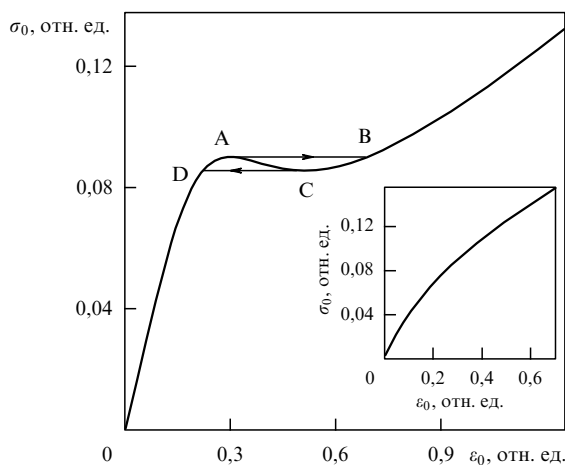
Рассмотрим стационарное состояние, при котором в (3.15) производная  $\dot{\sigma} = 0$  и величина напряжений  $\sigma$  в смазке не изменяется. Этот случай, согласно (3.31), соответствует скольжению с постоянной скоростью. Тогда получаем уравнение, подобное закону Гука:

$$\sigma = g(\varepsilon)\varepsilon, \quad g(\varepsilon) = g_\theta \left( 1 + \frac{\theta^{-1} - 1}{1 + (\varepsilon/\alpha)^\beta} \right), \tag{3.75}$$

где введены параметр  $\theta = \Theta/G < 1$  и коэффициенты  $g_\theta = \Theta/G_0 < 1, \alpha = \varepsilon_p/\varepsilon_s$ . Формула (3.75) в случае аппарата поверхностных сил [84] представляет собой зависимость полного внутреннего сдвигового напряжения в смазке  $\sigma = \sigma_{el} + \sigma_v$  от амплитуды отклонения  $x_{\max}$ , где  $\sigma_{el}$  и  $\sigma_v = \eta_{\text{eff}}V/h$  — упругая и вязкая компоненты соответственно. Отсюда видно, что могут реализоваться две ситуации: при малых  $\beta$  кривая  $\sigma(\varepsilon)$  монотонно возрастает, а при

$$\beta > \frac{1 + \sqrt{\theta}}{1 - \sqrt{\theta}} \tag{3.76}$$

становится немонотонной. В первом случае происходит непрерывное плавление смазки. Второй случай детально представлен на рис. 10: смазка при повышении напряжений до точки А скачкообразно плавится и происходит переход в точку В. При дальнейшем увеличении напряжений деформация монотонно возрастает и смазка остаётся жидкоподобной. Если теперь уменьшать напряжения, то до точки С смазка сохраняет жидкоподобную структуру, а затем скачкообразно затвердевает при переходе в точку D. При дальнейшем уменьшении напряжений смазка остаётся твердоподобной. Такие переходы



**Рис. 10.** Зависимость стационарного значения сдвиговых напряжений  $\sigma_0$  от деформации  $\varepsilon_0$  (3.75) при  $\theta = 0,2, g_\theta = 0,1, \alpha = 0,3, \beta = 3,0$ , имеющая гистерезисное поведение. На вставке показана та же зависимость при  $\beta = 1,0$ .



представлены как фазовые переходы первого рода [93], но между состояниями, которые не являются истинными термодинамическими фазами. Для объяснения этих превращений вводится понятие сдвигового плавления [15]. Отметим, что такое гистерезисное поведение наблюдалось в экспериментах [31, 84, 85].

Используя (3.75), можно найти абсциссы точек перепада А и С:

$$\varepsilon_{A,C} = 2^{-1/\beta} \alpha \left[ b(\beta - 1) - 2 \mp b \sqrt{(1 - \beta)^2 - \frac{4\beta}{b}} \right]^{1/\beta}, \quad (3.77)$$

$$b = \theta^{-1} - 1,$$

где точка А отвечает знак минус, а точке С — знак плюс. Из (3.77) видно, что величина скачка при плавлении возрастает с увеличением  $\alpha$ , а с увеличением  $\beta$  разность  $\varepsilon_A - \varepsilon_C \rightarrow 0$ . Таким образом, при больших  $\beta$  (малых  $\alpha$ ) плавление и затвердевание осуществляются практически при одном и том же значении деформации ( $\varepsilon_A \approx \varepsilon_C$ ), но при разных величинах напряжений  $\sigma$ . Как и ранее (см. раздел 3.2), примем в качестве параметра порядка сдвиговое напряжение  $\sigma$ : при  $\sigma > \sigma_A$  смазка жидкоподобна, а при  $\sigma < \sigma_C$  — твердоподобна. В промежуточной области,  $\sigma_C < \sigma < \sigma_A$ , состояние смазки является неустойчивым, поскольку смазка может находиться в обеих фазах.

В адиабатическом приближении,  $\tau_\varepsilon, \tau_T \ll \tau_\sigma$  (3.20), в рамках которого можно положить  $\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \approx 0$ ,  $\tau_T \dot{T} \approx 0$ , получим уравнение Ландау – Халатникова (3.23) с синергетическим потенциалом

$$V = \frac{\sigma^2}{2} - g_\theta \int_0^\sigma \left[ \sigma' - \frac{(2 - T_c)\sigma'}{1 + \sigma'^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\theta^{-1} - 1}{1 + [\sigma'/\alpha - \sigma'(2 - T_c)/(\alpha + \alpha\sigma'^2)]^\beta} \right\} d\sigma'. \quad (3.78)$$

На рисунке 11 приведена зависимость стационарных сдвиговых напряжений  $\sigma_0$  от температуры поверхностей трения  $T_c$ . При  $T_c$  ниже критического значения  $T_{c0}$  напряжения в смазке отсутствуют ( $\sigma = 0$ ) и она является твердоподобной. С дальнейшим возрастанием температуры до  $T_{cA}$ , отвечающей точке А, напряжение увеличи-

вается, но соответствует гуковскому упругому участку зависимости, приведённой на рис. 10, и, следовательно, смазка остаётся твердоподобной. При последующем возрастании температуры в интервале  $T_{cA} < T_c < T_{cB}$  ( $T_{cB}$  отвечает точке В) напряжение сохраняется и смазка не изменяет своей структуры. При температурах выше  $T_{cB}$  реализуется пластический участок зависимости, показанной на рис. 10, смазка становится жидкоподобной. Если затем понижать температуру поверхностей трения, то смазка остаётся жидкоподобной при температурах, превышающих  $T_{cC}$ , далее при  $T_{cD} < T_c < T_{cC}$  напряжение сохраняется и при температурах, меньших этого значения, смазка приобретает твердоподобную структуру. Выражение для критической температуры  $T_{c0}$  получается из условия  $\partial V/\partial \sigma = 0$ , где  $V$  — синергетический потенциал (3.78):  $T_{c0} = 1 + \theta/g_\theta \equiv 1 + G_0/G$  (3.25).

### 4. Влияние флуктуаций на плавление ультратонкой плёнки смазки

#### 4.1. Динамическая фазовая диаграмма

В любой системе существуют флуктуации, которые математически описываются шумами. Шумы вводятся при решении задач со множеством неоднородностей, дефектов, внешних воздействий и т.д., когда нельзя описать все существующие воздействия объективно. Влияние множества воздействий качественно можно представить как шум. Учёт шума позволяет приблизить изначально идеализированную модель к эксперименту. Ниже мы покажем, что если в системе присутствуют флуктуации, то в ней может устанавливаться прерывистое трение, наблюдаемое экспериментально. Этот раздел посвящён выяснению причин, приводящих к прерывистому трению.

Stick-slip-режим, при котором сила трения  $F$  изменяется со временем периодически, показан на рис. 26. Случайное изменение  $F$  обнаружено с помощью метода молекулярной динамики [20] и подтверждено экспериментально для поверхностей, покрытых поверхностно-активными веществами, при различных условиях [94]. Подобный нерегулярный режим наблюдался также в экспериментах [4], где в качестве смазки использовалась плёнка тетрадекана толщиной 0,8 нм, что соответствует двум монослоям вещества, и скорость сдвига была близка к критическому значению.

Очевидно, данный режим вызван флуктуациями, которые оказываются существенными вследствие малости системы. Флуктуации температуры можно вводить только для ультратонких плёнок смазки, состоящих из ограниченного числа частиц [1, 20, 22, 63]. В соответствии с [15] полное среднеквадратичное смещение молекул представляет собой сумму выражений (3.18) и (3.19) при условии, что тепловые флуктуации и напряжения независимы. Таким образом, флуктуации деформаций, связанные с колебаниями напряжений, и тепловые флуктуации следует рассматривать независимо.

Следуя методу, изложенному в работах [95–98], введём в правые части (3.15)–(3.17) стохастические слагаемые в виде аддитивных некоррелированных шумов  $I_\sigma^{1/2} \xi_1$ ,  $I_\varepsilon^{1/2} \xi_2$ ,  $I_T^{1/2} \xi_3$  (здесь интенсивности  $I_\sigma$ ,  $I_\varepsilon$ ,  $I_T$  измерены в единицах  $\sigma_s^2$ ,  $\varepsilon_s^2 \tau_\varepsilon^{-2}$ ,  $(T_c k/h)^2$  соответственно). Функция  $\xi(t)$  представляет собой  $\delta$ -коррелированный стохастический источник (белый шум) [99, 100],

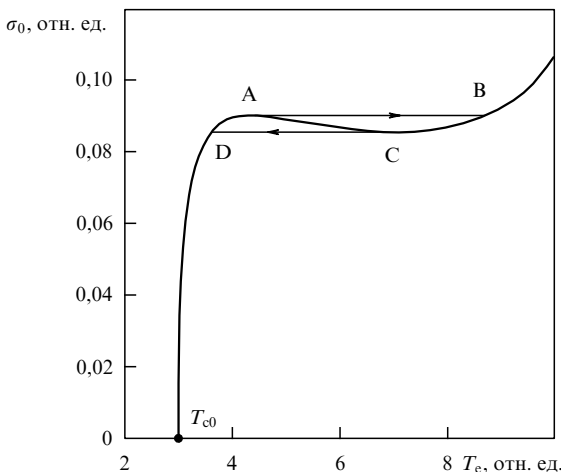


Рис. 11. Зависимость стационарного значения сдвиговых напряжений  $\sigma_0$  от температуры поверхностей трения  $T_c$  при параметрах рис. 10.

моменты которого определяются следующим образом<sup>3</sup>:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\delta_{ij}\delta(t-t'). \quad (4.1)$$

Распределение значений  $\xi(t)$  по их величине является гауссовым [101]:

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\mu^2}\right). \quad (4.2)$$

Здесь  $\mu^2$  представляет собой второй момент источника,

$$\mu^2 \equiv \langle \xi^2(t) \rangle = 2\delta(0), \quad (4.3)$$

расходящийся как  $1/\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$ , где  $\tau$  — ширина дельта-функции, которая в реальных физических системах всегда не равна нулю.

Рассмотрение, проведённое в разделе 3, показывает, что внешнее воздействие может приводить к самоорганизации, в результате которой неравновесная система (смазка) переходит в "упорядоченное" состояние (плавится). Как известно из теории фазовых переходов, такое состояние образуется критическим образом — упорядоченная фаза развивается как самоподобная структура, в которой отсутствует характерный масштаб [102]. Формально свойство самоподобия выражается однородностью функции распределения  $P(x)$  по амплитуде  $x$  гидродинамической моды, ответственной за упорядочение:

$$P\left(\frac{x}{x_c}\right) = x_c^\alpha P(x). \quad (4.4)$$

Согласно (4.4), изменение масштаба  $x_c$  разрешения случайной величины  $x$  приводит к мультипликативному изменению вероятности её реализации  $P$ , характеризуемому показателем  $\alpha$ . Вводя масштабированную переменную  $y \equiv x/x_c$  и функцию распределения  $\mathcal{P}(y) \equiv y^\alpha P(y)$ , (4.4) можно представить в виде

$$P(x) = x^{-\alpha} \mathcal{P}(y). \quad (4.5)$$

Отсюда следует основное свойство самоподобных систем: в пределе больших и малых значений стохастической переменной  $x$ , когда функцию  $\mathcal{P}(y)$  можно положить постоянной, распределение  $P(x)$  принимает степенной вид. В частности, в такой системе может реализоваться режим самоорганизующей критичности [103, 104].

