Побудова оптимального по кількості приладів розкладу виконання робіт з різними директивними строками.

Шпеник Т.Б.
Кафедра комп’ютерних систем та мереж УжНУ, inga211204@mail.ru

The article deals with the problem in which into the service system consisting of parallel identical devices $M=\{1,...,m\}$ comes a finite set of operations $N=\{1,2,...,n\}$. Each work $i\in N$ comes at the point in the time $d_i \ge 0$ and needs $t_i > 0$ time units for its servicing. The time (prescriptive period) $D_i \ge t_i + d_i$ is known till when the job $i\in N$ should be performed. Interruption in the course of work is prohibited. An algorithm is proposed, in which at every step the construction of the desired solution is performed by sequential narrowing of the set of options. As algorithm is proposed, in which at every step the construction of the desired solution is performed by sequential narrowing of the set of options. As a result a $\pi^* = (\tilde{\pi}(1), \tilde{\pi}(2),..., \tilde{\pi}(M^*))$ permutation is formed that uniquely determines the optimal schedule of work performance on M^* devices.

ВСТУП

Пропонується алгоритм пошуку оптимального розв’язку для задачі теорії розкладів, яка належить класу NP-складних [1]. До даного класу належить більшість задач теорії розкладів і реалізація пошуку їх оптимального розв’язку вимагає великих витрат часу. Тому дослідження властивостей оптимальних розкладів і побудова на їх основі ефективних наближених алгоритмів [2], а також алгоритмів розв’язку окремих випадків задач [3], є актуальними в теорії розкладів.

ОСНОВНИЙ ТЕКСТ.

В систему обслуговування, яка складається з $M=\{1,...,m\}$ паралельних ідентичних приладів, надходить для виконання скінчений набір $N=\{1,2,...,n\}$ робіт. Кожна робота $i\in N$ поступає в момент часу $d_i \ge 0$ і для свого виконання потребує $t_i > 0$ одиниць часу. Відомий момент часу (директивний строк), $D_i \ge t_i + d_i$, до якого необхідно закінчити виконання роботи $i\in N$. Переривання в процесі обслуговування робіт заборонені. Необхідно побудувати оптимальний по кількості приладів розклад виконання робіт.

Нехай розклад для приладу з номером k ($k=1,...,M$) містить роботи з порядковими номерами $i_{k1},...,i_{kp_k}$ ($1\le p_k \le n$). При цьому часовий інтервал довжиною t_σ виконання кожної роботи σ вкладений у відповідний директивний інтервал $(d_\sigma, D_\sigma]$ для цієї роботи ($\sigma \in \{i_{k1},...,i_{kp_k}\}$) і робота з номером $i_{k\sigma}$ виконується раніше роботи з номером $i_{k\sigma+1}$ $(\sigma=1,...,p_k-1)$. Вважається, що часткова перестановка $\pi(k)=(i_{k1},...,i_{kp_k})$ однозначно задає розклад $P(\pi(k))$ виконання робіт k-вим приладом. Нехай

$$\begin{aligned} \bar{t}_{i_{k1}} &= d_{i_{k1}} + t_{i_{k1}}, \\ \bar{t}_{i_{k\sigma}} &= \max(\bar{t}_{i_{k\sigma-1}}, d_{i_{k\sigma}}) + t_{i_{k\sigma}}, \sigma = 2,..., p_k, \end{aligned} \qquad (1)$$

де $\bar{t}_{i_{k\sigma}}$ з (1) – час завершення виконання роботи з номером $i_{k\sigma}$ в розкладі для приладу з номером k. Тоді повна перестановка $\pi=(\pi_1,...,\pi_n)$ однозначно задає розклад виконання робіт на М приладах. Тут

$$\begin{aligned} &i_{11}=\pi_1, i_{12}=\pi_2,..., i_{1p_1}=\pi_{p_1}, \\ &i_{21}=\pi_{p_1+1}, i_{22}=\pi_{p_1+2},..., i_{2p_2}=\pi_{p_1+p_2}, \qquad (2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &i_{M1}=\pi_{\sum_{\sigma=1}^{M-1} p_\sigma+1}, i_{M2}=\pi_{\sum_{\sigma=1}^{M-1} p_\sigma+2},..., i_{Mp_M}=\pi_n, \end{aligned}$$

а p_k ($k = 1,...,M-1$) вибирається з умови максимізації кількості робіт, що виконуються k-вим приладом.

