МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ У ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНОЇ БАЛКИ

Брижик Д. С., студент; Жигилій Д. О., ст. викладач

Метод скінчених різниць є універсальним наближеним методом, що дозволяє з достатньою для практики точністю вирішувати широке коло завдань.

Сутність методу полягає в тому, що криву безперервної зміни аргументу, наприклад w=w(z), замінюють скінченою (дискретною) множиною точок (вузлів) і замість функції неперервного аргументу розглядають функції дискретного аргументу, визначені в вузлах і звані вузловими функціями. Похідні, що входять в диференціальні рівняння, замінюють (апроксимують) відповідними різницевими співвідношеннями, тобто лінійною комбінацією значень функцій у вузлах. При цьому диференціальні рівняння замінюються системою алгебраїчних рівнянь (різницевих рівнянь), а початкові і крайові умови - різницевими початковими та крайовими умовами для вузлової функції.

В роботі розглянуті одновимірна задача опору балки, ліворуч шарнірно опертої, а праворуч жорстко затисненої, що знаходиться під дією розподіленого навантаження.

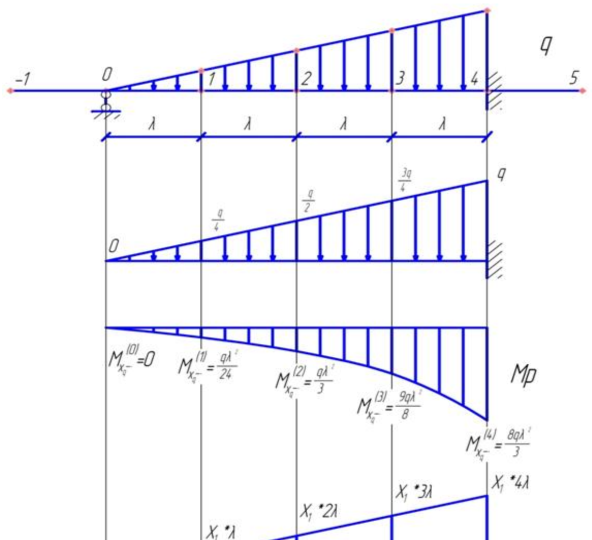

Рисунок - Розрахункова модель

Для розв'язання цієї статично невизначеної задачі скористаємося диференціальним рівнянням пружньої лінії $\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}$. Невідомими є w_1, w_2, w_3 і реакція лівої опори X_1.

Вирази для першої і другої похідних в точці за методом скінчених різниць:

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_i \approx \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\omega_{i+1}-\omega_{i-1}}{\lambda},$$

$$\left.\frac{d^2w}{dz^2}\right|_i \approx \frac{\Delta^2 w}{(\Delta z)^2} = \frac{(w_{i+1}-w_i)-(w_i-w_{i-1})}{\lambda^2} = \frac{w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}}{\lambda^2}.$$

Граничні умови такі: $w_0 = w_4 = 0$, $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_4} = \frac{w_5-w_3}{2\lambda} = 0$.

Згинальні моменти приведені на рис. Метод скінчених різниць для диференціального рівняння пружньої лінії в точках 1, 2, 3 та 4 запишеться:

$$w_1''(z) = \frac{w_0-2w_1+w_2}{\lambda^2} = \left(M_{x_q}^{(1)} + X*\lambda\right)*\frac{1}{EI_x}$$

$$w_2''(z) = \frac{w_1-2w_2+w_3}{\lambda^2} = \left(M_{x_q}^{(2)} + X*2\lambda\right)*\frac{1}{EI_x}$$

$$w_3''(z) = \frac{w_2-2w_3+w_4}{\lambda^2} = \left(M_{x_q}^{(3)} + X*3\lambda\right)*\frac{1}{EI_x}$$

$$w_4''(z) = \frac{w_3-2w_4+w_5}{\lambda^2} = \left(M_{x_q}^{(4)} + X*4\lambda\right)*\frac{1}{EI_x}$$

$$X_1 = \frac{\frac{1}{3}M_{x_q}^{(1)}+\frac{4}{3}M_{x_q}^{(2)}+M_{x_q}^{(3)}+\frac{1}{2}M_{x_q}^{(4)}}{-8\lambda}.$$

Звідси

Аналогічно можна розв’язати задачу на підставі ріняння, утвореного підстановкою в диференціальне рівняння пружньої лінії $\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}$ диференційного рівняння $q = \frac{d^2M_x}{dz^2}$. Отримавши $\frac{d^4w}{dz^4} = -\frac{q}{EI_x}$ додамо попередні граничні умови і аналогічно записані вирази для вищих похідних в точці i:

$$\left.\frac{d^3w}{dz^3}\right|_i \approx \frac{\Delta\left[\frac{d^2w}{(\Delta z)^2}\right]}{\Delta z} = \frac{w_{i+2}-2(w_{i+1}-w_{i-1})-w_{i-2}}{2\lambda^3}$$ та

$$\left.\frac{d^4w}{dz^4}\right|_i \approx \frac{\Delta^2(\Delta^2 w)}{(\Delta z)^4} = \frac{\Delta^2(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1})}{\lambda^4} = \frac{w_{i+2}-4w_{i+1}+6w_i-4w_{i-1}+w_{i-2}}{\lambda^4}$$

З наведених результатів видно, що розбіжність в порівнянні з точним розв'язанням незначне. При вирішенні більш складних завдань треба вибирати більш дрібний крок, що приведе до більшої розмірності системи рівнянь.

Сучасні технології у промисловому виробництві : матеріали науково-технічної конференції викладачів, співробітників, аспірантів і студентів фак-ту технічних систем та енергоефективних технологій, м. Суми, 23-26 квітня 2013 р.: у 2-х ч. / Ред.кол.: О.Г. Гусак, В.Г. Євтухов. - Суми : СумДУ, 2013. - Ч.1. - С. 176-177.