Для учёта этого обстоятельства заменим параметр порядка  $\sigma$  во всех слагаемых уравнений (3.15)–(3.17) степенным выражением  $\sigma^a$  с показателем  $0 < a < 1$ . Тогда основные уравнения со стохастическими добавками примут вид [96, 105–107]

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma^a + g\varepsilon + \sqrt{I_\sigma} \xi_1(t), \quad (4.6)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T-1)\sigma^a + \sqrt{I_\varepsilon} \xi_2(t), \quad (4.7)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_e - T) - \sigma^a \varepsilon + \sigma^{2a} + \sqrt{I_T} \xi_3(t), \quad (4.8)$$

где использованы безразмерные переменные. Физический смысл проведённой замены состоит в том, что

требование самоподобия выполняется в рамках предположений о нелинейной релаксации напряжений, а также о дробном характере положительной и отрицательной обратных связей. Условие адиабатичности  $\tau_\varepsilon, \tau_T \ll \tau_\sigma$  при измерении времени в единицах  $\tau_\sigma$  немедленно приводит к уравнению Ланжевена

$$\dot{\sigma} = f_a(\sigma) + \sqrt{I_a(\sigma)} \xi(t), \quad (4.9)$$

где сила  $f_a(\sigma)$  и интенсивность шума  $I_a(\sigma)$  определяются как

$$f_a(\sigma) \equiv -\sigma^a + g\sigma^a [1 - (2 - T_e)d_a(\sigma)], \quad (4.10)$$

$$I_a(\sigma) \equiv I_\sigma + g^2(I_\varepsilon + I_T\sigma^{2a})d_a^2(\sigma), \quad d_a(\sigma) \equiv (1 + \sigma^{2a})^{-1}.$$

Уравнение Ланжевена представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), так как содержит случайную силу  $\sqrt{I_a(\sigma)} \xi(t)$ . Поэтому каждое решение уравнения является индивидуальным и можно говорить только о статистических характеристиках таких решений. В связи с этим далее рассматривается распределение вероятности решений  $P_a(\sigma)$  по величине напряжений  $\sigma$ .

Умножив (4.9) на  $dt$ , получим дифференциальное соотношение Ланжевена

$$d\sigma = f_a(\sigma) dt + \sqrt{I_a(\sigma)} dW(t), \quad (4.11)$$

где  $dW(t) = W(t+dt) - W(t) \equiv \xi(t) dt$  — винеровский процесс, обладающий свойствами [100]

$$\langle dW(t) \rangle = 0, \quad \langle (dW(t))^2 \rangle = 2 dt. \quad (4.12)$$

В подходе Стратоновича между процессами  $\sigma(t)$  и  $dW$  появляется корреляция, что свидетельствует о наличии эффектов памяти [108], которые имеют место в плёнке смазки. Другими словами, такой подход соответствует уравнению (4.11) с реальным шумом, который аппроксимируется гауссовым белым шумом. Соответствующее УФП с учётом (4.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_a(\sigma, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial \sigma} [f_a(\sigma) P_a(\sigma, t)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \sqrt{I_a(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{I_a(\sigma)} P_a(\sigma, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

С течением времени распределение решений (4.11) становится стационарным, и явный вид этого распределения может быть найден из (4.13) при  $\partial P_a(\sigma, t)/\partial t = 0$ :

$$P_a(\sigma) = \mathcal{Z}^{-1} \exp[-U_a(\sigma)]. \quad (4.14)$$

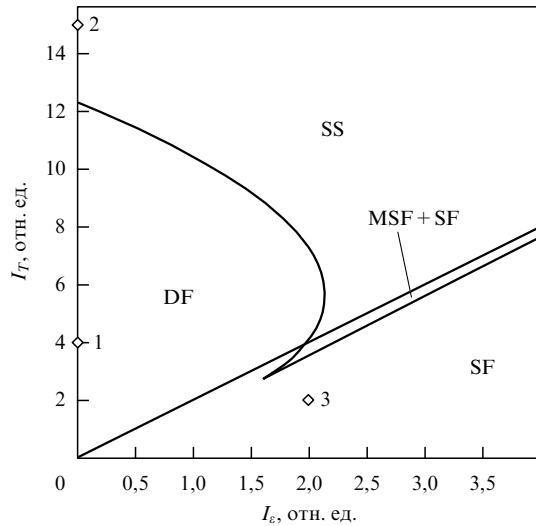
Распределение (4.14) определяется нормировочной постоянной  $\mathcal{Z}$  и эффективным потенциалом

$$U_a(\sigma) = \frac{1}{2} \ln I_a(\sigma) - \int_0^\sigma \frac{f_a(\sigma')}{I_a(\sigma')} d\sigma'. \quad (4.15)$$

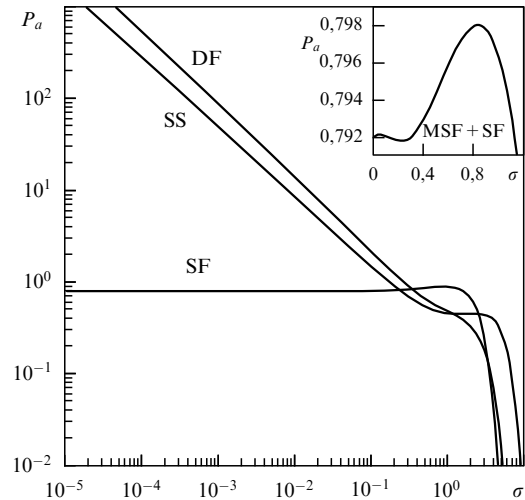
Точки экстремума распределения (4.14) находятся из условия  $dU_a/d\sigma \equiv dI_a/d\sigma - 2f_a = 0$ . В явном виде это условие запишется как

$$\frac{T_e - 2}{1 + \sigma^{2a}} + \frac{ag\sigma^{a-1}}{(1 + \sigma^{2a})^3} [2I_\varepsilon - I_T(1 - \sigma^{2a})] = \frac{1 - g}{g}. \quad (4.16)$$

<sup>3</sup> Множитель 2 в (4.1) выбран для того, чтобы соответствующее уравнение Фоккера – Планка (УФП) имело более простой вид.



**Рис. 12.** Фазовая диаграмма при  $g = 0,9$ ,  $T_e = 1,5$ ,  $a = 0,75$  с областями жидкостного (SF), сухого (DF), прерывистого (SS), жидкостного метастабильного и устойчивого (MSF + SF) трения.



**Рис. 13.** Функция распределения (4.14) при  $I_\sigma = 10^{-10}$  в режимах, показанных точками 1–3 на рис. 12: 1 —  $I_e = 0$ ,  $I_T = 4$  (DF); 2 —  $I_e = 0$ ,  $I_T = 15$  (SS); 3 —  $I_e = 2$ ,  $I_T = 2$  (SF). На вставке показана зависимость  $P_a(\sigma)$  при  $I_e = 1,968$ ,  $I_T = 3,5$  (MSF + SF).

Таким образом, абсциссы экстремумов  $P_a(\sigma)$  не зависят от интенсивности шума  $I_\sigma$ . Выражение (4.16) отличается от полученного в [105] отсутствием коэффициента 2 во втором слагаемом. Иными словами, при увеличении всех интенсивностей шумов в два раза результаты проведённого далее анализа, основанного на изучении экстремумов распределения (построение фазовых диаграмм, интерпретация стационарных состояний) при использовании исчисления Стратоновича, совпадают с результатами, полученными в рамках подхода Ито [105]. Однако потенциал (4.15) не сводится к полученному ранее [105] при простой перенормировке интенсивностей шумов, так как отличается от последнего только видом первого слагаемого (наличием коэффициента 1/2). Поэтому временные зависимости напряжений различаются. Поскольку целью настоящего обзора является, в частности, выяснение особенностей временной эволюции напряжений, используется исчисление Стратоновича. Ранее [105] анализировались только стационарные состояния, поэтому рассмотрение проводилось на основе подхода Ито. При фиксированной температуре  $T_e$  фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 12, где линии отвечают пределам потери устойчивости системы. Выходящая из начала координат прямая, которая определяется равенством

$$I_T = 2I_e, \tag{4.17}$$

следующим из (4.16), даёт границу существования нулевого стационарного решения  $\sigma_0 = 0$ . Выше этой прямой всегда реализуется максимум  $P_a(\sigma)$  при  $\sigma = 0$ , ниже неё данный максимум не существует. На диаграмме видны четыре области, отвечающие различным режимам трения.

На рисунке 13 показано ненормированное распределение вероятности (4.14), соответствующее точкам 1–3 на рис. 12. Точка 1 находится в области сухого трения (DF) фазовой диаграммы, поэтому наблюдается один максимум функции распределения при  $\sigma = 0$ . Двухфазная область (SS) диаграммы характеризуется сосуществованием максимумов распределения  $P_a(\sigma)$  при нуле-

вом и ненулевом значениях напряжений (точка 2). Точка 3 лежит в области, где имеется один максимум распределения вероятности при  $\sigma_0 \neq 0$ , отвечающий режиму жидкостного трения или скольжению. На вставке рис. 13 показан вид распределения в области MSF + SF. Здесь сосуществуют два максимума  $P_a(\sigma)$  при  $\sigma_0 \neq 0$ , что отвечает прерывистому режиму, при котором происходят переходы между метастабильным и устойчивым жидкостным трением.

Зависимости  $P_a(\sigma)$  на рис. 13 построены в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что для кривых DF и SS распределение принимает степенной вид. Такой режим отвечает значениям  $\sigma \ll 1$  и  $I_\sigma, I_e \ll I_T$ , при которых (4.14) сводится к

$$P_a(\sigma) = \sigma^{-a} \mathcal{P}(\sigma), \tag{4.18}$$

где функция  $\mathcal{P}(\sigma)$  определяется выражением

$$\mathcal{P}(\sigma) = Z^{-1} g^{-1} I_T^{-1/2} (1 + \sigma^{2a}) \times \exp \left\{ -I_T^{-1} g^{-2} \int_0^\sigma \frac{1 - g [1 - (2 - T_e)(1 + (\sigma')^{2a})^{-1}]}{(1 + (\sigma')^{2a})^{-2} (\sigma')^a} d\sigma' \right\}. \tag{4.19}$$

Известно, что самоподобным системам отвечает однородная функция распределения [102]. Распределение (4.18) будет однородным в том случае, если функция (4.19) — константа. При малых значениях напряжений множитель перед экспонентой  $1 + \sigma^{2a} \rightarrow 1$ . Интеграл в (4.19) даёт малый вклад при  $\sigma < 0,8$ , а когда  $\sigma$  превышает некоторое значение, интеграл начинает резко увеличиваться [106]. При этом, согласно структуре выражений (4.18), (4.19), указанный интеграл даёт основной вклад в результирующее распределение (4.18), причём последнее становится экспоненциально убывающим. Степенное распределение, характерное для самоподобного поведения, реализуется в ограниченном диапазоне напряжений  $\sigma < 0,8$ , что видно из рис. 13. При превышении критического значения напряжений свойства самоподобия теряются.