Означення 1. Нехай (a,b) і (c,d) – задані інтервали. Інтервал (a,b) вкладено в інтервал (c,d), якщо $c \le a \le b \le d$ і суттєво вкладено в (c,d), якщо $c < a \le b < d$.

Означення 2. Допустимим перестановочним розкладом (розв'язком) будемо називати розклад, для якого кожна i-ва робота має один інтервал виконання довжиною t_i одним з приладів, вкладений в директивний інтервал $(d_\sigma, D_\sigma]$ для цієї роботи, тобто розклад, побудований згідно (1) і (2).

Означення 3. Часткову перестановку $\pi(\overline{p}) = (i_1,...,i_{\overline{p}_k})$ ($\overline{p}_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$), елементи якої – порядкові номери робіт, які виконуються приладами $1,...,k_\pi$ у відповідності з (1) і (2), будемо називати частковим розв'язком. І якщо частковий розв'язок може бути добудований до допустимого розв'язку $\pi = (i_1,...,i_{\overline{p}_k}, i_{\overline{p}_k+1},...,i_n)$, то будемо називати його допустимим частковим розв'язком.

Нехай $\Omega(\pi)$ – множина, елементами якої є допустимі розв'язки задачі. Позначимо через W^k сукупність допустимих часткових перестановок (розв'язків) $\pi(\overline{p}_j)$ ($j = 1,2,...$), в яких для виконання робіт задіяні k приладів ($k_{\pi(\overline{p}_j)} = k$). Через $\theta_k \subset N$ позначимо таку множину, що $\theta_k = N \setminus \pi(\overline{p})$, де $\pi(\overline{p}) \in W^k$.

Для $\pi(\overline{p}) \in W^k$ визначимо величину

$$\Delta(\pi(\overline{p})) = (k_{\pi(\overline{p})} - 1) \cdot D_{\max} + \bar{t}_{\overline{p}} - \sum_{j=1}^{\overline{p}} t_{i_j} \,, \quad (3)$$

де $D_{\max} = \max_{i \in N} D_i$, k – кількість приладів у розкладі $P(\pi(k_j))$.

Означення 4. Якщо для двох допустимих часткових розв'язків $\pi'(\overline{p}') = (i_1',...,i_{\overline{p}'}')$ та $\pi''(\overline{p}'') = (i_1'',...,i_{\overline{p}''}'')$, таких, що $\pi'(\overline{p}') \in W^k$ та $\pi''(\overline{p}'') \in W^k$, мають місце співвідношення

$$\theta_{k_{\pi'(\overline{p}')}} \subseteq \theta_{k_{\pi''(\overline{p}'')}} \,, \quad (4)$$

$$\Delta(\pi'(\overline{p}')) < \Delta(\pi''(\overline{p}'')) \,, \quad (5)$$

то $\pi'(\overline{p}')$ домінує $\pi''(\overline{p}'')$.

Щоб завдати алгоритм розв'язку задачі, необхідно вказати правило вибору часткових розв'язків $\pi(\overline{p}_j)$, які підлягають розвитку на кожному кроці. Вирішуючи дану проблему будемо посилатися на наступну теорему.

Теорема. Нехай допустимий частковий розв'язок $\pi'(\overline{p}')$ домінує допустимий частковий розв'язок $\pi''(\overline{p}'')$ і нехай $\Omega(\pi''(\overline{p}''))$ – множина допустимих розв'язків таких, що в кожному з них перші $\overline{p}''$ елементів утворюють часткову допустиму перестановку $\pi''(\overline{p}'')$. Тоді, якщо $\Omega(\pi''(\overline{p}''))$ містить оптимальні розв'язки, то і $\Omega(\pi'(\overline{p}'))$ містить оптимальні розв'язки.

ВИСНОВКИ

Запропоновано алгоритм, в якому на кожному етапі виконання звужується область пошуку оптимального варіанту. Цей процес продовжується до тих пір, поки не буде отримано множину, яка складається з одного елементу. Цей елемент і є однією з шуканих оптимальних перестановок $\pi^* = (\tilde{\pi}(1), \tilde{\pi}(2),...,\tilde{\pi}(M^*))$, яка однозначно визначає оптимальний розклад виконання робіт на M^* приладах.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. – М.:МГУ, 2011. – 222с.

[2] Кузюрин Н.Н., Фомин С.А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. – М.:МФТИ, 2007. – 326с.

[3] JJoseph Y.-T. Leung (Ed.) Handbook of Scheduling. Algorithms, Models and Performance Analysis. Boca Raton, FL, USA: Chapman&Hall/CRC, 2004. – 1216c.