ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТРИЖНЯ МЕТОДОМ РЕЛЕЯ-РІТЦА

Заїкіна М. Л., студентка; Жигилій Д. О., ст. викладач

Зазвичай задачі на стійкість при повздовжньому стисканні стержнів вирішуються інтегруванням диференційних рівнянь, а також за допомогою засобів, на основі аналогій диференційних рівнянь. Якщо точне інтегрування диференційних рівнянь ускладнене, можна інтегрувати їх з наближенням. Визначимо функцію (інтеграл рівняння), яка буде задовольняти граничним умовам і мінімізувати потенційну енергію, скориставшись методом Релея-Рітца.

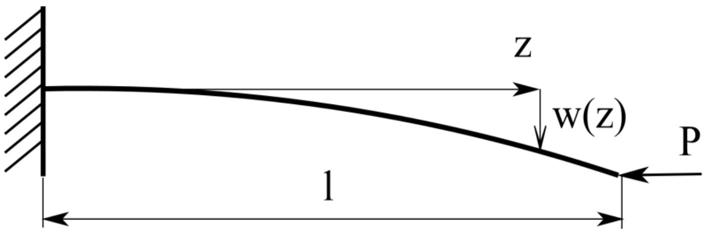

Рисунок - Розрахункова модель

Візьмемо поліном другого порядку:

$\omega = Az^2 + Bz + C$.

З граничних умов (при $x = 0$ прогин $\omega = 0$; при $x = 0$ похідна $\omega' = 0$; при $x = l$ прогин $\omega = \delta$) маємо $C = B = 0$; $A = \frac{\Delta}{l^2}$. Тому

$$\omega = \frac{\Delta}{l^2} z^2$$

Складемо вираз для потенційної енергії:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (\omega'')^2 dz = \frac{2EJ\Delta^2}{l^3}$$

Потенціал сили:

$$W = -P_{KP}^{\lambda}$$

де $\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l (\omega')^2 dz$,

або $\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{2\Delta x}{l^2}\right)^2 dz = \frac{2\Delta^2}{3l}$,

тоді $\Pi = \frac{2EJ\Delta^2}{l^3} - \frac{2P_{KP}\Delta^2}{3l}$.

Умови стаціонарності потенційної енергії такі:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} = \frac{4EJ\Delta}{l^3} - \frac{2P_{KP}\Delta}{3l} = 0$$

Взявши за початковий поліном, поліном третього ступеню

$$\omega = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$$

Граничні умови такі: при $x = 0$ прогин $\omega = 0, \omega' = 0$; при $x = l$ прогин $\omega = \Delta, \omega'' = 0$. Звідси

$$D = C = 0; B = \frac{3\Delta}{2l^2}; A = -\frac{\Delta}{2l^3}$$

тоді $\omega = \frac{\Delta}{2l^3}(2lz^2 - z^3)$

Аналогічно, отримаємо

$$U = \frac{3EJ\Delta^2}{2l^3};\ \lambda = \frac{3\Delta^2}{5l};\ P_{KP} = \frac{5EJ}{2l^2}$$

Що тільки на 1,3% вище точного рішення.

Якщо ω виражається як сума квадратної та кубічної парабол:

$$\omega = \frac{\Delta_1 z^2}{l^2} + \frac{\Delta_2}{2l^3}(3lz^2 - z^3)$$

де Δ_1 і Δ_2 – невідомі параметри.

Аналогічно отримаємо

$$u = \frac{EJ}{2l^3}(4\Delta_1^2 + 6\Delta_1\Delta_2 + 3\Delta_2^2)$$

$$\lambda = \frac{1}{60l}(40\Delta_1^2 + 75\Delta_1\Delta_2 + 36\Delta_2^2)$$

Мінімізуючи отримаємо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = \frac{EJ}{l^3}(4\Delta_1 - 3\Delta_2) - \frac{P}{12l}(16\Delta_1 - 15\Delta_2) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} = \frac{3EJ}{l^3}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{P}{20l}(25\Delta_1 - 24\Delta_2) = 0$$

Визначничник системи (визначник критичного стану) дорівнює нулю. Звідси

$$3P^2 - 104\left(\frac{EJ}{l^2}\right)P + 240\left(\frac{EJ}{l^2}\right)^2 = 0$$

$$P_{KP} = 2.486\frac{EJ}{l^2}.$$

Це лише на 0,8% вище точного.

Сучасні технології у промисловому виробництві : матеріали науково-технічної конференції викладачів, співробітників, аспірантів і студентів фак-ту технічних систем та енергоефективних технологій, м. Суми, 23-26 квітня 2013 р.: у 2-х ч. / Ред.кол.: О.Г. Гусак, В.Г. Євтухов. - Суми : СумДУ, 2013. - Ч.1. - С. 178-179.