#### 4.2. Временные ряды напряжений

Для численного решения уравнения (4.11) воспользуемся методом Эйлера. Однако, поскольку в рассматриваемом случае (4.11) представляет собой СДУ Стратоновича, итерационная процедура будет отличаться от использованной в [109]. Для применения обычной итерационной процедуры необходимо от СДУ Стратоновича перейти к эквивалентному СДУ Ито. Уравнению (4.11) с учётом (4.12) соответствует СДУ Ито в виде [100, 110]

$$d\sigma = \left[ f_a(\sigma) + \sqrt{I_a(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{I_a(\sigma)} \right] dt + \sqrt{I_a(\sigma)} dW(t). \quad (4.20)$$

С учётом определения дискретного аналога дифференциала случайной силы  $dW(t) \equiv \sqrt{\Delta t} W_i$  и (4.10) получим итерационную процедуру для решения уравнения (4.20):

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \left( f_a(\sigma_i) + \frac{ag^2 \sigma_i^{2a-1} [I_T(1 - \sigma_i^{2a}) - 2I_\varepsilon]}{(1 + \sigma_i^{2a})^3} \right) \Delta t + \sqrt{I_a(\sigma_i) \Delta t} W_i. \quad (4.21)$$

Решение уравнения проводится на временном интервале  $t \in [0, T]$ . При заданном числе итераций  $N$  (числе точек временного ряда) приращение времени определяется как  $\Delta t = T/N$ . Сила  $W_i$  обладает следующими свойствами (ср. с (4.12)):

$$\langle W_i \rangle = 0, \quad \langle W_i W_{i'} \rangle = 0, \quad \langle W_i^2 \rangle \rightarrow 2. \quad (4.22)$$

Адекватно представить случайную силу, обладающую свойствами белого шума, позволяет модель Бокса–Мюллера [111]:

$$W_i = \sqrt{\mu^2} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad r_n \in (0, 1], \quad (4.23)$$

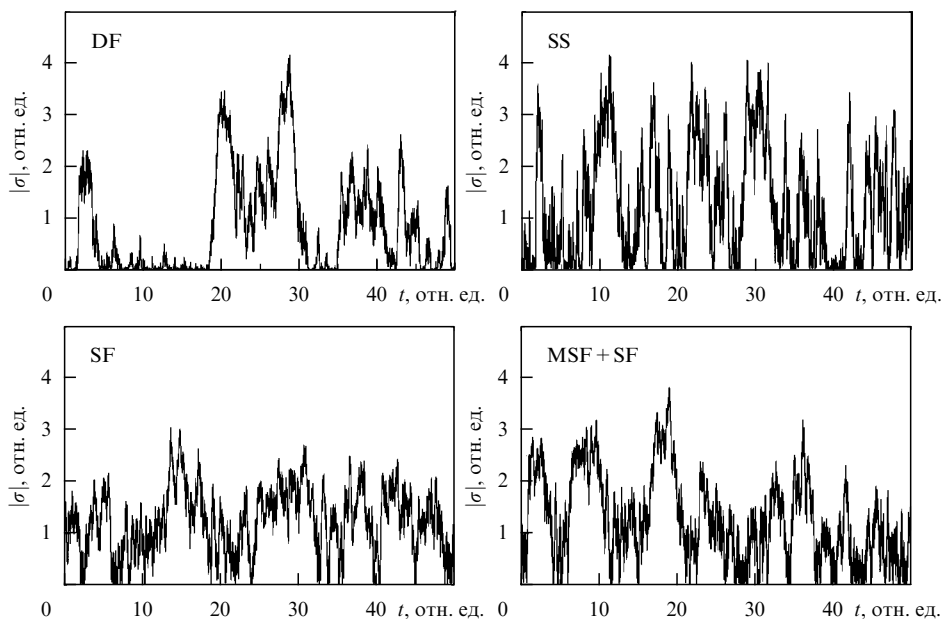
где, согласно (4.22), дисперсия  $\mu^2 = 2$ , а  $W_i$  — абсолютно случайное число со свойствами (4.22). Псевдослучайные числа  $r_1$  и  $r_2$  обладают равномерным распределением.

Эффективный потенциал (4.15) имеет минимумы при положительном и отрицательном значениях напряжений  $\sigma$ . Поэтому при численном решении уравнения (4.20) вследствие флуктуаций будут осуществляться переходы системы между состояниями, соответствующими указанным минимумам. Так как мы рассматриваем движение верхней сдвигаемой поверхности только в одну сторону, отрицательную область  $\sigma < 0$  будем считать нефизичной, что позволяет далее анализировать поведение  $|\sigma|(t)$ . Типичные реализации  $|\sigma|(t)$  для рассматриваемых режимов приведены на рис. 14. При сухом трении (режим DF) видны продолжительные участки, на которых напряжения близки к нулю. При параметрах прерывистого трения (SS) происходят постоянные переходы между нулевым и ненулевым значениями напряжений  $\sigma$ . Реализации SF и MSF + SF визуально подобны, поэтому для определения режима трения здесь следует проводить дополнительный анализ плотности вероятности (см. рис. 13).

#### 4.3. Мультифрактальный флуктуационный анализ самоподобных временных рядов

Мультифрактальный флуктуационный анализ позволяет численно рассчитать все основные мультифрактальные характеристики [112], с помощью которых описываются самоподобные системы. Данный анализ осуществляется в рамках метода, впервые предложенного Яном Кантельхардтом и соавторами [113]. Этот метод в последние годы широко используется при анализе временных рядов в метеорологии [114], медицине [115], экономике [116] и т.д.

Для самоподобных временных рядов суть метода состоит в численном расчёте флуктуационной функции



**Рис. 14.** Временные ряды напряжений  $|\sigma|(t)$ , полученные в результате численного решения уравнения (4.20) с использованием (4.21) при  $N = 10^4$ ,  $t = 50$ ,  $dt = 0,005$ . Режимы DF, SS и SF соответствуют точкам 1–3 на фазовой диаграмме, приведённой на рис. 12, режим MSF + SF отвечает значениям параметров, указанным в подписи к рис. 13.

$F_q(s)$ , связанной скейлинговым соотношением с параметром масштаба  $s$  [113]:

$$F_q \sim s^{h(q)}, \tag{4.24}$$

где  $h(q)$  — обобщённый показатель Хёрста, зависящий от параметра  $q$ , который в свою очередь может принимать любые действительные значения (следует отметить, что  $h(q)$  при  $q = 2$  соответствует классическому показателю Хёрста  $H$  [117]). Таким образом, функция  $h(q)$  вычисляется как угол наклона зависимости  $F_q(s)$ , которая в логарифмических координатах должна иметь линейный вид. Функция  $h(q)$  связана с другим классическим мультифрактальным скейлинговым показателем  $\tau(q)$  [112, 113]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \tag{4.25}$$

Самоподобные свойства временных рядов можно описывать также с помощью функции мультифрактального спектра  $f(\alpha)$ , связанной с  $\tau(q)$  через преобразования Лежандра [112]:

$$\alpha = \tau'(q), \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q), \tag{4.26}$$

где  $\alpha$  — показатель Гёльдера, а штрих означает дифференцирование по  $q$ . Используя (4.25), получаем прямую связь  $f(\alpha)$  и  $h(q)$ :

$$\alpha = h(q) + qh'(q), \quad f(\alpha) = q(\alpha - h(q)) + 1. \tag{4.27}$$

Вид указанных зависимостей характеризует свойства временного ряда. Так, например, постоянное значение  $h(q) = \text{const}$  и соответственно линейное возрастание показателя  $\tau(q)$  отвечают монофрактальному ряду. Убывание функции  $h(q)$  с увеличением  $q$  вместе с нелинейным возрастанием  $\tau(q)$  присущи мультифрактальным рядам, для которых характерно наличие спектра фрактальных размерностей при различных  $q$ . При этом для монофрактальных объектов существует единственное значение показателя Гёльдера  $\alpha$  и зависимость  $f(\alpha)$  имеет узкий пик. В случае мультифрактального ряда реализуется спектр значений  $f(\alpha)$ .

В общем случае для временных рядов можно выделить две причины мультифрактальности: наличие широкой функции распределения вероятностей для значений

элементов ряда и наличие временных корреляций между членами ряда. Если "перемешать" ряд, т.е. переставить его члены в случайном порядке, то в первом случае мультифрактальность не будет устранена. Во втором случае "перемешивание" приведёт к исчезновению корреляций. Так как при этом исчезает "причина" мультифрактальности, такой ряд преобразуется в монофрактальный. Если для ряда характерны обе причины мультифрактальности, то соответствующий "перемешанный" ряд будет характеризоваться более слабой мультифрактальностью, чем исходный [113]. Таким образом, анализ перемешанных рядов с помощью метода [113] позволяет установить причину мультифрактальности, в частности наличие временных корреляций.

Используя указанный метод, проанализируем временные ряды напряжений  $|\sigma|(t)$ , приведённые на рис. 14 [106]. Зависимости  $F_q(s)$ , построенные в двойных логарифмических координатах при нескольких значениях  $q$  для временного ряда, соответствующего режиму DF, имеют линейный вид почти на всём интервале значений  $s$ . Это характерно для всех анализируемых в настоящем обзоре рядов, что позволяет однозначно и с высокой точностью рассчитать показатель Хёрста  $h(q)$  из скейлингового соотношения (4.24). Для расчёта мультифрактальных характеристик выбирается область  $50 < s < 500$ , в которой линейный вид зависимости  $F_q(s)$  наиболее чётко выражен.

Теперь для рядов, приведённых на рис. 14, при параметрах  $N = 10^5$ ,  $t = 10^3$ ,  $dt = 0,01$  рассчитаем зависимости  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$ . Из показанных на рис. 15 зависимостей видно, что наиболее сильную мультифрактальность имеет ряд, соответствующий режиму DF, меньшую — ряд, относящийся к режиму SS, а для рядов, соответствующих режимам MSF + SF и SF, характерно слабое изменение параметра  $h$  в зависимости от  $q$ , что отвечает монофрактальному поведению. Выявленная мультифрактальность для режима DF объясняется тем, что функция распределения в этом режиме при малых значениях напряжений имеет степенной вид, что соответствует самоподобным системам. В режиме SS мультифрактальность выражена слабее, поскольку распределение вероятности, соответствующее рассматриваемому решению уравнения Ланжевена, имеет также ненулевой максимум и с течением времени возможен переход в состояние, определяемое

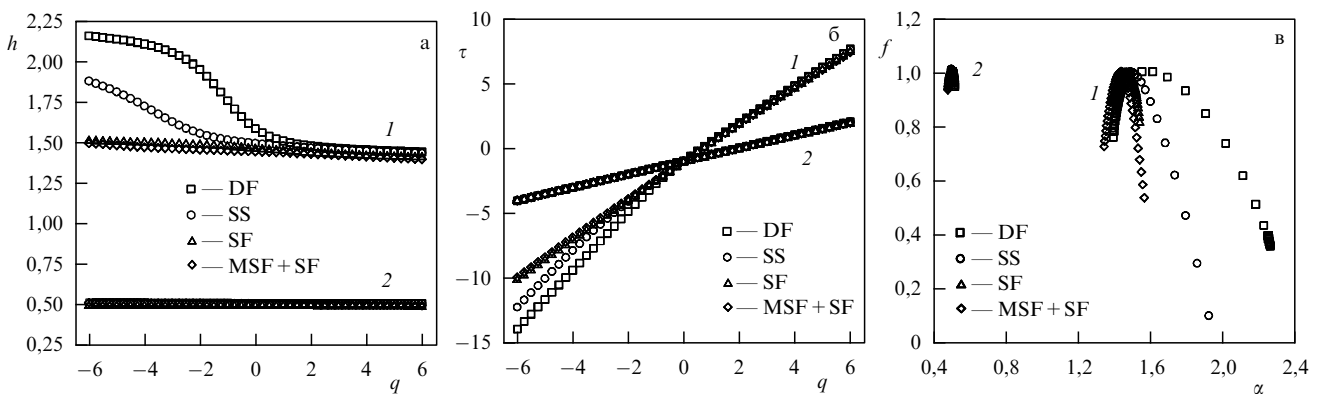


Рис. 15. Мультифрактальные характеристики  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$ , соответствующие параметрам рядов, приведённых на рис. 14. Группа кривых 1 отвечает рядам, полученным непосредственно при использовании итерационной процедуры (4.21), а группа кривых 2 соответствует этим же "перемешанным" рядам.

этим максимумом, что отвечает плавлению смазки. При таком переходе система теряет свойства самоподобия и мультифрактальности и устанавливается стационарный режим жидкостного трения. Однако, поскольку наличие двух максимумов  $P_a(\sigma)$  соответствует режиму stick-slip, с течением времени происходит обратный переход к твердоподобной структуре и поведение системы вновь становится самоподобным. В случае режимов MSF + SF и SF система не обладает мультифрактальностью, поскольку степенной вид функции распределения не реализуется.

Исходя из приведённого описания можно заключить, что мультифрактальность обусловлена степенным видом функции распределения. Выясним, является ли в нашем случае степенной вид  $P_a(\sigma)$  достаточным условием мультифрактальности. Для этого "перемешаем" ряды и найдём снова все фрактальные характеристики системы [106]. Сначала рассмотрим спектр колебаний напряжений, полученный с помощью алгоритма быстрого фурье-преобразования (БПФ) [111] при анализе временного ряда для SS-режима, показанного на рис. 14. Соответствующий временной ряд получен с помощью итерационной процедуры (4.21) при  $N = 2 \times 10^5$ ,  $t = 10^3$ ,  $dt = 0,005$ . Мощность сигнала в спектре убывает с возрастанием частоты,  $S_p(f) \propto 1/f^{1,8}$ . Это свидетельствует о наличии в системе корреляций (в отсутствие корреляций, т.е. при наличии в системе только белого шума,  $S_p(f) = \text{const}$ ). Спектры  $S_p(f)$  имеют подобный вид для всех рассматриваемых режимов.

Таким образом, исследуемая система, основанная на уравнении (4.9), преобразует белый шум, присутствующий практически во всех физических экспериментах, в цветной шум с ненулевым временем корреляции. Для спектра колебаний напряжений после перемешивания ряда характерно соотношение  $S_p(f) \propto 1/f^{0,017}$ , т.е. мощность практически не зависит от частоты. Данный спектр соответствует белому шуму, значит, при перемешивании ряда корреляции исчезли. Однако, поскольку при перемешивании в ряд не добавляются и из него не удаляются члены, вид функции распределения остаётся неизменным. Группа кривых 2 на рис. 15 отвечает анализу рядов, которым соответствуют кривые 1, но после перемешивания этих рядов. Видно, что  $h(q)$  представляет собой одну и ту же прямую  $h = 0,5$  для параметров всех рядов, зависимость  $f(\alpha)$  имеет пик с малой шириной, а  $\tau(q)$  является прямой с одинаковым углом наклона на всех её участках. Данные особенности отвечают монофрактальной системе, причём значение  $h = 0,5$  характерно для рядов, в которых отсутствуют корреляции. Таким образом, можно заключить, что для рассматриваемой системы мультифрактальность вызвана двумя причинами: степенным видом функции распределения и наличием корреляций.

## 5. Термодинамическое представление граничного трения

### 5.1. Свободная энергия

Плотность свободной энергии для смазки имеет вид [61, 118, 119]

$$f = \alpha(T - T_c)\varphi^2 + \frac{a}{2}\varphi^2\varepsilon_{el}^2 - \frac{b}{2}\varphi^4 + \frac{c}{3}\varphi^6 + \frac{g}{2}(\nabla\varphi)^2, \quad (5.1)$$

где  $T$  — температура смазочного материала,  $T_c$  — критическая температура,  $\varepsilon_{el}$  — сдвиговая компонента упругой деформации,  $\alpha, a, b, c, g$  — положительные постоянные,  $\varphi$  — параметр порядка, представляющий собой амплитуду периодической части микроскопической функции плотности среды [61]. Параметр  $\varphi$  равен нулю в жидкоподобной фазе и отличен от нуля в твердоподобной. Далее рассматривается однородный случай и везде полагается  $g = 0$ .

Определим согласно (5.1) упругие напряжения как  $\sigma_{el} = \partial f / \partial \varepsilon_{el}$ :

$$\sigma_{el} = a\varphi^2\varepsilon_{el}. \quad (5.2)$$

Таким образом, модуль сдвига выражается в виде

$$\mu = a\varphi^2. \quad (5.3)$$

Анализ потенциала (5.1) позволяет выделить следующие ситуации. При выполнении условия

$$\frac{a}{2}\varepsilon_{el}^2 + \alpha(T - T_c) \leq 0 \quad (5.4)$$

реализуются два симметричных ненулевых минимума потенциала, разделённые единственным нулевым максимумом (нижняя кривая на рис. 16), что соответствует твердоподобной смазке. В промежуточном диапазоне значений

$$0 < \frac{a}{2}\varepsilon_{el}^2 + \alpha(T - T_c) < \frac{b^2}{4c} \quad (5.5)$$

нулевой максимум потенциала трансформируется в минимум и дополнительно появляются два симметричных максимума, отделяющие центральный минимум от двух симметричных ненулевых минимумов (средняя кривая на рис. 16). В такой ситуации смазка может иметь как твердоподобную, так и жидкоподобную

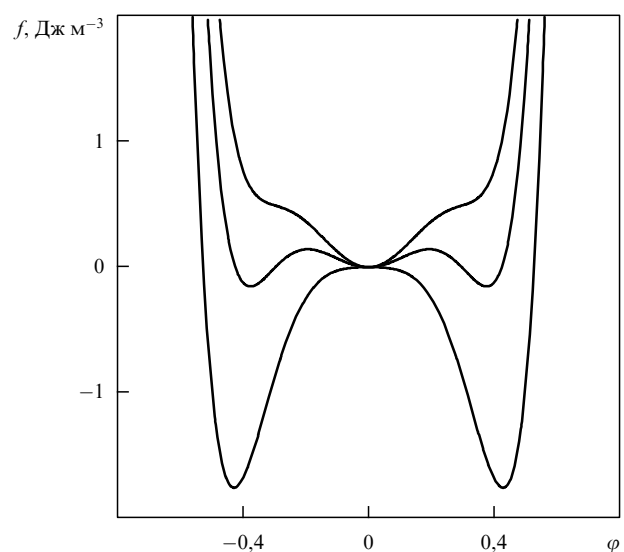


Рис. 16. Зависимость плотности свободной энергии  $f$  (5.1) от параметра порядка  $\varphi$  (безразмерная величина) при  $\alpha = 0,7 \text{ Дж К}^{-1} \text{ м}^{-3}$ ,  $T_c = 290 \text{ К}$ ,  $b = 285 \text{ Дж м}^{-3}$ ,  $c = 1600 \text{ Дж м}^{-3}$ . Кривые (снизу вверх) соответствуют температурам  $T = 288, 302, 310 \text{ К}$  и сдвиговой деформации  $\varepsilon_{el} = 0$ .

структуры, в зависимости от начальных условий. В случае

$$\frac{a}{2} \varepsilon_{el}^2 + \alpha(T - T_c) \geq \frac{b^2}{4c} \quad (5.6)$$

реализуется единственный нулевой минимум  $f(\varphi)$  (верхняя кривая на рис. 16), что, согласно (5.3), соответствует нулевому значению модуля сдвига  $\mu$  и жидкоподобной структуре смазки. Абсциссы экстремумов потенциала (5.1) определяются выражением

$$\varphi_{\mp}^2 = \frac{b}{2c} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \left[\frac{a}{2c} \varepsilon_{el}^2 + \frac{\alpha(T - T_c)}{c}\right]}, \quad (5.7)$$

где знак минус отвечает симметричным максимумам потенциала, а знак плюс — его симметричным минимумам. Согласно выражениям (5.4)–(5.6), плавление смазки осуществляется в результате повышения как её температуры  $T$ , так и механического воздействия с увеличением сдвиговой компоненты упругой деформации  $\varepsilon_{el}$ . Таким образом, модель учитывает термодинамическое и сдвиговое плавление.

**5.2. Стационарные состояния и фазовая диаграмма**

Пусть относительная скорость сдвига трущихся поверхностей, разделённых ультратонким слоем смазки толщиной  $h$ , равна  $V$ . Для установления связи между скоростью сдвига и возникающими в слое смазки упругими деформациями воспользуемся дебаевским приближением, связывающим упругую компоненту деформации  $\varepsilon_{el}$  с пластической  $\varepsilon_{pl}$  [61]:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \frac{\varepsilon_{el}}{\tau_\varepsilon}, \quad (5.8)$$

где  $\tau_\varepsilon$  — максвелловское время релаксации внутренних напряжений. Полная деформация в слое, которая определяется суммой упругой и пластической компонент [61, 120],

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}, \quad (5.9)$$

задаёт скорость движения верхнего блока  $V$  [7]:

$$V = h\dot{\varepsilon} = h(\dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{pl}). \quad (5.10)$$

Из трёх последних соотношений следует выражение для упругой компоненты сдвиговой деформации [121, 122]

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{el} = -\varepsilon_{el} + \frac{V\tau_\varepsilon}{h}. \quad (5.11)$$

Как видно из (5.11), при постоянном значении скорости сдвига  $V$  устанавливается стационарное значение упругой деформации

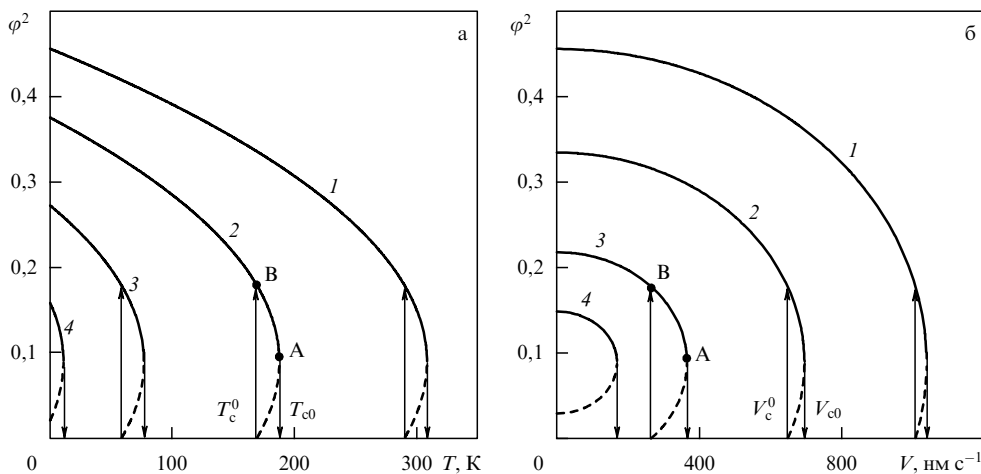
$$\varepsilon_{el}^0 = \frac{V\tau_\varepsilon}{h}. \quad (5.12)$$

Согласно принципу минимума энергии, система при любых начальных условиях стремится к состоянию, соответствующему минимуму потенциала  $f(\varphi)$  (см. рис. 16). При этом устанавливается стационарное значение параметра порядка, определяемое выражением (5.7), взятым со знаком плюс, поскольку знак минус в нём отвечает неустойчивым состояниям. На рисунке 17 приведены стационарные значения квадрата параметра порядка, рассчитанные из выражения (5.7), в котором стационарная упругая деформация  $\varepsilon_{el}$  определяется через скорость сдвига по формуле (5.12). Сплошные участки кривых отвечают устойчивым стационарным состояниям, штриховые — неустойчивым.

При нулевой скорости сдвига (сдвиговые напряжения и деформации равны нулю) и малом значении температуры  $T$  смазка твёрдоподобна, поскольку реализуется ненулевое значение параметра  $\varphi$  и, согласно (5.3), модуль сдвига  $\mu$  также не равен нулю (рис. 17а, сплошной участок кривой 1). Потенциал в этом случае показан нижней кривой на рис. 16. При превышении температурой  $T$  критической величины

$$T_{c0} = T_c - \frac{a}{2\alpha} \left(\frac{\tau_\varepsilon V}{h}\right)^2 + \frac{b^2}{4\alpha c} \quad (5.13)$$

квадрат параметра порядка скачкообразно изменяется от значения  $\varphi_A^2 = 0,5b/c$  до нуля с переходом смазки в



**Рис. 17.** Зависимость стационарного значения квадрата параметра порядка  $\varphi^2$  (безразмерная величина) (5.7) от температуры смазки  $T$  и скорости сдвига  $V$  при параметрах рис. 16 и  $a = 4 \times 10^{12}$  Па,  $h = 10^{-9}$  м,  $\tau_\varepsilon = 10^{-8}$  с. Кривые 1–4 соответствуют (а) фиксированным значениям скорости сдвига  $V = 0, 650, 900, 1020$  нм с $^{-1}$ , (б) фиксированным температурам  $T = 0, 170, 270, 300$  К.

жидкоподобное состояние, чему соответствует верхняя кривая на рис. 16. Если после указанного перехода понижать  $T$ , то смазка затвердевает при меньшем значении температуры:

$$T_c^0 = T_c - \frac{a}{2\alpha} \left( \frac{\tau_\varepsilon V}{h} \right)^2. \quad (5.14)$$

При этом наблюдается скачок квадрата параметра порядка от нуля до  $\varphi_B^2 = b/c$ . В промежуточной области,  $T_c^0 < T < T_{c0}$ , потенциал имеет вид, показанный средней кривой на рис. 16. Таким образом, зависимость  $\varphi^2(T)$  носит гистерезисный характер и соответствует фазовым переходам первого рода. Из рисунка 17а видно, что с повышением скорости сдвига смазка плавится при меньшем значении температуры. Кривая 4 отвечает случаю, в котором после плавления смазка уже не может затвердеть за счёт понижения температуры<sup>4</sup>. Если скорость превышает определённое критическое значение, то смазка вне зависимости от температуры всегда жидкоподобна ( $\mu = 0$ )<sup>5</sup>.

Как видно из рис. 17б, при превышении скоростью критического значения

$$V_{c0} = \frac{h}{\tau_\varepsilon} \sqrt{\frac{2\alpha(T_c - T)}{a} + \frac{b^2}{2ac}} \quad (5.15)$$

происходит плавление смазки, а когда  $V$  становится меньше величины

$$V_c^0 = \frac{h}{\tau_\varepsilon} \sqrt{\frac{2\alpha(T_c - T)}{a}}, \quad (5.16)$$

смазка затвердевает.

На рисунке 18 показана зависимость критической скорости плавления  $V_{c0}$  (5.15) и затвердевания  $V_c^0$  (5.16)

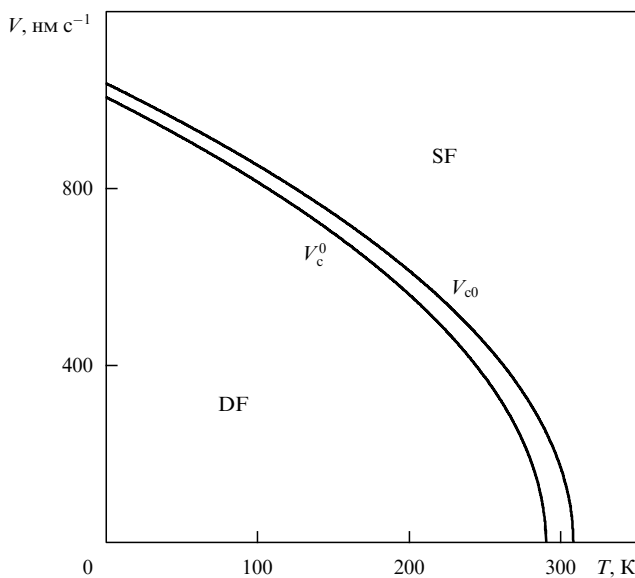


Рис. 18. Фазовая диаграмма с областями жидкостного (SF) и сухого (DF) трения при параметрах рис. 17.

<sup>4</sup> Соответствующее значение критической скорости легко находится из (5.14) при  $T_c^0 = 0$  или из (5.16) при  $T = 0$ .

<sup>5</sup> Соответствующая критическая скорость определяется из (5.13) при  $T_{c0} = 0$  либо из (5.15) при  $T = 0$ .

смазки от её температуры  $T$ . Выше кривой  $V_{c0}$  смазка жидкоподобна и реализуется режим жидкостного трения (SF). В области  $V < V_c^0$  смазка обладает твердоподобной структурой. В области между кривыми на рис. 18 потенциал  $f(\varphi)$  имеет вид, показанный средней кривой на рис. 16, поэтому состояние смазки в этой области является неопределённым и зависит от начальных условий. Таким образом, рис. 18 представляет собой фазовую диаграмму с двумя стационарными режимами трения.

### 5.3. Сила трения

Полное напряжение в слое смазки представляет собой сумму вязкого  $\sigma_v$  и упругого  $\sigma_{el}$  вкладов:

$$\sigma = \sigma_{el} + \sigma_v. \quad (5.17)$$

Сила трения  $F$  выражается как произведение полных напряжений на площадь контакта трущихся поверхностей  $A$ ,

$$F = \sigma A. \quad (5.18)$$

Определим вязкие напряжения в слое смазки согласно формуле [7]

$$\sigma_v = \frac{\eta_{\text{eff}} V}{h}, \quad (5.19)$$

где  $\eta_{\text{eff}}$  — эффективная вязкость смазочного материала. Граничная смазка представляет собой неньютоновскую жидкость. Такие жидкости имеют сложные зависимости  $\eta(\dot{\varepsilon})$ . Например, вязкость полимерных растворов и расплавов при возрастании скорости деформирования  $\dot{\varepsilon}$  обычно уменьшается (псевдопластические жидкости), а в случае суспензий твёрдых частиц вязкость с возрастанием  $\dot{\varepsilon}$ , наоборот, увеличивается (дилатантные жидкости). Поэтому для качественного анализа используем простую аппроксимацию [7]:

$$\eta_{\text{eff}} = k(\dot{\varepsilon})^\gamma, \quad (5.20)$$

позволяющую учесть обе ситуации. Здесь введён коэффициент пропорциональности  $k$  [Па с <sup>$\gamma+1$</sup> ]. Согласно (5.20), для псевдопластических жидкостей  $\gamma < 0$ , дилатантные характеризуются показателем  $\gamma > 0$ , а в случае ньютоновских жидкостей  $\gamma = 0$ , поскольку, как следует из (5.20), вязкость при этом не зависит от скорости.

С учётом (5.10), (5.20) выражение для вязких напряжений (5.19) записывается в виде

$$\sigma_v = k \left( \frac{V}{h} \right)^{\gamma+1}. \quad (5.21)$$

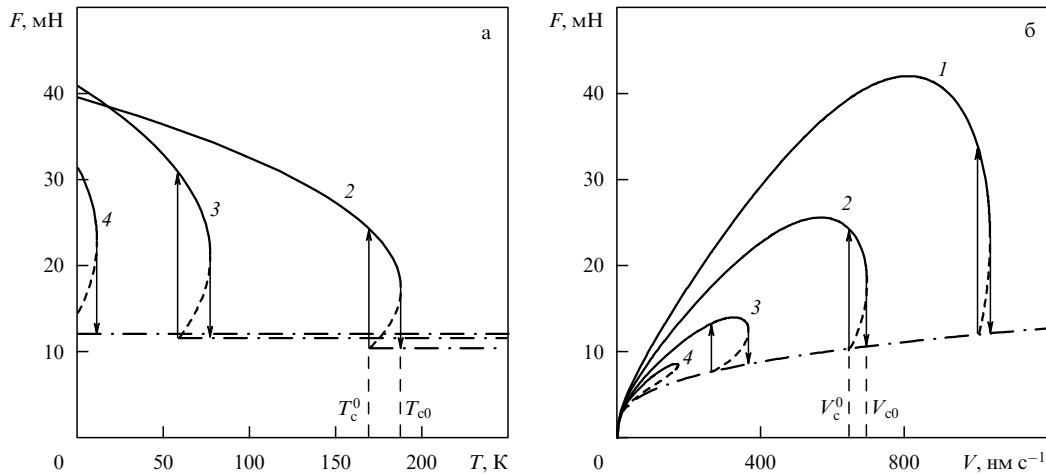
Подставляя (5.17) и (5.21) в (5.18), получим окончательное выражение для силы трения [118, 121]:

$$F = \left[ \sigma_{el} + k \operatorname{sgn}(V) \left( \frac{|V|}{h} \right)^{\gamma+1} \right] A, \quad (5.22)$$

где упругие напряжения  $\sigma_{el}$  определяются соотношением (5.2)<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> В (5.22) введены знаковая функция  $\operatorname{sgn}(x)$  и абсолютное значение скорости сдвига  $|V|$ , поскольку  $V$  может принимать отрицательные значения.





**Рис. 19.** Зависимость силы трения  $F$  (5.22) от температуры поверхностей трения  $T$  и скорости сдвига  $V$  при параметрах рис. 17 и  $\gamma = -2/3$ ,  $A = 3 \times 10^{-9} \text{ м}^2$ ,  $k = 4 \times 10^5 \text{ Па с}^{1/3}$ : (а) кривые 2–4 отвечают постоянным значениям скорости сдвига  $V = 650, 900, 1020 \text{ нм с}^{-1}$ ; (б) кривые 1–4 соответствуют фиксированным значениям температуры  $T = 0, 170, 270, 300 \text{ К}$ .

Зависимость (5.22) показана на рис. 19. Все кривые на рис. 19а соответствуют параметрам кривых на рис. 17а. Кривая 1 на рис. 19а отсутствует, поскольку на рис. 17а она построена при нулевой скорости сдвига, а в состоянии покоя сила трения, как следует из (5.12), (5.22), равна нулю. Параметры всех кривых на рис. 19б соответствуют параметрам кривых на рис. 17б.

Из рисунка 19а видно, что при фиксированной скорости сдвига с повышением температуры сила трения уменьшается. Это происходит за счёт уменьшения модуля сдвига. Когда смазка плавится ( $T > T_{c0}$ ), сила трения не зависит от температуры, поскольку в рамках рассматриваемой модели модуль сдвига при этом равен нулю. На зависимостях наблюдается гистерезис, поскольку при фазовом переходе модуль сдвига (5.3) изменяется скачкообразно. При параметрах кривой 4 в случае плавления смазка не затвердевает при последующем снижении температуры (см. описание рис. 17а), поэтому сила трения после плавления остаётся постоянной при любых  $T$ .

Рисунок 19б демонстрирует несколько иное поведение силы трения. Здесь, согласно (5.22), сначала при повышении скорости полная сила трения возрастает за счёт вклада вязких напряжений  $\sigma_v$ , а также возрастания упругой составляющей  $F$  вследствие увеличения упругой компоненты деформации (5.12). Однако с возрастанием скорости уменьшается модуль сдвига, что в итоге приводит к уменьшению упругой составляющей  $F$ . Поэтому существует критическая скорость, при превышении которой смазка всё ещё является твердоподобной, однако полная сила трения начинает уменьшаться. С дальнейшим повышением скорости при  $V > V_{c0}$  (5.15) происходит плавление смазки и упругое напряжение (5.2), а вместе с ним и первое слагаемое в (5.22) становятся равными нулю, что приводит к резкому снижению полной силы трения. Если снова увеличивать  $V$ , то  $F$  возрастает за счёт увеличения вязкой компоненты (второе слагаемое в (5.22)). Затвердевает смазка с резким увеличением силы  $F$  уже при другом значении скорости,  $V = V_c^0$  (5.16). Отметим, что на рис. 19б зависимости силы трения после плавления, в отличие от таковых на рис. 19а, для всех кривых совпадают, поскольку вязкая компонента  $F$

зависит только от скорости сдвига и не зависит от температуры. Для кривой 4 на рис. 19б переход плавления не показан, чтобы не загромождать рисунок. Кривая 4 отличается от других кривых на рисунке, поскольку её сплошной (устойчивое значение  $F$  до плавления) и штриховой (неустойчивое значение  $F$ ) участки, в отличие от сплошных и штриховых участков других кривых, образуют замкнутую линию. При этом после плавления сила трения всегда описывается зависимостью, показанной штрихпунктирной кривой (устойчивое значение  $F$  после плавления), так как смазка уже не может затвердеть при понижении скорости  $V$ . Результаты, представленные на рис. 19б, качественно совпадают с картой трения (см. рис. 5) для граничного режима, предложенной в [7] при обобщении экспериментальных данных.

#### 5.4. Кинетика плавления

Динамические характеристики любой трибологической системы определяются её свойствами в целом. В частности, в области рассмотренного ранее гистерезиса в процессе трения возможна реализация прерывистого (stick-slip) режима движения [6, 23].

Обозначив текущую координату верхнего блока как  $X$  (см. рис. 1), запишем соответствующее уравнение движения [6, 14, 61]

$$M\ddot{X} = K\Delta X - F. \quad (5.23)$$

Здесь  $\Delta X$  — величина растяжения пружины, которую можно определить как

$$\Delta X = \int_0^t V_0 dt' - X, \quad (5.24)$$

где  $t$  — время движения свободного конца пружины. В случае, когда  $V_0$  со временем не изменяется, выражение (5.24) приобретает вид

$$\Delta X = V_0 t - X. \quad (5.25)$$

Для описания поведения смазки запишем кинетическое релаксационное уравнение типа Ландау–Халатникова

[72, 73]:

$$\dot{\varphi} = -\delta \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (5.26)$$

где  $\delta$  — кинетический коэффициент, характеризующий инерционные свойства системы. Подставляя в (5.26) энергию (5.1), получим уравнение в явном виде:

$$\dot{\varphi} = -\delta [2\alpha(T - T_c)\varphi + a\varphi\epsilon_{el}^2 - 2b\varphi^3 + 2c\varphi^5]. \quad (5.27)$$

Для вычисления временной эволюции системы необходимо решать совместно кинетические уравнения (5.11), (5.23), (5.27), определяя растяжение пружины  $\Delta X$  из (5.24), силу трения  $F$  из (5.22), а упругие напряжения  $\sigma_{el}$  из (5.2). Также при решении уравнений необходимо учитывать связь  $\dot{X} = V$ . Ввиду малости времени релаксации деформации  $\tau_\epsilon$  будем решать совместно два уравнения, (5.23), (5.27), определяя текущую деформацию из (5.12).

Результат решения этих уравнений показан на рис. 20. При выбранной температуре в состоянии покоя трущихся поверхностей смазка твердоподобна. В момент  $t = 0$  правый конец пружины начинает движение с постоянной скоростью  $V_0$ . На начальном этапе движения монотонно возрастают обе составляющие силы трения (5.22) за счёт увеличения скорости трущегося блока  $V$ . Также увеличиваются упругие напряжения  $\sigma_{el}$  и натяжение пружины  $\Delta X$ . Когда скорость превышает критическое значение,  $V > V_{c0}$ , смазка плавится и упругие напряжения  $\sigma_{el}$  становятся равными нулю. Однако сила  $F$  при этом скачкообразно не изменяется, поскольку резко возрастает скорость проскальзывания верхнего трущегося блока  $V$ , а с ней — и вязкая компонента силы трения. Поскольку увеличивается скорость движения  $V$ , блок быстро перемещается на большое расстояние, о чём свидетельствует увеличение угла наклона зависимости  $X(t)$  к оси абсцисс после плавления. Так как блок движется со скоростью  $V$ , существенно превышающей скорость пружины  $V_0$ , натяжение пружины  $\Delta X$  уменьшается. До первой пунктирной прямой на рис. 20 значение  $V_0$  сохраняется постоянным, и со временем устанавливается стационарное состояние жидкоподобной смазки с неизменными значениями силы трения  $F$ , скорости движения блока  $V$ , растяжения пружины  $\Delta X$  и нулевыми упругими напряжениями  $\sigma_{el}$ . При этом зависимость  $X(t)$  приобретает линейный вид. После первой пунктирной прямой скорость  $V_0$  полагается равной нулю, т.е. правый конец пружины останавливается. При этом начинается медленная остановка трущегося блока, поскольку смазка жидкоподобна (момент времени между пунктирными прямыми на рис. 20). После второй пунктирной прямой скорость принимает значение  $V < V_c^0$  и смазка резко затвердевает. При этом в смазке появляются упругие напряжения, вследствие чего упругая составляющая силы трения становится отличной от нуля, однако это изменение компенсирует скачкообразное уменьшение вязкой составляющей силы  $F$  из-за уменьшения скорости движения  $V$ . Поэтому сила трения снова не испытывает скачкообразного изменения. После затвердевания смазки наблюдается медленная релаксация величин, показанных на рис. 20. Это обусловлено тем, что при движении верхнего блока теперь уменьшаются натяжения пружины  $\Delta X$ , а с ним и упругая сила, обеспечивающая движение.

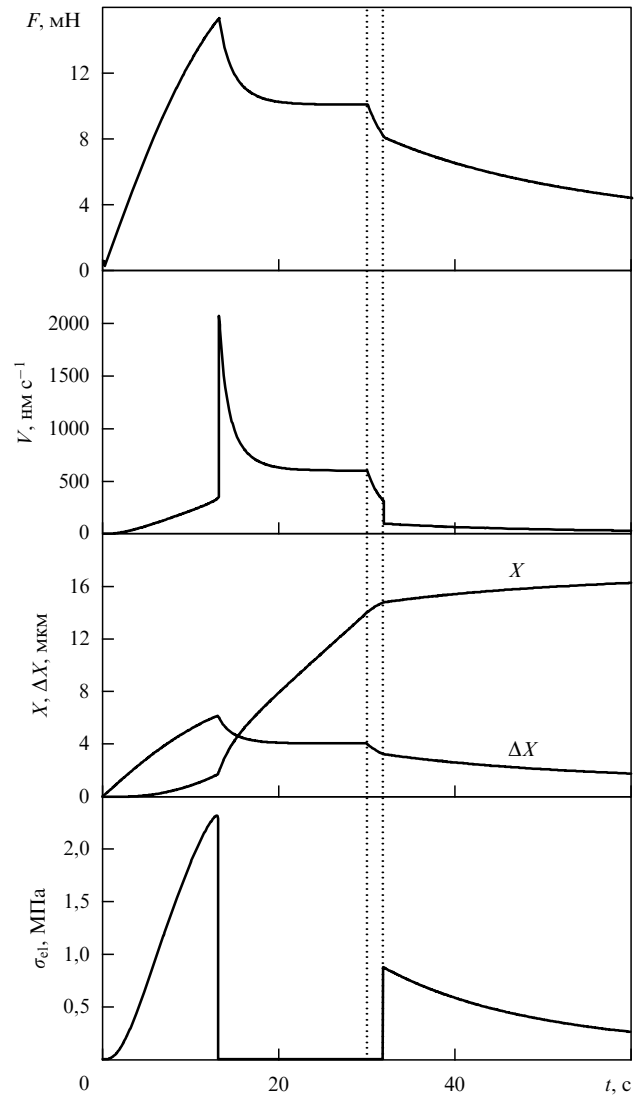
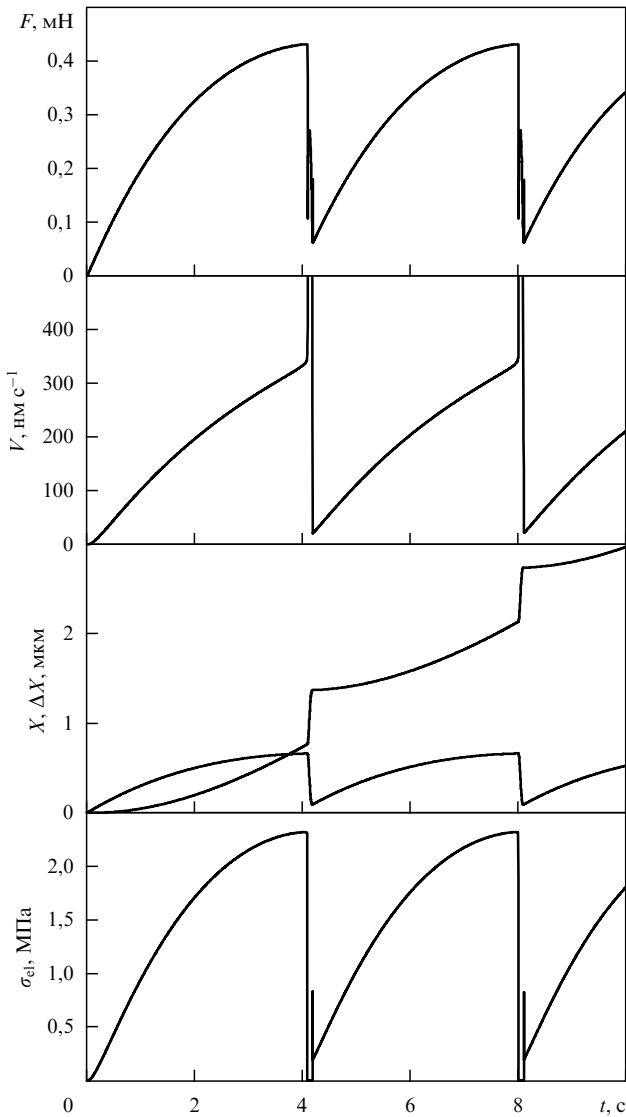


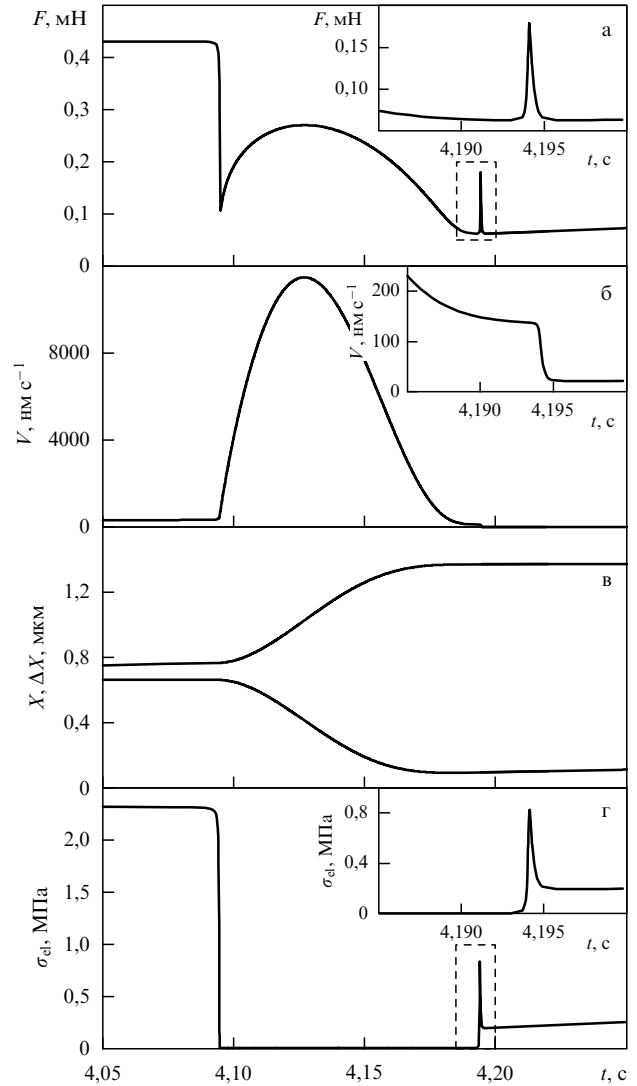
Рис. 20. Зависимости полной силы трения  $F$ , скорости сдвига верхней трущейся поверхности  $V$ , её координаты  $X$ , длины растяжения движущей пружины  $\Delta X$  и упругих сдвиговых напряжений  $\sigma_{el}$  от времени  $t$  при параметрах рис. 17, 19 и  $M = 0,4$  кг,  $K = 2500$  Н м $^{-1}$ ,  $\delta = 100$  Дж $^{-1}$  м $^3$  с $^{-1}$ ,  $T = 260$  К. Скорость  $V_0$  до первой пунктирной прямой ( $t < 30$  с) равна  $600$  нм с $^{-1}$ , после этой прямой ( $t > 30$  с)  $V_0 = 0$  нм с $^{-1}$ .

### 5.5. Прерывистый режим

Экспериментальные работы однозначно указывают, что в граничном режиме трения часто реализуется прерывистый (stick-slip) режим движения, в котором относительная скорость трущихся поверхностей периодически изменяется со временем [6, 31, 84, 85, 123]. Этот режим показан на рис. 21, где представлены те же зависимости, что и на рис. 20, но при других параметрах. Как видно из рис. 21, смазка периодически плавится и затвердевает, что и приводит к установлению колебательного характера движения. На рисунке 22 показаны те же зависимости, но подробно выделена область фазового перехода. На рисунках 21, 22 в начале движения натяжение пружины  $\Delta X$  монотонно возрастает, как и на рис. 20, в результате чего увеличивается скорость сдвига верхнего блока  $V$ , а с её увеличением возрастают упругие напряжения  $\sigma_{el}$  и сила трения  $F$ . Блок при этом перемещается на расстояние  $X$ , также увеличивающееся со временем.



**Рис. 21.** Кинетические зависимости исследуемых величин при  $A = 0,15 \times 10^{-9} \text{ м}^2, k = 0,8 \times 10^3 \text{ Па с}^{1/3}, K = 650 \text{ Н м}^{-1}, V_0 = 350 \text{ нм с}^{-1}$ , остальные параметры те же, что и на рис. 20.

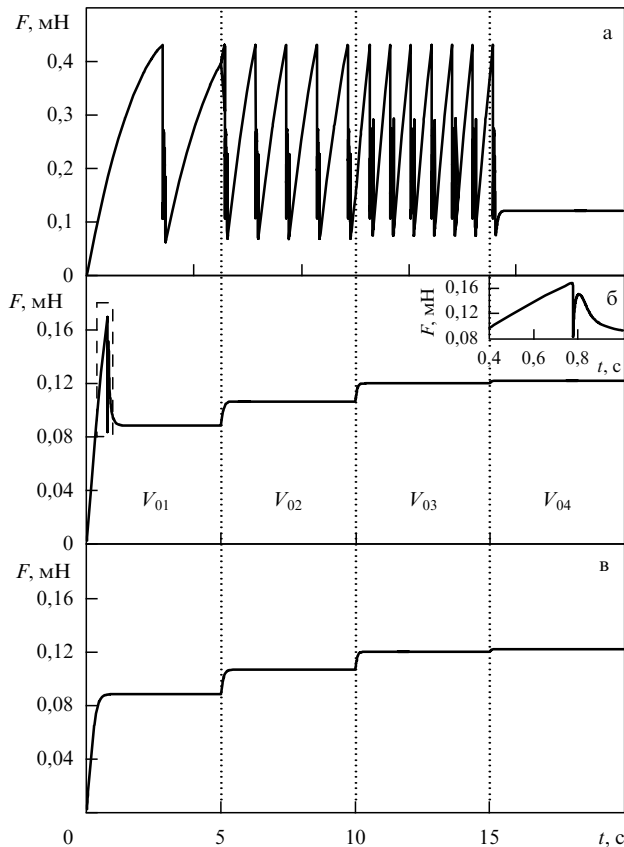


**Рис. 22.** Увеличенные фрагменты зависимостей, показанных на рис. 21. На вставках показаны увеличенные области, выделенные штриховыми линиями. На зависимости  $V(t)$  штриховая линия отсутствует, поскольку при данном масштабе плохо видна.

Из рисунка 22 ясно видно, что при выполнении условия  $V > V_{c0}$  смазка плавится, а напряжения релаксируют до нуля, что приводит к уменьшению полной силы трения и возрастанию скорости сдвига  $V$ . Поскольку при этом трущийся блок движется намного быстрее правого конца пружины, натяжение  $\Delta X$  уменьшается, а вместе с ним — и упругая сила, за счёт которой осуществляется движение. С возрастанием скорости  $V$  в расплавленном состоянии также увеличивается сила трения. Когда сила трения  $F$  и скорость  $V$  достигают своих максимальных значений, натяжение пружины становится настолько малым, что  $V$  и  $F$  начинают уменьшаться. Однако после этого некоторое время сохраняется условие  $V > V_0$ , поэтому  $\Delta X$  продолжает уменьшаться, вследствие чего наступает момент, когда начинает выполняться условие  $V < V_{c0}$  и смазка затвердевает. Затвердеванию отвечает пикообразное увеличение силы трения  $F$  (см. вставку на рис. 22а), поскольку в смазке появляются упругие напряжения (см. вставку на рис. 22г). Из зависимости  $V(t)$ , приведённой на вставке к рис. 22б, видно, что после затвердевания скорость  $V$  уменьшается. Такое резкое

снижение скорости обусловлено тем, что за время проскальзывания  $\Delta X$  значительно уменьшается и упругая сила  $K\Delta X$  уже не может поддерживать движение с большой скоростью. Поскольку теперь смазка твердоподобна, а скорость  $V$  мала, пружина снова натягивается, до тех пор пока скорость не достигает критического значения, при котором смазка плавится. Указанный процесс периодичен во времени. Для выполнения условия затвердевания  $V < V_{c0}$  после плавления необходимо обеспечить малое значение силы трения в жидкоподобном состоянии смазки, для того чтобы трущийся блок за время проскальзывания успел переместиться на большое расстояние и натяжение пружины значительно ослабло. Поэтому на рис. 21, 22 выбраны меньшие значения коэффициента  $k$  и площади соприкосновения поверхностей  $A$  по сравнению с параметрами на рис. 20.

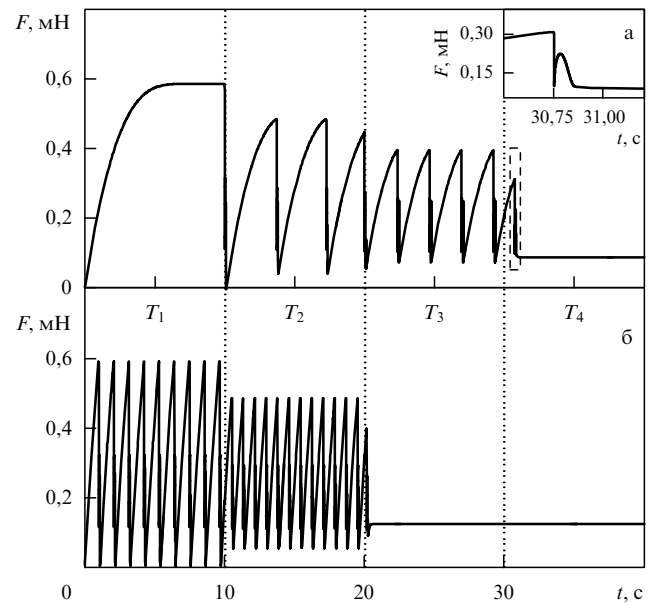
На рисунке 23 показаны зависимости силы трения от времени при фиксированной температуре, но при увеличении скорости  $V$ . Согласно зависимости, приведённой на рис. 23а, при повышении скорости частота stick-slip-пиков увеличивается. Это происходит вследствие того,



**Рис. 23.** Зависимости силы трения  $F$  (5.22) от времени  $t$  при параметрах рис. 21 и скоростях  $V_{01} = 400 \text{ нм с}^{-1}$ ,  $V_{02} = 700 \text{ нм с}^{-1}$ ,  $V_{03} = 1000 \text{ нм с}^{-1}$ ,  $V_{04} = 1050 \text{ нм с}^{-1}$  и температуре  $T$  (а) 260 К, (б) 300 К, (в) 310 К.

что при высоких скоростях быстрее устанавливается критическое значение упругих напряжений, при которых смазка плавится. Соответственно плавление наступает раньше, и за один и тот же промежуток времени система успевает совершить большее число переходов плавление – затвердевание. Рисунок 23б построен при большей температуре смазочного материала. Здесь для всех выбранных скоростей смазка является жидкоподобной, однако имеет твердоподобную структуру в состоянии покоя, поэтому в начале движения при  $V_0 = V_{01}$  на зависимости наблюдается пик, подробно показанный на вставке. Эта увеличенная часть зависимости аналогична показанной на рис. 22а, с тем отличием, что отсутствует пик, соответствующий затвердеванию смазки, поскольку в рассматриваемом случае после плавления смазка остаётся жидкоподобной. Рисунок 23в соответствует температуре, при которой смазка жидкоподобна уже в состоянии покоя, поэтому пик, отвечающий плавлению, здесь отсутствует.

Рисунок 24 отвечает возрастанию температуры смазки  $T$ . Зависимость, приведённая на рис. 24а, построена при скорости  $V_0$ , при которой температура  $T = T_1$  соответствует твердоподобной структуре смазки, т.е. при этом значении температуры в процессе движения смазка не плавится и прерывистое трение не реализуется. С дальнейшим повышением температуры устанавливается stick-slip-режим, причём возрастание температуры способствует снижению амплитуды колебаний силы трения, а также увеличению частоты фазовых



**Рис. 24.** Зависимости силы трения  $F$  (5.22) от времени  $t$  при параметрах рис. 21 и температурах  $T_1 = 230 \text{ К}$ ,  $T_2 = 250 \text{ К}$ ,  $T_3 = 266 \text{ К}$ ,  $T_4 = 280 \text{ К}$  и значениях скорости (а)  $V_0 = 400 \text{ нм с}^{-1}$ , (б)  $V_0 = 1100 \text{ нм с}^{-1}$ .

переходов. На рисунке 24б, построенном при большем значении скорости  $V_0$ , смазка при  $T = T_3$  и  $T = T_4$  жидкоподобна, поэтому наступает режим скольжения, характеризующийся постоянными значениями кинетической силы трения и скорости сдвига трущегося блока. Поскольку в рамках модели температура  $T$  после плавления не оказывает влияния на силу трения (5.22), при этих температурах  $F$  имеет одинаковое значение.

## 6. Заключение

Проведённое рассмотрение позволило разработать модели, с помощью которых можно описать эффекты, наблюдаемые при трении атомарно-гладких твёрдых поверхностей, разделённых ультратонким слоем смазки. Результаты этого рассмотрения позволяют расширить представления о физике трения наноразмерных объектов, когда обычные законы, наподобие закона Амонтона, не выполняются.

Плавление ультратонкой плёнки смазки при трении между атомарно-гладкими твёрдыми поверхностями представлено как результат действия спонтанно появившихся сдвиговых напряжений, которое вызывается внешним сверхкритическим нагреванием. Критическая температура поверхностей трения, при которой происходит плавление, увеличивается с возрастанием характерного значения сдвиговой вязкости и уменьшается с возрастанием модуля сдвига смазки линейным образом. Показано, что прерывистый режим трения (stick-slip) реализуется, если время релаксации температуры смазки намного превышает значение такового для сдвиговых напряжений и деформации. Описан гистерезис зависимостей стационарных напряжений от стационарной деформации и температуры поверхностей трения.

Учтён аддитивный некоррелированный шум сдвиговых напряжений и деформации, а также температуры плёнки смазки. Построена фазовая диаграмма, на кото-

рой интенсивности флуктуаций деформации и температуры смазки определяют области жидкостного, прерывистого и сухого трения. При численном анализе уравнения Ланжевена для различных областей диаграммы построены временные ряды напряжений, позволяющие объяснить эксперименты по трению, в которых наблюдается прерывистое движение. Определены условия, при которых эти ряды являются мультифрактальными.

Построена термодинамическая модель плавления тонкого слоя смазки. Плавление и затвердевание смазочного материала представлены как фазовые переходы первого рода. Проведённое рассмотрение показывает, что в случае сдвига трущихся поверхностей с постоянной скоростью смазка плавится при превышении температурой либо упругими сдвиговыми напряжениями своих критических значений. Поскольку рассматривается фазовый переход первого рода, смазка затвердевает при меньших значениях указанных величин. Построена соответствующая фазовая диаграмма в координатах скорость сдвига – температура смазки. Рассмотрена кинетика системы в рамках механического аналога простой трибологической системы. В зависимости от значений параметров возможны три случая: 1) смазка в процессе трения всегда твердоподобна; 2) смазка находится в жидкоподобном состоянии; 3) в смазке реализуются периодические переходы плавление – затвердевание, приводящие к прерывистому характеру движения. На малых временах подробно рассмотрена область перехода при прерывистом трении и объяснена причина, приводящая к такому режиму. Проведено исследование влияния на прерывистый режим температуры смазки и скорости сдвига. Полученные результаты качественно совпадают с известными экспериментальными данными.

Работа частично выполнена при поддержке Министерства образования и науки, молодёжи и спорта Украины в рамках проекта "Моделирование трения металлических наночастиц и граничных плёнок жидкостей, взаимодействующих с атомарно-гладкими поверхностями" (№ 0112U001380).

## Список литературы

- Persson B N J *Sliding Friction. Physical Principles and Applications* (Berlin: Springer, 2000)
- Bowden F P, Tabor D *The Friction and Lubrication of Solids* (Oxford: Clarendon Press, 1986)
- Ахматов А С *Молекулярная физика граничного трения* (М.: Физматгиз, 1963) [Akhatov A S *Molecular Physics of Boundary Friction* (Jerusalem: Israel Program for Sci. Translations, 1966)]
- Gee M L et al. *J. Chem. Phys.* **93** 1895 (1990)
- Yoshizawa H, Chen Y L, Israelachvili J J. *Phys. Chem.* **97** 4128 (1993)
- Yoshizawa H, Israelachvili J J. *Phys. Chem.* **97** 11300 (1993)
- Luengo G, Israelachvili J, Granick S *Wear* **200** 328 (1996)
- Tshiprut Z, Filippov A E, Urbakh M *Phys. Rev. Lett.* **95** 016101 (2005)
- Filippov A E et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 046102 (2008)
- Погребняк А Д и др. *УФН* **179** 35 (2009) [Pogrebnyak A D et al. *Phys. Usp.* **52** 29 (2009)]
- Van Alsten J, Granick S *Phys. Rev. Lett.* **61** 2570 (1988)
- Ohnishi S et al. *Langmuir* **23** 7032 (2007)
- Yamada S *Langmuir* **24** 1469 (2008)
- Carlson J M, Batista A A *Phys. Rev. E* **53** 4153 (1996)
- Aranson I S, Tsimring L S, Vinokur V M *Phys. Rev. B* **65** 125402 (2002)
- Stevens M J, Robbins M O, Belak J F *Phys. Rev. Lett.* **66** 3004 (1991)
- Thompson P A, Robbins M O *Phys. Rev. A* **41** 6830 (1990)
- Thompson P A, Robbins M O *Science* **250** 792 (1990)
- Xia T K et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 1967 (1992)
- Braun O M, Naumovets A G *Surf. Sci. Rep.* **60** 79 (2006)
- Filippov A E, Klafter J, Urbakh M *Phys. Rev. Lett.* **87** 275506 (2001)
- Dudko O K et al. *Tribol. Lett.* **12** 217 (2002)
- Filippov A E, Klafter J, Urbakh M *Phys. Rev. Lett.* **92** 135503 (2004)
- Thompson P A, Grest G S, Robbins M O *Phys. Rev. Lett.* **68** 3448 (1992)
- Baumberger T, Berthoud P, Caroli C *Phys. Rev. B* **60** 3928 (1999)
- Smith E D, Robbins M O, Cieplak M *Phys. Rev. B* **54** 8252 (1996)
- Krim J, Solina D H, Chiarello R *Phys. Rev. Lett.* **66** 181 (1991)
- Rabinowicz E *Friction and Wear of Materials* (New York: Wiley, 1995)
- Дедков Г В *УФН* **170** 585 (2000) [Dedkov G V *Phys. Usp.* **43** 541 (2000)]
- Tomanek D, Zhong W, Thomas H *Europhys. Lett.* **15** 887 (1991)
- Israelachvili J N *Surf. Sci. Rep.* **14** 109 (1992)
- Israelachvili J *Intermolecular and Surface Forces* (London: Academic Press, 1998)
- Israelachvili J N *Chemtracts: Analyt. Phys. Chem.* **1** 1 (1989)
- Israelachvili J N, Adams G E *J. Chem. Soc. Faraday Trans. 1* **74** 975 (1978)
- Pashley R M *J. Colloid Interface Sci.* **80** 153 (1981)
- Pashley R M *J. Colloid Interface Sci.* **83** 531 (1981)
- Horn R G, Smith D T, Haller W *Chem. Phys. Lett.* **162** 404 (1989)
- Horn R G, Clarke D R, Clarkson M T *J. Mater. Res.* **3** 413 (1988)
- Ploehn H J, Russel W B *Adv. Chem. Eng.* **15** 137 (1990)
- Israelachvili J N, McGuiggan P M *Science* **241** 795 (1988)
- Lee C S, Belfort G *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **86** 8392 (1989)
- Parker J L, Christenson H K *J. Chem. Phys.* **88** 8013 (1988)
- Khomenko A V, Prodanov N V *Condens. Matter Phys.* **11** 615 (2008)
- Robbins M O, Thompson P A *Science* **253** 916 (1991)
- Luan B, Robbins M O *Phys. Rev. Lett.* **93** 036105 (2004)
- Granick S *Science* **253** 1374 (1991)
- Ma W-J, Banavar J R, Koplik J J. *Chem. Phys.* **97** 485 (1992)
- Чувильдиев В Н *Неравновесные границы зерен в металлах. Теория и приложения* (М.: Физматлит, 2004)
- Coussot P et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 175501 (2002)
- Coussot P et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 218301 (2002)
- Persson B N J *Phys. Rev. B* **48** 18140 (1993)
- Stribeck R Z. *Vereins Deutscher Ing.* **46** (1902)
- Pipkin A C *Lectures in Viscoelasticity Theory* (New York: Springer-Verlag, 1972)
- Hardy W, Bircumshaw I *Proc. R. Soc. London A* **108** 1 (1925)
- Hardy W B *Philos. Mag.* **6** **40** 201 (1920)
- Hirano M *Wear* **254** 932 (2003)
- Вear W G, Bowden F P *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **234** 322 (1934)
- Дерягин Б В *Журн. физ. химии* **5** 1165 (1934)
- Елифанов Г И, Минаев Н И *Изв. вузов. Физика* (1) 55 (1959)
- Толстой Д М, Каплан Р Л, в сб. *Теория трения и износа. Сборник статей* (М.: Наука, 1965) с. 44
- Попов В Л *ЖТФ* **72** (5) 100 (2001) [Popov V L *Tech. Phys.* **46** 605 (2001)]
- Persson B N J *Phys. Rev. B* **50** 4771 (1994)
- Braiman Y et al. *Phys. Rev. E* **59** R4737 (1999)
- Sokoloff J B *Phys. Rev. B* **51** 15573 (1995)
- Kawaguchi T, Matsukawa H *Phys. Rev. B* **56** 4261 (1997)
- Haken H *Synergetics* (Berlin: Springer-Verlag, 1978) [Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1980)]
- Олемской А И, Хоменко А В *Синергетика конденсированной среды* (Суми: СумГУ, 2002); <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/15973>
- Олемской А И, Хоменко А В *ЖЭТФ* **110** 2144 (1996) [Olemskoi A I, Khomenko A V *JETP* **83** 1180 (1996)]
- Khomenko A V, Yushchenko O V *Phys. Rev. E* **68** 036110 (2003)
- Khomenko A V, Lyashenko I A *Condens. Matter Phys.* **9** 695 (2006)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Т. 1* (М.: Наука, 1995) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Vol. 1* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]

72. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)]
73. Ландау Л Д, Халатников И М *ДАН СССР* **96** 469 (1954)
74. Кацнельсон А А, Олемской А И *Микроскопическая теория неоднородных структур* (М.: Изд-во МГУ, 1987)
75. Барьяхтар В Г, Олемской А И *ФТТ* **33** 2705 (1991)
76. Navránek A, Marvan M *Ferroelectrics* **176** 25 (1996)
77. Качанов Л М *Основы теории пластичности* (М.: Наука, 1969) [Kachanov L M *Foundations of the Theory of Plasticity* (Amsterdam: North-Holland, 1971)]
78. Eirich F R *Rheology. Theory and Applications* (New York: Academic Press, 1956) [Эйрих Ф (Ред.) *Реология: Теория и приложения* (М.: ИЛ, 1962)]
79. Хоменко А В *ЖТФ* **77** (3) 29 (2007) [Khomenko A V *Tech. Phys.* **52** 320 (2007)]
80. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Наука, 1987) [Landau L D, Lifshitz E M *Theory of Elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1986)]
81. Олемской А И, Торопов Е А *ФММ* (9) 5 (1991)
82. Олемской А И, Хоменко А В *ЖТФ* **70** (6) 6 (2000) [Olemskoi A I, Khomenko A V *Tech. Phys.* **45** 672 (2000)]
83. Олемской А И, Хоменко А В *ЖТФ* **70** (6) 10 (2000) [Olemskoi A I, Khomenko A V *Tech. Phys.* **45** 677 (2000)]
84. Reiter G et al. *J. Chem. Phys.* **101** 2606 (1994)
85. Demirel A L, Granick S J. *Chem. Phys.* **109** 6889 (1998)
86. Reiter G et al., in *Physics of Sliding Friction* (NATO ASI Series. Ser. E, Applied Sciences, Vol. 311, Eds B N J Persson, E Tosatti) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996) p. 119
87. Хоменко А В, Проданов Н В *Физика и техника высоких давлений* **16** (4) 164 (2006)
88. Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э *Теория колебаний* (М.: Наука, 1981) [Andronov A A, Vitt A A, Khaikin S E *Theory of Oscillators* (New York: Dover, 1987)]
89. Зельцер А С, Соболева Т К, Филиппов А Э *ЖЭТФ* **108** 356 (1995) [Zel'tser A S, Soboleva T K, Filippov A E *JETP* **81** 193 (1995)]
90. Хоменко А В, Ляшенко Я А *ФТТ* **49** 886 (2007) [Khomenko A V, Lyashenko I A *Phys. Solid State* **49** 936 (2007)]
91. Khomenko A V, Lyashenko I A *Phys. Lett. A* **366** 165 (2007)
92. Khomenko A V, Lyashenko I A *J. Phys. Studies* **11** 268 (2007)
93. Brener E A, Marchenko V I *Письма в ЖЭТФ* **76** 246 (2002) [*JETP Lett.* **76** 211 (2002)]
94. Bhushan B (Ed.) *Nanotribology and Nanomechanics. An Introduction* (Berlin: Springer-Verlag, 2005)
95. Олемской А И *УФН* **168** 287 (1998) [Olemskoi A I *Phys. Usp.* **41** 269 (1998)]
96. Olemskoi A I, Khomenko A V, Kharchenko D O *Physica A* **323** 263 (2003)
97. Khomenko A V *Phys. Lett. A* **329** 140 (2004)
98. Торопов Е А, Харченко Д О *Изв. вузов. Физика* (4) 75 (1996) [Торопов Е А, Kharchenko D O *Russ. Phys. J.* **39** 355 (1996)]
99. Risken H *The Fokker-Planck Equation* (Berlin: Springer, 1989)
100. Gardiner C W *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* (Berlin: Springer-Verlag, 1985) [Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)]
101. Romero A N, Sancho J M, Lindenberg K *Fluct. Noise Lett.* **2** L79 (2002)
102. Amit D J *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (London: McGraw-Hill, 1978)
103. Bak P *How Nature Works: the Science of Self-organized Criticality* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1997)
104. Jensen H J *Self-organized Criticality. Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
105. Хоменко А В, Ляшенко Я А *ЖТФ* **75** (11) 17 (2005) [Khomenko A V, Lyashenko I A *Tech. Phys.* **50** 1408 (2005)]
106. Khomenko A V, Lyashenko I A, Borisjuk V N *Fluct. Noise Lett.* **9** 19 (2010)
107. Khomenko A V, Lyashenko I A *Fluct. Noise Lett.* **7** L111 (2007)
108. Haken H *Information and Self-organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems* (Berlin: Springer-Verlag, 1988) [Хакен Г *Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам* (М.: УРСС, 2005)]
109. Хоменко А В, Ляшенко Я А *ЖТФ* **77** (9) 137 (2007) [Khomenko A V, Lyashenko I A *Tech. Phys.* **52** 1239 (2007)]
110. Horsthemke W, Lefever R *Noise-induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology* (Berlin: Springer-Verlag, 1984) [Хорстемке В, Лефевр Р *Индукцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии* (М.: Мир, 1987)]
111. Press W H et al. (Eds) *Numerical Recipes in C++: the Art of Scientific Computing* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
112. Olemskoi A I, in *Sov. Sci. Rev. Physics Reviews* Vol. 18, Pt. 1 (Ed. I M Khalatnikov) ((London: Gordon & Breach, 1996) p. 1
113. Kantelhardt J W et al. *Physica A* **316** 87 (2002)
114. Kavasseri R G, Nagarajan R *Chaos Solitons Fractals* **24** 165 (2005)
115. Makowiec D et al. *Physica A* **369** 632 (2006)
116. Lee J W, Lee K E, Rikvold P A *Physica A* **364** 355 (2006)
117. Feder J *Fractals* (New York: Plenum Press, 1988) [Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)]
118. Ляшенко Я А *ЖТФ* **81** (6) 125 (2011) [Lyashenko I A *Tech. Phys.* **56** 869 (2011)]
119. Ляшенко Я А *ЖТФ* **82** (1) 19 (2012) [Lyashenko I A *Tech. Phys.* **57** 17 (2012)]
120. Lemaitre A *Phys. Rev. Lett.* **89** 195503 (2002)
121. Ляшенко Я А, Хоменко А В, Метлов Л С *ЖТФ* **80** (8) 120 (2010) [Lyashenko I A, Khomenko A V, Metlov L S *Tech. Phys.* **55** 1193 (2010)]
122. Lyashenko I A, Khomenko A V, Metlov L S *Tribol. Int.* **44** 476 (2011)
123. Хоменко А В, Ляшенко Я А *ЖТФ* **80** (1) 27 (2010) [Khomenko A V, Lyashenko I A *Tech. Phys.* **55** 26 (2010)]

### Statistical theory of the boundary friction of atomically flat solid surfaces in the presence of a lubricant layer

A.V. Khomenko, I.A. Lyashenko

Sumy State University, ul. Rimskogo-Korsakova 2, 40007 Sumy, Ukraine  
Tel. + 38 (0542) 333 155. E-mail: khom@mss.sumdu.edu.ua, nabla04@ukr.net

A rheological and a thermodynamic model are proposed for the melting of an ultrathin lubricant film between atomically flat solid surfaces. Hysteresis phenomena are considered allowing for the stress and strain dependence of the lubricant shear modulus. The self-similar regime of lubricant melting is studied taking into account the additive noncorrelated noise of basic parameters. The regions of dry, sliding, and stick-slip friction are determined in the phase diagram. Shear stress time series are obtained by numerically analyzing the Langevin equation and then subjected to multifractal fluctuation analysis. The dependence of the stationary friction force on the lubricant temperature and on the shear velocity of rubbing surfaces is investigated.

PACS numbers: 05.70.Ce, 05.70.Ln, 47.15.gm, 62.20.Qp, **64.60.**–i, 68.35.Af, **68.60.**–p DOI: 10.3367/UFNr.0182.201210f.1081

Bibliography — 123 references

Received 16 August 2011, revised 31 May 2012